0 GRUNDLAGEN DER LOGIK

ÜBERSICHT

0-1 Logik-Modelle

Hier werden Logik-*Modelle* vorgestellt, d. h. verschiedene Theorien, was Logik ist, wie sie begründet werden kann usw. Ich sehe die Logik in erster Linie als *Wissenschaft von der formalen Welt*, wobei logische Gesetze als *ewige Wahrheiten* verstanden werden können, wenn auch nicht müssen.

0-2 Komponenten

Das sind zuvorderst *Objekte* und *funktionale Relationen* zwischen diesen Objekten.
Objekte sind abstrakt bzw. formal, im genaueren sind es *Individuen*, *Mengen* und *Klassen*, jeweils mit den dazu gehörigen *Eigenschaften* bzw. *Begriffen*.
Logische Relationen sind *funktional*, sie abstrahieren von Raum, Zeit, Kausalität usw. Zu den logische Relationen zählen z. B: „wenn – dann“ / „und“ / „oder“.

0-3 Extension und Intension

Die Extension betrifft *Objekte* (Individuen und Klassen) bzw. *Sachverhalte*. Die Intension betrifft *Eigenschaften* bzw. *Begriffe*, z. B. Allgemein-Begriffe und Individual-Begriffe, außerdem Relationen zwischen Begriffen („Begriffsverhalte“).

0-4 Kopula

Die basale logische Relation ist die *Kopula*, das „ist“, z. B. in: „x ist ein F“. Sie verbirgt sich hinter verschiedenen logischen Relationen wie *Element-Relation*, *Teilmengen-Relation*, *Implikation* u. a.

0-5 Synthetisch und analytisch

Synthetische Relationen beziehen sich auf die reale, *empirische* Welt, ihre Gültigkeit hängt ab von ihren Komponenten. *Analytische* Relationen sind gültig oder ungültig allein auf Grund ihrer logischen Struktur.

Im Punkt „Grundlagen der Logik“ erfolgt eine Darstellung und Klärung logischer Grundbegriffe und Grundaussagen. Allerdings ist es unvermeidbar, hier schon Begriffe und Formalisierungen zu verwenden, die erst in den späteren Kapiteln genauer erläutet werden. Leser, die bereits logische Vorkenntnisse haben, erst recht Logik-Experten, werden dabei keine Schwierigkeiten haben. Andere Leser werden beim *ersten* Lesen nicht alles verstehen, müssen das Kapitel „Grundlagen“ ggf. später noch einmal neu lesen. Diese Einführung ist in manchen Punkten recht knapp gehalten, bestimmte Themen, z. B. *sprachlogischer* bzw. *sprachphilosophischer* Art, werden in meinem in Arbeit befindlichen Buch „*Integrale Philosophie*“ (Arbeitstitel) sehr viel ausführlicher behandelt.

Der Leser, der direkt zur *Logik im engeren Sinne* vordringen möchte, kann dieses Kapitel auch diagonal lesen oder notfalls überspringen; allerdings werden hier bereits wesentliche *Modifikationen* der normalen Logik eingeführt, auf die später zurückgegriffen wird.

0 – 1 LOGIK - MODELLE

0-1-1 Gegenstandsbereiche

0-1-1-1 DREI ANSÄTZE
In der herkömmlichen Logik gibt es vor allem *drei* Ansätze, den Gegenstandsbereich der Logik zu bestimmen:

- *Psyche*
  In der *traditionellen Logik* wurden *psychische* Entitäten, wie *Begriffe* oder *Urteile* bzw. *Gedanken*, als Gegenstand der Logik angesehen, wie auch die Kennzeichnung „Lehre vom folgerichtigen Denken" zeigt. Der Terminus ‚Begriff' kann allerdings auch auf sprachliche oder reale Entitäten angewandt werden.
- *Sprache*
  In der *modernen Logik* gelten primär *sprachliche* Entitäten wie *Prädikate* oder *Sätze* bzw. *Aussagen* als Gegenstände der Logik. Man kann hier von einer sprachlichen bzw. *linguistischen Orientierung* der Logik sprechen.
- *Realität*
  In der *mathematischen* Logik und vor allem in verwandten Disziplinen wie *Mengenlehre* oder *Statistik* bezieht man sich primär auf *reale* Entitäten wie *Ereignisse*, *Sachverhalte* oder *Mengen*. Diese realen Entitäten können allerdings abstrakt sein.

0-1-1-2 VOR- UND NACHTEILE
Alle drei Ansätze haben ihre Vor- und Nachteile:
• *Psyche:* Psychisches wie Gedanken sind uns (in unserem Bewusstsein) *primär* gegeben, Sätze oder Sachverhalte sind nur indirekt gegeben. Aber Psychisches ist schwer zu präzisieren, außerdem besteht die Gefahr des *Psychologismus*, d. h. dass man logische Gesetze mit *psychologischen Denkgesetzen* verwechselt. Logisch wahr wäre dann das, was die meisten Menschen denken bzw. für logisch korrekt halten; doch wir wissen aus Untersuchungen, dass die Menschen in ihrem Denken viele logische Fehler begehen.
• *Sprache:* Ein Satz ist präziser zu fassen und zu beschreiben als ein Gedanke. Allerdings besteht hier folgende Unklarheit: Zum einen bezieht man sich auf (Aussage-) *Sätze* als *syntaktische* Gebilde, zum anderen bezieht man sich – *semantisch* – auf *Aussagen* (oder *Propositionen*), die man als *Bedeutungen* von Sätzen auffassen könnte; Bedeutungen sind aber ebenfalls schwer zu fassen, andererseits werden sie in erster Linie wieder als reale oder auch psychische Entitäten interpretiert, so dass hier kein eigenständiger Bereich gegeben ist. Generell gilt: Sprachliche Zeichen stehen nicht für sich selbst, sondern sie *bezeichnen* oder benennen etwas. Nur in Bezug auf dieses Bezeichnete lassen sie sich letztlich verstehen.

Außerdem gibt es die Ungereimtheit, dass man sich auf der *oberen* Ebene – sprachlich – auf Sätze/Aussagen bezieht, auf der *unteren* Ebene – real – doch auf Individuen bzw. Klassen. So formuliert man z. B. in der Prädikaten-Logik: $a \in F$ (das Individuum a ist Element der Klasse F), hier ist also eindeutig von *realen* Entitäten die Rede. Der durchgängige Bezug auf Wörter bzw. Zeichen wäre eben sehr kompliziert, falls man von rein syntaktischen Analysen absieht. Wenn man wirklich konsequent einen *sprachlichen* bzw. *linguistischen* Ansatz durchziehen wollte, also ausschließlich über sprachliche Entitäten sprechen wollte, dann müsste man jeden Satz bzw. jedes Wort – *meta-sprachlich* – in *Anführungszeichen* schreiben, was aber doch nicht getan wird.

• *Realität*: So spricht vieles dafür, die *reale* Ebene als fundamental anzusetzen. Denn erstens erhalten sprachliche Zeichen wie auch psychische Repräsentationen ihre Bedeutung normalerweise nur durch den Bezug auf die Realität. Zweitens hat Logik es mit *Wahrheit*, Richtigkeit, Gültigkeit u. ä. zu tun. Um aber (sprachlich) einen Satz oder (psychisch) einen Gedanken als wahr bzw. falsch zu kennzeichnen, gibt man an, ob er mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Auf einen extremen *Konstruktivismus* oder Idealismus, der Wahrheit nur noch im Subjekt selbst gegeben sieht, braucht hier nicht eingegangen zu werden. Allerdings gibt es auch bei der realistischen Theorie Probleme, z. B. „negative Sachverhalte", also „nicht bestehende Sachverhalte". Außerdem werden wir noch sehen, dass dieser Bezug auf die Wirklichkeit bei *analytischen* Aussagen nur noch indirekt gegeben ist.

Letztlich bietet sich eine Deutung der Logik an, die zwar realistisch orientiert ist, aber auf eine abstrakte, formale Welt Bezug nimmt; das wird in der *Integralen Logik* verwirklicht.

0-1-1-3 LOGIK ALS THEORIE DER FORMALEN WELT

Die *Integral-Logik* geht davon aus, dass die Logik unabhängig von den obigen Interpretationen ist. Für die *Philosophie* ist es von Bedeutung, ob man von *Sätzen*, *Sachverhalten* oder *Urteilen* ausgeht, für die *Logik* ist es letztlich irrelevant. Man kann sie auf alle drei Bereiche beziehen. Sinnvoller ist aber, sie unabhängig von diesen Bereichen zu definieren. So gehe ich vorrangig – ontologisch *neutral* – von *Relationen* oder Strukturen aus, anstatt von Sachverhalten, Sätzen oder Urteilen.

Die Logik betrifft die Welt der *abstrakten Formen*: In ihr spielen Materie, Zeit, Raum, Energie aber auch Bewusstsein usw. keine Rolle, sondern nur *funktionale Abhängigkeiten* oder *korrelative Beziehungen*. Die Gesetze der Logik gelten in jeder anderen Welt, also der psychischen, der sprachlichen und der materiellen Welt. Bzw. kann man die Gesetze der Logik auf jede andere Welt anwenden.

Wenn sich die Integrale Logik auch auf abstrakte Entitäten bezieht, so steht sie doch der realistischen Interpretation am nächsten, weil sich dies gerade im Bereich von Objekten anbietet. Insofern baue ich die Logik auch von den *Objekten* her auf und nicht, wie sonst häufig, von den sprachlichen Zeichen, also z. B. Eigennamen und Prädikatoren.

Wenn man also die Logik realistisch deuten kann, so ist doch folgendes zu bedenken: Es geht in der Logik nie um konkrete Dinge, Klassen von konkreten Dingen oder Relationen zwischen konkreten Dingen, sondern nur um die *Form.* Anders gesagt, es geht um eine abstrakte Welt, mit abstrakten Dingen usw.

Zuweilen bietet es sich aber an, bei der Darstellung bestimmter logischer Probleme doch auf eine konkrete, z. B. sprachliche Spezifizierung, etwas *Aussagesätze*, Bezug zu nehmen. Und bei *Beispielen* muss man ohnehin aus der abstrakten Welt zur konkreten Welt hinabsteigen.

Außerdem, trivialerweise muss sich eine (schriftliche) Arbeit über Logik notwendig der sprachlichen Zeichen bedienen. Das wird noch genauer erläutert werden.

0-1-1-4 ABGRENZUNG DER LOGIK VON DER MATHEMATIK

Diese Abgrenzung ist kompliziert und kann hier nicht im Einzelnen dargestellt werden. Üblicherweise sieht man die Logik als die *fundamentalere* Theorie an, aus der sich die Mathematik abzuleiten lässt. Andererseits kann man sagen, dass die herkömmliche Logik *qualitativ* strukturiert ist, die Mathematik dagegen *quantitativ*. Die Logik liefert die Basis, die Mathematik die speziellere Ausformung. Die Integrative Logik bemüht sich – durch Quantifizierung logischer Strukturen – um eine *Verbindung von Logik und Mathematik*. Das betrifft vor allem *Wahrscheinlichkeitstheorie* und *Statistik*.

0-1-1-5 TERMINOLOGIE
Wegen der ontologischen Unabhängigkeit der *Integral-Logik* wird prinzipiell auch eine Sprache bevorzugt, die nicht festgelegt ist auf eine bestimmte Interpretation. Da aber ein Großteil der Begrifflichkeit der modernen Logik sich auf Sprache, insbesondere *Aussagen* bezieht, werde ich teilweise diese Terminologie übernehmen. Z. B. verwende ich auch weitgehend den Begriff der ‚*Wahrheitswerte-Tafel'* oder kurz ‚Wahrheits-Tafel', der sich auf Aussagen bezieht. Dieser Terminus ist eingeführt, und es bedeutet keine Tugend, unnötig viele neue Termini einzuführen. Korrekter wäre in meinem Ansatz allerdings der Terminus ‚*Gültigkeits-Tafel'*, da ich den zu engen Begriff der *Wahrheit* (weitgehend) durch den Begriff der *Gültigkeit* oder *Belegung* ersetze. Andererseits bevorzuge ich im Bereiche der Objekte eine realistische Sprache, da die anderen Ansätze sehr kompliziert sind.

0-1-2 Inhalt der Logik

Der Begriff ‚Logik' stammt von griechisch ‚*logos*', das bedeutet Wort, Rede, übertragen Vernunft, Gedanke, Sinn, auch Weltgesetz. Man kann die Logik daher – *kommunikationstheoretisch* – als Lehre von der (vernünftigen) *Argumentation* oder vom (rationalen) Diskurs bestimmen. Ich ziehe aber eine *deskriptive* Definition vor und verstehe als Inhalt der Logik primär die gesamte *formale Welt*, vorrangig allerdings die *analytischen Relationen*. Der Inhalt der Logik lässt sich dabei enger oder weiter definieren. Nachfolgend werden die wichtigsten Definitionen aufgeführt. Die beziehen sich primär auf die *philosophische Logik*, die *mathematische Logik* wird oft in spezieller, mehr technischer Weise definiert.

0-1-2-1 FORMALE WELT
Dies ist die *weiteste* Definition der Logik. Sie entspricht in etwa der Auffassung der *traditionellen* Logik, wenn dort auch von Begriffen, Urteilen usw. gesprochen wird. Aus Sicht einer realistisch-formalen Logik gehören dazu vor allem:

- *Objekte*: Individuen, Mengen bzw. Klassen von Individuen
- *Eigenschaften*, Begriffe
- *funktionale Relationen*: analytische, synthetische
- *Systeme*, als komplexe Gebilde

0-1-2-2 FUNKTIONALE RELATIONEN
Hier werden nur funktionale Relationen zur Logik gezählt, *funktionale Abhängigkeiten*, d. h.:

• *synthetische* Relationen,
sie können empirisch wahr sein oder falsch, z. B.

Implikation	$\rightarrow$	$X \rightarrow Y$	wenn X, dann Y
Äquivalenz	$\leftrightarrow$	$X \leftrightarrow Y$	wenn X, dann und nur dann Y

• *analytische* Relationen
sie sind immer wahr (oder immer falsch), z. B.

analytische Implikation	$\Rightarrow$	$X \Rightarrow X$	wenn X, dann X
analytische Äquivalenz	$\Leftrightarrow$	$X \Leftrightarrow X$	wenn X, dann und nur dann X

Z. B. die analytische Implikation X $\Rightarrow$ X: „Wenn X gültig ist, dann ist es sicher, dass X gültig ist“; um das zu beweisen, braucht man *keine empirischen* Untersuchungen zu machen, sondern nur den Sachverhalt zu analysieren (analytisch). Ob aber es gilt: „Wenn X gültig ist, ist auch Y gültig“, dass muss *empirisch* untersucht werden (synthetisch).

Dieselbe Unterscheidung kann man auch für die *Mathematik* machen, obwohl das hier meist versäumt wird:

- synthetische Relation
  = (Gleichheit, gleich groß): X = Y, X ist gleich groß wie Y
- analytische Relation
  $\equiv$ (analytische Gleichheit): X $\equiv$ X, X ist gleich groß wie X

0-1-2-3 ANALYTISCHE RELATIONEN

Bei dieser Bestimmung der Logik werden die synthetischen Relationen ausgegliedert. Nur die *analytischen* gelten als logisch.

Dies betrifft nicht nur die bisher angeführten Relationen, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ und $\Leftarrow$,
sondern auch andere, z. B.:

$\vee$ (*Disjunktion*): X $\vee$ $\neg$X, sprachlich X oder nicht X
(ich schreibe das genauer X $^{+}\vee^{+}$ X, aber dies wird später erklärt)
>< (*Kontravalenz*): X $^{+}$><$^{+}$ $\neg$X, sprachlich *entweder* X oder nicht X

Hier kann man auch *partiell analytische* Relationen miteinbeziehen, z. B.: X $\longrightarrow$ X $\wedge$ Y. Üblicherweise werden in der Logik – abgegrenzt von den *synthetischen* Relationen – nur vollständig *analytische* Relationen unterschieden. Ich werde aber zeigen, dass man sinnvoll *partiell analytische* Relationen einführen kann: sie entsprechen quantitativ *induktiven* bzw. *induktiv-statistischen* Relationen.

0-1-2-4 STRENG ANALYTISCHE RELATIONEN

Bei diesem Logik-Modell werden partiell analytische Relationen ausgegliedert, nur die *streng analytischen* gelten als logisch.

Bei den streng analytischen kann man genauer unterscheiden:

- *Tautologien*: sie sind grundsätzlich wahr
  z. B. X $\vee$ $\neg$X: *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*
- *Kontradiktionen*: sie sind grundsätzlich falsch
  z. B. X $\wedge$ $\neg$X: *Satz vom Widerspruch*

0-1-2-5 LOGISCHE FOLGERUNGEN

Eine weitere letzte Einengung ist, dass als Logik nur analytische *Folgerungs-Beziehungen* gelten. Das ist zuvorderst die *analytische Implikation* $\Rightarrow$, der *logische Schluss*, aber auch die analytische Äquivalenz $\Leftrightarrow$ und die analytische Replikation $\Leftarrow$.

Auch hier ist wieder zwischen Tautologie und Kontradiktion zu unterscheiden:

- *Tautologien*
  z. B. X $\Leftrightarrow$ X (X ist äquivalent mit X)
- *Kontradiktionen*
  z. B. X $\not\Leftrightarrow$ $\neg$X (X ist nicht äquivalent mit nicht X)

Ich wähle die *weiteste* Definition (wie in 0-1-2-1), der *Kernbereich* der Logik sind allerdings *analytische Relationen*, und zuvorderst logische Folgerungen bzw. *logische Schlüsse*.

0-1-3 Objektbereich / Metabereich

0-1-3-1 OBJEKT-SPRACHE / META-SPRACHE
Will man die Logik bestimmen, so kann man fragen:
1) *objekt-sprachlich*: Was ist Logik? (Real-Definition).
2) *meta-sprachlich*: Was ist die Bedeutung des Begriffs ‚Logik'? (Nominal-Definition)
Für den normalen Gebrauch ist aber der Unterschied zwischen diesen beiden Aspekten vernachlässigbar, dagegen spielt er in der *Sprachphilosophie* und *Ontologie* eine gewichtige Rolle. Denn damit verbunden ist das Problem, ob es so etwas wie ein Wesen der Dinge und damit auch ein *Wesen* der Logik gibt.

0-1-3-2 LOGIK ALS OBJEKTBEREICH
Man bezeichnet als Logik zum einen die Objekte, Klassen, Begriffe und Relationen selbst – je nach Weite der Definition. Logik ist dann gewissermaßen die Gesamtheit der formalen Welt. Eben die *logische Welt*. Diese Redeweise ist weit verbreitet, vor allem, wenn man mit Logik nur die logischen Relationen oder Strukturen meint.

Man spricht auch von „Logik der Gefühle, „Logik der Liebe" usw., obwohl dies eigentlich gar nichts mit Logik zu tun hat. Man meint hier einfach die *Regeln*, nach denen z. B. die Liebe „funktioniert"; diese Regeln sind aber zuvorderst empirische, etwa psychologische Gesetzmäßigkeiten, keine logischen.

Auch wenn man die weiteste Definition der Logik wählt (vgl. 0-1-2), ist es nicht trivial, was genau zu dieser logischen Welt gehört. Offensichtlich muss man die *kontradiktorischen* Relationen hinzuzählen, es wäre absurd, sie aus der Logik zu verbannen. Dies ist anders als bei der Bestimmung der realen Welt, wo es wenig Sinn hat, auch „negative Tatsachen" zur Welt hinzuzählen. Andererseits ist es befremdlich, dass widersprüchliche, somit „unmögliche" Relationen in der logischen Welt vorkommen sollen.

Aber auch die nicht widersprüchlichen Relationen werfen Probleme auf: gehört zur formalen Welt *jede* mögliche Relation bzw. jede mögliche Kombination? $X \rightarrow Y$ gehört sicherlich zur Logik. Dann wohl auch $X \rightarrow Y_1 \wedge Y_2$, dann auch $X \rightarrow Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3$. Gibt es hier ein Ende? Gehört auch $X \rightarrow Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3 \wedge ...$ mit *unendlich* vielen Gliedern zur Logik-Welt?

0-1-3-3 LOGIK ALS ERZEUGUNGSSYSTEM
Man kann das Problem der Gesamtheit aller logischen Kombination umgehen, wenn man Logik quasi nicht als die *Menge* aller Produkte darstellt, sondern als das *System*, welches diese Produkte *hervorbringt*.

Die gleiche Problematik kennt man aus der Sprachwissenschaft: Gehören zu einer Sprache alle korrekt gebildeten Sätze oder sogar Texte? Oder ist alternativer Ansatz besser? Eine Sprache beinhaltet demnach bestimmte *Elemente* und *Regeln*, wie diese Elemente korrekt – zu Sätzen, Texten usw. – verknüpft und interpretiert werden können, also eine *Grammatik* einschließlich Vokabular.

Ähnlich kann man in der Logik vorgehen: Man bestimmt die Logik dann nicht als die Gesamtheit logischer Verknüpfungen (statisch). Sondern die Logik wird – konstruktiv – definiert durch *Elemente* und *Verknüpfungsregeln* – zum Verhältnis von Logik und Sprache komme ich noch. Man könnte dann unterscheiden zwischen erstens Logik und zweitens logischer (oder formaler, idealer) Welt, als Klasse oder System aller logischen Entitäten, nämlich Elementen wie Verknüpfungen. Mit dieser *konstruktivistischen* Sicht ist aber bereits ein Übergang vollzogen zur Bestimmung der *Logik als Lehre*.

0-1-3-4 LOGIK ALS THEORIE ODER LEHRE

Der obigen Bestimmung der Logik als *Objektbereich* steht eine andere Definition gegenüber: Logik ist dann die *Lehre*, die *Theorie* oder die *Wissenschaft* von der abstrakten Welt, von den analytischen Relationen oder vom folgerichtigen Denken (je nach Definition). So gehört die Logik als Disziplin zur *Philosophie* – als *mathematische Logik* wird sie der Mathematik zugeordnet. Man kann diese Lehre auch *normativ* auffassen bzw. als *Handlungsanweisung*: sie lehrt uns, wie wir *korrekt* logisch folgern oder wie wir denken *sollen*.

0-1-3-5 ÜBEREINSTIMMUNG VON OBJEKT-ASPEKT UND META-ASPEKT

Man könnte den Bezug auf die Logik als *Menge bzw. System formaler Relationen* als *Objekt-Aspekt* bezeichnen, dagegen den Bezug auf die Logik als *Theorie* als *Meta-Aspekt* (verwandt der Unterscheidung zwischen Objekt- und Meta-Sprache). M. E. sind sowohl der Objekt- wie der Meta-Sprachgebrauch akzeptabel. Ähnlich spricht man z. B. auch von ‚Biologie': meint damit einmal *das Leben selbst*, einmal die *Wissenschaft vom Leben*.

Ich vertrete aber darüber hinaus die Auffassung, dass bei der Logik Objekt-Bereich und Meta-Bereich quasi zusammenfallen.

$X \vee Y$ kann man z. B. als *Relation* ansehen oder als Bezeichnung bzw. *Beschreibung der Relation*. Daher halte ich hier eine strenge Unterscheidung von Objekt- und Meta-Sprache in der Praxis normalerweise für unnötig. Nur wenn man die meta-sprachliche Verwendung herausstellen möchte, sollte man im Beispiel ‚$X \vee Y$' schreiben.

Dies ist anders als bei einer *empirischen Wissenschaft*. Bei einer empirischen Wissenschaft ist man gut beraten, den Objekt-Bereich nicht mit dem Meta-Bereich zu identifizieren, auch wenn man denselben Begriff verwenden mag.

Genauer kann man das beim *Gesetz* unterscheiden. Ein Gesetz kann zweierlei bedeuten:

1. *Gesetzmäßigkeit*
   die dem Objekt inhärente Weise des Funktionierens
2. *Gesetzesaussage*
   die sprachlich formulierte Theorie über das Funktionieren

Z. B. gibt es offensichtlich eine Gesetzmäßigkeit des Alterns. Aber wir kennen sie bis heute nicht genau, es gibt verschieden Theorien, die das Altern beschreiben und erklären, aber keine erfasst vollständig und fehlerfrei die Gesetzmäßigkeit.

Es ist wichtig, diese beiden Bereiche auseinander zu halten. Nur ein platter *Naturalismus* („unsere Sätze spiegeln die Wirklichkeit eins zu eins") oder ein platter *Konstruktivismus* („es gibt nur die Gesetze, die wir selbst konstruieren, die Wirklichkeit selbst ist unstrukturiert") nivelliert diesen Unterschied. Denn es ist offensichtlich, dass unsere Gesetze nie absolut die realen Gesetzmäßigkeiten erfassen, sondern immer nur annäherungsweise.

Dagegen kann man bei der Logik annehmen, dass diese beiden Bereiche zusammenfallen, auch wenn sie sprachlich auseinander zu halten sind.

Angenommen, man betrachtet die Relation $X \rightarrow Y$. Wenn die Beschreibung dieser Relation ‚$X \rightarrow Y$' ist, so ist die Übereinstimmung zwischen Relation und Beschreibung offensichtlich.

Zwar könnte man auch andere Beschreibungen, logische Umformungen mit gleichem Wahrheitswert verwenden; so ist z. B. die Relation $X \rightarrow Y$ *logisch äquivalent* mit $\neg X \vee Y$ oder mit $\neg(X \wedge \neg Y)$. Theoretisch könnte man zwar behaupten: $X \rightarrow Y$ ist die *reale* Relation und ‚$X \rightarrow Y$', ‚$\neg X \vee Y$' oder ‚$\neg(X \wedge \neg Y)$' sind verschiedene Beschreibungen von $X \rightarrow Y$, die in unterschiedlichem Ausmaß zutreffen. Aber das ist wenig überzeugend, wenn sich auch Bedeutungs-Unterschiede zwischen den verschiedenen Ausdrücken angeben lassen, wozu ich später noch komme.

0-1-4 Gültigkeit

Die *Begründung* bzw. Gültigkeit der Logik ist sehr umstritten. Zunächst kann man fragen, was überhaupt ‚Begründung' bedeuten soll. Beschränkt man sich der Einfachheit halber auf logischen *Aussagen* bzw. (Relationen), so kann man fordern: Logische Aussagen müssen *wahr* sein. Es kann hier nicht die Problematik von *Wahrheitstheorien* bzw. der Definition des Wahrheitsbegriffes verfolgt werden. ‚Wahrheit' heißt in allgemeinster Weise: *Übereinstimmung*. Übereinstimmung mit der empirischen Realität, mit der geistigen, formalen Realität, mit unserem Denken oder einfach bestimmten Regeln. Mit welchem Bereich die Logik übereinstimmen soll und wie das erkannt werden kann, darüber gibt es viele verschiedene Theorien.

Man kann vor allem folgende Positionen unterscheiden: *Konventionalismus*, *Empirismus*, *Linguismus*, *Kognitivismus* und *Idealismus*.

0-1-4-1 KONVENTION

Dies ist die heute am meisten vertretene Auffassung: Es werden *Axiome* und *Ableitungsregeln* festgesetzt, ggf. noch semantische Regeln. Diese *Festsetzungen* sind zwar begründet, aber letztlich nur *pragmatisch*, dass sie sich als *nützlich* erweisen. Es geht nicht um absolute Wahrheiten. Was dann abgeleitet wird aus den Axiomen, hat *innerhalb* dieses Systems absolute Gültigkeit, aber eben nur relativ zu den Axiomen. Die Axiome und die Regeln selbst sind Setzungen, wir *konstruieren* sie aus unserem Denken. Diese Position, die man weiter differenzieren könnte, nennt sich *Konventionalismus*, *Konstruktivismus* oder *Pragmatismus*.

Für diese Theorie mag sprechen, dass es unterschiedliche Logiken oder Logikkalküle gibt. Aber man kann dennoch eine *Basis-Logik* postulieren, auf die alle anderen Logiken Bezug nehmen müssen, und es ist kaum begründbar, dass diese letztlich willkürlich sein soll. In dieser Basis-Logik muss z. B. der *Satz vom ausgeschlossen Widerspruch* gelten. Bestimmte Logik-Systeme wie die *Fuzzy-Logik* oder auch die sogenannte *Quanten-Logik* hebeln dieses Grundgesetz nicht aus, obwohl dies oft fälschlich behauptet wird.

0-1-4-2 EMPIRIE

Nur noch selten wird heute behauptet, dass die Logik aus der *Empirie* abgeleitet ist. Diese Position nennt sich *Empirismus* oder *Realismus*. Man könnte z. B. argumentieren: Wir nehmen wahr, beobachten, dass etwas nicht gleichzeitig blau und nicht blau sein kann, also z. B. blau und rot. Aus solchen Erkenntnissen könnte man dann ein allgemeines logisches Gesetz ableiten: Etwas kann nicht zugleich eine Eigenschaft und die entgegengesetzte Eigenschaft besitzen. Logische Gesetze wären dann im Grunde *Real-Gesetze*.

Es ist richtig, dass wir die logischen Gesetze in der empirischen Wirklichkeit vorfinden, aber d. h. heißt nicht, dass sie von daher begründet wären. Ein Beweis aus der Beobachtung bliebe ja immer *induktiv*, wir könnten aus *endlich* vielen Beobachtungen kein unbegrenztes Gesetz ableiten, das für *unendlich* viele, für alle Fälle, sichere Erkenntnis garantiert. Dieses Problem stellt sich auch in den *empirischen Wissenschaften*, aber da ist es akzeptabel; doch *logische* Gesetze sind eben auch gerade dadurch unterschieden von *empirischen* Gesetzen, dass sie vollständig gesicherte Gültigkeit beanspruchen.

0-1-4-3 SPRACHE

Das Argument lautet: Logische Strukturen sind letztlich *Sprachstrukturen*, *logische* Gesetze sind somit letztlich *grammatische* Gesetze. Man könnte diese Position *Linguismus* nennen. Ein Vorteil dieser Position ist, dass uns Sprachstrukturen gut zugänglich, gut erkennbar sind.

In der Tat ist die Logik eng mit der Sprache verwandt, schon deshalb, weil wir logische Aussagen, wie andere Aussagen, in Sprache ausdrücken müssen. Aber es gibt offensichtlich sehr unterschiedlich strukturierte Sprachen, und in allen kann man logische Aussagen machen.

Zwar gibt es auch *Sprach-Universalien*, aber es dürfte kaum gelingen, alle logischen Strukturen als solche Universalien darzustellen. Auch die Annahme einer einheitlichen logischen *Tiefenstruktur*, die der unterschiedlichen *Oberflächenstruktur* zugrunde liegt, hilf nicht weiter. Es ist kaum vorstellbar, dass die Sprache eine bestimmte Logik erzwingt.

Außerdem hat man eigene *logische Sprachen* entwickelt. Die lassen sich zwar partiell auf natürliche Sprachen übertragen, aber eben nur partiell. Z. B. ist die sprachliche *Subjekt-Prädikat*-Struktur (bzw. Subjekt-Prädikat-Objekt-Struktur) doch strukturell verschieden von der formal-logischen *Argument-Prädikat-Struktur*, wie noch gezeigt werden soll.

Aber entscheidend ist: Die Berufung auf die Sprache könnte letztlich nur dazu dienen zu erklären, wie Logik *entstanden* ist, aber kann sie keinesfalls in ihrer Gültigkeit begründen. Denn man geriete dann in einen Regress, man müsste ja *weiter* begründen, warum sprachliche Strukturen gültig sind, was auch immer das bei der Sprache bedeuten soll – in erster Linie könnte es ja nur um eine Übereinstimung mit der empirischen Realität gehen.

Man kann jedenfalls mühelos einen *grammatisch korrekten* Satz formulieren, der dennoch *logisch falsch* ist, z. B.: ‚Wenn alle Menschen Säugetiere sind, dann sind auch alle Säugetiere Menschen'. Allein dies zeigt schon, dass man Logik und Sprache nicht identifizieren darf.

0-1-4-4 DENKEN

Dies ist die nach dem Konventionalismus heute verbreitetste Auffassung, die auch schon eine lange philosophiegeschichtliche Tradition besitzt: Logische Strukturen sind *kognitive* Strukturen, sind *Denkstrukturen*. Und zwar geht man dabei normalerweise davon aus, es sind *angeborene* Denkstrukturen, denn sonst müsste man letztlich auf einen Empirismus zurückgreifen. Diese Position kann man *Kognitivismus*, *Rationalismus* oder *Mentalismus* nennen.

Die Argumentation ist hier stringenter als bei der Sprache. Es mag zwar auch verschiedene Denkstile geben, aber letztlich nur *ein* Denken. D. h. wir können nur soweit logisch denken, wie unsere Denkstrukturen das zulassen. Und es ist wahr, wir können die logischen Gesetze nur erkennen, wenn unser Denken das erlaubt.

Aber ähnlich wie bei der Sprache ist das Problem: Wir können so die *Herkunft* der Logik erklären, aber lässt sie sich so *begründen*? Es ist doch erwiesen, dass viele Menschen in vielen Situationen *unlogisch denken*. Die logischen Strukturen können also keine reinen Abbildungen der Denkstrukturen sein. Es hilft auch kaum weiter, hier statistisch vorzugehen und zu sagen, die Mehrheit hat Recht, so wie die Mehrheit denkt, das ist logisch. Aus diesen Gründen ist ja der *Psychologismus*, die *psychologische Begründung* der Logik, immer wieder abgelehnt worden.

Interessant ist hier: Kaum ein Mensch, der nicht logisch geschult ist, wird *bewusst* und explizit logische Gesetze angeben können. Offensichtlich verfügt der Mensch also *unbewusst* über einige logische Regeln, da er doch in Grenzen, ohne Schulung, zu logischem Denken befähigt ist. Dieses Phänomen, dass wir unbewusst „klüger" sind als bewusst, tritt allerdings nicht nur bei der Logik auf: Z. B. können alle (gesunden) Menschen halbwegs fehlerfrei ihre Muttersprache sprechen, aber kaum einer kennt die relevanten grammatischen Regeln, von komplizierten linguistischen Konstruktionen gar nicht zu sprechen.

Bezieht man allerdings die *evolutionäre Erkenntnistheorie* mit ein, können sich die Argumente für eine kognitivistische Logikbegründung verstärken. Man kann argumentieren: Unser – logisches – Denken hat sich im Zuge der *Evolution* herausgebildet und optimiert; wenn es nicht korrekt wäre, hätten wir als Art nicht überlebt. Nehmen wir als simples Beispiel: „Alle (bekannten) Löwen sind gefährlich, dies ist ein Löwe, also ist er gefährlich". Wenn es dem

Menschen nicht gelungen wäre, solche realistischen logischen Strukturen zu entwickeln und entsprechend zu handeln bzw. zu reagieren, dann hätte er keine Chance gehabt, zu überleben. Pointiert könnte die These lauten: Man begründet die Logik durch den Selektionsvorteil, je mehr ein Denken die Überlebenschance erhöht, desto logischer ist es.

Diese Argumentation ist nicht ganz von der Hand zu weisen, aber sie hat auch ihre Mängel. Denn es zeigt sich doch, dass die Menschheit und einzelne Menschen überleben, *obwohl* sie vielfach unlogisch denken. Oder sogar *weil*? U. U. ist logisches Denken in gewissen Situationen gerade für das Überleben hinderlich, weil es das Handeln lähmen kann, wenn man zu genau die Möglichkeiten des Handelns und deren wahrscheinliche Konsequenzen abschätzt.

0-1-4-5 ABSOLUTE IDEEN

So komme ich zu dem Ergebnis, dass die *beste Erklärung* ist: Logische Strukturen sind Strukturen einer *formalen Welt*, die *unabhängig vom Menschen* existiert, unabhängig von seinem Denken und Sprechen, von seinen Wahrnehmungen und erst recht Festsetzungen. Logische Basis-Gesetze sind „*Ideen*“, *ewige Wahrheiten;* das gilt nicht für jeden spezialisierten Logikkalkül. Ich vertrete die – zunächst vielleicht altmodisch anmutende – Auffassung, dass die Logik am besten als ein System *idealer Entitäten* verstanden werden kann. Diese Position kann man als *Platonismus* oder *Idealismus* bezeichnen. Die Logik wird hier so *begründet*, dass sie die Struktur einer idealen, formalen Welt ist bzw. als Lehre diese Welt beschreibt.

Wie ist es dem Menschen möglich, die logischen „Ideen“ zu erkennen? Weil er das kognitive Potential dazu hat. Das ist die einfachste Erklärung, allerdings keine völlig ausreichende.

Man könnte auf die klassischen Erklärungen verweisen wie *Erinnerung* an eine frühere geistige Existenz, höheres Erkennen usw. Dies ist aber aus heutiger Sicht sehr spekulativ. Da ein empirischer oder sprachlicher Zugang kaum in Frage kommt, muss man auf die Kognition verweisen: die *angeborene* Befähigung zum logischen Denken bzw. angeborene logische Ideen. Auch wenn der Mensch die Fähigkeit zum korrekten logischen Denken besitzt, bedeutet das ja noch nicht, dass er zwangsläufig *immer* logisch denkt. Von daher genügt es auch nicht zu sagen: Logische Gesetze sind *evident*, also unmittelbar einsichtig und unbestreitbar; denn es mag auch möglich sein, sich über Evidenz zu irren – außerdem besitzen unterschiedliche Strukturen der Logik sicher unterschiedliche Evidenz; z. B. ist die Definition der logischen *Implikation* sicher keinesfalls evident, wie noch sehr genau diskutiert werden wird.

Eine wirklich überzeugende Theorie, wie die Logik zu begründen ist und wie wir die Logik erkennen können, steht noch aus. Sie wird vermutlich folgende Faktoren umfassen müssen: angeborene Denkstrukturen, evolutionärer Erfolg, eventuell auch Kriterien der Ästhetik; vielleicht müssen auch *alle* oben genannten Begründungsfaktoren integriert werden.

0-1-5 Sprache

0-1-5-1 RELEVANZ DER SPRACHE

Eine Sprache ist ein *Zeichensystem*, mit dem wir Dinge *bezeichnen* bzw. *Aussagen* über sie machen können. Somit kann man bei einer Sprache prinzipiell unterscheiden:

- die *Form* (Syntax) der Zeichen, z. B. Ketten von Buchstaben oder Lautfolgen
- die *Bedeutung* der Zeichen, vor allem die bezeichneten Dinge bzw. Aussagen

Dabei beruht die *Zuordnung* von Zeichen zu Gegenständen normalerweise auf Festsetzungen bzw. Regeln, ist also nicht natürlich gegeben.

Die Syntax wird von der *Syntaktik* oder Grammatik beschrieben, die Bedeutung von der *Semantik*, wobei eine strikte Trennung von Form und Bedeutung allerdings nicht gegeben ist.

Eine *normale* oder *natürliche* Sprache, wie z. B. Deutsch, besitzt aber zusätzlich eine *pragmatische* Dimension: Denn sie hat nicht nur eine *Darstellungs*-Funktion, sondern kommunikative Funktionen wie *Appell*-, *Ausdrucks*- und *Diskussions*-Funktion, sie erlaubt Fragen und Befehle, alles eingebettet in einen Prozess der *Kommunikation* oder *Interaktion*. Man kann mit ihr Handlungen vollziehen (*Sprechhandlung*), seine Gefühle ausdrücken, andere Menschen beeinflussen u. v. m. Für Beispiele aus der normalen Sprache verwende ich hier fast ausschließlich die *deutsche* Sprache. Bei Englisch oder Französisch würden sich sehr ähnliche Resultate ergeben; natürlich gibt es auch normale Sprachen, die ganz anders strukturiert sind, aber in den *sprachlichen Universalien* stimmen sie dennoch alle überein – und es geht hier ja nicht um eine Arbeit über Sprachphilosophie oder Sprachvergleiche.

Man spricht auch von *logischer Sprache* oder *logischer Grammatik*. Dabei wird die logische Sprache als *künstliche*, *formale* Sprache bestimmt. Es ist wahr, dass eine solche formale Sprache der Logik entspricht. Denn die Logik ist in erster Linie *formale Logik*. Die Logik *abstrahiert* von *konkreten Bedeutungen*, sie verwendet *Variablen* wie ‚X' und ‚Y'. Sie stellt z. B. ein *Gesetz* auf wie: $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Hier ist es gleichgültig, was man für die Variablen ‚X' und ‚Y' einsetzt, das Gesetz gilt unabhängig davon. Dennoch darf man nicht verwechseln: Die Logik im eigentlichen Sinn *ist keine Sprache*, sie *bedient* sich nur einer Sprache: Man kann z. B. *logische Gesetze* auch in der *Alltagssprache* ausdrücken, wenn man Variablen der Alltagssprache wie ‚irgendein' verwendet, z. B.:

$X \Rightarrow \neg\neg X$. Übersetzt in normale Sprache: „Wenn irgendeine beliebige Aussage wahr ist, dann ist es nicht wahr, dass ihre Negation wahr ist".

Oder: $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$: „Wenn *alle* Dinge eine bestimmte Eigenschaft haben, dann haben auch (mindestens) *einige* Dinge diese Eigenschaft".

Anders sieht es aus bei einer *konkreten* Aussage in Normalsprache unter Verwendung von *Konstanten*, z. B.: „Wenn es regnet, dann ist es nicht wahr, dass es nicht regnet". Diese Aussage ist zwar logisch wahr, aber sie *kein logisches Gesetz*.

Generell sind die logischen Sprachen zwar *exakter*, aber viel *beschränkter* als normale, natürliche Sprachen. Vor allem umfassen die natürlichen Sprachen *alle* Bereiche der Realität, während sich die logische Sprache im eigentlichen Sinn nur auf *funktionale Abhängigkeiten* bezieht (wie: *wenn* X, *dann* Y). Zwar kann man eine formale Sprache konstruieren, in der z. B. auch *Ort* und *Zeit* vorkommen, aber das ist keine im strengen Sinne logische Sprache mehr. Nicht jede formale Sprache ist eine logische Sprache.

0-1-5-2 ALPHABET

Wir kennen in der natürlichen Sprache ein *Alphabet*, das über viele *Wortklassen* verfügt, z. B. Substantive, Adjektive, Verben u. a. Auch eine logische Sprache hat ein Alphabet. Es ist je nach Logik unterschiedlich, aber viel ärmer. Z. B. enthält es *Individuen-Zeichen* (wie ‚a' oder ‚x') und *Klassen-Zeichen* (wie ‚F`) sowie *logische Zeichen* (wie ‚$\rightarrow$' oder ‚$\wedge$').

Diese Zeichen unterscheiden sich von denen in normaler Sprache, und zwar sind sie primär dafür verantwortlich, dass man die Logik „*formal*" nennt. Mit der Kennzeichnung „formal" meint man nämlich mehrere verschiedene Eigenschaften – auch wenn das normalerweise nicht reflektiert wird.

• *Abkürzungen*

Anstatt (aus Buchstaben bzw. Lauten zusammengesetzte) *Wörter* in der Normalsprache, verwendet man in der Logik-Sprache überwiegend einzelne *Buchstaben*: statt ‚Sokrates' mag z. B. kurz ‚a' stehen. Statt ‚entweder - oder' steht kurz das *graphische Symbol* ‚><'. Die Abkürzungen bewirken, dass ein Satz viel *kürzer* und übersichtlicher ist als in der Normal-Sprache.

• *Variablen*

Es werden überwiegend *Variablen* verwendet, z. B.: ‚x' steht für *irgendein* individuelles Objekt, denn die speziellen Bedeutungen sind wie gesagt für die Logik irrelevant.

• *Nur funktionale Konstanten*
Konstanten sind in der Logik letztlich nur die eigentlichen *logischen Zeichen* wie $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ usw. Nur sie haben eine *feststehende*, *unveränderliche* Bedeutung.
• *Unbekannte*
Außer Variablen und Konstanten werden *Unbekannte* verwendet. Nehmen wir z. B. den Schluss: „alle F sind G, a ist ein F, a ist also ein G". ‚a' sowie ‚F' und ‚G' werden zwar üblicherweise als *Konstanten* bezeichnet, sie sollen z. B. entsprechen: a = Sokrates, F = Mensch, G = sterblich. Der Schluss lautet dann: „alle Menschen sind sterblich, Sokrates ist ein Mensch, also ist Sokrates sterblich".

Aber offensichtlich hat ‚a' nicht den gleichen Status wie ‚Sokrates', ‚a' steht zwar für ein *bestimmtes* Individuum bzw. individuelles Objekt, welches aber zunächst *nicht bekannt* ist. Den Satz ‚Sokrates ist ein Mensch' verstehen wir unmittelbar und können seine Wahrheit feststellen. Dagegen ‚Fa' sagt uns erst einmal gar nichts, zunächst müssen ‚a' und ‚F' Bedeutungen zugewiesen werden. ‚a' und ‚F' sind somit *keine echten Konstanten*, eher könnte man sie als *Variablen* einordnen, weil z. B. ‚a' einmal für Sokrates stehen mag, einmal für Platon oder auch für ein völlig anderes individuelles Objekt. Dennoch besteht ein Unterschied zwischen ‚a' als Zeichen für ein *bestimmtes* Individuum und ‚x' als Zeichen für ein *unbestimmtes*, beliebiges Individuum. ‚x' ist eine *echte Variable*, dagegen betrachtet man ‚a' (entsprechend ‚x_1', ‚x_2' usw.) am besten als *Unbekannte* (vgl. genauer in 0-2-4).

0-1-5-3 SYNTAX

Die Grammatik der *logischen Sprache* nennt man *logische Syntaktik*, sie gibt an, wie Zeichen miteinander verknüpft werden können. Die Anordnung oder Verknüpfung von Zeichen nennt man *Syntax*; allerdings wird der Begriff 'Syntax' ebenfalls für die *Lehre* von den Zeichen-Verknüpfungen verwendet. Man kann die logische Syntaktik partiell auch auf die *normale Sprache* anwenden. Der *Aufbau*, die Anordnung der Zeichen in der *Logik* ist z. T. unterschiedlich, aber auch ähnlich wie in der *normalen*, deutschen Sprache.

Die einfachste Satzstruktur im Deutschen – gemäß der herkömmlichen Grammatik – ist: *Subjekt – Prädikat.*

Eine ähnliche Struktur findet sich in der logischen Syntaktik: *Argument – Prädikat.*
Zwar gibt es auch alternative Grammatiken der normalen Sprache, wie die *generative Transformationsgrammatik*, die z. B. einen Satz in *Nominalphrase* und *Verbalphrase* zerlegt, aber das kann hier ausgeklammert werden.

Ich möchte nachfolgend nur einen *einfachen* Satz analysieren, erst einen *normal-sprachlichen* Satz, dann einen *formal-sprachlichen.*

Zunächst möchte ich aber eine wichtige Unterscheidung anführen, die sich primär auf *Sätze* bezieht:

– *Oberflächen-Struktur*: die rein *syntaktische* Zeichenfolge, die den Satz ausmacht
– *Tiefen-Struktur*: die *logisch-semantische* Struktur, die aber natürlich auch durch eine Zeichenfolge dargestellt werden muss

Dass man die logisch-semantische Struktur als ‚Tiefen-Struktur' bezeichnet, sie also für *zugrundeliegend* hält, zeigt, dass man sie als primär einschätzt.

Die Unterscheidung Oberflächen-Struktur / Tiefen-Struktur stammt aus der *generativen Transformationsgrammatik* (GTG), ich bestimme die Tiefen-Struktur aber in modifizierter Weise als *logische* Struktur.

1) <u>normal-sprachlicher Satz</u>

• *Oberflächen-Struktur*
Nehmen wir als Beispiel: ‚Sokrates ist ein Mensch'.

	Sokrates	ist	ein Mensch
Grammatik:	Subjekt	Prädikat	
Logische Syntax:	Argument	Prädikat	

Wie man sieht, entspricht sich hier die Analyse von *deutscher Grammatik* und *logischer Syntaktik* weitgehend. In der logischen Syntaktik gilt ‚ist ein Mensch' als *1-stelliges* Prädikat, das 1 Argument verlangt, also z. B. ‚Sokrates'. Im Gegensatz zu mehr-stelligen Prädikaten, etwa *2-stelligen* Prädikaten wie ‚ist-Lehrer-von', das 2 Argumente verlangt, z. B. Sokrates und Platon, so dass sich der Satz ergibt: ‚Sokrates ist Lehrer von Platon'; es gibt auch 3- und noch höher-stellige Prädikate.

‚... ist ein Mensch' (mit Leerstelle) wird dabei als 1-stelliger *Prädikator* bezeichnet. Prädikatoren sind *Wortklassen*, keine Satz-Kategorien. M. E. ist die obige Bezeichnung daher wenig konstruktiv, es ist sinnvoller, im Beispiel nur ‚Mensch' als Prädikator zu bezeichnen.

Aber auch die Einstufung von ‚ist ein Mensch' als 1-stelliges Prädikat finde ich nicht überzeugend. Nach meiner Auffassung darf man die Zeichensequenz ‚ist ein Mensch' in dem Satz ‚Sokrates ist ein Mensch' nur in der *Oberflächen-Struktur* als 1-stelliges Prädikat angeben, nicht in der logischen *Tiefen-Struktur*.

• *Logische Tiefen-Struktur*

Zur Bestimmung der *logischen* Tiefen-Struktur des Satzes bezieht man sich auf die *Prädikaten-Logik*. Man übersetzt den Satz – zunächst noch in *normaler* Sprache – in eine Form, die der prädikaten-logischen *Bedeutung* entspricht (vgl. unten). So ist der Satz tiefen-strukturell folgendermaßen zu analysieren, wobei ich zwischen einer *extensionalen* und einer *intensionalen* Betrachtung unterscheide:

– extensional (mit Bezug auf *Klassen*)

‚Sokrates ist ein Element von der Klasse der Menschen'.

Sokrates	ist Element von	Klasse der Menschen
Argument 1	Prädikat	Argument 2

Hier wird also tiefen-strukturell das *2-stellige* Prädikat ‚(X) ist-Element-von (Y)' verwendet, das der *Kopula* entspricht.

– intensional (mit Bezug auf *Eigenschaften*)

‚Sokrates kommt die Eigenschaft Mensch zu'.

Sokrates	kommt zu	die Eigenschaft Mensch
Argument 1	Prädikat	Argument 2

Es wird tiefen-strukturell das *2-stellige* Prädikat ‚(X) kommt (Y) zu' verwendet, das ebenfalls der Kopula ‚ist' entspricht (streng genommen wird dabei keine *rein* intensionale, sondern eine gemischt intensional-extensionale Darstellung verwendet, vgl. 0-3).

Hier zeigt sich, dass auf einer tieferen, logisch-semantischen Ebene *jeder* Satz mindestens ein *2-stelliges* Prädikat besitzt, denn ein Satz ist ein *Relationsgebilde*, und eine Relation bedeutet immer die Verbindung von mindestens *zwei* Relata (Relationsgliedern) durch eine Relation. Im Folgenden konzentriere ich mich auf die *extensionale* Version.

Nach der logischen Syntaktik bezeichnen 2-stellige Prädikatoren Klassen von *geordneten Paaren*. Somit wäre der Satz ‚Sokrates ist Element der Klasse der Menschen' etwa folgendermaßen zu formulieren:

‚Sokrates und die Klasse der Menschen bilden ein geordnetes Paar, das ein Element der Klasse der geordneten Paare ist, die durch den 2-stelligen Prädikator „... ist Element von ...“ bezeichnet werden’.

Allgemein geht man von *n-Tupeln* aus. Ein *n-stelliges* Prädikat bezeichnet ein n-Tupel, ein 2-stelliges Prädikat z. B. ein 2-Tupel oder *geordnetes Paar*.

Allerdings ist diese Formulierung ziemlich kompliziert und enthält ja wiederum den Ausdruck ‚ist-Element-von’, was eine weitere und noch kompliziertere Umformulierung erfordern würde; deshalb soll im Folgenden diese Interpretation mit den geordneten Paaren nicht angewandt werden.

• *Formal-logische Tiefen-Struktur*

Genauer kann man nicht nur *zwei* Ebenen eines Satzes unterscheiden, also Oberflächen-Struktur / Tiefen-Struktur, sondern unterschiedliche *Stufen* der Tiefen-Struktur. Vor allem kann man als *unterste* Stufe einen *formal-logischen* Satz angeben, z. B.:

Oberflächen-Struktur	Sokrates ist ein Mensch
↑	
Tiefen-Struktur	Sokrates ist Element (von) der Klasse der Menschen
↑	
formale Tiefen-Struktur	$x \in F$

Es ist allerdings zu hinterfragen, ob man einem *normal-sprachlichen* Satz eine *formal-logische* Tiefen-Struktur zuordnen soll, d. h. generell, ob einer *inhaltlichen* Struktur eine *formale* Struktur als Tiefen-Struktur zuzuordnen ist. Die *formale Logik* wäre dann prinzipiell die fundamentale Tiefen-Struktur der *natürlichen Sprache*.

2) <u>formal-sprachlicher Satz</u>

Nach der Analyse eines *normal*-sprachlichen Satzes wenden wir uns jetzt einem *formal*-sprachlichen Satz zu. Dafür formalisieren wir einfach den Satz ‚Sokrates ist (ein) Mensch’. Dabei sind vor allem 2 Formalisierungen bzw. entsprechend 2 formale Sätze zu unterscheiden: *extensional* ‚$a \in F$’ und *intensional* ‚Fa’. Ich konzentriere mich dabei auf ‚$a \in F$’.

• Oberflächen-Struktur

Oberflächen-strukturell entspricht die Formalisierung ‚$a \in F$’ fast exakt dem *normal*-sprachlichen Satz. Und so könnte man entsprechend analysieren: a ist (ein) F.

a	$\in$	F
Argument	Prädikat	

Ich halte allerdings eine solche oberflächen-strukturelle Analyse für inadäquat, da die Logik das ‚$\in$’ normalerweise nicht als Teil eines 1-stelligen Prädikats (‚$\in$ F’) versteht oder jedenfalls verstehen sollte, sondern ausschließlich als 2-stelliges Prädikat, im Sinne von: „ist-Element-von“, wie gleich vorgeführt.

Bei der intensionalen Formalisierung ‚Fa’ steht ‚a’ steht z. B. für Sokrates, ‚F’ steht für Mensch, das ‚ist ein’ (‚kommt zu’) wird allein durch die *Syntax (Stellung)* ausgedrückt. Von daher ist die Analyse in Argument / Prädikat schwierig und in diesem Rahmen verzichtbar. Hier besteht also ein erheblicher Unterschied zur Darstellung in der normalen Sprache.

• Tiefen-Struktur

In diesem Fall besteht das Problem, dass die Tiefen-Struktur von ‚$a \in F$' sich normalerweise nicht von der Oberflächen-Struktur unterscheidet, also auch ‚$a \in F$' lautet. Allerdings ist der Satz tiefen-strukturell *anders* zu verstehen und zu analysieren. Denn als (logische) *Bedeutung* von ‚$a \in F$' umschreibt man am besten: Individuum a ist Element der Klasse F. Die Tiefen-Struktur orientiert sich ja aber an der Bedeutungsstruktur, insofern ergibt sich folgende Zerlegung in Argument(e) und Prädikat:

a	$\in$	F
Argument_1	Prädikat	Argument_2

Wenn aber *Oberflächen-* und *Tiefen-Struktur* zusammenfallen, dann wird ihre Unterscheidung letztlich sinnlos. Und dann sollte man sich an die tiefen-strukturelle Analyse halten, die nämlich den Satz so zerlegt, wie es seiner logischen Bedeutung entspricht. Diese semantische Struktur ist letztlich die wesentliche, die syntaktische Struktur ist eben nur „oberflächlich".

Das *intensionale* ‚Fa' ist entsprechend zu verstehen als „a kommt die Eigenschaft F zu". Verbindet man extensionale und intensionale Form, könnte man formulieren: ‚a ist ein Element der Klasse aller Individuen, denen die Eigenschaft F zukommt'.

• Stufen von Tiefen-Strukturen

Oben wurde gezeigt, dass bei ‚$a \in F$' *Oberflächen-* und *Tiefen-Struktur* identisch sind. Man könnte fragen, ob diese Unterscheidung generell in der formalen Logik unnötig ist. In der Tat hat es i. allg. wenig Sinn, auf *einer* Ebene, z. B. der Prädikaten–Logik, Oberflächen- und Tiefen-Struktur zu unterscheiden (obwohl man eventuell ‚$a \in F$' als Tiefen-Struktur von ‚Fa' ansetzen könnte, was hier aber nicht diskutiert werden soll).

Aber zwischen *verschiedenen* Logik-Ebenen kann man durchaus mit dem Konzept der *Tiefen-Struktur(en)* arbeiten, in der Weise, dass *eine* logische Struktur die Tiefen-Struktur für eine *andere* darstellt. Wie im folgenden Beispiel (wobei wir etwas vorgreifen müssen, die verschiedenen Logik-Modelle werden erst in späteren Punkten im Einzelnen beschrieben):

Klassen-Logik	$F \subset G$
↑	
Quantoren-Logik	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
↑	
Prädikaten-Logik	$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Ähnlich wie man in der Physik normalerweise komplexe Körper durch ihre kleinsten Teilchen erklärt, so könnte man in der Logik Aussagen über *komplexe Gebilde* wie *Klassen* (F, G) zurückführen auf Aussagen über Individuen ($x_1, ... , x_n$) – und diese Individuen-Ebene wäre die *fundamentale Tiefen-Struktur*.

Ich gehe auf dieses sehr umfangreiche Gebiet der logischen Syntaktik aber nicht weiter ein, weil das für meinen Logik-Ansatz von untergeordneter Bedeutung ist.

0-1-5-4 SEMANTIK

Zwischen *Syntax* und *Semantik*, zwischen *Form* und *Bedeutung* bestehen vielerlei Beziehungen. Um nur *einen* Aspekt herauszugreifen: Je nachdem, welche *Zeichenklassen* es in der Syntax gibt, wird damit auch eine Aussage über die *Bedeutungen* und damit über die *Welt* getroffen.

Z. B. unterscheidet die normale Sprache syntaktisch (u. a.) zwischen den Wortarten *Substantiven*, *Adjektiven* und *Verben*. Mit diesen Wortarten werden aber verschiedene Bedeutungen verbunden, wie schon die Begriffe *Dingwörter*, *Eigenschaftswörter* und *Zeit- oder Bewegungswörter* besagen. Damit wird ausgedrückt, dass es diese Phänomene, Dinge, Eigenschaften, Bewegungen gibt und dass sie zu unterscheiden sind. Die übliche logische Sprache vereinigt diese drei Wortarten jedoch als *Prädikatoren*, unterscheidet sie somit nicht. Damit ist natürlich eine wichtige Aussage über die Welt gemacht, etwa, dass es keinen wesentlichen Unterschied zwischen „Dingen" und „Eigenschaften" gibt. Ich komme auf dieses Thema unten noch einmal zurück.

Man könnte vermuten, die *Semantik* sei in der Logik weniger ausgeprägt, denn die – formale – Logik *abstrahiert* ja gerade von der konkreten Bedeutung der deskriptiven Ausdrücke. Diese Vermutung wäre aber ein Irrtum, denn die Logik ist *primär semantisch*, nicht syntaktisch orientiert. Allerdings geht es der Logik nicht um die *konkrete* Bedeutung von Wörtern oder Sätzen, sondern um *abstrakte* Bedeutungen.

Einerseits verwendet die Logik eine extensionale Semantik nahe der *Mengen-Theorie*, indem sie von (formalen) Mengen, Klassen, Individuen bzw. Elementen, Relationen wie der Element-Relation usw. ausgeht. Die Bedeutung eines Satzes wird hier als mengen-relationale Relation zwischen Objekten dargestellt (auf die Semantik von Eigenschaften wird später eingegangen).

Am wichtigsten ist aber für die logische Bedeutung von Sätzen der Bezug auf *Wahrheit* bzw. *Wahrheitswerte*. Da die Logik eben *formal* ist, muss ich nicht die konkrete Bedeutung des Satzes kennen, um seine Wahrheit zu bestimmen. Denn wichtig ist für die Logik nicht, ob ein konkreter Satz *empirisch* wahr oder falsch ist, sondern unter welchen Bedingungen er wahr oder falsch ist. Anders gesagt, unter Bezug auf welche anderen Sätze er wahr oder falsch ist; dabei sind diese anderen Sätze primär die *Teil-Sätze des Gesamt-Satzes*.

Z. B. „wenn X, dann Y": $X \rightarrow Y$. Um zu wissen, ob dieser Satz wahr ist, muss ich nicht die Bedeutung von X und Y kennen. Ich muss nur wissen, ob die Einzelsätze ‚X' und ‚Y' wahr sind, und außerdem die Definition von $\rightarrow$ kennen. Es kann auch schon reichen, nur den Wahrheitswert *eines* Satzes zu kennen. Wenn ich z. B. weiß, dass ‚Y' wahr ist, weiß ich bereits, dass ‚$X \rightarrow Y$' wahr ist. Aber auch wenn ich z. B. weiß, dass ‚X' falsch ist, weiß ich bereits, dass ‚$X \rightarrow Y$' wahr ist. Die alles bewegt sich in einem *hypothetischen* Raum: w*enn* – dann.

Man spricht hier von einer w*ahrheitswert-funktionalen Semantik,* weil die Wahrheit eines *Gesamt*-Satzes ($X \rightarrow Y$) eine *Funktion* der Wahrheit(swerte) seiner *Teil*-Sätze (X, Y) ist.

Oben habe ich einen *synthetischen* Satz wie $X \rightarrow Y$ dargestellt. Bei einem *analytischen* Satz wie $X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist die Wahrheit des Gesamt-Satzes sogar unabhängig von der Wahrheit der Teil-Sätze, $X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist nämlich immer wahr, es ist eine Tautologie.

Diese Aussagen gelten für die *reine* Logik. Für die *angewandte* Logik sind die Verhältnisse etwas anders. Angenommen ich will folgenden Schluss ziehen: „Alle Philosophen sind weise, Sokrates ist Philosoph, also ist Sokrates weise". Der Gesamt-Satz ist ohne Zweifel wahr, denn er ist tautologisch. Um aber zu wissen, ob die Schlussfolgerung „Sokrates ist weise" empirisch wahr ist, muss ich auch wissen, ob die Vordersätze, die Prämissen wahr sind; es sei denn, ich untersuche *direkt*, ob Sokrates weise ist, was natürlich einfacher wäre.

Die wahrheitswert-funktionale Semantik beruht auf der Definition der logischen Zeichen bzw. Junktoren. Diese haben eine konkrete, konstante Bedeutung, die sich aber allein durch *Wahrheitswerte* angeben lässt, konkret durch die *Wahrheitstafeln*. Ich werde allerdings später zeigen, dass dieser Ansatz nicht ausreicht; denn zwei Sätze, welche *dieselbe Wahrheitstafel* besitzen, können sich in ihrer Bedeutung durchaus unterscheiden.

Allerdings vermittelt die Logik auch darüber hinaus gewisse semantische *Informationen* Man vergleiche die beiden folgenden Sätze:

‚Sokrates ist ein Mensch' (Substantiv-Satz)
‚Sokrates ist weise' (Adjektiv-Satz)

In der normalen Sprache sind diesen beiden Sätze durchaus unterschieden. ‚Mensch' ist ein *Substantiv*, das Wort ‚weise' ist dagegen ein *Adjektiv*. Auch wenn das nicht ganz klar abgegrenzt werden kann, versteht man es in der Grammatik doch so, dass ein Substantiv eine komplexere, wichtigere Bestimmung bedeutet als ein Adjektiv. In der *traditionellen* Logik verstand man entsprechend z. B. „Mensch" als *Artbegriff*, der ein Individuum wesentlich und vollständig kennzeichnet (und ein Artbegriff konnte nur durch ein Substantiv repräsentiert werden). Eigenschaften konnten dagegen auch zufällig sein (*Akkzidentien*), ihnen entsprachen die weniger wichtigen Adjektive.

In der *formalen* Logik ist der (syntaktische) Unterschied zwischen Substantiven, Adjektiven und Verben wie beschrieben dagegen aufgehoben; alle werden durch *Prädikatoren* ersetzt. So würden beide obigen Sätze z. B. durch ‚$a \in F$' dargestellt. Dies hat natürlich durchaus eine *semantische* und auch *ontologische* Relevanz: das Weltbild der formalen Logik macht eben keinen Unterschied zwischen ganz verschiedenen Bestimmungen, z. B. zwischen sogenannten *Artbestimmungen* (wie Mensch) und *Eigenschaftsbestimmungen* (wie weise). Dieses Vorgehen der formalen Logik führt zwar zur Vereinfachung, aber es werden dadurch auch durchaus berechtigte Unterscheidungen nivelliert.

0-1-5-5 FORMALISIERUNG

Die *Übersetzung* eines Satzes der *normalen Sprache* in einen Satz der *formalen logischen Sprache* nennt man *Formalisierung*. Hier ist zu unterscheiden:

- der Satz ist in der Alltagssprache auch schon *abstrakt* formuliert
- der Satz ist *konkret* formuliert, mit Konstanten, das ist der häufigere Fall.

Durch die Formalisierung wird keine Bedeutungsgleichheit erreicht (wie wenn man einen Satz von einer normalen Sprache in eine andere übersetzt), sondern nur die *logische Struktur* des Satzes dargestellt. Man macht das, um eben diese Struktur und damit die Wahrheitsbedingungen herauszufinden.

Nehmen wir als Beispiel den folgenden Satz der normalen Sprache: ‚Sokrates ist Philosoph'. Natürlich ist dieser Satz nicht ohne Bedeutungsverlust in die logische Sprache übersetzbar, denn es gibt in der logischen Sprache keine Wörter wie ‚Sokrates' usw. Zwar wird oft so getan, als sei eine Übersetzung möglich, man wählt dann die Individuen-Konstante ‚a' und die Eigenschafts-Konstante (bzw. Prädikat-Konstante) ‚F' und schreibt z. B. ‚$a \in F$'.

Aber ‚$a \in F$' könnte natürlich auch für ‚Platon ist Grieche' stehen. Wenn man wirklich eine direkte Übersetzung vornehmen will, muss man sich eindeutige Termini erst definieren, z. B.: x_{So} =df Sokrates, F_{Ph} =df Philosoph. „x" und „F" sind hier Variablen, die aber durch die *Indizes* zu echten Konstanten werden, sie haben dann eine feste Bedeutung. Dann mag ‚$x_{So} \in F_{Ph}$' als direkte Übersetzung dienen. Doch es ist wie gesagt gar nicht der Sinn der Logik, direkte Übersetzungen vorzunehmen.

Eine andere Prozedur ist die *De-Formalisierung*, also die *Rückwandlung* einer *formalen* Aussage in eine *normal-sprachliche*, was allerdings selten zum Thema gemacht wird. Es gibt nämlich einen Unterschied im Schreiben und Lesen: Einen formalen Satz wie ‚$X \rightarrow Y$' sprechen wir auch formal: ‚X impliziert Y'.

Anders ein Satz wie: ‚$\Lambda x(x \in F \rightarrow x \notin G)$'. Den würde man normalerweise nicht lesen: ‚Allquantor, klein x, Klammer auf, Element-Zeichen, F, Implikator, durchgestrichenes Element-Zeichen, G, Klammer zu'. Sondern man liest ihn mehr oder weniger in der *normalen Sprache* (d. h. man *de-formalisiert* ihn). Z. B.: ‚Für alle x gilt: wenn x Element der Klasse F ist, dann ist x nicht Element der Klasse G'.

Anders gesagt: Die formale, logische Sprache ist primär eine *geschriebene* Sprache, nur sehr begrenzt auch eine *gesprochene* Sprache.

ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund der sehr kompakten Information fasse ich den Punkt 0-1: „Modelle der Logik“ noch einmal zusammen.

Ich definiere die Logik primär als *Theorie der formalen Welt*. Es gibt aber sehr unterschiedliche Modelle der Logik, die sich wie folgt unterscheiden lassen:

1. Gegenstandsbereich
   Logik wird herkömmlich bezogen auf:
   - sprachliche Entitäten (z. B. Aussagen)
   - psychische Entitäten (z. B. folgerichtiges Denken)
   - reale Entitäten (z. B. Sachverhalte)

   Ich favorisiere eine neutrale Darstellung.

2. Inhalt
   Man definiert den Inhalt der Logik enger oder weiter, z. B.:
   - Analytische Relationen, Folgerungen, Deduktionen, nur Implikation
   - Alle korrelativen Relationen, d. h. auch synthetische (korrelative) Relationen
   - Relationen und Objekte wie Klassen, Individuen, Mengen usw.

   Ich wähle die weiteste Definition, der Kernbereich der Logik sind allerdings Schlüsse.

3. Objekt- oder Meta-Bereich
   Logik kann verstanden werden als:
   - die deduktiven Relationen usw. selbst (Deduktionen)
   - die Lehre (Wissenschaft) von diesen deduktiven Relationen

   Man kann beides verwenden.

4. Gültigkeit
   Die Gültigkeit der Logik wird unterschiedlich begründet bzw. relativiert:
   - platonische Ideen: unanhängig und ewig gültig
   - konventionelle Setzungen (Axiomensystem): Gültigkeit stark relativiert
   - Ableitungen aus der Empirie, aus sprachliche Strukturen oder Denkstrukturen

5. Sprache / Grammatik
   Logik wird auch oft bezeichnet als
   - Sprache (formale Sprache)
   - Grammatik (logische Syntax, logische Semantik)

   M. E. ist aber der sprachliche Aspekt der Logik sekundär.

0 – 2 KOMPONENTEN DER LOGIK

0-2-1 Einteilung der Komponenten

0-2-1-1 STUFUNG IN DER LOGIK
Die *herkömmliche* Logik geht meist von einer *2-Stufung* der logischen *Komponenten* aus.
Je nachdem, auf welchen *Wirklichkeitsbereich* sie sich ausrichtet, ergibt dies folgende Stufen:

- *Psyche*
  1. Begriffe (unterteilt in Allgemein-Begriffe und Individual- Begriffe)
  2. Urteile bzw. Gedanken
- *Sprache*
  1. Wörter (unterteilt in Eigennamen und Prädikatoren)
  2. Sätze bzw. Aussagen
- *Realität*
  1. Dinge / Sachen (unterteilt in Individuen und Klassen)
  2. Ereignisse bzw. Sachverhalte

Das Augenmerk der Logik gilt dabei vor allem den jeweils unter 2. genannten Entitäten.
Als Hauptunterschied zwischen 1. und 2. gilt jeweils:
– Die *Entitäten unter 2.* (Urteile, Sätze, Sachverhalte) sind *wahr* oder *falsch* o. ä.
– Für die *Entitäten unter 1.* (Begriffe, Wörter, Dinge) gilt das nicht; man kann also z. B. von einem isolierten Wort nicht sagen, es ist wahr oder falsch.
Wie ich in 0-4-4-1 noch zeigen werde, kann man diesen Unterschied allerdings relativieren.

0-2-1-2 OBJEKTE UND RELATIONEN
Auch in der *Integralen Logik* wird eine grundsätzliche *2-Teilung* vorgenommen, in:

1. *Objekte* (genauer: logische Objekte)
   - Individuen
   - Mengen (Verknüpfungen von Individuen)
   - Molekular-Mengen (Verknüpfungen von Mengen)
2. *Relationen* (genauer: logische Relationen zwischen logischen Objekten)
   - Individuen-Relationen (Relationen zwischen Individuen und Mengen)
   - Mengen-Relationen (Relationen zwischen Mengen)
   - Molekular-Relationen (Relationen zwischen anderen Relationen)

Anstelle von *Mengen* kann man auch von *Klassen* ausgehen.
Wie man sieht: Es besteht eine *Parallele* zwischen Objekten und Relationen:

• Individuen	Individuen-Relationen
• Mengen	Mengen-Relationen
• Molekular-Mengen	Molekular-Relationen

(Im dritten Punkt ist die Parallele nicht ganz gegeben, dazu komme ich noch.)

Von daher lassen sich *3 Bereiche* der Logik bzw. 3 Logiken unterscheiden:

- *Individuen-Logik* (meistens *Prädikaten-Logik* genannt)
- *Mengen-Logik* (meistens *Klassen-Logik* genannt)
- *Molekular-Logik* (meistens *Aussagen-Logik* genannt)

Die Integral-Logik greift zwar die obigen Unterscheidungen zur Differenzierung auf, primär bezieht sie sich aber auf *generelle Komponenten*, die eben alles sein können. Sie sind *nicht danach spezifiziert*, ob es sich um Individuen, Mengen, Relationen usw. handelt.

Allerdings ist hier auch eine *3er-Unterteilung* möglich:

1. Objekte	z . B. X, Y	konkret: X = Regen, Y = Nässe
2. Relationen	z. B. $\rightarrow$	konkret: wenn – dann
3. Relationsgefüge	z. B. $X \rightarrow Y$	konkret: wenn Regen, dann Nässe

Es wird hier also genauer unterschieden zwischen den *Relationen* und den *Relationsgefügen* (oder *Relationssystemen*); die Relationsgefüge entsprechen den *Sachverhalten*, *Aussagen* oder *Urteilen*; allerdings kann man zur Vereinfachung auch Relationsgefüge als ‚Relationen' bezeichnen, wenn keine Missverständnisse auftreten können.

Am häufigsten verwende ich im Folgenden aber den Terminus ‚*Struktur*' für ein Relationsgefüge (genauer gehe ich darauf ein in 0-2-5-1).

Die oben dargestellte Theorie, die sich auf *Objekte* und Relationen zwischen ihnen bezieht, kann man *extensional* nennen. Man kann, ja muss sie durch eine zweite *intensionale* Theorie ergänzen, die sich auf *Eigenschaften* (oder *Begriffe*) und Relationen zwischen ihnen bezieht. Auf den Unterschied von Extension und Intension wurde schon kurz eingegangen – und er wird uns noch ausführlich beschäftigen.

0-2-1-3 LOGISCHER AUFBAU DER WELT

Ich möchte hier schon einen etwas genaueren Überblick über den *logischen Aufbau der Welt* geben. Im Einzelnen wird in vielen späteren Punkten darauf eingegangen.

Man kann aus logischer Sicht zunächst sagen: Die Welt ist die Gesamtheit (All-Klasse) aller Entitäten. Entitäten sind dabei *Objekte*, *Eigenschaften*, *Relationen* und Relationsgefüge = *Strukturen* (die Quantität wird hier nicht explizit genannt, geht aber implizit in diese Sammlung ein). Zur Übersichtlichkeit lasse ich die *Eigenschaften* erst einmal beiseite.

Welt (alle Entitäten)

Objekte Relationen Strukturen

Nun kann man allerdings analysieren: *Strukturen* bestehen aus Objekten (oder Eigenschaften) und Relationen, insofern ist der Begriff der Struktur *abgeleitet*. Man kann einfacher also auch unterteilen:

Welt

Objekte Relationen

Andererseits kann man eine *umgekehrte* Darstellung wählen; demnach ist das Relationsgefüge, die Struktur (real also der Sachverhalt) der *Ausgangspunkt*. Die Welt ist demnach die Menge aller Strukturen oder aller Sachverhalte.

Welt

Struktur$_1$ Struktur$_2$ ... Struktur$_n$

Eine *einfache* (*atomare*) Struktur besteht immer aus mindestens 2 Objekten. Sie lässt sich folgendermaßen darstellen:

Struktur

Objekt$_1$ – Relation – Objekt$_2$

Diese Darstellung entspricht der in 0-1-5-3 erläuterten syntaktischen *Tiefenstruktur*.

Dabei ist zu bedenken, dass es nicht nur einfache Strukturen – als Relationen zwischen Objekten – gibt, sondern auch *komplexe* (*molekulare*) Strukturen, nämlich Relationen zwischen (einfachen) Strukturen.

Molekül-Struktur

Struktur$_1$ – Relation – Struktur$_2$

Objekt$_1$ – Relation – Objekt$_2$ Objekt$_3$ – Relation – Objekt$_4$

Die Wirklichkeit als ganze kann man aber nicht nur als Menge, sondern besser noch als *System* von Molekül-Strukturen (M-Strukturen) verstehen. Dabei ist sowohl eine *Pyramide* vorstellbar, dass alles von einer obersten Mega-Struktur abgeleitet wird, oder aber ein *Netz*.

M-Struktur

M-Struktur — M-Struktur — M-Struktur

M-Struktur

Dieses Welt-Modell ist erst einmal offen auch für eine generelle, *über-logische* Betrachtung. Wie schon bemerkt und später noch genauer aufgezeigt werden soll, berücksichtigt die Logik aber nur *funktionale* Relationen; räumliche, zeitliche, kausale u. a. Relationen werden nicht miterfasst. Somit ist das logische Welt-Modell zwar einerseits allgemeingültig auf jeden Wirklichbereich anwendbar, aber es liefert andererseits keine vollständige Erfassung.

0-2-1-4 SCHREIBWEISE

Nachdem oben die möglichen *Ebenen* bestimmt worden, auf welche die Logik Bezug nehmen kann, soll nun die festgelegt werden, wie diese Ebenen in der *Schreibweise* behandelt werden.

Der normale Bezug der Sprache geht auf die *reale* Ebene. Dafür verwende ich keine besonderen Zeichen. Wenn ich etwas als *psychisch* kennzeichnen will, schreibe ich es in # ... #. Wenn ich etwas als *sprachlich* kennzeichnen will, schreibe ich es in ‚ ...'. Wenn ich etwas *anführen* möchte, abgrenzen möchte, als Beispiel o. ä., ohne mich auf eine Ebene festzulegen, schreibe ich „ ...".

Ich setze den Punkt immer *hinter* das Anführungszeichen, denn es geht hier nur um *Beispielsätze* usw., aber nicht um wörtliche Rede; so wird eine größere Einheitlichkeit erreicht.
Wenn ich etwas *hervorheben* möchte, z. B. als Fachbegriff oder als besonders wichtig, verwende ich meistens *Kursiv*-Schrift; in diesem Fall verzichte ich ggf. auf Anführungszeichen.

- Sachverhalt: Peter ist klug.
- Urteil: #Peter ist klug#.
- Satz: ‚Peter ist klug'.
- Unspezifiziert: „Peter ist klug".

Formalisierungen, logische und mathematische *Formeln*, schreibe ich im Folgenden immer *ohne* Anführungen, auch wenn sie *meta-sprachlich* verwendet werden (bis auf wenige Ausnahmen, wenn der meta-sprachliche Status betont werden soll). Die sprachliche Exaktheit bewerte ich hier niedriger; als wichtiger erachte ich, dass die Formel übersichtlich ist.

0-2-1-5 OBJEKT- UND META-SPRACHE

Dieses Thema wurde schon mehrfach kurz angesprochen. Da es aber wichtig ist und zu Missverständnissen Anlass geben kann, führe ich es noch etwas weiter aus. Man unterscheidet zwischen:

• *Objekt-Sprache*: In dieser Sprache wird über *Objekte*, über die Welt gesprochen bzw. geschrieben. Z. B. sage ich aus: Aristoteles war ein genialer Philosoph.

• *Meta-Sprache*: In dieser Sprache wird über die (Objekt-)*Sprache* gesprochen/geschrieben.
Z. B. der *Satz* ‚Aristoteles war ein genialer Philosoph' besteht aus fünf Wörtern (syntaktische Aussage). Oder: ‚Aristoteles war ein genialer Philosoph' ist wahr (semantische Aussage).

Bei der Objekt-Sprache äußert man sich *in* der Sprache, verwendet sie, bei der Meta-Sprache führt man die Objekt-Sprache an.

Im Grunde ist die Eingrenzung auf Objekt- und Meta-*Sprache* aber zu eng. Ebenso könnte ich unterscheiden: *Objekt-Sachverhalt*: ein Sachverhalt besteht bzw. wird festgestellt, *Meta-Sachverhalt*, es wird eine Feststellung über einen Sachverhalt getroffen (entsprechend *objekt-psychisch* oder *meta-psychisch*). Natürlich erfolgt diese Feststellung in Sprache, womit man wieder auf die Unterscheidung Objekt- und Meta-Sprache verwiesen ist.

Die Unterscheidung zwischen Objekt- und Meta-Sprache ist auch in der Alltagssprache wichtig, weil es sonst zu Missverständnissen kommen kann. Z. B: ‚Aristoteles ist ein genialer Philosoph ist wahr.' Dies führt zu Verwirrung. Richtig wäre: Der Satz ‚Aristoteles ist ein genialer Philosoph' ist wahr.

In der Theorie von Mathematik und Logik kann die Nicht-Unterscheidung von Objekt- und Meta-Sprache zu *Antinomien* führen, in der praktischen Verwendung ist dies aber zu vernachlässigen. Aus dem Kontext ist im Grunde immer zu erkennen, ob eine Formel objektsprachlich oder meta-sprachlich gemeint ist. Und anders als in der normalen Sprache ergeben sich auch kaum Missverständnisse. Z. B.: $X \rightarrow Y$ ist eine logische Aussage. Oder ganz korrekt: ‚$X \rightarrow Y$' ist eine logische Aussage. Da der logische Ausdruck durch die Formalisierung ohnehin abgegrenzt ist, muss man ihn optisch nicht notwendig durch *Anführungszeichen* o. ä.

zusätzlich abgrenzen. Andererseits müssten bei korrekter Verwendung der Meta-Sprache sehr häufig Anführungszeichen verwendet werden, was die ohnehin komplizierten Formeln noch unübersichtlicher machte. Da es mir aber wichtig ist, den Text so übersichtlich wie möglich darzustellen, verzichte ich in den Formalisierungen auf den Perfektionismus der strengen Unterscheidung zwischen Objekt- und Meta-Sprache.

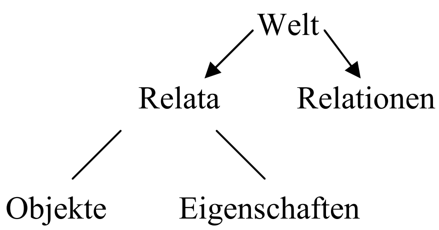
0-2-2 Objekte und Verknüpfungen

0-2-2-1 LOGISCHE OBJEKTE

‚Objekte' nehme ich als einen übergeordneten *extensionalen* Sprachbegriff oder Terminus. Er lässt sich wie gesagt differenzieren, in *Individuen*, *Mengen/Klassen* oder *Mengen-Verknüpfungen*. Ein Objekt ist eine Ganzheit, eine identifizierbare Entität, traditionell sprach man von ‚Substanz'. Am ehesten denkt man bei Objekten an *konkrete*, körperliche, materielle Objekte, aber es gibt auch *abstrakte* Objekte, die nicht oder nur partiell spezifiziert sind.

Man könnte auch (unräumliche, unzeitliche) *logische Objekte* angeben, aber wesentlich bei der Logik sind die *logischen Relationen*, und die können zwischen allen Objekten bestehen.

Die *Intensionen*, d. h. die *Eigenschaften* oder *Begriffe*, die mit den Individuen und Mengen verbunden sind, fasse ich mit den Objekten im Terminus '*Relata*' zusammen, denn beide haben kaum einen eigenständigen Status, sondern sind primär Bestandteile von *Relationen* bzw. Strukturen. Die *Welt* als ganze lässt sich also zuerst in Relata und Relationen zerlegen.



Diese Bereiche werde ich jetzt näher beschreiben, ohne sprachphilosophische Details.

Generell ist zu bedenken, dass das Ziel jeder Wissenschaft *Vereinheitlichung* bzw. *Einfachheit* ist. D. h. man versucht mit möglichst wenigen Begriffen und möglichst wenigen, möglichst allgemeinen Aussagen auszukommen. Darum bemühe ich mich auch, allerdings muss man zuweilen unnötig komplizierte Ansätze – die dem Einfachheitsgebot zuwiderlaufen – übernehmen, um sich nicht zu sehr von der gängigen Terminologie zu entfernen.

0-2-2-2 INDIVIDUEN

Dies ist die unterste Ebene, sie umfasst *individuelle Objekte*, z. B. den Philosophen Sokrates. In der logischen Sprache verwendet man für Individuen *Variablen* wie ‚x', ‚y' oder *Konstanten* wie ‚a' und ‚b'. Ich bevorzuge als Konstanten allerdings ‚x_1' und ‚x_2' usw.

Um auszudrücken „dasjenige Objekt, das die Eigenschaft F hat", verwendet man den *Kennzeichnungs-Operator*: ιx(Fx). Man spricht auch von *„Jota-Operator'*, weil das griechische Zeichen ι (Jota) verwendet wird.

Man könnte diskutieren, ob es – real – *bestimmte* und *unbestimmte* Objekte gibt; oder ob es sinnvoller ist davon auszugehen, dass nur unsere *Sprachzeichen* semantisch bestimmt oder unbestimmt sind – die Objekte dagegen grundsätzlich bestimmt. Ich werde in 0-2-4 zeigen, dass die Antwort hierauf recht komplex ausfallen muss; vor allem im Bereich der *Quantenphysik* geht man allerdings davon aus, dass Objekte nicht *deterministisch* (vollständig bestimmt), sondern nur *statistisch* (partiell bestimmt) zu fassen sind. Eine weitere Diskussion wäre, inwieweit individuelle Objekte eine einheitliche *Identität* besitzen bzw. diese – über die Zeit – bewahren. Aber in der Logik kann man von diesen Fragen weitgehend abstrahieren.

Der Bezug auf Individuen – individuelle Objekte – ist ein *extensionaler* Zugang.
Intensional bezieht man sich entsprechend auf *Individual-Eigenschaften* oder *Individual-Begriffe.* Z. B. könnte man von einer *Gesamt-Eigenschaft* „Sokrates“ ausgehen – ich schreibe sie ‚E(Sokrates)’, also ‚E’ für ‚Eigenschaft’; bzw. geht man von einzelnen *individuellen Eigenschaften* aus, wie etwa der Körpergröße von Sokrates. Die Bestimmung einer solchen *Individual-Eigenschaft* bzw. eines solchen *Individual-Begriffs* ist allerdings nicht unproblematisch; dies wird vor allem im Punkt 0-2-4-5 über Definitionen erläutert.

0-2-2-3 MENGEN

Mengen sind gedachte *quantitative Zusammenfassungen* von Individuen, die als *Elemente* der Menge gelten. Eine Menge ist z. B. die Zusammenfassung von Sokrates, Platon, Aristoteles.

Man kann *Individuen* auch als Mengen mit nur *einem* Element ansehen. Die Menge „Sokrates“ wäre z. B. die Menge, die als *einziges* Element eben Sokrates enthält.

Man benennt Mengen mit ‚M’ und ‚N’ und schreibt Mengen mit *geschweiften Klammern*.

M = {Sokrates, Platon, Aristoteles} bzw. N = {x, y, z}

Andererseits kann man Mengen auch als bestimmte *Verknüpfungen von Individuen*, nämlich *Vereinigungen* ansehen. Ich verwende dann nicht das unspezifische *Komma*, sondern das *Vereinigungs*-Zeichen ∪. M = {Sokrates ∪ Platon ∪ Aristoteles}

Im Grunde kann man dann auch die geschweiften Klammern weglassen. Das dient alles der Vereinheitlichung, von der oben gesprochen wurde. So ergibt sich z. B.:

M = Sokrates ∪ Platon ∪ Aristoteles

Wie sich später noch zeigen wird, steht das ∪ in Verbindung zu dem Junktor „*oder*“, formal ∨ . Das mag irritieren, denn bei einer Vereinigung von Elementen mag man sprachlich doch eher an „*und*“ denken, formal ∧. Das „und“ ist aber mit dem *Schnitt-Operator* ∩ verbunden, der für die *Schnitt-Menge* steht. Man kann sich nun leicht klarmachen, dass die Schnitt-Menge der Individuen (bzw. der Individual-Mengen) Sokrates, Platon und Aristoteles zu einer *leeren* Menge führen würde, nicht zur Vereinigung.

und	∧	Schnitt-Menge	∩
oder	∨	Vereinigungs-Menge	∪

Allerdings wäre eine alternative Lösung, die Junktoren für die Verknüpfung von Objekten in anderer Weise zu interpretieren als in der Verknüpfung von Relationen (oder eventuell neue Opertoren wie & einzuführen). M = {Sokrates & Platon & Aristoteles} mag besser unseren Intuitionen entsprechen, führte aber zu *mehr verschiedenen* Zeichen, was man wie gesagt vermeiden will.

0-2-2-4 KLASSEN

Klassen sind Mengen von *allen* Individuen, denen eine *bestimmte Eigenschaft* zukommt (bzw. ein bestimmter Begriff). Z. B. ist die Klasse der Menschen die Menge aller Objekte, denen die Eigenschaft zukommt, Mensch zu sein.

Diese Bestimmung zeigt die Bedeutung der *Intension*. Man muss zur Definition einer Klasse letztlich auf eine *Eigenschaft* zurückgreifen. Denn sonst geriete man in einen *Zirkel*: „Die Klasse aller Menschen ist die Menge aller Objekte, die Elemente der Klasse Mensch sind“.

Zwar kann man Klassen partiell als *Schnitt-Mengen* oder *Vereinigungs-Mengen* anderer Klassen darstellen. So mag man bestimmen: „Die Klasse der Rappen ist die Schnitt-Menge der Klasse der Pferde und der Klasse der schwarzen Objekte“. Führt man diese Definitionen aber weiter, so wird man sich letztendlich doch auf *Eigenschaften* bzw. *Begriffe* beziehen müssen. Immer weiter auf andere Klassen zu verweisen, ist nicht wirklich überzeugend.

Klassen (*extensional*) entsprechen *intensional Klassen-Eigenschaften* oder *allgemeine Eigenschaften*, also z. B. die Eigenschaft „Mensch“ (oder „Menschlichkeit“). In der traditionellen Logik sprach man von „Allgemein-Begriffen“, ich verwende ‚Allgemein-Eigenschaft’ und ‚Allgemein-Begriff’ parallel.

Es stellt sich die Frage: Ist die *Entsprechung* von Klassen und Allgemein-Eigenschaften vollkommen? Man könnte das zunächst bestreiten.

Die Eigenschaft „Mensch“ als Beispiel umfasst nur die Eigenschaften, die für *alle* Menschen gelten (und die das Menschsein bestimmen). Z. B. dürfte die *Haarfarbe* dann keine *Allgemein-Eigenschaft* von Menschen sein, weil die Menschen eben unterschiedliche Haarfarben besitzen; allenfalls könnte man eine *Disjunktion* der *möglichen* Haarfarben eines Menschen (z. B. blond oder braun oder schwarz oder grau oder weiß) als allgemein akzeptieren.

Dagegen wird oft behauptet: Mit der Klasse wird jedes *konkrete* Objekt mit seinen *individuellen* Eigenschaften erfasst, also z. B. jeder Mensch mit seiner Haarfarbe. Letztlich sind individuelle Eigenschaften auch *quantitativ* bestimmt, z. B. müsste bei der Harrfarbe genau angegeben werden, zu wie viel Prozent die Haare grau sind. Somit bestände also ein prinzipieller Unterschied zwischen Klasse und Begriff.

Dagegen könnte man die Auffassung vertreten, dass auch die Klasse nur jeweils die *abstrakten*, *kollektiven* Objekte erfasst, also z. B., dass der Mensch Sokrates nur mit seinen allgemein-menschlichen Eigenschaften (die ihn als Menschen definieren) in die Klasse „Mensch“ eingeht, nicht aber mit seinen individuellen Eigenschaften wie z. B. seiner Haarfarbe. Es wäre dann zu unterscheiden zwischen *abstrakten* Elementen der Klasse – welche die Individuen nur soweit erfasst, wie sie durch die Klasse definiert sind – und den *realen* Individuen. Und in der Tat, ich werde nachher zeigen, warum ich diese Auffassung für richtig halte.

Eine andere Frage ist, welchen Status diese allgemeinen Eigenschaften haben sollen. Gibt es solche allgemeinen Eigenschaften real, wie *platonische Ideen*? Oder muss man sie als rein *sprachliche* Konstrukte bestimmen, geht es um nominal-definitorische Beziehungen? Dies führt zu (sprach)philosophischen Problemen bis hin zum ehrwürdigen *Universalienproblem*. Ich halte eine *realistische* Deutung, für Klassen wie für Begriffe für sinnvoll, kann dies aber nicht im Einzelnen in diesem Text diskutieren.

Klassen ordnen die Wirklichkeit nach *Gleichheit* bzw. *Ähnlichkeit*, indem sie *alle* Individuen mit ähnlichen Eigenschaften zusammenfassen (im Gegensatz zu einer *Menge*, die auch *ungleiche* Objekte willkürlich verbinden kann).

Klassen lassen sich in *Teilklassen* (Teilmengen) zerlegen, bei einer vollständigen Zerlegung bilden die Klassen die Vereinigungs-Menge ihrer Teilklassen. Dabei gilt: Die Elemente einer Teilklasse sind sich ähnlicher als die Elemente der Klasse (Oberklasse). Sei die Oberklasse die Klasse aller Pferde und die Teilklasse umfasse alle Rappen, dann sind die Rappen sich prinzipiell ähnlicher als die Pferde, und zwar in diesem Fall um genau *eine* Eigenschaft, nämlich die schwarze Hautfarbe.

Klassen bezeichnet man mit den Buchstaben ‘F’ und ‘G’ bzw. ‘F_1’, ‘F_2’ usw.
Um sie genau von Begriffen abzugrenzen, kann man ggf. schreiben: ‘K(F)’, ‘K(G)’ usw.
Klassen lassen sich vor allem auf zwei Arten *formalisieren*: *Aufzählung* und *Beschreibung*.

• *Aufzählung*

$$F = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$$

Ich verwende also die oben eingeführte Formalisierung.

Die herkömmlich Formalisierung wäre: $F = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
Beide Formalisierungen gelten nur bei *endlichen* Klassen. Bei *unendlichen* Klassen gilt:

$F = x_1 \cup x_2 \cup \ldots$

Ein Problem ist: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind unspezifisch. Man kann ihnen nicht ansehen, ob es sich um die Elemente der Klasse F oder z. B. der Klasse G handelt. Um zu zeigen, dass es sich um Elemente von F handelt, kann man formulieren (vgl. 1-3-1-4):

$x_1(x_1$ hat die Eigenschaft F$) \cup \ldots \cup x_n(x_n$ hat die Eigenschaft F$)$
formal: $F = x_1(Fx_1) \cup x_2(Fx_2) \cup \ldots \cup x_n(Fx_n)$
Alternative: $F = x_1(x_1 \in F) \cup x_2(x_2 \in F) \cup \ldots \cup x_n(x_n \in F)$
(dies ist aber zirkel-verdächtig)

Ggf. verwendet man besser *eckige* Klammern [ ], da die *runden* Klammern meistens im Sinne einer Aussage verstanden werden. Man könnte also z. B. unterscheiden:

$x_1(Fx_1)$: für x_1 gilt: Fx_1 (*Aussage* über ein Individuum, kurz auch Fx_1)
$x_1[Fx_1]$: x_1, für das gilt: Fx_1 (*Anführung* des Individuums)

Den Jota-Operator $\iota x(Fx)$ kann man hier nicht verwenden, denn er bezieht sich nur auf die Individuen-*Variable* ‚x', nicht auf eine Individuen-*Konstante* wie ‚x_1'.

• *Beschreibung*
Die herkömmliche Schreibweise ist: $F = \{x / Fx\}$
Lies: „Die Klasse F ist die Menge aller x, für die gilt: x hat die Eigenschaft F".

Normalerweise habe ich für *Eigenschaft* immer das ‚E' geschrieben, die Eigenschaft der Klasse F schreibt man also ‚E(F)' (sprich ‚E von F'). Daher müsste die Formalisierung eigentlich lauten: $F = \{x / E(F)x\}$. Durch die Syntax ist aber bei $F = \{x / Fx\}$ klar, dass die Eigenschaft F gemeint ist, ohne dass man ‚E' nennt. Denn wäre die Klasse F gemeint, würde man schreiben $F = \{x / x \in F\}$, was wiederum ein Zirkel wäre.

Alternativ zur Mengen-Darstellung kann man den *Klassen-Operator* nutzen. Um auszudrücken „die Klasse aller x, für die gilt, x hat die Eigenschaft F", verwendet man den *Klassen-Operator* oder *Lambda-Operator*, benannt nach dem griechischen Zeichen *Lambda* λ: $\lambda x(Fx)$.

0-2-2-5 VERKNÜPFUNGEN

Logische *Verknüpfungen* müssen genauer beschrieben werden. Verknüpfungen in der Logik sind keine räumlichen oder zeitlichen Synthesen, sondern man muss sie rein *quantitativ* verstehen. Am besten bieten sich hier *mengentheoretische* Begriffe an. Allerdings werden zur Definition auch logische Junktoren, die sich auf *Relationen* beziehen, verwendet.

Im weiteren Sinn kann man Verknüpfungen noch zu den *Objekten* rechnen. Ich spreche hier von *Mengen*-Verknüpfungen, man kann aber genauso von *Klassen*-Verknüpfungen ausgehen.

Herkömmlicherweise werden *Verknüpfungen* nur auf Mengen bezogen. Dabei ergibt sich aus der Verknüpfung von zwei (oder mehr) Mengen eine neue Menge. Wie beschrieben, kann man aber auch *Individuen* zu einer Menge verknüpfen. Eine *komplexe* Menge, die sich aus der Verknüpfung von anderen Mengen ergibt, nenne ich *Molekular-Menge* (oder *Molekül-Menge*).

Entsprechend zur oben genannten (ontologischen) Neutralität der Integral-Logik, ist es letztendlich irrelevant, ob man die Verknüpfung auf Individuen oder Mengen bezieht, erst recht, ob man von Mengen sprachlicher, psychischer oder realer Objekte ausgeht.

Verknüpfungen von Mengen sind genau zu unterscheiden von *Relationen* zwischen Mengen: „M ist *Teilmenge* von N" ist z. B. eine Relation, sprachlich eine *Aussage*, die *wahr* oder *falsch* sein kann. Dagegen sind Verknüpfungen von Mengen ebenfalls Mengen und damit nicht wahr oder falsch.

Man kann Verknüpfungen in zweierlei Weise auffassen:
1) *statisch*, als *Zustände*:
die Menge M *ist* mit der Menge N verknüpft
2) *dynamisch* bzw. handlungstheoretisch, als *Operationen*:
die Menge M *wird* mit der Menge N verknüpft
Ich ziehe den Ausdruck ‚*Verknüpfung'* aber vor, der für beide Interpretationen offen ist.

Anhand der Vereinigung von Mengen (vgl. unten) sei das genauer erklärt:

$M_1 \cup M_2 = N$

$M_1 \cup M_2$	Verknüpfung, hier Vereinigung bzw. Vereinigungs-Menge
$\cup$	Verknüpfungs-Operation bzw. Operator
N	Resultierende Menge: Molekular-Menge
M_1, M_2	Ausgangs-Mengen

Bei 2 Mengen M und N sind $4^2 = 16$ *Verknüpfungen* möglich. (Auf *geordnete Mengen* gehe ich hier nicht ein, vgl. dazu 0-1-5-3 Syntax.)
Ich gebe aber nur die wichtigsten Verknüpfungen zwischen 2 Mengen M und N an:

- Vereinigungs-Menge $M \cup N$
- Schnitt-Menge $M \cap N$
- Differenz-Menge $M \setminus N$
- Ergänzungs-Menge M'

• *Vereinigungs-Menge* $M \cup N$ (Vereinigungs-Verknüpfung)
Die wird herkömmlich definiert als eine Verknüpfung von 2 Mengen M und N, wobei alle Elemente erfasst werden, die in M *oder* N enthalten sind (inklusives oder):
$M \cup N = \{x / x \in M \vee x \in N\}$
Ich möchte die Vereinigungs-Menge aber wie gesagt allgemeiner verstehen. Auch Individuen x, y, z lassen sich vereinigen, und zwar enthält man so die Menge (bzw. Vereinigungsmenge) dieser Individuen.
$x \cup y \cup z = \{x, y, z\}$

• *Schnitt-Menge* $M \cap N$ (Schnitt-Verknüpfung)
Sie spielt neben der Vereinigungs-Menge die wichtigste Rolle. Es ist die Menge aller x, die in M *und* N enthalten sind.
$M \cap N = \{x / x \in M \wedge x \in N\}$
Die Schnitt-Menge von Individuen ist die leere Menge.

• *Differenz-Menge* $M \setminus N$ (Rest-Menge)
Es ist die Menge aller x, die zu M, aber nicht zu N gehören
$M \setminus N = \{x / x \in M \wedge x \notin N\}$

• *Ergänzungs-Menge* M' (Komplement-Menge)
Zur Ergänzungs-Menge M' gehören alle Elemente, die zu N, aber nicht zu M gehören. Somit ist die Ergänzungs-Menge das Gegenstück zur Differenz-Menge.
$M' = N \setminus M = \{x / x \in N \wedge x \notin M\}$
Oft wird als zusätzliche Bedingung angegeben: $M \subseteq N$

Mengen-Verknüpfungen können prinzipiell unabhängig davon vollzogen werden, in welcher *Relation* die Mengen zueinander stehen; Mengen-Relationen sind z. B. *Teilmengen*-Relation oder *Identität* (dies wird noch ausführlich erläutert). Nur ergeben sich unterschiedliche Ergebnisse der Mengen-Verknüpfungen in Abhängigkeit von der Relation. Wenn M und N identisch sind, dann ist z. B. die Schnitt-Menge $M \cap N$ ihrerseits identisch mit M bzw. N. Wenn dagegen M und N überhaupt keine gemeinsamen Elemente haben, dann ist ihre Schnitt-Menge die *leere Menge*.

0-2-3 Objekte und Eigenschaften

Ich habe oben über Objekte und Eigenschaften geschrieben, dabei wurde deutlich: *Objekten* entsprechen immer *Eigenschaften* (bzw. Begriffe).

Individuen entsprechen *Individual-Eigenschaften.*

Klassen entsprechen *Klassen-Eigenschaften* oder Allgemein-Eigenschaften.

Ein Objekt ist immer eine *Ganzheit*, das gilt für Individuen wie für Klassen. Eine Eigenschaft, selbst eine komplexe Eigenschaft, kann man dagegen normalerweise als etwas *Isoliertes* sehen, das zwar begrifflich oder logisch eigenständig zu fassen ist, real aber nicht alleine auftritt.

Das Verhältnis von *Objekten* und *Eigenschaften* wurde im bisherigen Text noch nicht im Einzelnen geklärt, es ist sehr kompliziert, und man findet viele verschiedene Theorien darüber. Dieses Verhältnis ist gerade im vorliegenden Buch ein wichtiges Thema, auch hier weil *Extension* und *Intension* über den Unterschied von Objekten und Eigenschaften definiert werden (vgl. 0-3). Allerdings überschreitet das Thema die Grenzen der Logik in Richtung Sprachphilosophie, deswegen gehe ich ausführlich erst in einem geplanten Buch über *Integrale Philosophie* darauf ein. Die folgenden Ausführungen sind primär für Spezialisten.

0-2-3-1 THEORIEN

Nachfolgende seien verschiedene Theorien über Objekte bzw. Eigenschaften kurz zusammengefasst. Es wird jeweils vom Objekt ausgegangen: Was ist ein Objekt? Dabei soll zur Vereinfachung nicht im Einzelnen differenziert werden zwischen Individuen und Klassen (obwohl das für eine präzise Formalisierung erforderlich wäre).

Es stellen sich die Fragen wie: Sind Objekt und Eigenschaft voneinander *unabhängig* oder lassen sie sich nicht voneinander trennen? Ist ein Objekt auf Eigenschaften *reduzierbar* oder sind Eigenschaften auf ein Objekt reduzierbar? Die verschiedenen Theorien geben unterschiedliche Antworten hierauf. Im Wesentlichen kann man drei Theorien unterscheiden:

1) Ein Objekt ist *nur* eine Kombination von *Eigenschaften*
2) Ein Objekt ist ein *Träger mit Eigenschaften*
3) Ein Objekt ist *nur* ein *Träger*

0-2-3-2 EIN OBJEKT IST *NUR* EINE KOMBINATION VON *EIGENSCHAFTEN*

Konkret kann das vor allem bedeuten: Ein Objekt ist eine

– *Vereinigungs-Menge* von Eigenschaften: $E(F) \cup E(G)$, kurz $E(F \cup G)$ bzw. $E(F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n)$. ‚E' steht wie schon eingeführt für ‚Eigenschaft'.

– *Schnitt-Menge* von Eigenschaften: $E(F \cap G)$ bzw. $E(F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n)$

Hier ist das Objekt auf seine Eigenschaften reduzierbar, somit ist ‚Objekt' kein eigenständiger Begriff. Man muss keinen gesonderten *Träger* der Eigenschaft, keinen *Besitzer* der Eigenschaft annehmen. Dies passt zu Theorien, dass es z. B. keine (fortdauernde) Identität von Dingen gibt, auch kein konstantes *Ich* des Menschen.

Ein einfaches Beispiel: Rappe = E(Pferd) $\cup$ E(schwarz). Formal: F = E(G) $\cup$ E(H)
Der Rappe als *Objekt* wird vollständig auf die zwei *Eigenschaften* „Pferd“ und „schwarz“ reduziert. Man könnte auch ‚Pferd’ adjektivisch als ‚pferdig’ schreiben, um den Eigenschaftscharakter hervorzuheben, aber das betrifft nur die syntaktische *Oberflächenstruktur*. Allerdings ließe sich auch „Rappe“ selbst schon als Eigenschaft und nicht als Objekt verstehen.

Eigenschaften werden hier – wie Objekte – als *Mengen* aufgefasst, als Mengen von anderen Eigenschaften oder Merkmalen (bzw. Mengen-Verknüpfungen), deshalb können die Mengenoperatoren verwendet werden, wie der Schnitt-Operator $\cap$ oder der Vereinigungs-Operator $\cup$.

Diese Theorie hat zunächst den Vorteil der Einfachheit und Eleganz, aber bei komplizierten Fällen ergeben sich schnell Schwierigkeiten, und es ist *ontologisch* auch problematisch, vollständig auf Objekte oder Träger zu verzichten.

Die *umgekehrte* Theorie, dass Eigenschaften auf Objekte reduziert werden, trägt gar nicht. Zwar kann man z. B. umformulieren: ‚Die Eigenschaft „Mensch“ zu besitzen, heißt, Element der Klasse der Menschen zu sein’. Hier wird festgelegt: Eigenschaft = *Klassenzugehörigkeit*. Und so kann man die Zusprechung von Klassenzugehörigkeiten immer weiter fortsetzen, aber letztlich bleibt dies ohne Erklärungswert, wenn man sich nicht irgendwann auf Eigenschaften bezieht (wie schon oben angemerkt). Erst recht bei *individuellen* Eigenschaften ist es problematisch, wenn man z. B. die komplexe Individual-Eigenschaft „Sokrates“ erklärt als Zugehörigkeit zur Klasse Sokrates; denn es gibt eben gerade nur *ein* Individuum Sokrates.

0-2-3-3 EIN OBJEKT IST EIN *TRÄGER MIT EIGENSCHAFTEN*

Hier gibt es im Einzelnen folgende Möglichkeiten: Ein Objekt ist

– ein *formaler Träger* (ohne inhärente Eigenschaften)
Diesem formalen Träger kommen aber *notwendig* bestimmte Eigenschaften zu,
also: Objekt = eigenschaftsloser Träger + Eigenschaften.
Z. B.: Rappe = Träger, der die Eigenschaften „Pferd“ und „schwarz“ besitzt.
Halb-formal: Rappe = x[Pferd x $\wedge$ schwarz x] Formal: F = x[Gx $\wedge$ Hx]
Lies z. B.: ’Ein Rappe ist ein *x, für das gilt*: x ist Pferd und x ist schwarz’.

Anstatt von einem formalen Träger könnte man auch von einem formalen *Prinzip*, etwa einem Ganzheitsprinzip ausgehen. Z. B.: Rappe = ein Prinzip, das „Pferd“ und „Rappe“ zu einer Ganzheit, einer Substanz verbindet. (Hier kann man auf das ‚E’ verzichten.)

– ein *inhaltlicher Träger* (mit inhärenten Eigenschaften)
Diesem inhaltlichen Träger kommen *notwendig* weitere Eigenschaften zu,
also: Objekt = inhaltlicher Träger + Eigenschaften
Z. B.: Rappe = Pferd (inhaltlicher Träger), das die Eigenschaft „schwarz“ besitzt.
Halb-formal: Rappe = Pferd[Schwarz (Pferd)] Formal: F = G[H(G)]
Der Träger „Pferd“ besitzt hier bereits inhärente Eigenschaften, es müssen aber notwendig noch andere Eigenschaften hinzukommen (hier schwarz“), damit das Objekt („Rappe“) bestimmt ist. (Auch hier kann man auf das ‚E’ verzichten, weil die Syntax eindeutig ist.)

Allerdings kann man „Pferd“ auch bereits als *Objekt* betrachten, nur ist Rappe eben ein *komplexeres* Objekt als Pferd. Wenn man von einem *inhaltlichen* Träger ausgeht, diesen aber auf immer *allgemeinere* Träger zurückführt: Pferd – Säugetier – Tier – Lebewesen – Entität usw., gelangt am offensichtlich zum Schluss doch zu einem *formalen* Träger.

Bei diesen Theorien sind *Objekt* und *Eigenschaft* nicht wirklich trennbar. Es gibt gewissermaßen *gebundene* Eigenschaften, die *inhärenter* Bestandteil eines Objektes sind, und *ungebundene*, freie Eigenschaften. Das Objekt besteht aus einem Träger und gebundenen (essentiellen) Eigenschaften. Zwar lassen sich Träger und Eigenschaften unterscheiden und somit logisch trennen, aber real treten sie nur zusammen auf.

Die natürliche Sprache favorisiert aus der Gruppe 2) die Theorie des *inhaltlich* bestimmten Trägers. Z. B. ist das *Individuum* Sokrates ein „Träger" (z. B. ein Mann), dem bestimmte Eigenschaften (wie Mensch) *inhärent* sind, dem aber weitere zugesprochen werden müssen (z. B. Philosoph). Auch *Klassen* wie z. B. die Klasse der Menschen sind schon durch inhärente Eigenschaften definiert. Grundsätzlich ist der Vorteil solcher Theorien, in ihren verschiedenen Varianten, dass sie am meisten unseren Intuitionen entsprechen.

Der Nachteil dieser Theorie ist, dass hier der *Unterschied* zwischen Objekten und Eigenschaften *relativiert* ist. Objekte beinhalten notwendig bereits Eigenschaften. Man könnte sich zwar helfen, indem man von Eigenschaften ausgeht und die dann unterteilt in *objekt-gebundene* und *freie* Eigenschaften; aber diese Umgehung der Objekte überzeugt nicht wirklich.

0-2-3-4 EIN OBJEKT IST *NUR* EIN *TRÄGER*

Hier gibt es im Einzelnen insbesondere zwei Möglichkeiten: Ein Objekt ist
– nur ein formaler Träger
– nur ein *formales Prinzip*
Das Prinzip ist zuvorderst eine Ganzheit, der erst sekundär Eigenschaften zukommen: etwas Beharrendes, Bestehendes, ein Seins-, Identitäts- oder Objekt-Prinzip, eventuell ein (selbst)organisierendes Prinzip, das Eigenschaften organisiert und integriert.

Das Objekt ist somit rein *formal*, nur *Träger* oder nur *Prinzip*. So gesehen wären alle Objekte *gleich*, die Unterschiede und die Charakterisierung erfolgte erst durch Eigenschaften (die aber nicht primär zum Objekt dazu gehören).

Die formale Logik beruht auf dieser Theorie, sie geht von einem *formalen* Träger aus, insbesondere einem formalen *Individuum* x, dem die Objekt-Variable ‚x' entspricht. Normalerweise geht man z. B. bei einer Klasse von völlig *unbestimmten Objekten* bzw. Trägern x aus, denen dann erst bestimmte Eigenschaften zugesprochen werden. Während man z. B. die Klasse der Menschen in der *natürlichen* Sprache als „alle Menschen" erfasst, wird sie in der Logik als „alle x, welche die Eigenschaft Mensch besitzen" bestimmt. Bei *Individuen* wie *a* oder *b* ist die Logik nicht so konsequent, eigentlich müsste sie z. B. Sokrates entsprechend fassen als „a, das die Eigenschaft Sokrates besitzt", was aber üblicherweise nicht geschieht. Ich analysiere das genauer im Punkt 0-2-4 über Variablen und Konstanten.

Jedenfalls sind bei dieser Theorie Objekt und Eigenschaft *exakt getrennt*. Denn Objekte beinhalten keine Eigenschaften und Eigenschaften lassen sich unabhängig von einem Träger analysieren. Dies bringt formal Vorteile, ist aber ontologisch schwer haltbar.

0-2-3-5 DISKUSSION

Wie löst man dieses Dilemma, dass man einerseits Objekte und Eigenschaften möglichst trenne will (wie in der formalen Logik), andererseits rein formale Objekte ontologisch wenig Sinn machen?

Eine elegante Möglichkeit wäre zu unterscheiden:
extensionale Objekte (reine Objekte), *intensionale Objekte* (Eigenschaften) und *gemischt extensional-intensionale Objekte* (Objekte mit Eigenschaften).

Das wäre auch deshalb attraktiv, weil später entsprechend zwischen extensionalen, intensionalen und gemischt extensional-intensionalen Sachverhalten bzw. Sätzen unterschieden wird. Aber es verkompliziert die ohnehin schwierige Thematik bzw. die Sprache zusätzlich, wenn man z. B. statt von ‚Eigenschaften' nun von ‚intensionalen Objekten' spricht.

Die beste, wenn auch nicht vollständig überzeugende Lösung ist, zu unterscheiden zwischen:

- *inhaltlichen* (materialen) Objekten
  wie z. B. Sokrates oder der Klasse der Menschen
- *formalen* (inhaltslosen) Objekten bzw. Trägern
  wie x, y (je nach Logik-Modell auch F, G usw.)

Ein *formales* Objekt x in der Logik (entsprechend der Individuums-Variable ‚x') besitzt keine Eigenschaften. Aber ein *inhaltliches* Objekt, entsprechend einem Wort in der Sprache, beinhaltet Eigenschaften, es besteht eben aus einem formalen Objekt (Träger) und Eigenschaften.

inhaltliches Objekt = *formales* Objekt (x) + Eigenschaften

Abschließend hierzu sei gefragt, ob Objekte oder Eigenschaften *Vorrang* besitzen. Die Antwort hängt natürlich auch davon ab, welche der obigen Theorien man vertritt. Es spricht aber doch einiges dafür, die Eigenschaften als höher einzustufen; denn wenn man Objekte nicht rein formal fassen will, benötigt man Eigenschaften, um sie zu bestimmen.

Zwar könnte man auch einwenden, dass es *isolierte* Eigenschaften gar nicht gibt, dass Eigenschaften immer nur in Verbindung mit einem Objekt auftreten und somit die Objekte wichtiger sind. Aber diese Argumentation würde von einer anderen Ebene aus geführt, z. B. einer physikalischen Theorie der Welt. *Physikalisch* betrachtet könnte man sicher bestreiten, dass sich Objekt und Eigenschaft überhaupt trennen lassen, *logisch* ist das aber möglich und legitim.

Im Punkt 0-3, beim Thema Extension und Intension, wird noch auf weitere Differenzierungen von Objekten und Eigenschaften eingegangen, z. B. *konkrete* und *abstrakte* Objekte oder *notwendige* und *kontingente* Eigenschaften.

0-2-4 Konstanten und Variablen

0-2-4-1 EINFÜHRUNG

Der Punkt Konstanten versus Variablen betrifft primär die *Sprache* bzw. die *Meta-Sprache*. Nachdem wir uns zuletzt vor allem mit der *realen* Ebene der *Objekte* bzw. der *Objekt-Sprache* beschäftigt haben, geht es jetzt also wieder primär um die Zeichen selbst.

Zwar kann man zunächst auch definieren: *Konstanten* stehen für *bestimmte* Objekte, *Variablen* stehen für *unbestimmte* Objekte. Doch wäre in Frage zu stellen, ob es real überhaupt unbestimmte Entitäten gibt. Das Thema, inwieweit die Objekte (unserer Erkenntnis) bestimmt sind, wird uns in 0-3 noch beschäftigen. Aber unabhängig davon bleibt festzuhalten: Um sich eine anspruchsvolle ontologische Diskussion über die Bestimmtheit und Bestimmtheit der Welt zu ersparen (die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde), formuliert man lieber:

Konstanten stehen für *bestimmte*, *gleichbleibende Interpretationen*,
Variablen stehen für *unbestimmte*, *wechselnde Interpretationen*.

Was *Variablen* und *Konstanten* betrifft, so herrscht in der Logik leider große Unklarheit, ja ein Durcheinander. Das betrifft zum einen die *Notation*, d. h. welche Zeichen man für Konstanten oder Variablen verwendet. Schwerwiegender ist aber, dass auch die *Theorie* der Konstanten und Variablen große Mängel aufweist.

Daher muss ich mich an verschiedenen Stellen im Text mit dieser Thematik auseinandersetzen. Ich habe mich in 0-1-5 Sprache (in den Unterpunkten „Alphabet" und „Formalisierung") schon kurz damit beschäftigt und werde mich auch an späterer Stelle noch darauf eingehen.

Es wurde schon festgestellt, dass es bei den *logischen Zeichen* wie $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ $\leftarrow$ $\wedge$ $\vee$ nur Konstanten gibt. Das Problem Konstanten versus Variablen betrifft vor allem die Zeichen, die sich auf Individuen, Klassen und Sachverhalte (bzw. deren Intensionen) beziehen, man nennt sie *deskriptive Zeichen*.

Man könnte durchaus die These vertreten, dass die Logik *gar keine deskriptiven Konstanten* benötigt, weil sie eben grundsätzlich von Bedeutung abstrahiert, weil jedes Zeichen sich prinzipiell auf wechselnde bzw. verschiedene Entitäten anwenden lässt. Da die Unterscheidung zwischen Konstanten und Variablen aber etabliert ist, will ich sie auch berücksichtigen. Ich werde zunächst *Individuen-Konstanten* besprechen, allerdings muss man dabei auch schon auf Individuen-Variablen Bezug nehmen (Konstanten und Variablen sind ohnehin so miteinander verbunden, dass man beim Beginn mit Variablen das entsprechende Problem hätte).

0-2-4-2 INDIVIDUEN-KONSTANTEN

Individuen-Konstanten sind Zeichen, die ein *bestimmtes* individuelles Objekt bezeichnen bzw. benennen; anders gesagt, Individuen-Konstanten bezeichnen *stets dasselbe* Individuum.

1) *Formale, logische Sprache*

Wenden wir uns zunächst der formalen Sprache der Logik zu: Normalerweise werden in der *Logik* ‚a', ‚b' usw. bzw. ‚a_1' und ‚a_2' usw. als *Individuen-Konstanten* verwendet. Ich habe aber schon darauf hingewiesen, dass ‚a' natürlich keineswegs so eine Individuen-Konstante ist wie ein *Eigennamen* in der normalen Sprache. Nehmen wir als Beispielsatz: ‚a ist Philosoph'. Um zu wissen, ob der Satz wahr ist, muss ich ‚a' *interpretieren*, muss ‚a' eine konkrete Bedeutung zuweisen. Dies ist aber eben genau die Definition einer *Variable*, dass diese erst durch eine Interpretation genau bestimmt wird (vgl. später). Man könnte ‚a' also allenfalls als *Unbekannte* auffassen, es steht zwar für ein bestimmtes Individuum, aber man weiß nicht, für welches. Ob sich allerdings wirklich ein Unterschied zwischen *Variablen* und *Unbekannten* aufrechterhalten lässt, würde eine weitere komplizierte Analyse erfordern.

Ich benötige in meinem Buch die Buchstaben ‚a', ‚b' usw. für Zahlengrößen. Um Missverständnisse zu vermeiden, verwende ich stattdessen das Zeichen ‚x' (bzw. ‚y') das eigentlich als Individuen-*Variable* gilt. Durch einen *Index* wird es aber zur *Konstante* transformiert. D. h. als *Individuen-Konstante* wähle ich ‚x_1' usw., ‚x_i' oder ‚x_n'.

Die Frage, welchen *Index* man verwendet, ist aber alles andere als simpel.
Vergleichen wir dazu folgende Sätze:

- ‚Karl Popper ist Philosoph'

Bei diesem Satz aus der normalen Sprache ist der *Eigenname* ‚Karl Popper' die Individuen-Konstante, durch den ein Individuum eindeutig identifiziert und bestimmt ist (auch wenn diese Bestimmung nicht eine rein sprachliche ist).

- ‚x_1 ist Philosoph'

‚x_1' ist keine so eindeutige Bestimmung wie ‚Karl Popper', auch hier muss eine *Interpretation* erfolgen, z. B. x_1 = Karl Popper. Dennoch ist ‚x_1' gewissermaßen „konstanten-nah". Es wird ein *einzelnes* und *bestimmtes* Objekt x_1 bezeichnet, auch wenn dies zunächst *unbekannt* ist. Denn es gibt keine Sprach- bzw. Wissensgemeinschaft, in der ‚x_1' eine konstante Bedeutung besitzt. Eindeutig, aber nicht formal wäre nur: ‚x_1[x_1 ist Karl Popper] ist Philosoph'.

- ‚x_i ist Philosoph'

Was steht für x_i? Man findet 2 Deutungen:

Erstens, z. B.: $x_i = x_1, x_2, x_3$. Hier wird x_i nicht allgemein angegeben, sondern jeweils auf den *speziellen* Fall bezogen, es könnte in einem anderen Fall bis x_5 gehen oder bis x_{10} usw., aber in jedem Fall gilt: $i < n$; i ist also limitiert und somit *endlich*.

Zweitens, $x_i = x_1, x_2, \dots, x_n$. Hier kann also jede *natürlich Zahl* n für i eingesetzt werden. Ist diese die Folge dann noch *endlich*? Das ist nicht trivial, einerseits wird zwar ein *letztes Glied* x_n genannt, andererseits gilt: n = 1, 2, 3, ... (meint, die Menge der natürlichen Zahlen ist *unendlich*). Normalerweise versteht man aber $x_1, x_2, \dots, x_n$ als endliche Folge, letztlich ist das eine Definitionsfrage.

Nun kann eine Aufzählung wie $x_i = x_1, x_2, x_3$ hier nur *disjunktiv* gemeint sein, d. h. durch ein „*oder*“ verknüpft, z. B.: ‚x_i = Sokrates oder x_i = Platon oder x_i = Aristoteles’. Bezogen auf den Beispiel-Satz, z. B.: ’x_i ist Philosoph $\leftrightarrow$ Sokrates ist Philosoph oder Platon ist Philosoph oder Aristoteles ist Philosoph’.

Formal schreibt man: ‚$Fx_i \leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee Fx_3$’. In jedem Fall bezieht sich ‚x_i’ also auf verschiedene Möglichkeiten, von denen aber nur *eine gemeint* ist. Deutlicher würde der Bezug auf *ein* Individuum, wenn man die Kontravalenz >< wählte: ‚$Fx_i \leftrightarrow Fx_1 >< Fx_2 >< Fx_3$’. Denn hier ist eindeutig, dann nur eins von den genannten x die Eigenschaft F besitzt. Aber um die Darstellung nicht noch komplizierter zu machen, bleibe ich bei der Disjunktion $\vee$.

Kann man nun (nach dieser Definition) einen Satz wie ‚Sokrates ist Philosoph’ mit ‚x_i ist Philosoph’ wiedergeben? ‚Sokrates ist Philosoph’ schließt nicht aus, dass auch andere Personen Philosophen sind. Nun ist ‚$Fx_i \leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee Fx_3$’ ja auch wahr, wenn z. B. nur ‚Fx_2’ wahr ist. ‚Fx_2’ könnte aber stehen für ‚Platon ist Philosoph’, es ist daher nicht gesichert, dass gilt: ‚Sokrates ist Philosoph’. Somit scheint die Verwendung von ‚x_i’ als Individuen-Konstante nur bedingt geeignet, sie entspricht jedenfalls nicht dem Eigennamen bzw. dem Individual-Satz in der normalen Sprache.

• ‚x_n ist Philosoph’

$n = 1, 2, 3, ...$ somit: $x_n = x_1, x_2, x_3, ...$ Hier wird *kein Endglied* genannt, insofern bezieht sich $x_n = x_1, x_2, x_3, ...$ auf eine *unendliche* Reihe. Allerdings ist es wiederum *disjunktiv* zu verstehen: $Fx_n = Fx_1 \vee Fx_2 \vee Fx_3 \vee ...$ Nicht konjunktiv als: $Fx_n = Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge Fx_3 \wedge ...$ Dennoch ist x_n wenig geeignet als Darstellung einer Individuen-Konstante.

Fazit: Echte Individuen-Konstanten gibt es gar nicht in der Logik, es sei denn man nimmt eben eine Konstante wie ‚$x_{sokrates}$’, aber dann könnte man im Grunde direkt die Konstanten der *normalen Sprache* verwenden. Am nächsten den Konstanten sind Ausdrücke mit *singulärem Zahl-Index* wie ‚x_1’. Wenn man eine allgemeinere Form der Konstante will, notiert man am besten ‚x_i’ (nur ist eben eine allgemeine Form einer Konstante letztlich eine Variable). Wie sich aber später noch zeigen wird, ist es für die logischen Schlüsse ohne Belang, welche Notation man wählt; alle folgenden Formulierungen sind gleichermaßen gültig:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx_1 \Rightarrow Gx_1$

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx_i \Rightarrow Gx_i$

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx_n \Rightarrow Gx_n$

2) *Normale Sprache*

Betrachten wir nun zum Vergleich die Individuen-Konstanten in der *normalen Sprache*. Hier scheint zunächst klar: Eine Individuen-Konstante ist ein *Eigenname*. Die Verhältnisse sind bei genauer Analyse aber noch komplizierter als in der Logik. Nehmen wir einen *Vornamen* wie ‚Hans’. Er ist sicher angelegt als Konstante, faktisch heißen aber Tausende Menschen ‚Hans’ – so gesehen müsste man ‚Hans’ als Individuen-*Variable* führen.

Dagegen kann man einen *vollständigen Namen*, mit Vor- und Nachnamen, wie ‚Karl Popper’ als eine echte Konstante, mir klarer Extension ansehen; natürlich können ggf. auch mehrere Personen den gleichen Namen, z. B. ‚Karl Popper’ haben, dem könnte man durch Nennung des vollständigen Namens ‚Sir Karl Raimund Popper’ wahrscheinlich entgehen, jedenfalls fungiert der vollständige Name nicht als Variable, selbst wenn mehrere so heißen.

Allerdings gibt es folgende Problematik der Bedeutung von *Eigennamen*: sie sind in der normalen Sprache (normalerweise) nicht *sprachlich* definiert. Man findet in einem reinen *Wörterbuch* nicht die Bedeutung von ‚Karl Popper’, sondern nur im *Lexikon*, im Sinne einer „Sacherklärung“. Dies liegt daran, dass eine solche Namengebung im Wesentlichen ein *persönlicher*, *individueller* Akt ist (die Eltern geben ihrem Kind einen Namen) und keine Bedeutungszuweisung in Regie der *Sprachgemeinschaft*. So ist z. B. die Bedeutung des Namens ‚Hans Georg Friedrich Michels’ bei seiner Familie und seinen Freunden bekannt, nicht aber allgemein. Dennoch sind in einer Gesellschaft bestimmte Eigennamen von *Prominenten* in ihrer Extension bekannt, wobei es natürlich große Unterschiede in der Bekanntheit gibt. Eigennamen, deren Extension allgemein bekannt sind, sind außerdem z. B. Namen von Flüssen wie ‚Rhein', ‚Mosel', ‚Lahn' usw. (vgl. auch Punkt 0-3-1-4 zum Thema Definition).

Bei Namen von *unbekannten* Menschen, z. B. ‚Hans Günther Friedrich Michels', weiß also der normale Sprecher der deutschen Sprache nicht, wer damit gemeint ist. Auch hier benötigt man zu dem Namen eine Erklärung, Beschreibung o. ä., was bzw. wer die *Extension* dieses Namens ist; und grundsätzlich muss bei allen Sprachzeichen *zunächst* die Bedeutung, die Intension festgelegt werden. Man könnte daher einwenden: Hier liegen dieselben Verhältnisse vor wie bei der Individuen-Konstante ‚a' (o. ä.) in der formal-logischen Sprache. Der wesentliche Unterschied ist aber: Mit dem Namen ‚Hans Günther Friedrich Michels' wird stets *dasselbe* Individuum bezeichnet, die Bedeutung ist *konstant*, dagegen wird in der Logik durch eine sogenannte Individuums-Konstante wie 'a', je nach Kontext, je nach Beispiel, mal dieses und mal jenes Individuum bezeichnet (genauer schreibe ich darüber im Punkt 0-1-3).

0-2-4-3 INDIVIDUEN-VARIABLEN

1) *Formale, logische Sprache*

Beginnen wir wieder mit der Logik-Sprache: Als *Individuen-Variable* gelten ‚x', ‚y' usw. (jeweils ohne Index). Eine Struktur wie ‚Fx' wird in der Logik normalerweise als *offener Satz* oder *Satzform* (bzw. Satzfunktion, Aussageform) interpretiert, die weder wahr noch falsch genannt werden kann. Eine solche Satzform kann durch 2 Arten in einen echten Satz überführt werden:

erstens, man *bindet* die Variable ‚x' durch Quantoren, z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

zweitens, man *ersetzt* die Variable durch eine Konstante, z. B. ‚x' durch ‚x_1',: Fx_1

Wie ich allerdings aufgewiesen habe, erfordert auch ‚x_1' noch eine *Interpretation*, damit man von einem Satz sprechen kann, der wahr oder falsch ist. Es sei denn, man bewegt sich in einer Sprache, wo ‚x_1' eine bekannte und bestimmte Bedeutung besitzt.

Aber wie definiert man ‚x'? Man kann *syntaktisch* festlegen, dass für ‚x' eine *Individuen-Konstante* eingesetzt wird, z. B. ‚x_1' oder ‚x_2', wodurch dann z. B. aus der *Satzform* ‚Fx' der *Satz* ‚Fx_1' entsteht. Aber dass ‚x' quasi nur als Leerstelle fungiert, ist keine echte, semantisch ausreichende Erklärung. Es muss ein *Definitionsbereich* (oder Individuenbereich) für ‚x' angegeben werden, aus dem dann Konstanten auszuwählen sind. Anders gesagt, ‚x' ist als *Zusammenfassung* von Konstanten zu bestimmen.

Nun könnte ich hier im Wesentlichen das wiederholen, was ich zur Definition der Individuen-*Konstante* (z. B. ‚x_1') gesagt habe. Denn wie erläutert, gibt es in der formalen Sprache gar keine echten Konstanten, die sogenannten Konstanten sind letztlich auch Variablen (oder Unbekannte). Dennoch will ich bei der Bestimmung der Individuen-*Variable* noch einige neue Aspekte hinzufügen. Wenn man eine Variable als Zusammenfassung von Konstanten deutet, so muss unterschieden werden, ob diese Zusammenfassung *konjunktiv* oder *disjunktiv* zu verstehen ist.

- *konjunktiv*: z. B. $x = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$

Man könnte darüber diskutieren, ob es zulässig ist, die Konjunktion $\wedge$ bei *Objekten* wie x_1, x_2 usw. zu verwenden oder nur bei *Relationen/Sätzen* wie Fx_1, Fx_2 usw., für die sie eigentlich definiert ist (darauf gehe ich an späterer Stelle ein). Man kann diesem Problem entgehen, indem man formuliert: ‚$Fx \leftrightarrow Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge Fx_3$'. Diese konjunktive Form kann aber hier kaum gemeint sein. Nehmen wir als Beispiel ‚Fx' für ‚x ist Philosoph'. Es muss hier reichen, nur *eine* Konstante einzusetzen, z. B. nur ‚Sokrates' einzusetzen, denn meint man nur jeweils diese *eine* Objekt (Person). ‚$Fx \leftrightarrow Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge Fx_3$' ist aber nur wahr, wenn die Eigenschaft F für alle drei Konstanten wahr ist, also z. B. für Sokrates und Platon und Aristoteles gilt. Das Problem verschärft sich noch, wenn man ‚x' *allgemein* bestimmt als: $x = x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$.

• *disjunktiv*: z. B. $x = x_1 \vee x_2 \vee x_3$
‚x' muss also als *Disjunktion* der Konstanten dargestellt werden, die eingesetzt werden können. Um das o. g. Problem zu vermeiden, schreiben wir statt generell ‚$x = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$' besser ‚$Fx \leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee ... \vee Fx_n$', wenn wir n Glieder zulassen wollen. Falls wir einen *unendlichen* Definitionsbereich annehmen, schreiben wir ‚$Fx \leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee ...$ (ohne Endglied). Wir könnten natürlich auch einen enger limitierten Definitionsbereich nehmen, z. B. $Fx \leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee Fx_3$. Dies ist allerdings auch die Definition, die wir oben für die Individuen-Konstante x_i genommen haben, was wiederum das Problem der Abgrenzung von Konstanten und Variablen zeigt).

Wie sich im Kapitel über Quantoren-Logik aber noch zeigen wird, gilt:

$$Vx(Fx) \Leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee ... \vee Fx_n$$

Somit würde gelten: $Fx \Leftrightarrow Vx(Fx)$. Und $Vx(Fx)$ bedeutet: ‚Es gibt mindestens ein x, für das gilt: es hat die Eigenschaft F'. Dies ist aber ein *Satz*, der durchaus wahr oder falsch sein kann. Insofern ist die Gleichsetzung $Fx \Leftrightarrow Vx(Fx)$ sehr problematisch, oder man müsste Fx anders interpretieren als bisher.

Außerdem ergibt sich ein weiteres Problem: $Fx_1 \vee Fx_2 \vee ... \vee Fx_n$ ist nur wahr, wenn wenigstens *eine* Einsetzung (*eine* Konstante) wahr ist. Ist das aber bei einer Variablen verlangt? Oder kann es auch sein, dass es für eine Satzform keine Konstante gibt, welche die Satzform zu einem wahren Satz macht?

Fazit: Es ist offensichtlich schwierig, eine klare *semantische* bzw. *logische* Definition einer Variablen zu finden. Die beste Lösung ist doch die *Disjunktion von Konstanten* (wobei man den Definitionsbereich ja nach Bedarf limitieren kann). Wenn einem die genannten Probleme hierbei zu bedenklich scheinen, muss man sich notfalls doch mit der *syntaktischen* Definition der „Leerstelle" zufrieden geben, jedenfalls, bis eine bessere Alternative gefunden ist.

2) *Normale Sprache*
Die Frage ist nun, was sich daraus für die *normale Sprache* ergibt. Wie ist die Individuen-Variable ‚x' normal-sprachlich zu verstehen? Generell ist 'x' hier zu übersetzen als *‚Objekt'* (‚Ding', ‚Gegenstand') o. ä. Dabei ist folgendes zu bedenken: In der normalen Sprache werden Individuen- und Klassen-Zeichen anders gehandhabt als in der logischen Sprache. In der formalen Sprache hat man die Individuen-Variable ‚x', auf die ein *Quantor* (z. B ‚Λ') angewandt wird und der dann *Prädikatoren* (Eigenschafts- oder Klassen-Ausdrücke wie ‚F') zugeordnet werden, z. B. $\Lambda x(Fx)$.

In der normalen Sprache werden aber Klassen-Ausdrücke (bzw. Eigenschafts-Ausdrücke) selbst *quantifiziert*, dabei jedoch *individualisiert*. Diesen Klassen-Ausdrücken werden andere Klassen-Ausdrücke zugeordnet. Z. B. ‚Alle Menschen sind sterblich'. Der Quantor „alle" richtet sich hier auf den Klassenausdruck ‚Mensch'. Dann wird ‚Mensch' der Eigenschafts-Ausdruck ‚sterblich' zugeordnet. In diesem Zusammenhang ist es auch keineswegs trivial, ob ‚Objekt' als Individuums-Zeichen oder Klassen-Zeichen zu verstehen ist (vgl. unten).

Dennoch will ich hier für ‚x' ‚Objekt' einsetzen, weil das noch am ehesten der formalen Sprache entspricht; allerdings sind dabei folgende Möglichkeiten zu unterscheiden:

x = Objekt
x = das (dieses) Objekt
x = irgendein Objekt

• x = Objekt
Hier wird nur ‚Objekt' eingesetzt, ohne Zusätze. Als *Satzform* ergibt sich z. B.: ‚Objekt ist Mensch'. Diese Satzform ist, wie gefordert, weder wahr noch falsch, allerdings ist sie auch kein grammatikalisch korrekter Satz, von daher ist ihre Verwendung in der normalen Sprache fragwürdig. Die Satzform ‚Objekt ist Mensch' wird z. B. durch Einsetzen des Eigennamens

‚Sokrates' in eine wahre Aussage überführt. Oder durch Quantifizierung wird die Variable ‚Objekt' gebunden. Z. B. ergibt sich: ‚alle Objekte' bzw. ‚für alle Objekte gilt ...'.

- x = das Objekt

Hier ergibt sich als Satzform z. B. ‚das Objekt ist Mensch'. ‚x' soll dabei normal-sprachlich also ‚das Objekt' (oder ‚dieses Objekt') entsprechen. ‚x ist Mensch' entspricht dann ‚das Objekt ist Mensch'. In der Tat kann man dem Satz ‚das Objekt ist Mensch' keinen Wahrheitswert zuordnen, er ist unbestimmt.

Meines Erachtens ist aber die Interpretation von ‚x' als ‚das Objekt' problematisch: denn ‚das' verweist (als definiter Artikel) gerade im Gegensatz zur *unbestimmten* Variable auf etwas *Bestimmtes,* so dass ‚das Objekt ist Mensch' – wenn nicht in einem speziellen Kontext gebraucht – einfach *grammatisch falsch* ist.

- x = irgendein Objekt

Bliebe die Möglichkeit, ‚x' normal-sprachlich zu interpretieren als *irgendein* Objekt, d. h. irgendein beliebiges Objekt aus der Klasse aller Dinge (Allklasse: $x = x_1, x_2, \dots, x_n$). Man kann natürlich den *Individuenbereich*, den Bereich der Dinge, aus dem x stammen kann, auch irgendwie einschränken ist, z. B. durch $x = x_1, x_2, x_3$. Für ‚x ist Mensch' ergibt sich dann im Beispiel ‚irgendein Objekt ist Mensch', und dies ist durchaus ein *Satz* und kann wahr oder falsch sein. Hier ergibt sich aber wieder das schon oben angesprochene Problem: ‚Irgendein Objekt ist Mensch', kann man wohl als gleichbedeutend ansehen mit ‚es gibt (mindestens) ein Objekt, das Mensch ist'. Das notiert man aber mit Hilfe des sogenannten *Existenz-Quantors*: ‚Vx(x $\in$ Mensch)'. Hier wäre also die Variable ‚x' automatisch eine *gebundene* Variable, was nicht sinnvoll ist.

Damit ergibt sich als beste Lösung doch: Man übersetzt die logische Individuen-Variable ‚x' normalsprachlich mit ‚Objekt', es sei denn, man benutzt einfach das ‚x' aus der Logik-Sprache. Zwar gibt es in der normalen Sprache auch andere Zeichenklassen, die als Variablen fungieren können, vor allem die *Pronomen* wie z. B. ‚er' oder ‚dieser'; sie eignen sich aber nicht für eine allgemeine Theorie der Variablen (lassen sich z. B. auch nicht quantifizieren).

Fassen wir die Aussagen über *Individuen-Konstanten* und *Individuen-Variablen* noch mal (mit Beispielen) zusammen:

1. <u>normal-sprachlich</u>
   - *Konstanten*: ‚Sokrates', ‚Platon'
     konstanter Satz: ‚Sokrates ist Philosoph'
   - *Variablen*: ‚Objekt' (der Status von Individuen-Variablen ist hier problematisch)
     variabler Satz: ‚Objekt ist Philosoph'
     ggf. ‚Sokrates oder Platon oder Aristoteles oder anderes Objekt ist Philosoph'

2. <u>logik-sprachlich</u>
   - *Konstanten*: ‚x_1, x_2, x_3' usw., allgemein ‚x_i' bzw. ‚y_i' (keine echten Konstanten)
     konstanter Satz: ‚x_1 ist Philosoph'
   - *Variablen*: ‚x', ‚y'
     variabler Satz: *ungebundene* Variable: 'x ist Philosoph' (Satzform)
     variabler Satz: *gebundene* Variable: z. B. ‚Vx(x ist Philosoph)'

0-2-4-4 KLASSEN-ZEICHEN BZW. EIGENSCHAFTS-ZEICHEN

Ich erspare mir, nach der obigen Analyse von *Individuen*-Variablen und -Konstanten entsprechende Überlegungen noch einmal im Detail für *Klassen*-Variablen und -Konstanten anzustellen, da dies zu vielen Wiederholungen führen würde. Allerdings muss ich auf folgende besondere Probleme hinweisen. Dabei gehe ich zunächst von der *normalen* Sprache aus. Es stellen sich vor allem zwei Fragen, anhand des Beispiels ‚Mensch':

1) Frage: Ist ‚Mensch' ein *Individuums*- oder ein *Klassen*-Zeichen?
Diese Frage scheint leicht zu beantworten. ‚Mensch' ist ein *Klassen-Zeichen* (bzw. Eigenschafts-Zeichen), denn ‚Mensch' bezeichnet die Klasse der Menschen (oder die Eigenschaft „Mensch"). Aber man kann ‚Mensch' quasi wie eine *Individuums*-Variable verwenden. ‚Mensch ist sterblich' sei die *Satzfunktion*. Durch Einsetzen von z. B. ‚Platon' erhalte ich den wahren Satz: ‚Platon ist sterblich'. Andererseits kann man auch durch Quantifizierung von ‚Mensch' einen Satz erzeugen: ‚Für alle Menschen gilt: sie sind sterblich'.

Dies kann man alles in der *formalen Sprache* nicht machen. Man kann einen Klassenausdruck wie ‚F' (entsprechend ‚Mensch') zwar quantifizieren, aber nicht in dem Sinne: ‚für alle F gilt'.

Dennoch will ich daran festhalten, dass ‚Mensch' und andere vergleichbare Wörter *Klassen-Ausdrücke* sind, nur geht die normale Sprache damit syntaktisch anders um als die formale logische Sprache. Man kann in der normalen Sprache ein Zeichen wie ‚Mensch' nicht nur auf die Klasse als Ganze anwenden, sondern auch auf die Individuen, die Elemente der Klasse sind. Ein Wort wie ‚Mensch' in der normalen Sprache ist vielfältiger, flexibler verwendbar als ein Prädikator 'F' in der logischen Sprache, mit Vorteilen und Nachteilen. Fazit: ‚Mensch' ist ein Klassen-Zeichen, das aber auch als Individuen-Zeichen verwendet werden kann.

2) Frage: Ist ‚Mensch' eine *Konstante* oder eine *Variable*?
Auch hier scheint die Antwort zunächst klar: Z. B. in der *Satzform* ‚x ist ein Mensch' ist ‚x' eine Variable und ‚Mensch' eine Konstante. Aber ich schon oben gezeigt habe: man kann ‚Mensch' auch wie eine Variable verwenden, denn ich kann ‚Mensch' ja auf ganz unterschiedliche Individuen anwenden, auf Sokrates, Platon usw. Das gilt offensichtlich generell in der normalen Sprache. Von daher hatte ich auch das sehr allgemeine Wort ‚Objekt' als Variable eingeführt. Und so kann man fragen, ob es in der normalen Sprache überhaupt echte, eindeutige Konstanten gibt.

Zunächst kann man darauf hinweisen: Es gibt Zeichen *unterschiedlicher Bestimmtheit*, z. B. das Wort ‚Lebewesen' hat weniger Merkmale (kleinere Intension) als der Begriff ‚Pflanze', bezieht sich aber in der Wirklichkeit auf mehr Objekte (größere Extension). So gesehen ist ‚Lebewesen' in größerem Ausmaß eine Variable als ‚Pflanze', denn es ist vieldeutiger. So könnte man eine *Kette unterschiedlicher Variabilität* aufstellen, z. B. ergibt sich folgende Reihenfolge: Lebewesen – Pflanze – Blume – Rose. ‚Lebewesen' ist unbestimmter als ‚Pflanze' usw.

Aber dass z. B. ‚Lebewesen' sich als Variable ansehen lässt, muss man nicht semantisch durch die Vielzahl der bezeichneten Individuen begründen, sondern man kann auch *syntaktisch* auf andere Variablen verweisen. Für ‚Lebewesen' könnte man z. B. einsetzen ‚Pflanze' oder ‚Tier'. Dann wäre ‚Lebewesen ist sterblich' ein Satz mit einer Variablen und müsste überführt werden in ‚Pflanze ist sterblich' oder ‚Tier ist sterblich'; aber ‚Pflanze' und ‚Tier' könnten ja wiederum als Variablen gelten. Im Prinzip wären das also alles Variablen. Aber stimmt das wirklich? Kann man z. B. ‚Mensch' wirklich als Variable bezeichnen?

Hier gibt es folgendes zu unterscheiden:' Mensch' bezeichnet zum einen die *Klasse* aller Menschen ($Mensch_1 \cup Mensch_2 \cup ... \cup Mensch_n$). Auch wenn ‚Mensch' hier viele Objekte bezeichnet, es bezeichnet sie *insgesamt*, gleichzeitig, nicht alternativ und ist daher eine Konstante, eben eine *Klassen-Konstante;* denn die kann ja nicht nur *ein* Objekt bezeichnen, sie bezeichnet die ganze Klasse. Und wenn man einwendet, dass für ‚Mensch' z. B, ‚Mann' oder ‚Frau' einsetzt werden kann, so sind Männer und Frauen eben *Teilmengen* der Klasse der Menschen.

Andererseits kann ‚Mensch' (bzw. ‚dieser Mensch') auch alternativ, *wechselnd* mal diesen oder mal jenen individuellen Menschen bezeichnen. Es hat hier die Funktion einer Variablen, aber einer *Individuums-Variablen*, nicht einer Klassen-Variablen. ‚Mensch' bezeichnet nicht unterschiedliche Klassen, es kann nicht z. B. die Klasse der Pflanzen oder die Klasse der Hunde bezeichnen.

Man kann es vielleicht so zusammenfassen: ‚Mensch' kann einmal als *Konstante* fungieren und einmal als *Variable*. Und das gilt offensichtlich generell in der normalen (deutschen) Sprache, es gilt z. B. auch für ‚Objekt'. Wahrscheinlich sollte man aber folgendermaßen betonen: ‚Mensch' ist primär eine Konstante, kann aber auch als Variable verwendet werden.

Wie ist das in der *formalen* Sprache? Hier ist das anders, weil man immer zunächst die Individuen-Variable ‚x' einführt. Ein Klassen-Zeichen wie ‚F' (entsprechend ‚Mensch') kann nie ein einzelnes Individuum bezeichnen, sondern dies geht nur über Individuums-Konstanten.

Ich verwende als Klassen-Zeichen (bzw. Eigenschafts-Zeichen) vorwiegend ‚F' und ‚G'. Ich verstehe sie zunächst als *Variablen*. Aber sollten sie in einem Kontext als *Konstanten* verstanden werden, will ich dies nicht durch zusätzliche Indizes wie in ‚F_i'oder ‚F_j' verkomplizieren. Auch ‚F_1'oder ‚F_2' sind offen für beide Interpretationen, als Konstanten und Variablen. Ggf. kann man Zeichen wie ‚Mn' (mit der Bedeutung ‚Mensch') verwenden, wenn es notwendig sein sollte, sie als Konstanten auszuweisen.

0-2-4-5 ABSCHLUSS

Es ist wohl folgendes deutlich geworden:

1) Obwohl man sich gerade in der formalen *logischen* Sprache Präzision wünschen würde, gibt es hier einen – schwammigen – Übergang von Konstanten zu Variablen. Präzision wird nur durch die Formalisierung vorgetäuscht. In der normalen Sprache sind die Verhältnisse wohl noch komplizierter. Die Eigennamen sind zwar als Konstanten klarer bestimmt als die Individuen-Konstanten in der Logik, aber im Bereich der Klassen-Zeichen herrscht in der normalen Sprache eine *Multifunktionalität*. Eine wirklich präzise Fassung von Konstanten versus Variablen steht noch aus.

2) In jedem Fall geht es bei einer Neufassung mehr um eine Relativierung des Unterschiedes von Konstante und Variable, zugunsten einer *quantitativen* Theorie der *Bestimmtheit* (vgl. unten). Ist ein Objekt bzw. ein Zeichen *total bestimmt* (reine Konstante) oder wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? Bei *unendlichen vielen* Möglichkeiten ist es *absolut variabel*. Allerdings geht es dabei um die *wechselnde* Verwendung, eine Klassen-Konstante bezeichnet die Klasse als Ganze – mit vielen Elementen –, sie bleibt dennoch eine Konstante.

3) Es ist aber für die Logik gar nicht so wesentlich, ob man mit Konstanten oder mit Variablen als *deskriptiven* Zeichen arbeitet, Konstanten sind im Wesentlichen verzichtbar. Letztlich kann die *formale* logische Sprache prinzipiell keine echten Konstanten besitzen, weil sie eben formal ist und nicht inhaltlich bestimmt. Die *Unterscheidbarkeit* ist wichtig, ich muss nicht wissen, welche Bedeutung ‚x_1' und ‚x_2' haben, es reicht, dass ich sie unterscheiden kann.

4) Generell kann man den Unterschied zwischen Konstanten und Variablen vor allem anhand von drei Begriffen definieren: *Quantität*, *Konstanz*, *Bestimmtheit* – dabei ist Quantität das primäre. Es geht jeweils um die *Bedeutung*, also z. B. bei Quantität um einheitliche oder vielfältige Bedeutung.

	Konstante	*Variable*
Quantität	einheitlich	vielfältig
Konstanz	gleich	wechselnd
Bestimmtheit	bestimmt	unbestimmt

Eine *quantitative Formel* von Konstanz bzw. Variabilität könnte folgendermaßen aussehen:

p(Konstanz) = 1/n.

Dabei ist n die *Anzahl von Bedeutungen*, für die das Zeichen alternativ/wechselnd stehen kann. Nur bei p(Konstanz) = 1 liegt im strengen Sinn eine *Konstante* vor.

Veranschaulichen wir uns das an der Individuen-Variablen ‚x':

Variable	Bedeutung	p(Konstanz)
‚x'	x_1	1/1 = 1
	x_1, x_2	1/2 = 0,5
	x_1, x_2, x_3	1/3 = 0, 33
	x_1, x_2, x_3, x_4	1/4 = 0,25
	....	
	$x_1, x_2, \dots, x_n$	1/n
	$x_1, x_2, \dots$	$1/\infty \approx 0$ (oder: $1/\infty = 0$)

In 3-1-5 wird ähnlich ein *quantitativer Bestimmtheits-Wert* eingeführt.

0-2-5 Relationen

0-2-5-1 LOGISCHE RELATIONEN

Relationen sind neben *Objekten* (bzw. Eigenschaften) die zweite Basiskomponente der Logik. Relationen sind Beziehungen, Verhältnisse zwischen zwei oder mehr Entitäten.

Nachfolgend in Kürze bzw. als Wiederholung Wesentliches über logische Relationen:

• *Extensionale und intensionale Relationen*

– *extensional*:

atomar: Relationen zwischen *Objekten*, also zwischen Individuen, Mengen/Klassen

molekular: Relationen zwischen *Objekt-Relationen*

– *intensional*:

atomar: Relationen zwischen *Eigenschaften*

molekular: Relationen zwischen *Eigenschafts-Relationen*

– *gemischt extensional-intensional*:

atomar: Relationen zwischen Objekten und Eigenschaften

molekular: Relationen zwischen *gemischten Relationen*

• *Relationen versus Objekte*: Relationen sind einerseits klar von *Objekten* zu trennen. Relationen bzw. Strukturen, z. B. Aussagen, sind wahr oder falsch, von Objekten kann man dagegen nicht sagen, sie sind wahr oder falsch (jedenfalls nach üblicher Deutung). Andererseits haben wir gesehen: Ein Objekt ist ein Träger, der bestimmte Eigenschaften „trägt". D. h. aber nichts anderes, als dass der *Träger in Relation zu diesen Eigenschaften* steht. Insofern geht der Begriff der Relation also schon in die Definition des Objekts ein. Nur wenn man von *formalen* Objekten ausgeht, sind diese ohne direkten Rückgriff auf Relationen zu fassen.

Die gleiche Thematik hatte man schon bei Objekten und Eigenschaften. *Inhaltlich* bestimmte Objekte enthalten bereits Eigenschaften, nur *formale* Objekte sind frei von Eigenschaften.

Dass sich hier – bei inhaltlicher Deutung – gewisse Überschneidungen zwischen den Grundbegriffen ergeben, sehe ich aber nicht als echtes Problem. Es verweist darauf, dass es sich bei Objekten, Eigenschaften und Relationen um Komponenten eines *Systems* handelt.

• *Ebene der Relation*: sprachlich = Aussage/Satz, psychisch = Urteil, real = Sachverhalt. Logische Relationen enthalten aber in keinem Fall *räumliche*, *zeitliche*, *kausale* oder andere reale Komponenten. So besteht bei der *Implikation* $X \rightarrow Y$ oder dem *Schluss* $\Phi \Rightarrow \Psi$ *keine zeitliche Folge*. Sondern es geht bei ihnen nur um (quantitatives) *Enthaltensein*, *gemeinsames Auftreten, funktionale Abhängigkeiten* o. ä. Das wird noch genauer erläutert werden.

• *Logische und hyper-logische Relationen*
– *Hyper-logische* Relationen sind z. B. *kausale* Wirkung, *räumliche* Nähe, *zeitliche* Folge, *Zielgerichtetheit* usw.
– *Logische Relationen* liegen *hyper-logischen* (über-logischen) Relationen wie z. B. *Kausalität* zugrunde. Das heißt, die kausalen Ursache-Wirkungs-Relation hat eine logische Struktur, es kommen aber noch andere Komponenten hinzu, etwa der Faktor Zeit – die Ursache geht der Wirkung zeitlich voraus.

Dennoch muss man logische Relationen nicht auf *abstrakte* Objekte beziehen, logische Relationen bestehen sehr wohl auch zwischen raum-zeitlichen Objekten.

• *Definition einer Relation*
Man kann für eine *logische Relation* schreiben:

X R Y. Soll heißen: X steht zu Y in Relation.
Alternative Schreibweise: R(X,Y)

Will man auf eine *bestimmte* Relation verweisen, kann man schreiben: $R_i(X,Y)$

Nehmen wir als Beispiel die Relation $X \rightarrow Y$.
Genauer kann man unterscheiden:

$X \rightarrow Y$	*Relationssystem* bzw. *Struktur* (das Ganze)
X, Y	*Relata*
$\rightarrow$	*Relation* (die Beziehung)
‚$\rightarrow$’	*Relator* (das Zeichen)

Noch allgemeiner wäre zu schreiben $R(\Phi,\Psi)$, wobei Φ und Ψ für beliebige Entitäten stehen können (vgl. später).

Der Terminus ‘*Relationssystem’* (oder ‚*Relationsgefüge’*) ist recht sperrig. Ich nutze daher vorwiegend zwei Alternativen:
- Wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, verwende ich ‘Relation’ auch für $X \rightarrow Y$ und nicht nur für die *eigentliche* Relation $\rightarrow$.
- Oder ich verwende (wie gesagt) für das Relationssystem $X \rightarrow Y$ den Terminus ‘Struktur’.

• *Subjekt und Prädikat*: Herkömmlich unterscheidet man in einem Satz zwischen *Subjekt* und *Prädikat*. Man könnte diese Unterscheidung auch auf eine Relation beziehen. Nur ist diese Unterscheidung primär eine *pragmatische*: man wählt eine Entität als diejenige aus, *über die* man etwas aussagt (Subjekt), indem man ihr etwas anderes zuordnet (Prädikat).

Aber in einer Relation X R Y ist es logisch gesehen nicht von Relevanz, welches Relat man als Subjekt oder Prädikat auswählt. Es ist logisch gleichgültig, ob man z. B. formuliert:

„X ist Vorfahre von Y“ (X = Subjekt) Oder: „Y ist Nachfahre von X“ (Y = Subjekt).

Es liegt dieselbe Relation zugrunde. Es recht gilt das bei primär logischen Strukturen wie „$X \rightarrow Y$“. Diese ist logisch äquivalent mit „$Y \leftarrow X$“.

0-2-5-2 RELATOREN

Logische Relationen werden formal durch *Relatoren* ausgedrückt. Es gibt Relatoren der *Prädikaten-Logik* wie ‚$\in$', der *Klassen-Logik* wie ‚$\subset$', am wichtigsten sind aber die Relationen der *Aussagen-Logik*. Bei 2 Aussagen X, Y sind 16 Relatoren bzw. Relationen gegeben. Sinnvoller ist allerdings, von der Zahl 14 (für synthetische Relationen) auszugehen, wie noch zu zeigen sein wird. Die vollständige Liste aller Relatoren wird später gebracht.

Die wichtigsten Relatoren sind:

• Konjunktion	und	formal: $\wedge$	$X \wedge Y$
• Disjunktion	oder (inklusiv)	formal: $\vee$	$X \vee Y$
• Kontravalenz	oder (exklusiv)	formal: ><	X >< Y
• Exklusion	oder (nicht beide)	formal: |	X | Y
• Implikation	wenn – dann	formal: $\rightarrow$	$X \rightarrow Y$
• Äquivalenz	nur wenn – dann	formal $\leftrightarrow$	$X \leftrightarrow Y$

Ich unterscheide dabei 3 *oder*-Relationen:

• *Disjunktion* (*subkonträrer* Gegensatz)
Die Disjunktion $X \vee Y$ schließt – als Möglichkeit – ein, dass X und Y beide positiv sind. Die Disjunktion ist deshalb *inklusiv*.
• *Kontravalenz* (*kontradiktorischer* Gegensatz)
Die Kontravalenz X >< Y meint „entweder – oder": nicht beides und nicht beides nicht. Sie schließt also aus, dass X und Y positiv sind, ich bezeichne sie daher als *exklusiv*. Als Symbol für die Kontravalenz nehme ich das ><, quasi ein umgekehrtes Äquivalenz-Zeichen $\leftrightarrow$ (denn die Kontravalenz ist die Umkehrung der Äquivalenz).
• *Exklusion* (*konträrer* Gegensatz)
Es gibt einen dritten Relator, den man auch zuweilen mit „oder" übersetzt. Dieses „oder" schließt nur aus, dass X und Y beides gilt. Als Symbol dient der „Sheffer Strich": X | Y. Man nennt ihn meistens „*Exklusor*" und die dazu gehörige Relation „Exklusion". Diese Bezeichnung ist leider sehr unglücklich, denn unter exklusivem „oder" versteht man üblicherweise die Kontravalenz, und die Parallele zwischen inklusiver Disjunktion und exklusiver Kontravalenz spielt eine große Rolle. Um nicht von der allgemeinen Terminologie abzuweichen, bleibe ich zwar bei dem Terminus „Exklusion", bezeichne aber dennoch die Kontravalenz als „exklusives oder".

Eine Sonderrolle spielt die *Negation* mit dem Negator $\neg$. Dadurch wird eine *positive* Relation (ein wahrer Satz) X in eine *negative* Relation (einen negierten bzw. falschen Satz) $\neg$X umgewandelt.

0-2-5-4 RELATIONEN UND VERKNÜPFUNGEN

Für die *Implikation* „wenn - dann" ist die Bestimmung als *Relation* unproblematisch. Aber Termini wie „und" (Konjunktion) bzw. „oder" (Disjunktion) sind nicht direkt als Relationen erkennbar.

Von daher ist es verständlich, dass die Logik überwiegend nicht von Relationen ausgeht, sondern von *Verknüpfungen*. Darauf verweist auch der Begriff *Junktor* (von lat. jungere = verbinden), welcher in der Logik überwiegend anstatt ‚Relator' verwendet wird. Denn als Verknüpfungen sind alle logischen Verbindungen, also auch die Implikation, gut zu interpretieren. Und da die moderne Logik sich eben primär auf Aussagen bezieht, geht man von der *Verknüpfung von Aussagen* aus. Aber wo bleiben dann die Relationen?

Angenommen, wir bestimmten die Konjunktion $X \wedge Y$ als *Verknüpfung* und die Implikation $X \rightarrow Y$ als *Relation*. Nun lässt sich aber die Konjunktion $X \wedge Y$ (Verknüpfung) in eine Implikation umformen, nämlich in $\neg(X \rightarrow \neg Y)$, also in eine Relation. Das ist natürlich noch kein Beweis für den Vorrang der Relation, denn umgekehrt kann man auch $X \rightarrow Y$ (Relation) in eine Konjunktion (Verknüpfung) umwandeln, nämlich in $\neg(X \wedge \neg Y)$. Aber es zeigt, dass die Konjunktion und die Implikation logisch auf *einer* Ebene liegen.

Ich halte den Ansatz der *Relation* für sehr viel fundierter. Der Ansatz der Relation wird besser verständlich, wenn man sich klar macht: Bezogen auf Aussagen bedeutet die Konjunktion $X \wedge Y$: „Die Aussagen X und Y sind *zusammen* wahr“. Daran wird deutlich, dass ein Verhältnis, also eine Relation zwischen X und Y besteht.

Dennoch mag man informell auch den Begriff der Verknüpfung verwenden, vor allem für komplexe Relationen wie $(X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y)$.

Wenn man aber ganz präzise vorgeht, sollte man unterscheiden:

- *Verknüpfungen*
  Dies sind Verknüpfungen von *Mengen* wie Schnitt-Menge oder Vereinigungs-Menge (bzw. die entsprechenden Operatoren $\cap$ und $\cup$).
  Mengen-Verknüpfungen wie $M \cap N$ oder $M \cup N$ sind wiederum Mengen, sie sind daher *nicht* wahr (positiv) oder falsch (negativ).
- *Relationen*
  Diese betreffen alle „Junktoren“ bzw. Relatoren der Logik ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ usw.) sowie Relatoren der Mengenlehre ($\subset$, $\supset$, = usw.). Sie sind wahr (positiv) oder falsch (negativ).

0-2-5-4 WAHRHEITS-TAFELN

Die Relationen (Relatoren) werden durch *Wahrheitswerte* bzw. eine *Wahrheitswerte-Tafel*, kurz: *Wahrheitstafel*, definiert. Dabei wird von Aussagen ‚A’ und ‚B’ usw. ausgegangen, die *wahr* (w) oder *falsch* (f) sein können. Ich wähle aber die *neutrale* Form ‚X’ und ‚Y’. Und anstatt *w* oder *f* schreibe ich neutral + oder –.

Generell kann man sagen: Eine logische Komponente X bzw. Y ist:

gültig (+) Alternativen: *belegt*, *positiv*
ungültig (–) Alternativen: *nicht belegt*, *negativ*

Ich schränke den Begriff ‚gültig’ / ‚ungültig’ also nicht auf logische Schlüsse bzw. *logische, analytische* Wahrheit ein, wie dies sonst oft geschieht.

In der Wahrheitstafel werden die *möglichen Welten* angegeben. Bei 2 Relata (bzw. 2 Aussagen oder 2 Variablen) X und Y ergeben sich $2^2 = 4$ *mögliche Welten* oder *logische Welten*: D. h. es wird angeben, welche *Kombinationsmöglichkeiten* von X und Y es gibt:

$$X \wedge Y,\ X \wedge \neg Y,\ \neg X \wedge Y,\ \neg X \wedge \neg Y$$

Dann wird angegeben, bei welchen dieser Möglichkeiten, in welcher dieser Welten, der betreffende Relator (bzw. die Relation) als gültig gilt.

Für die Implikation $X \rightarrow Y$ ergibt sich folgende Wahrheitstafel:

X	→	Y
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	+	–

Eine alternative Form der Wahrheitstafel sieht folgendermaßen aus:

X	Y	$\rightarrow$
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	–	+

Die wichtigste Deutung der Wahrheitstafel ist: Man schließt von X und Y auf $X \rightarrow Y$. Also z. B.: Wenn X, Y gültig sind (X+, Y+), dann ist auch $X \rightarrow Y$ bzw. $\rightarrow$ gültig (+) usw.

Aber insgesamt sind folgende Deutungen der Wahrheitstafel möglich:

- Man schließt von X,Y auf $X \rightarrow Y$
- Man schließt von X auf $X \rightarrow Y$
- Man schließt von Y auf $X \rightarrow Y$
- Man schließt von $X \rightarrow Y$ auf X,Y
- Man schließt von $X \rightarrow Y$ auf X
- Man schließt von $X \rightarrow Y$ auf Y

$X \rightarrow Y$ ist also in 3 Welten belegt bzw. wahr. Diese Welten sind hier durch folgende Parameter gekennzeichnet $X \wedge Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$. Das darf man nun nicht so verstehen, dass diese drei (bzw. sogar alle vier) Welten nebeneinander bestehen. Nur *eine* Welt ist *real*, die anderen drei sind zwar theoretisch möglich, aber *irreal*. Es ist unmöglich, das auch nur 2 dieser Welten nebeneinander bestehen, denn sie sind alle zueinander *kontradiktorisch*.

Z. B. ist die *Kombination*, also die *Konjunktion* $(X \wedge Y) \wedge (X \wedge \neg Y)$ kontradiktorisch, und das gilt auch für alle anderen Kombinationen; wenn man nur die *2er*-Kombinationen berücksichtigt, dann gibt es 7 Kombinationen, diese stehen alle für *unmögliche* Welten.

Denkbar ist nur, dass man den *Geltungsbereich* der verschiedenen Welten einschränkt, vor allem:

- *zeitlich*: zum *jetzigen Zeitpunkt* gilt die Kombination Φ (z. B. $X \wedge Y$), aber zu einem *anderen Zeitpunkt* gilt die Kombination Ψ (z. B. $\neg X \wedge \neg Y$). Diese zeitliche Einschränkung bzw. Differenzierung ist die wichtigste.
- *räumlich*: an einem *Ort* (z. B. dem Ort o_i) gilt die Kombination Φ, aber an einem anderen Ort (z. B. dem Ort o_j) gilt die Kombination Ψ.
- *konditional*: unter der einen *Bedingung* gilt die Kombination Φ, aber unter einer anderen Bedingung gilt die Kombination Ψ.

Als wichtigste Relationen hatte ich genannt: $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X >< Y$, X / Y, $X \rightarrow Y$, $X \leftrightarrow Y$

Die *Wahrheitswertetafeln* für die entsprechenden Relatoren sind:

X	Y	$\wedge$	$\vee$	$><$	/	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
+	+	+	+	–	–	+	+
+	–	–	+	+	+	–	–
–	+	–	+	+	+	+	–
–	–	–	–	–	+	+	+

0-2-5-5 POSITIV-IMPLIKATION

Die Implikation wirft verschiedene Probleme auf, sie führt zu *paradoxen* Ergebnissen und sie entspricht auch nicht unserem *normalen Sprachgebrauch* (genauer dazu später in 1-1-1-2).

Gehen wir von folgendem einfachen Beispiel aus:
„Wenn es regnet, ist die Strasse nass“. Mit dem Implikations-Pfeil → geschrieben:
„Es regnet → Die Strasse ist nass“

Es regnet	→	Die Strasse ist nass
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	+	–

Die Implikation X → Y ist also auch gültig (+), wenn das Vorderglied X ungültig (–) ist. Danach ist die Beispiel-Relation auch gültig, wenn es nicht regnet, egal, ob die Strasse nass ist oder nicht. Konkret, die Gesamtstruktur „Es regnet → Die Strasse ist nass“ könnte sogar gültig sein, wenn es niemals regnet und die Strasse immer trocken bleibt. Das entspricht sicher nicht der Bedeutung des Satzes, wie wir ihn in *normaler Sprache* verwenden.

Aber unabhängig von diesem Beispiel, die Definition der Implikation X → Y entspricht *generell* nicht der Deutung von *Wenn-dann-Sätzen* in der normalen Sprache. Denn die *normal-sprachliche* Implikation gilt nicht als wahr, wenn der Vordersatz (X) falsch ist. Um normal-sprachliche Strukturen (Sätze) zu formalisieren, bietet sich daher eine andere Implikation an.

Doch die Implikation ist nicht nur problematisch im Hinblick auf die *normale Sprache*, sondern sie führt auch *innerhalb der Logik* zu *Paradoxien*, wenn man sie als *Folge-Beziehung* interpretiert). Dies gilt für *synthetische* Implikationen wie X → Y und für *analytische* Implikationen (Schlüsse) wie X ⇒ X. Da aus einem *falschen* Vorder-Satz die Wahrheit des Gesamt-Satzes folgt, kann man ¬X ⇒ (X → Y) schreiben. Wenn nun der Vorder-Satz nicht nur einfach ein falscher Satz ist, sondern ein *kontradiktorischer*, d. h. *logisch falscher* Satz, dann kann man aus diesem Satz *jeden beliebigen anderen Satz* logisch ableiten, wie später noch genau gezeigt werden soll. Man kann aus einem Satz sogar sein *eigenes Gegenteil* logisch ableiten, z. B. (X ∧ ¬X) ⇒ ¬(X ∧ ¬X). Dies ist nicht gerade erwünscht in der Logik. Man könnte daher fordern, dass ein Schluss aus einem *falschen* oder sogar *kontradiktorischen* Vorder-Satz „verboten“ sei, so wie in der Mathematik z. B. die *Division durch die Zahl 0* verboten ist, weil sie zu paradoxen Ergebnissen führt.

Da aber eine Implikation, die für *alle* Welten definiert ist – einschließlich derjenigen, in den der Vorder-Satz falsch ist – auch Vorteile hat, ist es sinnvoller, man *ergänzt* die normale Implikation durch eine andere Implikation, in der die geschilderte Problematik nicht auftritt.

Positiv-Implikation
Ich nenne diese andere Implikation ‚*Positiv-Implikation'* und verwende das *Symbol* *→, für die *Gesamt-Relation* X *→ Y. Es wird also der Pfeil → der normalen Implikation genommen und ein Stern * davor gesetzt. Man kann sie auch kurz *Implikation schreiben.

Der Name erklärt sich wie folgt: Die Positiv-Implikation ist nur für die Fälle definiert, in denen das Vorderglied gültig, also *positiv* (+) ist.

Ursprünglich hatte ich das (elegante) Symbol ⌊ für die Positiv-Implikation verwendet, das sich optisch klarer vom → unterscheidet. Für die analytische Implikation ergab sich ⌊⌊, für die Replikation ⌋, für die Äquivalenz ⊥ usw. Aber da das Symbol → in 4 Varianten verwendet wird und zusammen mit Replikation und Äquivalenz sogar in 12, und da für die Positiv-Implikation ebenfalls 12 Varianten zu unterscheiden sind, habe ich ein Symbol bevorzugt, das unmittelbar aus dem bekannten Symbol → abzuleiten ist und nicht erst gelernt werden muss.

Die Positiv-Implikation wird in 2 Varianten eingeführt:

1)

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–

2)

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–
–	□	+
–	□	–

1) *verkürzte* Form
Im ersten Fall werden nur die 2 Welten in der Wahrheitstafel *aufgeführt*, in denen die Positiv-Implikation definiert ist, also in denen das Vorderglied (der Vordersatz) X positiv (+) ist.
2) *vollständige* Form
Im zweiten Fall werden zwar alle 4 Welten genannt, aber in den zwei Welten, in denen der Wenn-Satz falsch ist, bleibt der Wert der Relation *undefiniert* (Symbol □).

Beide Varianten der Positiv-Implikation haben ihre Vorteile, ich verwende sie alternativ, mit dem gleichen Symbol, um nicht unnötig neue Symbole einzuführen. Dazu ein *Beispiel*:

Es regnet	*→	Die Strasse ist nass
+	+	+
+	–	–
–	□	+
–	□	–

Hier zeigt sich also: Wenn der Vordersatz falsch ist, wenn es also nicht regnet, dann ist der Wahrheitswert des Satzes *nicht definiert*, man kann seinen Wahrheitswert nicht angeben.

Generell gilt: Die oben aufgezeigten Paradoxien treten bei der Positiv-Implikation nicht auf, weil ein Schluss von einer *negierten* oder *kontradiktorischen* Prämisse aus *undefiniert* bzw. *unbestimmt* ist, wie noch im Einzelnen gezeigt werden wird.

Beide Implikationen X → Y und X *→ Y haben ihre Bedeutung. Für die *normale Implikation* X → Y spricht: Es ist aus systematischen Gründen sinnvoll, die Implikation in *allen* möglichen (d. h. bei 2 Variablen = 4) Welten zu definieren, und eine andere Deutung der Wahrheitswerte bietet sich auch nicht zwingend an. Nur so lässt sich die Implikation problemlos in andere Junktoren umformen, die auch für 4 Welten definiert sind.

Man kann es auch so ausdrücken: Die normale Implikation X → Y ist, wie alle aussagenlogischen Relatoren, *streng wahrheitswert-funktional*, ihr Wahrheitswert ist eine *vollständige* Funktion der Wahrheitswerte der Teile X und Y. Dagegen ist die Positiv-Implikation nur *eingeschränkt wahrheitswert-funktional*, es wird nur für zwei von vier Welten ein Wahrheitswert für X *→ Y angegeben. Das Verhältnis dieser beiden Implikationen → und *→ wird uns im ganzen Text immer wieder beschäftigen.

0– 3 EXTENSION UND INTENSION

0-3-1 Einführung

0-3-1-1 ÜBERSICHT

Die Begriffe ‚*Extension'* und ‚*Intension'* sind schon mehrfach verwendet worden, sie sollen hier aber genauer erläutert untersucht werden. Die Verhältnisse von Extension und Intension scheinen auf den ersten Blick ziemlich einfach, und so werden sie auch in der Literatur meistens dargestellt. Bei genauerer Analyse erweisen sie sich aber – leider – als äußerst komplex; und so muss eine adäquate Darstellung auch ziemlich kompliziert ausfallen, wenn man nicht der Versuchung der Simplifizierung erliegen will. Der eilige Leser mag diagonal lesen.

Der besondere Teil „Extension und Intension von *Sätzen*" wird ausführlich im *Exkurs* zu diesem Kapitel 0 behandelt. Dennoch bleibt in diesem Kapitel 0 manches zum Thema lückenhaft. Ausführlicher möchte ich auf die Feinheiten von Extension versus Intension erst in einem noch unveröffentlichten Text über „Integrale Philosophie" eingehen.

Die Unterscheidung *Extension - Intension* findet sich, mit unterschiedlicher Terminologie, in fast jeder Logik, und zwar bei allen *drei* genannten Ansätzen, z. B. in folgender Weise:

- Modell *Psyche*: Extension = der Umfang, Intension = der Inhalt (z. B. eines Denkbegriffs)
- Modell *Realität*: Extension = Objekte (bzw. Relationen zwischen Objekten),
  Intension = Eigenschaften (bzw. Relationen zwischen Eigenschaften)
- Modell *Sprache*: Extension = Bezeichnetes (Umwelt-Referent), Intension = der Sinn.

Verwandte Begriffe sind: *Extension = Denotat, Referenz* (engl. reference), *Intension = Signifikat*, *Bedeutung* (engl. meaning) – *Bedeutung* kann allerdings auch als Oberbegriff dienen.

0-3-1-2 SPRACHLICHES MODELL

Am häufigsten geht man – meta-sprachlich – von der *Sprache* aus, fragt also nach der Extension / Intension von *Zeichen* bzw. *Sätzen*. Dies halte ich hier auch so.

Danach sind Extension und Intension Arten von *Bedeutung*. Nun kann sich Bedeutung – in der normalen Sprache – wiederum auf die drei oben genannten Bereiche *Psyche*, *Realität* und *Sprache* beziehen, es lassen sich also psychische, reale und sprachliche Bedeutung unterscheiden – bzw. eine *neutrale* Bedeutung, die aber der realen am nächsten steht.

Die Intension wird zwar oft auch als *Sprachgebrauch* bzw. *Regeln* des Sprachgebrauchs bestimmt, dies ist aber m. E. nur eine Zwischenerklärung, die letztlich doch wieder Bezug auf Objekte, Eigenschaften o. ä. nehmen muss.

Ich ziehe vor, Extension und Intension als *reale* oder realistische bzw. neutrale Bedeutung auffassen. Somit beziehen sie sich, entsprechend dem o. g. Modell der Realität, auf Objekte, Eigenschaften oder Relationen zwischen ihnen.

Geht man vom sprachlichen Modell aus, steht die Bestimmung der Extension und Intension von *Zeichen* bzw. *Wörtern* – primär durch eine Definition – im Vordergrund.

Ehe wir in die komplizierte Materie einsteigen, zunächst eine *Übersicht*.

1. Extension und Intension eines *Zeichens* (oder eines Wortes)
2. Extension und Intension eines *Satzes* (oder eines Zeichengebildes)

1. *Zeichen* bzw. Wörter
    - Extension: *Objekte* (Individuen bzw. Klassen)
    - Intension: *Eigenschaften* (welche diese Objekte bestimmen)

2. *Sätze* bzw. Relationen
    - Extension: *Sachverhalte* = *Relationen zwischen Objekten* wie Individuen, Klassen (und komplexe Relationen zwischen Sachverhalten)
    - Intension: „*Begriffsverhalte*“ = *Relationen zwischen Begriffen* bzw. *Eigenschaften* (und komplexe Relationen zwischen Begriffsverhalten)

Basis ist die Bestimmung der Extension und Intension von *Zeichen* bzw. *Wörtern*. Darauf gehe ich zunächst ein.

Bei der Analyse von – extensionaler und intensionaler – *Bedeutung* besteht eine besondere Nähe von *Logik* zur *Ontologie*, zur Wirklichkeitslehre. Auf ontologische Fragen wurde schon insbesondere in 0-2 eingegangen (speziell 0-2-2 und 0-2-3). Hier geht es jetzt um differenzierte Analysen, die im Verlaufe des Punktes weiter verfeinert werden.

Ich habe bei der *Bedeutung von Zeichen* unterschieden zwischen:

- *Objekt*
- *Eigenschaft (bzw. Begriff)*

Nun sollen genauer *Arten von Objekten* sowie *Arten von Eigenschaften* unterschieden werden, denn Objekte und Eigenschaften fungieren eben als Extensionen und Intensionen.

0-3-1-3 FORMALES VERSUS INHALTLICHES OBJEKT

Diese Unterscheidung wurde bereits in 0-2-2-2 eingeführt.

- Formales Objekt

Hier ist ein Objekt inhaltlich völlig *unbestimmt*, entsprechend der Objekt-Variablen ‚x' in der Logik. Das Objekt ist nur *formaler*, *eigenschaftsloser Träger* von Eigenschaften. Man geht dabei von *Entitäten* (als Grundbegriff) aus. Z. B. würde man den Menschen folgendermaßen definieren: Ein Mensch ist ein Objekt, dem wesentlich die Eigenschaft „Mensch“ zukommt. Oder genauer: Die Entität „Mensch“ ist ein formales Objekt, dem wesentlich zukommt, dass es ein Sinnenwesen und vernunftbegabt ist (entsprechend der klassischen Definition).

Man käme zu folgender Darstellung:

Entität = formales *Objekt* + definierende Eigenschaften
z. B.: Mensch = formales *Objekt* + Eigenschaften: Sinnenwesen $\wedge$ vernunftbegabt
Klasse F = alle Objekte x, denen die Eigenschaft F (bzw. $G \wedge H$) zukommt
Formal z. B.: $K(F) = \{x / Fx\}$ oder $K(F) = \{x / Gx \wedge Hx\}$

- Inhaltliches Objekt

Hier ist ein Objekt durch *inhärente* Eigenschaften *bestimmt*. Auch dabei unterscheidet man zwar einen (formalen) *Träger* und die *definierenden* Eigenschaften. Aber diese bilden zusammen die *Ganzheit* des Objekts. Wenn sich Träger und Eigenschaften auch *logisch* trennen lassen, *ontologisch* sind sie ganzheitlich verbunden. Anstatt von einem Träger spricht man daher auch von einem *Ganzheitsprinzip* (oder einer „Substanz“), das die Eigenschaften zu einem Ganzen organisiert. Im Beispiel wäre der Mensch selbst das inhaltliche Objekt.

Man käme zu folgender Darstellung:

Objekt = Träger + definierende Eigenschaften
z. B. Mensch (*Objekt*) = Träger + Eigenschaften: Sinnenwesen $\wedge$ vernunftbegabt

Hier sind also die definierenden Eigenschaften *Teil des Objektes*.

Man kann auch den Träger bereits mit Eigenschaften ausstatten. Dann gälte z. B.:

Mensch (Objekt) = Sinnenwesen (Träger) $\wedge$ vernunftbegabt

• Diskussion

Die Unterschiede zwischen diesen Definitionen mögen nicht groß erscheinen, sie sind aber von erheblicher Bedeutung, gerade weil ich die *Extension* von Sprachzeichen als *Objekte* bestimme. Dies wird vor allem dann deutlich, wenn man die Glieder der Extension, also die Individuen *einzeln* aufzählt.

– Extension als *formale* Objekte

Im *ersten* Fall, wäre die Extension eine Menge formaler Objekte. So ergäbe sich z. B. folgende Bestimmung: Extension von ‚F' = $x_1 \cup x_2 \cup ... \cup x_n$

Man könnte hier und nachfolgend auch einfacher – direkt auf der Objekt-Ebene – schreiben: F = $x_1 \cup x_2 \cup ... \cup x_n$. Aber da es in diesem Punkt letztlich um Extension und Intension geht, bleibe ich bei der komplizierteren Extensions-Darstellung.

Im Beispiel: Extension von ‚Mensch' = $\text{Objekt}_1 \cup \text{Objekt}_2 \cup ... \cup \text{Objekt}_n$

(Zur Erläuterung des Gebrauchs des Mengenvereinigungs-Symbols $\cup$ vgl. 0-2-2-3.)

Die Extension von ‚Mensch', ‚Tier', ‚Pflanze' o. ä. wäre dann aber *genau gleich*, nicht unterscheidbar, z. B.: Extension von ‚Pflanze' = $\text{Objekt}_1 \cup \text{Objekt}_2 \cup ... \cup \text{Objekt}_n$

– Extension als *inhaltliche* Objekte

Im *zweiten* Fall, bei *inhaltlichen Objekten*, ergibt sich eine inhaltlich bestimmte Definition:

Extension von ‚F' = $x_1[Fx_1] \cup x_2[Fx_2] \cup ... \cup x_n[Fx_n]$

Lies: Die Extension von ‚F' ist die Menge folgender Individuen: x_1, für das gilt, es ist ein F; x_2, für das gilt, es ist ein F; usw. bis zu x_n, für das gilt, es ist ein F.

Im Beispiel: Extension von ‚Mensch': $\text{Mensch}_1 \cup \text{Mensch}_2 \cup ... \cup \text{Mensch}_n$

Diese Schreibweise ist jedoch in der *logischen Sprache* nicht möglich, weil man hier Prädikatoren wie ‚Mensch' bzw. ‚F' nicht als Individual-Kennzeichnungen verwenden kann.

Man könnte stattdessen halbformal schreiben:

Extension von ‚Mensch' = $x_1[\text{Mensch } x_1] \cup x_2[\text{Mensch } x_2] \cup ... \cup x_n[\text{Mensch } x_n]$

Oder näher an der natürlichen Sprache:

$x_1[x_1 \text{ ist Mensch}] \cup x_2[x_2 \text{ ist Mensch}] \cup ... \cup x_n[x_n \text{ ist Mensch}]$

Warum ich nicht schreibe: Extension von ‚Mensch' = Paul, Lisa, Richard usw. (also konkrete Individuen benenne), wird später erklärt.

Die *erste Definition* (formales Objekt) hat zwar den Vorteil, dass sie Eigenschaften und Objekt ganz sauber trennt; aber sie ist ganz unspezifisch, was sie unbrauchbar macht.

Ich werde daher die *zweite Definition* (inhaltliches Objekt) bevorzugen, wonach definierende Eigenschaften Bestandteil eines Objektes sind. Denn wenn wir von *Objekten als Extension von Sprachzeichen* ausgehen, macht es nur Sinn, wenn diese Objekte auch inhaltlich bestimmt sind. Allerdings, wie in 0-2-3-5 diskutiert: wir können neben den *inhaltlichen* Objekten auch *formale* Objekte unterscheiden, die Bestandteil der inhaltlichen Objekte sind, z. B.:

Mensch (inhaltliches Objekt) = x (formales Objekt) + „Menschlichkeit" (Eigenschaft)

0-3-1-4 WESENTLICHE UND KONTINGENTE EIGENSCHAFTEN

Zunächst: Ich habe in 0-3-1-3 gezeigt, dass es sinnvoll ist, von *inhaltlichen Objekten* auszugehen, die bereits *Eigenschaften* enthalten. Damit wird die Abgrenzung bzw. Unterscheidung von *Objekten versus Eigenschaften* natürlich relativiert. Dies ist aus Gründen der Systematik nicht gerade wünschenswert, aber hat sich doch als beste Lösung erwiesen (vgl. 0-2-3).

Zweitens hat die Relativierung der Unterscheidung von Objekten versus Eigenschaften zur Folge, dass auch die Unterscheidung zwischen *Extension versus Intension* relativiert wird.

Denn wenn man sagt, die *Extension* von Zeichen sind *Objekte*, und die *Intension* von Zeichen sind *Eigenschaften*, dann wird – durch die Relativierung der Objekt-Eigenschaft-Abgrenzung – natürlich auch die Abgrenzung von Extension und Intension schwächer. So gesehen, kann man von einer *doppelten Relativierung* sprechen. Dies ist aber dennoch vertretbar, zumal ich zeigen werde, dass die Intension sich ohnehin als Teil der Extension verstehen lässt.

Weiter habe ich oben nur allgemein von *Eigenschaften* bzw. Begriffen gesprochen. Aber wir müssen genauer unterscheiden:

- wesentliche (*definierende, essentielle*) Eigenschaften
- *unwesentliche* (*kontingente, akzidentelle)* Eigenschaften

• *wesentliche Eigenschaften*

Dies sind *notwendige*, *identitätsbestimmende* Eigenschaften. Man kann auch von *Identitäts-* oder *Kern-Eigenschaften* sprechen, wenn man den etwas belasteten Begriff ‚wesentlich' umgehen will. Dabei können wir *2 Stufen* unterscheiden, wie später genauer erläutert wird.

– Klassen

Betrachten wir zunächst *Klassen* von Individuen: Z. B. ist natürlich für die Mitglieder der Klasse Mensch *primär* (1. Stufe) wesentlich, dass sie die Eigenschaft „Mensch" besitzen – oder als Adjektiv geschrieben ‚Menschlichkeit'. (Man könnte überlegen, ob dies auf einen Zirkel hinausläuft, aber das möchte ich hier nicht weiter diskutieren.)

Wir fragen dann aber, auf einer 2. *Stufe* (vgl. unten), welche Eigenschaften den Menschen *wesentlich* bestimmen. Hier wäre etwa die Eigenschaft „sprachbegabt" zu nennen. Eine *wesentliche* Eigenschaft muss normalerweise *allen* Menschen zukommen, aber dies ist nur eine *notwendige* Bedingung, keine *hinreichende*.

– Individuen

Für ein Individuum gilt Entsprechendes: Z. B. kommt dem Individuum Sokrates primär (1. Stufe) der Individual-Begriff „Sokrates" *wesentlich* zu. In der 2. Stufe gilt für Individuen normalerweise, dass ihnen eine *wesentliche* Eigenschaft *immer* und *überall* zukommen muss.

Die philosophische Klassik sah großenteils das Wesentliche des Individuums im *Allgemeinen*. So wäre es z. B. für Sokrates wesentlich, dass er Mensch ist (Artbegriff), aber nicht seine individuellen Eigenschaften, etwa seine spezifischen philosophischen Gedanken. Aus heutiger Sicht gilt das aber nicht als haltbar: Zwar ist für das Individuum auch das Allgemeine wesentlich, aber ebenso und gerade das *Besondere*, z. B. für Sokrates das, was ihn von anderen Menschen unterscheidet.

Solche essentiellen Eigenschaften kann man auch *analytisch*, genauer *material-analytisch* oder *definitions-analytisch* nennen. Denn sie sind Bestandteil von *Definitionen* oder folgen aus Definitionen. Man könnte hier noch, ebenfalls analytische, *unmögliche* „Eigenschaften" nennen, also Qualitäten, die dem Objekt per Definition *nicht* zukommen können, aber dies sind im eigentlichen Sinn keine Eigenschaften des Objekts.

Es ist schwierig, *generell* zu bestimmen, was eine Eigenschaft zu einer *wesentlichen* macht. Und es kann im konkreten Einzelfall noch schwieriger sein zu sagen, ob die Eigenschaft z. B. eines bestimmten Menschen für ihn wesentlich ist oder nicht. Dennoch ist die Unterscheidung wesentlicher und kontingenter Eigenschaften keinesfalls in den Bereich der *Metaphysik* oder Mystik abzuschieben, wie es oft dargestellt wird, sondern eine letztlich wissenschaftlich zu klärende Frage. Die Logik kann hier aber nur zuarbeiten, es ist nicht ihre Aufgabe, diese Definitionen durchzuführen.

• *kontingente Eigenschaften*

Das sind *zufällige*, z. B. *partikuläre* Eigenschaften, welche die Identität nicht berühren.

– Klasse

Es geht hier um Eigenschaften, die nur einem *Teil* der Klassenmitglieder zukommen, im Beispiel, die nur *einigen* Menschen, also nicht allen zukommen, wie die Eigenschaft „schwarzhaarig“. Aber es gibt auch *allgemeine* Eigenschaften, die kontingent sind, beim Menschen z. B. die Eigenschaft „Erdbewohner“; offenbar sind (bisher) *alle* Menschen Bewohner der Erde, aber dennoch dürfte „Erdbewohner“ keine notwendige Eigenschaft eines Menschen sein – warum soll ausgeschlossen werden, dass ein Mensch etwa „Mondbewohner“ ist?

– Individuum

Beim Individuum kann eine kontingente, partikuläre Eigenschaft eine solche sein, die es nur *manchmal*, nur zu bestimmten Zeiten besitzt. Z. B. „Sokrates ist müde“: Müdigkeit ist sicher eine Eigenschaft, die Sokrates nicht ständig zukam.

Kontingente Eigenschaften kann man auch *synthetisch* nennen, denn sie folgen nicht aus Definitionen, sind nicht durch Begriffs-*Analyse* zu ermitteln, sondern geben eine neue, zusätzliche Information über das Objekt.

Auf den Unterschied zwischen *analytisch* und *synthetisch* wird ausführlich im Punkt 0-5 eingegangen. Zwar spricht man primär von *analytischen* und *synthetischen Sätzen* (bzw. Relationen), aber man kann die Begriffe ‚analytisch’ und ‚synthetisch’ durchaus auch auf *Eigenschaften* anwenden.

Warum ich zur Definition eines Objektes (bzw. eines Objekt-Sprachzeichens) nur wesentliche oder essentielle Eigenschaften heranziehe, wird im Folgenden erläutert.

0-3-1-5 KONKRETE UND ABSTRAKTE OBJEKTE

Wir haben oben zwischen *formalen* und *inhaltlichen* Objekten unterschieden. Bei den inhaltlichen Objekten ist aber zusätzlich zu unterscheiden zwischen:

konkreten Objekten
abstrakten Objekten

• konkrete Objekte

Ein *konkretes* Objekt ist das Objekt mit *allen* seinen (wesentlichen und kontingenten) Eigenschaften. Wenn man Z. B. den *konkreten* Sokrates erfassen will, dann muss man *alle* seine Eigenschaften erfassen, und zwar *quantitativ* präzise, also z. B. seine genaue Körpergröße, die genaue Farbe seiner Haare usw., auch wenn das für seine Identität nicht ausschlaggebend ist.

Und die *konkrete Klasse* der Menschen umfasst *alle* Menschen mit *allen* ihren individuellen Eigenschaften.

• abstrakte Objekte

Ein *abstraktes* Objekt ist das Objekt nur mit seinen *definierenden*, *wesentlichen* Eigenschaften. Ein *vollkommen abstraktes* Objekt ist ein *formales* Objekt, bei dem nämlich von *allen* Eigenschaften *abstrahiert* ist.

Genauer wird auf den Unterschied „konkret“ versus „abstrakt“ noch im Folgenden eingegangen. Dabei wir werden sehen, es gibt immer zwei bzw. drei mögliche Ansätze.

– Erstens, man geht von konkreten oder abstrakten *Objekten* aus
– Zweitens, man geht von konkreter bzw. abstrakter *Extension* aus
– Drittens, man kombiniert das, sagt eben z. B., dass sich die konkrete *Extension* auf ein konkretes *Objekt* bezieht.

Ontologisch ergeben sich hier durchaus Unterschiede; z. B. könnte man bestreiten, dass es *abstrakte* Objekte real gibt; man könnte allerdings auch bestreiten, dass es *konkrete* Objekte real gibt. Im Speziellen könnte man einwenden, das *Klassen* grundsätzlich abstrakt sind, weil sie nämlich von den Beziehungen zwischen den Klassenmitgliedern abstrahieren (etwa im Gegensatz zum System oder der Ganzheit).

Für die *Logik* sind diese Fragen aber sekundär, es geht primär darum, mit welchem Ansatz man am besten arbeiten kann – und hier überzeugt der dritte, kombinierte Ansatz am meisten.

0-3-2 Intension von Zeichen

0-3-2-1 BEGRIFF VERSUS EIGENSCHAFT

Die *Intension* von Zeichen sind *Eigenschaften.* Anstatt '*Eigenschaft'* könnte man auch '*Begriff'* sagen.

Das Wort 'Begriff' ist aber sehr vieldeutig. Man kann zumindest unterscheiden zwischen dem *Sprach-Begriff* im Sinne von *Wort* bzw. Terminus und dem *Denk-Begriff* sowie dem *Real-Begriff.* Obwohl es aus Gründen der Eindeutigkeit vorzuziehen wäre, ‚Begriff' nur in *einer* Bedeutung zu verwenden, verwende ich 'Begriff' doch in mehrfacher Weise, weil der Begriff ‚Begriff' eben kaum vermeidbar ist, wenn man nicht ständig ‚Eigenschaft' wiederholen will. Normalerweise dürften dabei keine gravierenden Missverständnisse auftreten.

Man kann ‚Eigenschaft' und ‚Begriff' weitgehend *synonym* verwenden. Allerdings besteht insofern ein Unterschied, dass man mit ‚Eigenschaft' meistens eine *einfache Qualität* meint, z. B. die Farbe, mit ‚Begriff' aber auch eine *komplexe Qualität*, also ein *System von Eigenschaften*. So ist es im Grunde adäquater, von dem Begriff „Mensch" anstatt von der Eigenschaft „Mensch" zu sprechen. Oder wenn man z. B. einen bestimmten Menschen begrifflich kennzeichnen will, spricht man besser von ‚Individual-Begriff' als von ‚Individual-Eigenschaft', denn darunter stellt man sich eher eine einzelne Eigenschaft vor als etwa den Gesamtbegriff „Sokrates". Auch wenn ich von ‚Begriff' spreche, verwende ich aber als Abkürzung bzw. Symbol ‚E', z. B. ‚E(Mensch)', damit es nicht zu Verwechslungen kommt, denn das Symbol ‚B' wird (wie ‚A') gerne für Aussagen verwendet.

Als Intension bestimmt man oft auch den *Sinn*, den *Inhalt*, die „*Bedeutung*" (im engeren Sinn) eines Zeichens. Aber was ist diese Bedeutung? Hier gibt es vor allem drei Modelle:

- *sprachliche* Intension: die anderen *Sprachzeichen*, die dieses Zeichen definieren
- *psychische* Intension: *Denkbegriff*, kognitiver Inhalt, der mit dem Zeichen verbunden ist
- *reale* Intension: *wesentliche Eigenschaften* bzw. Begriffe, die das Objekt bestimmen

Leider wird das oft nicht sauber auseinandergehalten. M. E. ist nur der Ansatz der *realen* Intension wirklich brauchbar und haltbar – und diesen werde ich nachfolgend erläutern.

0-3-2-2 INTENSION VON INDIVIDUATOREN

Ein Individuator (Synonyme sind: Individuum-Zeichen, Individuen-Zeichen bzw. Individual-Zeichen) ist ein *Eigenname* (wie ‚Sokrates'), eine *singuläre Kennzeichnung* wie (‚der Begründer der sokratischen Methode') o. ä.

Die Intension eines *Individuators* ist zunächst eine *Individual-Eigenschaft* bzw. ein *Individual-Begriff.* Dabei geht man davon aus, dass *jeder* Individual-Begriff einzigartig ist, wie jedes Individuum. Bei einem *realistischen* Ansatz, wie hier vertreten, muss allerdings auch bei der intensionalen Bestimmung letztlich auf das *Individuum* (Objekt) Bezug genommen werden, denn Eigenschaften ohne Objekte gibt es real nicht. Der *Individual-Begriff* ist somit der Begriff, welcher das entsprechende Individuum *wesentlich* bestimmt. Auf die Problematik von Individual-Begriffen werde ich in 0-3-3-5 eingehen.

Nun können wir die Bestimmung der Intension über zumindest 2 *Stufen* vollziehen, z. B.:

1. *Stufe*: Intension(‚Sokrates') = E(Sokrates)
2. *Stufe*: Intension(‚Sokrates') = E(Philosoph $\cup$ Begründer der sokratischen Methode u. a.)

Diese beiden Stufen sind logisch und semantisch sehr unterschiedlich, wie sich zeigen wird.

1. Stufe: Intension(‚Sokrates') = E(Sokrates)

Die Intension des *Eigennamens* ‚Sokrates' auf der 1.Stufe ist der *Individuum-Begriff* „Sokrates". *Adjektivisch* formuliert: Intension(‚Sokrates') = E(sokratisch)

D. h. der Individual-Begriff „Sokrates“ ist der Begriff, welcher das Individuum Sokrates wesentlich bestimmt. Genauer: Der *Individual-Begriff* ist der *einzelne* Begriff, die *Gesamt*-Eigenschaft, welche das entsprechende Individuum wesentlich bestimmt.

Obwohl hier Sokrates die Eigenschaft „sokratisch“ als *wesentlich* zugesprochen wird, macht man auf der *1. Stufe* keine Aussage über das *Wesen* des Sokrates, macht im Grunde gar keine Aussage über ihn. Sondern es handelt sich um eine generelle sprachliche *Festlegung*, dass ein *Individuum* durch den entsprechenden Individual-Begriff wesentlich bestimmt wird.

Als Abkürzung für ‚Eigenschaft’ oder ‚Begriff’ verwende ich wie gesagt ‚E’.

Halb formal: Intension(‚Sokrates’) = E(Sokrates) Formal: Intension(‚x_i’) = E(x_i)

2. *Stufe*: Intension(‚Sokrates’) = E(Philosoph $\cup$ Begründer der sokratischen Methode ...)

Um die 2. Stufe zu kennzeichnen, kann man eine hochgestellte 2 verwenden, also:

Intension^2(‚Sokrates’) = E(Philosoph $\cup$ Begründer der sokratischen Methode)

Auf der 2. Stufe werden mehrere – mindestens zwei – Eigenschaften angegeben, die den Namen ‚Sokrates’ bzw. den *Individual-Begriff* „Sokrates“ *bestimmen*. Letztlich geht diese Bestimmung aber zurück auf die *wesentlichen Eigenschaften des Individuums* (Objekts) Sokrates. Hier, auf der 2. Stufe, werden *echte* Aussagen über das Wesen des Sokrates gemacht.

Natürlich kann die Intension auch *mehr als zwei* Eigenschaften umfassen, z. B. formal:

Intension(‚x_i’) = E($F_1 \cup ... \cup F_i$)

Aber eine solche *Wesensbestimmung* umfasst kaum mehr als etwa *10* Eigenschaften (1 bis i). Die *wesentlichen* Eigenschaften könnten bei Sokrates z. B. sein: Mensch, Philosoph, weise, Athener, Erfinder der sokratischen Methode, Geburts-Jahr 469 v. Chr., Todes-Jahr 399 v. Chr. Es sind – analog zur *klassischen Definitionslehre*, die sich allerdings nur auf Prädikatoren bezog – *allgemeine* Eigenschaften wie „Mensch“ und *differenzierende* wie das Geburtsdatum.

Eine andere Möglichkeit ist, auf dieser *2. Stufe* nicht mehr von der *Intension* des Namens (sprachlich) auszugehen, sondern direkt von dem *Begriff* (real), also:

E(Sokrates) = E(Philosoph $\cup$ Begründer der sokratischen Methode ...)

Immer ist der Bezugspunkt aber das gemeinte *Individuum*, das diese Eigenschaften besitzt.

Die Eigenschaften werden meistens in Form in Form einer Menge, insbesondere einer *Vereinigungs-Menge* angegeben: E($F_1 \cup ... \cup F_i$). Dies kann als Abkürzung verstanden werden für E(F_1) $\cup ... \cup$ E(F_i).

Die Eigenschaften können aber auch in Form einer *Schnitt-Menge* angegeben werden. Das wird an anderer Stelle genauer erläutert.

0-3-2-3 INTENSION VON PRÄDIKATOREN

Prädikatoren sind *Klassen-Zeichen* bzw. Zeichen, die sich auf *Klassen-Begriffe* oder *Allgemein-Begriffe* beziehen, z. B. ‚Mensch’ oder ‚Philosoph’.

In der logischen Sprache wird normalerweise kein Unterschied zwischen *Substantiven*, *Adjektiven* und *Verben* gemacht, dies alles sind *Prädikatoren*.

Die Intension eines Prädikators sind die *wesentliche Eigenschaft* bzw. die *wesentlichen Eigenschaften*, welche die entsprechende Klasse definieren.

Wir bestimmen entsprechend zu der Darstellung bei den Individual-Begriffen die Intension von Prädikatoren über 2 Stufen, am Beispiel ‚Mensch’.

1. Stufe: Intension(‚Mensch’) = E(Mensch)

Also die Intension des Prädikators ‚Mensch’ auf der 1. Stufe ist der Allgemein-Begriff „Mensch“. Und weiter: Der *Allgemein-Begriff* „Mensch“ ist der *einzelne* Begriff (die *Gesamt*-Eigenschaft), welcher die Klasse der Menschen wesentlich bestimmt.

2. Stufe: Intension^2(‚Mensch’) = E(Sinnenwesen $\cup$ vernünftig).

Diese Bestimmung erfolgt gemäß der klassischen philosophischen Definition, dass der Mensch ein *vernünftiges Sinnenwesen* (animal rationale) ist.

Auf der 2. Stufe werden also mehrere – mindestens zwei – Eigenschaften angegeben, die das Wort ‚Mensch' genauer definieren.

Eine andere Möglichkeit ist wie gesagt, auf dieser *2. Stufe* nicht mehr von der *Intension* (sprachlich) auszugehen, sondern direkt von dem *Begriff* (real), also:

E(Mensch) = E(Sinnenwesen ∪ vernünftig)

Eine Alternative wäre, die Intension durch die *Individual-Begriffe* zu bestimmen.

z. B: Intension(‚Philosoph') = E(Sokrates) ∪ E(Platon) ∪ E(Aristoteles) usw.

Wir werden später sehen, warum das nicht überzeugt.

Aus Sicht der formalen Logik können wir, wie beschrieben, z. B. "Mensch", „Philosoph", aber auch „Sokrates" (sprachlich also *Substantive*) nicht nur als Objekte, sondern auch als *Eigenschaften* fassen. Es ist allerdings verständlicher, Eigenschaften durch *Adjektive* darzustellen, so ist auch eine bessere Unterscheidung von Objekt und Eigenschaft möglich.

Man könnte also z. B. nicht ‚Sokrates', sondern ‚sokratisch' für die Eigenschaft schreiben. Dann gälte: Intension(‚Sokrates') = E(sokratisch). Oder: Intension(‚Sokrates') = sokratisch. Denn durch die *adjektivische* Darstellung wäre es eindeutig, dass eine *Eigenschaft* gemeint ist und man könnte auf das ‚E' verzichten.

Das wäre nicht nur auf Eigennamen, sondern auch auf *Prädikatoren* anzuwenden. Z. B. ergäbe sich: Intension(‚Mensch') = E(menschlich) bzw. Intension(‚Mensch') = menschlich.

Allerdings gibt es in der Sprache nicht immer entsprechende Adjektive, z. B. gibt es für ‚Pferd' kein Adjektiv ‚pferdig'. Außerdem haben die Adjektive manchmal unerwünschte *Nebenbedeutungen*: z. B. Mensch – menschlich, Mann – männlich, Frau – fraulich; es hat eben nicht genau die gleiche Bedeutung, ob man von jemandem sagt, er ist ein Mensch oder er ist menschlich, entsprechendes gilt für die anderen Beispiele. So ziehe ich es in diesen Fällen normalerweise doch vor, eine Eigenschaft durch ein *Substantiv* zu benennen. Anders bei *klassischen* Eigenschaften wie z. B. „rot", hier bietet sich das Adjektiv an.

0-3-2-4 ABSTRAKTE UND KONKRETE INTENSION

Ich habe bei der Intension immer nur auf die *wesentlichen* Eigenschaften Bezug genommen, entsprechend der Unterscheidung von *wesentlichen* und *kontingenten* Eigenschaften (vgl. 0-3-1-4).

Man kann hier von *abstrakter* Intension sprechen, weil nur *einige* Eigenschaften herausgegriffen werden, von anderen dagegen *abstrahiert* wird.

Dagegen kann man die Intension, die *alle* (wesentlichen und kontingenten) Eigenschaften umfasst, *konkrete* Intension nennen.

Es ist wichtig herauszustellen: Die *primäre*, die eigentliche Intension ist die *abstrakte*, diese verwenden wir in unserem Sprechen und Schreiben; die konkrete Intension ist sekundär, sie ist im Grunde nur eine Vergleichsgröße.

Wir rechnen zu einem Begriff nur die *wesentlichen* Eigenschaften. Wenn zu der Intension z. B. von dem Wort ‚Mensch' bereits *alle* Eigenschaften gehörten, die allen individuellen Menschen zukommen, dann wäre nichts Neues mehr über den Menschen auszusagen, alle Aussagen über den Menschen wären *analytisch*. Das entspricht aber natürlich überhaupt nicht unserm Sprachgebrauch. Außerdem können wir gar nicht *alle* Eigenschaften (aller Menschen) kennen. (Dieses Problem soll später – bei der Extension – genauer erklärt werden.)

0-3-2-5 FAZIT

Nach meiner Auffassung bezieht sich die Intension (eines Zeichens) auf die *reale* Ebene. Die *sprachliche* und *psychische* Bestimmung sind nicht unwichtig, doch ich verstehe sie als verschiedene Formen von *Bedeutung*, nicht als Intension. Für die Intension benötigen wir eine präzise Bestimmung, dies kann die *psychische* Intension nicht leisten, auch die verwandte

Definition der Intension als *Sprachgebrauch* ist zu vage; und die *sprachliche* Intension ist auf die Sprache limitiert, bleibt letztlich ein geschlossenes System ohne Real-Bezug.

Allerdings bestimme ich die Intension als *abstrakt*, sie erfasst nur die *wesentlichen* Eigenschaften von Objekten. Allenfalls könnte man unterscheiden:

primäre Intension = *abstrakte* Intension = die wesentlichen Eigenschaften
sekundäre Intension = *konkrete* Intension = alle Eigenschaften

0-3-3 Extension von Zeichen

Bei der Extension ergeben sich viele Parallelen zur Intension, weswegen ich in der Darstellung der Extension manche Punkte ausspare, um mich nicht zu wiederholen.

Wie schon beschrieben, unterscheidet man bei den deskriptiven Zeichen vor allem:

- *Individual-Zeichen* bzw. Individuen-Zeichen (Individuatoren)
- *Klassen-Zeichen* (Prädikatoren).

In einer ersten Bestimmung kann man formulieren:

Die Extension von *Individuen-Zeichen* sind *Individuen*
Die Extension von *Klassen-Zeichen* sind *Klassen*

0-3-3-1 DIE EXTENSION EINES INDIVIDUUM-ZEICHENS

Ein Individuum-Zeichen ist ein *Eigenname* (wie ‚Sokrates'), eine *singuläre Kennzeichnung* wie (‚der Begründer der sokratischen Methode') o. ä. Die Extension eines *Individuators* (Individual-Zeichens) ist ein *individuelles Objekt*, ein *Individuum*.

Auch hier kann man wieder *2 Stufen* unterscheiden:

1. Stufe: Z. B. ist die Extension des *Eigennamens* ‚Sokrates' das Individuum Sokrates.
Halb formal: Extension(‚Sokrates') = Sokrates.
Formal: Extension(‚x_i') = x_i

Nun haben wir gesehen, dass ein Individuum auch durch einen *Träger* = formales Objekt und eine *individuelle Bestimmung* definiert werden kann. Im Beispiel: ‚Sokrates ist dasjenige Individuum, dem die Individual-Eigenschaft „Sokrates" (wesentlich) zukommt'.

Halb-Formal: Die Extension von ‚Sokrates' ist: ιx(Sokrates x). Bei *adjektivischer* Darstellung: Extension(‚Sokrates') = ιx(sokratisch x). Bzw. formal: ιx(Fx).

Um auszudrücken „*dasjenige* Objekt, das die Eigenschaft F hat", kann man den *Kennzeichnungs-Operator* verwenden: ιx(Fx). Man spricht auch von *‚Jota-Operator'* (vgl. 0-2-2-2).

Nun lässt sich allerdings einwenden, dass dies *keine rein extensionale* Bestimmung mehr ist, weil hier eine Eigenschaft (also etwas Intensionales) zugesprochen wird. Entsprechend ist die Formalisierung ‚Fx' ist immer zu deuten als: „x besitzt die Eigenschaft F" oder „x kommt die Eigenschaft F zu". In der Tat liegt hier eine *gemischt extensional-intensionale* Bestimmung vor: einem Objekt (extensional) kommt eine Eigenschaft (intensional) zu.

2. Stufe: Auf der 2. Stufe ist aber eine rein extensionale Darstellung möglich (vgl. unten).
Z. B. Extension^2(‚Sokrates') = ιx(Mensch x ∧ Begründer der sokratischen Methode x).

Natürlich können es auch *mehr als zwei* Eigenschaften sein, z. B. formal:
Extension(‚x_i') = $\iota x(F_1x \wedge ... \wedge F_ix)$.

Eine andere Möglichkeit ist, auf dieser *2. Stufe* nicht mehr direkt von der *Extension* (sprachlich) auszugehen, sondern von dem *Objekt* (real), also:
Sokrates = ιx(Mensch x ∧ Begründer der sokratischen Methode x)

Auf der 2. Stufe werden die Eigenschaften angegeben, die den Namen ‚Sokrates' bzw. Sokrates *definieren*, die für ihn *wesentlich* sind. Und zwar meistens in Form in Form einer Menge, insbesondere einer *Vereinigungs-Menge*. Die Eigenschaften könnten z. B. sein: Mensch, Philosoph, weise, Athener, Erfinder der sokratischen Methode, Geburts-Jahr 469 v. Chr., Todes-Jahr 399 v. Chr. Die Eigenschaft „Mensch" wäre vermutlich aus „Philosoph" abzuleiten u. ä.

Ich habe schon darauf hingewiesen, dass es schwer ist, genau zu definieren, was *wesentlich* ist. So sollen wesentliche Eigenschaften einem Individuum normalerweise *immer* zukommen. Aber z. B. ist es ein Problem, dass man Sokrates kaum als Baby schon Weisheit zusprechen könnte. Doch es nicht primäre Aufgabe der Logik, das zu analysieren.

Nun bestände prinzipiell die Möglichkeit, nicht auf *Eigenschaften* (intensional) Bezug zu nehmen, sondern eine *rein extensionale* Bestimmung vorzunehmen. Denn anstatt z. B. „Sokrates besitzt die *Eigenschaft* Weisheit", könnte man auch interpretieren: „Sokrates ist Element der *Klasse* aller weisen Objekte". Anstatt von *Eigenschaften* spricht man also von *Klassen-Zugehörigkeiten*. Doch bei manchen Eigenschaften ist diese Aussage ziemlich absurd: Wenn man etwa sagen würde, ‚Sokrates ist Element der Klasse aller Objekte, welche die sokratische Methode erfunden haben', ist das zwar formal korrekt, aber wenig sinnvoll, denn Sokrates ist eben der *einzige* Erfinder dieser Methode. Außerdem habe ich schon darauf hingewiesen, dass es grundsätzlich Probleme bereitet, auf immer weitere Klassen-Zugehörigkeiten zurückzuführen, sinnvoller ist, sich schlussendlich auf *Eigenschaften* zu beziehen.

Nachfolgend greife ich zurück auf die oben eingeführten Unterscheidungen zwischen: *formales* versus *inhaltliches* Objekt und *konkretes* versus *abstraktes* Objekt (statt von ‚Objekt' kann man hier spezifisch von ‚Individuum' sprechen) – und komme zu folgenden Aussagen:

• Die Extension eines Individual-Zeichens ist *kein konkretes* Individuum
Üblicherweise wird so dargestellt, als gehe es bei der Extension um das *konkrete* Individuum. Entsprechend könnte man meinen, das Individuum wird in der Extension mit *allen* seinen *Eigenschaften* erfasst. Aber das ist unrealistisch: *erstens* wären dies extrem viele Eigenschaften, die man normalerweise nie vollständig kennen könnte; zweitens wären dann alle Aussagen über das Individuum *analytisch*. Denn wenn ich mit der Extension von ‚Sokrates' *alle* Eigenschaften von ihm bereits erfasse, dann ist ja alles Wahre, was ich über ihn aussage, schon in der Extension *enthalten*. Alle Aussagen über das Individuum sind dann entweder *tautologisch* oder *kontradiktorisch*, was gänzlich unsinnig ist.

• Die Extension eines Individual-Zeichens ist *kein formales* Individuum
Ebenso problematisch wäre die ganz gegensätzliche Theorie, dass ein Objekt extensional *ohne jegliche* Eigenschaft, rein *formal* bestimmt wird. Wenn z. B. die Extension von ‚Sokrates' nur ein *formales* (singuläres bzw. individuelles) Objekt, nur ein Träger oder ein Prinzip wäre, dann besäße ‚Sokrates' dieselbe Extension wie ‚Platon', ja dann besäßen alle Individual-Zeichen die gleiche Extension. Anders gesagt, alle Individual-Zeichen müssten als *Variablen* gelten. Das wäre völlig unbrauchbar.

• Die Extension eines Individual-Zeichens ist ein *abstraktes* Individuum
Die Extension eines Individual-Zeichens ist also ein inhaltliches (bzw. inhaltlich bestimmtes) Individuum, aber ein abstraktes Individuum. Man könnte das abstrakte Objekt auch als *Kern* oder „Wesen" des gesamten Objektes deuten. Ein Individuum wird in der Extension nur als *abstraktes Objekt* erfasst, d. h. mit seinen *wesentlichen*, *definitorischen* Eigenschaften. Kurz: die *Extension eines Individuum-Zeichens* ist das bezeichnete *Individuum mit seinen wesentlichen Eigenschaften*. Später wird diese Bestimmung noch präzisiert bzw. modifiziert.

Wenn ich aber über das abstrakte Individuum weitergehende Aussagen machen will, untersuchen will, welche *kontingente* Eigenschaften ihm zukommen, dann muss ich auf das *konkrete* Individuum zurückgreifen und dieses untersuchen, obwohl es nur partiell zu erfassen ist.

0-3-3-2 DIE EXTENSION EINES KLASSEN-ZEICHENS

Die Extension eines *Prädikators* (Klassen-Zeichens) wie ‚Mensch' ist eine (abstrakte) *Klasse*, z. B. die *Klasse Mensch*. Informell sagt man: Die Extension von ‚Mensch' sind *die Menschen*.

Man kann diese Klasse aber in verschiedener Weise *darstellen*:

– *ganzheitlich*: Klasse F bzw. als Beispiel die Klasse Mensch

– *kollektiv*: $\Lambda x[Fx]$, heißt: alle x, für die gilt, die haben die Eigenschaft F.
andere Darstellungen: $\{x / Fx\}$ oder mit Lambda-Operator: $\lambda x(Fx)$
Beispiel: Λx[Mensch x], $\{x$ / Mensch $x\}$, λx(Mensch x)

– *individuell*: $x_1[Fx_1] \cup x_2[Fx_2] \cup ... \cup x_n[Fx_n]$
Beispiel: x_1[Mensch x_1] $\cup$ x_2[Mensch x_2] $\cup ... \cup$ x_n[Mensch x_n]

Auf die sich hier ergebende Problematik von formalen versus inhaltlichen Objekten und die entsprechenden Formalisierungsunterschiede wurde schon eingegangen (vgl. 0-3-1-3).

Bei der kollektiven und individuellen Darstellung ergibt sich wieder das Problem, dass sie *nicht rein extensional* ist, weil auch auf *Eigenschaften* Bezug genommen wird.

Man kann sich auch nicht damit behelfen, dass man von *Klassen-Zugehörigkeiten* ausgeht und mit der *Element-Relation* arbeitet:

z. B. Klasse F = $\Lambda x[x \in F] = x_1[x_1 \in F] \cup x_2[x_2 \in F] \cup ... \cup x_n[x_n \in F]$

Denn offensichtlich ist das ein *Zirkel*: „Die Klasse F ist die Menge aller x, für die gilt: sie sind Element der Klasse F" (u. ä.).

Nun kann man auch hier wieder 2 *Stufen* unterscheiden – es sind allerdings nur Stufen der Erfassung. Die klassische Philosophie *definierte* den Menschen als *vernünftiges Sinnenwesen* (animal rationale), also durch *2* Begriffe, darauf nehme ich in dem folgenden Beispiel Bezug.

– ganzheitlich: Klasse$(F \cap G)$
Beispiel: Klasse(Sinnenwesen $\cap$ vernünftig)
also die Schnitt-Menge der Klasse der Sinnenwesen und der vernünftigen Objekte

– kollektiv: $\Lambda x[Fx \wedge Gx]$, heißt: alle x, für die gilt, sie haben die Eigenschaft F und die Eigenschaft G, andere Darstellungen entsprechend
Beispiel: Λx[Sinnenwesen x $\wedge$ vernünftig x]

– individuell: $x_1[x_1 \in (F \cap G)] \cup x_2[x_2 \in (F \cap G)] \cup ... \cup x_n[x_n \in (F \cap G)]$
oder: $x_1[x_1 \in F \wedge x_1 \in G] \cup ... \cup x_n[x_n \in F \wedge x_n \in G]$
Beispiel: $x_1[x_1 \in$ K(Sinnenwesen $\cap$ vernünftig)]
$\cup ... \cup$ $x_n[x_n \in$ K(Sinnenwesen $\cap$ vernünftig)]

(‚K' für Klasse)

Die einzelnen Individuen werden also z. B. als Elemente der *Schnitt-Menge* der Klasse der Sinnenwesen mit der Klasse der vernünftigen Objekte dargestellt.

Hier, auf der 2. Stufe, ist es damit möglich, *streng extensional* nur auf *Klassen* von Objekten zu beziehen, nicht auf Eigenschaften. Wie ich aber schon ausgeführt habe, *primär* ist der Bezug auf *Eigenschaften* und nicht auf *Klassen-Zugehörigkeiten*; wenn man immer weiter zurückgeht, wird man irgendwann doch Eigenschaften angeben müssen.

Die beste Lösung ist daher wohl, eine *gemischte Extension-Intension* zu akzeptieren, also: *Objekte (extensional)*, denen *Eigenschaften (intensional)* zukommen – ohnehin sind Objekte und Eigenschaften, wie beschrieben, nicht vollständig voneinander abzugrenzen.

In der logischen Sprache wird normalerweise kein Unterschied zwischen *Substantiven*, *Adjektiven* und *Verben* gemacht, dies alles sind *Prädikatoren*. (Allerdings hat diese Unterscheidung ontologisch durchaus Sinn, was aber hier nicht diskutiert werden kann.) Insofern wird z. B. nicht unterschieden zwischen „Mensch“ und „rot“, beides sind – intensional gesehen – gleichermaßen *Eigenschaften*. Was ist aber z. B. die Extension vom Wort ‚rot’? Nach überwiegender Auffassung ist das die *Klasse* aller roten Gegenstände. Eine alternative Möglichkeit wäre, als Extension die Klasse aller realen Vorkommnisse von „rot“ zu verstehen; aber dann wäre die Gleichbehandlung von Substantiven und Adjektiven nicht mehr gegeben.

Entsprechend zu den Individuen gilt bei Klassen: Es handelt sich um *abstrakte Klassen*, denn sie umfassen nur *abstrakte* Individuen. Z. B. umfasst die Klasse der Menschen alle Menschen nur mit den *gemeinsamen* Eigenschaften, die sie als Elemente der Klasse *Mensch* bestimmen, aber nicht mit ihren individuellen Unterschieden. Das drückt sich auf der zweiten Stufe in der Aufzählung aus: Klasse *Mensch* = $\text{Mensch}_1 \cup \text{Mensch}_2 \cup ... \cup \text{Mensch}_n$.

Denn erfasste man auch die sonstigen Eigenschaften, ergäbe sich das schon bei den Individuen genannte Problem: alle (wahren) Aussagen über die Klasse wären *tautologisch*.

0-3-3-3 DISKUSSION

Nun könnte man kritisieren: Es gibt hier in der Extension gar *keinen Unterschied* zwischen den *Elementen* einer Klasse, also z. B. den Menschen als Elementen der Klasse *Mensch*; der Sinn einer Aufzählung wie $\text{Mensch}_1 \cup \text{Mensch}_2 \cup ... \cup \text{Mensch}_n$ besteht nur in der Zuordnung eines *Zählindex*.

Konstruktiver könnte daher folgende Lösung scheinen: Als Extension eines Prädikators, in einer Klasse, werden die Elemente so erfasst, wie es der *Extension eines Eigennamens* entspricht. Z. B. in der Klasse der Philosophen wird Sokrates mit den ihn *als Individuum definierenden*, wesentlichen Eigenschaften erfasst – aber ohne *unwesentliche* Eigenschaften. Somit werden z. B. Sokrates, Aristoteles, Platon durchaus *unterschiedlich* in der Extension repräsentiert, nicht nur als Philosophen. So würde die Extension(‚Philosoph’) nicht lauten „$\text{Philosoph}_1 \cup \text{Philosoph}_2 \cup ... \cup \text{Philosoph}_n$, sondern z. B. „Sokrates ∪ Platon ∪ Aristoteles ∪ ...“.

Dagegen spricht aber: Wenn man das Wort ‚Philosoph’ verwendet, kann man unmöglich die individuellen essentiellen Eigenschaften aller in der Extension erfassten Philosophen kennen; auch eine Aussage wie ‚jeder Philosoph ist ein Weiser’ macht nur Sinn, wenn von allen individuellen Unterschieden abgesehen wird. Daher und aus anderen, hier nicht zu nennenden Gründen bevorzuge ich doch die zuerst genannte Definition:

Die Extension eines Prädikators ‚F’ ist die abstrakte Klasse „F“ (1. Stufe) bzw.

Die Extension^2 *von ‚F’* = $x_1[Fx_1] \cup x_2[Fx_2] \cup ... \cup x_n[Fx_n]$ (2. Stufe)

Bzw. nicht sprachlich, sondern ontologisch:

$F = x_1[Fx_1] \cup x_2[Fx_2] \cup ... \cup x_n[Fx_n]$ (2. Stufe)

D. h. alle Elemente von F werden nur mit den Eigenschaften erfasst, die sie als Elemente der Klasse „F“ bestimmen, aber nicht mit ihren individuellen Unterschieden.

0-3-3-4 FAZIT

Man kann zusammenfassend unterscheiden:

- *abstraktes* Objekt (= Extension eines Zeichens oder Wortes)
  - *Individuator*: bezeichnet das Objekt mit seinen *wesentlichen* Eigenschaften
  - *Prädikator*: bezeichnet die Objekte mit den *wesentlichen* Eigenschaften der *Klasse*
- *konkretes* Objekt:
  - das ist das reale Objekt mit *allen* seinen (wesentlichen und zufälligen) Eigenschaften

Graphisch könnte man das folgendermaßen darstellen:

Wort/Zeichen
↓
abstraktes Objekt
(Extension)
↓
konkretes
Objekt

Ggf. könnte man auch den Terminus der ‚Extension' differenzieren:
– *abstrakte* Extension *abstraktes* Objekt
– *konkrete* Extension *konkretes* Objekt
Aber die *primäre*, die eigentliche Extension ist eben die *abstrakte*, anders, als es meistens dargestellt wird.

0-3-3-5 ZUORDNUNGS-PROBLEM
Hier einige Überlegungen für Spezialisten, die man aber nicht benötigt, um den weiteren Text zu verstehen. Ich habe im vorausgegangenen Text erläutert (nur mit einem anderen Beispiel):
1. Stufe: Extension(‚Quadrat') = λx(quadratisch x)
alle x, für die gilt: sie haben die Eigenschaft „quadratisch"
2. Stufe: Extension^2(‚Quadrat') = λx(rechteckig x $\wedge$ gleichseitig x)
alle x, für die gilt: sie haben die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig"
Dabei sollen die genannten Eigenschaften dem Objekt *wesentlich* zukommen.

Die 2. Stufe ist vor allem von Interesse. Man könnte diskutieren, ob man zur *vollständigen* Bestimmung eines *Quadrats* auch Begriffe wie Parallelogramm, Viereck oder 2-Dimensionalität benötigt, aber das ist hier irrelevant, und ich beschränke mich zur Einfachheit auf *zwei* Eigenschaften.

Nun ergeben sich folgende zwei Probleme:
• Erstens, kommen die Eigenschaften dem *inhaltlichen* Objekt, also z. B. dem Quadrat, zu? Darf man z. B. sagen, dass ein Quadrat die Eigenschaften„rechteckig" und „gleichseitig" *besitzt* ? Eine solche Redeweise habe ich oben öfters verwendet, z. B. dass ich sagte, Sokrates komme die Eigenschaft „sokratisch" zu, er besitze die Eigenschaft „sokratisch" o. ä.

Aber diese Redeweise bzw. Schreibweise ist nicht wirklich korrekt:
Ein Quadrat *besitzt nicht* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig". Ein Quadrat *hat nicht* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig". Und: Einem Quadrat *kommen nicht* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" *zu*.

Und schon gar nicht gilt: Einem Quadrat *kommen* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" *wesentlich zu* (u. ä.).

Denn die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" *konstituieren* erst das Objekt Quadrat (bzw. die Klasse der Quadrate).

So darf man *korrekt* nur sagen: Ein Quadrat *beinhaltet* (oder *enthält*) die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig". Diese Eigenschaften sind eben (logisch) *Teil* oder *Bestandteil* vom Quadrat.

Und sie sind deshalb *wesentlich*, weil sie das „Wesen" des Quadrates erst begründen. Oder einfacher, die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" sind *wesentlich* für das Quadrat, weil sie – logisch – Teile des Quadrates sind. Dies darf natürlich nicht mit einem *materiellen* Teilsein verwechselt werden. Das wird am Beispiel Sokrates deutlicher: Sokrates besteht materiell aus Organen, Zellen, Molekülen, Atomen, letztlich aus Elementarteilchen, aber logisch aus Eigenschaften.

Man könnte diskutieren, ob *alle* wesentlichen Eigenschaften eines Objektes dieses Objekt konstituieren, oder ob es auch wesentliche Eigenschaften gibt, die nicht zur *Identität* gehören, nicht wesens-bestimmend sind, aber das soll hier nicht weiter verfolgt werden.

Trotz der obigen Ausführungen ist ein Satz wie ‚ein Quadrat *besitzt* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig"' nicht wirklich falsch. Aber er ist *redundant*, anders gesagt er ist *material-analytisch*, (das wird später erläutert), jedenfalls ist er kein Satz, der etwas Neues über das Quadrat aussagt. Denn ein Quadrat gibt es eben nur durch die Eigenschaften „recht-eckig" und „gleichseitig", insofern fügt man keine Information hinzu, wenn man dem Quadrat diese Eigenschaften zuspricht.

In jedem Fall gilt: Einem Objekt können *synthetische* Eigenschaften *zukommen*, das sind Eigenschaften, die *nicht in ihm bereits enthalten* sind. Z. B. kann einem Quadrat zukommen, dass es blau ist oder groß bzw. kann es die Eigenschaften „blau" und „groß" besitzen.

• Zweitens, kommen die Eigenschaften dem *formalen* Objekt zu?
Nun könnte man argumentieren, das oben genannte Problem sei kein wirkliches Problem, weil ja in der formalen Logik die Eigenschaften auch nicht dem *inhaltlich* bestimmten Objekt, z. B. dem Quadrat, zugewiesen werden, sondern dem *formalen* Objekt x.

Das zeigt die Formalisierung: Extension(‚Quadrat') = λx(rechteckig x $\wedge$ gleichseitig x)

Aber, die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" kommen offensichtlich auch nicht dem formalen Objekt x zu. Denn ein formales Objekt *besitzt gar keine Eigenschaften*. Anders gesagt, es könnte genauso gut die Eigenschaft „rund", „dreieckig" o. a. besitzen.

Es *kommen* dem formalen Objekt x auch keine Eigenschaften *zu*. Schon gar nicht können einem formalen Objekt *wesentliche* Eigenschaften zukommen.

Wenn ich ein *unbestimmtes* Objekt x habe, dann hat dies selbst natürlich *keine* Eigenschaften, darum ist es eben *unbestimmt*.

Es ändert sich auch nichts daran, wenn man in einer rein *extensionalen* Bestimmung nicht von *Eigenschaften*, sondern von *Klassen* ausgeht: ‚x ist Element der Klasse der rechteckigen Objekte und x ist Element der Klasse der gleichseitigen Objekte'. Hier kann man ebenso fragen, ob ein *unbestimmtes* Objekt Element einer bestimmten Klasse sein kann.

• Diskussion
Das erste Problem, mit den *inhaltlichen* Objekten, ist wie gesagt nicht gravierend, man kann es durch korrekte Redeweise umgehen, aber wie lässt sich das zweite Problem lösen? Und beeinträchtigt es vielleicht generell die *Prädikaten-Logik*, weil hier immer Individuen-Variablen wie ‚x' Prädikate bzw. unbestimmten Objekten wie x Eigenschaften zugeordnet werden? Wir werden verschiedene Lösungsmöglichkeiten diskutieren.

– Intension
Zunächst ist zusagen: Bei Angabe der *Intension* entsteht kein Problem, denn hier wird eben keinem Objekt etwas zugeordnet, z. B. (bei der 2. Stufe).

Intension(‚Quadrat') = E(rechteckig) $\cup$ E(gleichseitig)

Aber auch bei der Theorie, dass ein Objekt nur eine *Menge von Eigenschaften* ist, es also *keinen Träger* dieser Eigenschaften gibt, haben wir keine Probleme (vgl. 0-2-3-2).

Quadrat = E(rechteckig) $\cup$ E(gleichseitig)

Denn hier gibt es kein (formales) Objekt, dem eine Eigenschaft zugesprochen wird.

Doch die *extensionale* Darstellung ist viel zu wichtig, als dass man sich mit einer rein *intensionalen* Lösung zufrieden geben könnte.

– Ganzheits-Darstellung
Man könnte eine *neue Darstellung* bzw. Schreibweise einfügen, z. B.
Quadrat = g(rechteckig, gleichseitig) ‚g' steht für Ganzheit
Ein Quadrat ist eine *Ganzheit*, die sich aus den Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" konstituiert.

Auch hier ergibt sich nicht das Problem, dass einem formalen Objekt eine Eigenschaft *zukommt*. Dieser Ansatz ist grundsätzlich interessant, aber aufwendig und wohl nicht wirklich notwendig – ich möchte ihn hier nicht weiter verfolgen.

– Sprachlicher Ansatz
Ich habe bisher *ontologisch* argumentiert. Es ging darum, dass ein Objekt Eigenschaften besitzt oder sie ihm zukommen. Aber man könnte auch *sprachlich* bzw. *handlungstheoretisch* argumentieren: wir *sprechen* einem Objekt x Eigenschaften zu, wir *weisen* oder *ordnen* sie ihm zu. Das Objekt ist also zunächst unbestimmt, kann aber durch Zuweisungen von Eigenschaften *bestimmt* werden (darauf kommen wir später beim Thema *Definition* zu sprechen).
Das Problem ist nur, dass man damit auf diese *sprachliche Interpretation* festgelegt wird.

– Formal
Man könnte aber auch einwenden, dass sich das Problem nur durch *Vermischung* von inhaltlicher, normaler Sprache und formaler, logischer Sprache ergibt.

Es ist nicht problematisch, dass ein *inhaltliches* Objekt Eigenschaften *besitzt* – wenn man den Unterschied zwischen synthetischen und analytischen Eigenschaften beachtet; z. B. ein (bestimmtes) Quadrat hat die Eigenschaft „blau".

Rein formal ergibt sich offensichtlich auch kein Problem: z. B. Fx bzw. Vx(Fx)
Hier wird eine Individuen-Variable (‚x') mit einer Prädikator-Variable (‚F') zusammengebracht, anders gesagt: es wird einem unbestimmten Objekt (x) eine unbestimmte Eigenschaft (F) *zugesprochen*, oder: es wird gesagt, dass ein unbestimmtes Objekt (x) eine unbestimmte Eigenschaft (F) *besitzt*. Das ist wohl auch nicht problematisch, denn jedes Objekt besitzt irgendeine Eigenschaft.

Man kann festhalten:
• *Inhaltliche* Objekte *beinhalten analytische, wesentliche* Eigenschaften, dagegen *besitzen* sie *synthetische, kontingente* Eigenschaften bzw. können die ihnen *zukommen*.
• *Formale*, unbestimmte Objekte *besitzen* formale, *unbestimmte* Eigenschaften, man kann ihnen aber auch (sprachlich) bestimmte Eigenschaften *zusprechen* oder *zuordnen*, jedenfalls informell, bei der Verwendung von Beispielen.

Theoretisch bestehen sicherlich noch ungeklärte Fragen, in welcher Weise genau Eigenschaften den Objekten zukommen, für die Argumentation in der *Praxis* sind diese aber gelöst bzw. vernachlässigbar.

0-3-4 Extension versus Intension

0-3-4-1 STUFEN-THEORIEN

Wir haben bei der Intension und Extension 2 Stufen unterschieden. Diese Stufen wurden hier in bestimmter Weise interpretiert. Ich werde aber auch eine *alternative* Theorie vorstellen.

• Parallele Stufen von Intension und Extension
Fassen wir das noch einmal zusammen, am einfachsten am Beispiel ‚Rappe'.

1) Intension
   1. Stufe: Allgemein-Begriff „Rappe“ , kurz: E(Rappe)
   2. Stufe: Vereinigungs-Menge der Begriffe/Eigenschaften „Pferd“ und „schwarz“
      E(Pferd $\cup$ schwarz)
2) Extension
   1. Stufe: Klasse der Rappen
   2. Stufe: Schnitt-Menge der Klasse der Pferde und der Klasse der schwarzen Objekte
      K(Pferde $\cap$ schwarze Objekte)

Dabei geht es bei der Intension wie der Extension um einen *abstrakten* Ansatz, d. h. es geht nur um die *wesentlichen* Eigenschaften.

Die 2. Stufe ist die wichtigere, erst auf dieser zweiten Stufe wird überzeugend deutlich, warum man die Intension auch als *Sinn* oder *Inhalt* bestimmt. Im Beispiel: Der *Inhalt* des Wortes ‚Rappe’ ist eben „schwarzes Pferd“ und nicht der Allgemein-Begriff „Rappe“.

Nun könnte man gegen diese Darstellung einwenden, dass hier *kein gravierender Unterschied* zwischen Extension und Intension besteht, beide nehmen entscheidend Bezug auf die *wesentlichen Eigenschaften* des Objekts. Beide entsprechen sich genau, auf der 1. Stufe wie auf der 2. Stufe. Man könnte fragen, ob man dann überhaupt Extension *und* Intension *beide* benötigt.

• Alternatives Stufen-Modell
In der Tat gibt es alternative Modelle, welche die Beziehung zwischen Extension und Intension anders definieren. Vor allem, indem sie nicht diese *Stufendarstellung* verwenden, nicht zwischen zwei Stufen unterscheiden bzw. auf eine Stufe verzichten.

Das gilt vor allem in der *klassischen* Logik, in der man meistens vom – geistigen – *Begriff* (und nicht vom Wort) ausgeht, und so ergibt sich eine andere Einteilung:

Begriff „Rappe“
1) Intension (Inhalt)
   Verbindung der Begriffe „Pferd“ und „schwarz“
2) Extension (Umfang)
   Klasse der Rappen

Hier besteht also ein klarer Unterschied zwischen Extension und Intension, jede hat ihren eigenen Zugang zur Wirklichkeit. Außerdem kommt man zunächst ohne zwei Stufen aus, was natürlich als Vereinfachung erwünscht wäre.

• Diskussion
Trotz der Gegengründe halte ich das erste Modell mit 2 Stufen für überlegen. Erstens werden Extension und Intension in der *modernen* Logik in erster Linie als Bedeutungen von *Zeichen*, nicht als Begriffs-Bestimmung verstanden. Außerdem hat der 2-stufige Ansatz den Vorteil einer *parallelen* Darstellung von Extension und Intension.

Und schließlich: Letztlich kommt man nicht einmal mit *zwei* Stufen aus, sondern man kann noch *weitere* Stufen annehmen, die *Kette* fortsetzen, fragen, wie sich ‚Pferd’ und ‚schwarz’ weiter bestimmen lassen. Dies gehört allerdings nicht mehr zur *direkten* Intension/Extension von ‚Rappe’, sondern dann ginge es um die Intension/Extension von ‚Pferd’ bzw. ‚schwarz’. In gewisser Weise kann man sich hier an der *klassischen Definitionslehre* orientieren, die ein Objekt bzw. einen Art-Begriff (hier „Rappe“) durch *Gattungs-Begriff* (hier „Pferd“) und *Art-Differenz* (hier „schwarz“) definiert, wenn diese Theorie auch vereinfacht ist.

Das Verhältnis von Extension und Intension wird uns in diesem Punkt aber noch weiter beschäftigen.

0-3-4-2 SUBJEKTIVE UND OBJEKTIVE THEORIE

1) Ontologie-Ansatz versus Definitions-Ansatz
Bisher habe ich Extension und Intension als etwas *Objektives* behandelt. Auch wenn ich von *Sprachzeichen* ausging, so wurden die Extension / Intension letztlich doch über die *Objekte* bestimmt. So ergab sich:
– die *Intension* sind die wesentlichen Eigenschaften, die ein Individuum bzw. die Mitglieder einer Klasse objektiv bzw. real bestimmen
– die *Extension* sind das Individuum bzw. die Klassen-Elemente mit samt ihren wesentlichen Eigenschaften

Es gibt aber auch einen alternativen Ansatz, so dass wir folgende Unterscheidung treffen: (wobei wir zunächst nur die *Intension* betrachten):

• *objektiver* Ansatz (*Ontologie*- Ansatz)
Die Intension sind die wesentlichen Eigenschaften, die ein Individuum bzw. die Mitglieder einer Klasse *objektiv* bestimmen. Dieser Ansatz ist rein *ontologisch*.

• *subjektiver* Ansatz (*Definitions*-Ansatz)
Die Intension sind die wesentlichen Eigenschaften, die wir einem Individuum bzw. den Mitgliedern einer Klasse durch eine *Definition zuschreiben*. D. h. aber, es geht nicht notwendig um die tatsächlich wesentlichen Eigenschaften, sondern um die, die wir *subjektiv* für wesentlich *halten*. Das „wir" meint in erster Linie die *Wissensgemeinschaft*.

Dieser Ansatz ist primär *handlungs-theoretisch*, weil eine Definition eine Handlung bzw. Sprachhandlung ist. Trotzdem bleibt auch der subjektive Ansatz insofern *realistisch*, dass es primär um *Eigenschaften von Objekten* geht, nicht um semantische Merkmale von Zeichen oder um psychische Deutungen.

Diesen Unterschied können wir formal so kennzeichnen, dass wir bei einer *Definition* das Kürzel ‚df' verwenden. Für die Intension ergibt sich dann (auf der *2. Stufe*):
• ontologischer Ansatz: Intension^2(‚Rappe') = E(Pferd) $\cap$ E(schwarz)
Die Intension von ‚Rappe' ist die Verknüpfung von „Pferd" und „schwarz", oder:
Ein Rappe beinhaltet als wesentliche Eigenschaften „schwarz" und „Pferd"
• definitorischer Ansatz: Intension^2(‚Rappe') $=_{df}$ E(Pferd) $\cap$ E(schwarz)
Die Intension von ‚Rappe' *ist definiert* als Verknüpfung von „Pferd" und „schwarz", oder: Beim Rappen gelten die Eigenschaften „Pferd" und „schwarz" als wesentlich
Für die Extension gilt Entsprechendes.

Man kann aber auf *beiden Stufen* von einer *Definition* sprechen, z. B.:
1. Stufe: Was ist die Intension (intensionale Bedeutung) des Wortes ‚Sokrates'?
Antwort: Das Wort ‚Sokrates' bedeutet per definitionem den Individuums-Begriff „Sokrates"
Intension(‚Sokrates') $=_{df}$ E(Sokrates)
2. Stufe: Was macht den Namen ‚Sokrates' bzw. den Individual-Begriff „Sokrates" aus?
Antwort: Der Begriff „Sokrates" ist per definitionem durch folgende Eigenschaften bestimmt: Philosoph, weise, Begründer der sokratischen Methode usw.
E(Sokrates) $=_{df}$ E(Philosoph, weise, Begründer der sokratischen Methode usw.)

Für die *1. Stufe* von Extension / Intension ist die Unterscheidung subjektiv – objektiv wenig relevant, weil es sich dabei um *Festsetzungen* handelt (vgl. 0-3-4-4). Dass die Intension von ‚Sokrates' der Begriff „Sokrates" ist, beruht auf einer Festlegung, damit ist das *quasi objektiv* und es macht keinen Sinn zu fragen, ob dies real wahr ist oder nur für wahr gehalten wird. Für die 2. Stufe ist aber m. E. sinnvoller, Intension und Extension über den *subjektiven Ansatz* zu bestimmen als über den *objektiven Ansatz.* Das wird im Folgenden begründet.

Wir haben schon erläutert: Intension und Extension sind *abstrakt*, denn es geht nicht um *alle* Eigenschaften, sondern nur um die *wesentlichen* – denn wir können nie alle Eigenschaften kennen; außerdem wären sonst alle Aussagen über Objekte redundant.

Aber wir können meistens auch *nicht sicher wissen*, welches die *wesentlichen* Eigenschaften der Objekte sind. Wir können das nur vermuten. Daher bietet sich der *subjektive* Ansatz an.

Zwar stellt sich für alle Aussagen das Problem, dass sie falsch sein können. Doch Aussagen über Extension und Intension haben einen besonderen Anspruch, weil sie eben die wesentlichen, identitäts-stiftenden Eigenschaften anzugeben behaupten.

Wir müssen aber eine weitere *Einschränkung* machen: Wir können *nicht für alle* Objekte die vermuteten wesentlichen Eigenschaften angeben, es sind nicht alle Objekte definiert.

Dies lässt sich leicht erläutern: Angenommen, wir nehmen einen beliebigen Menschen, der nur in seiner Familie, in seinem Freundeskreis und an seinem Arbeitsplatz bekannt ist, sonst aber nicht, d. h. er ist in der Gesellschaft, in dem Staat, in der Sprachgemeinschaft, in der er lebt, unbekannt. Nennen wir ihn ‚Hans Müller'. Sicherlich besitzt dieser Hans *wesentliche Eigenschaften*, die ihn, die seine Identität bestimmen. Aber der Hans ist nicht von der Wissensgemeinschaft definiert. Wenn man im *Lexikon* nachschlägt, findet man nichts über ihn (es könnte natürlich einen namensgleichen bekannten Hans Müller geben, davon sehen wir ab).

Anders dagegen, wenn wir über den *berühmten* Philosophen Sokrates nachlesen, über den finden wir genaue Einträge. Wir können sagen, Sokrates ist als Person öffentlich definiert.

Vereinfacht gesagt: Objekte, die wichtig und bekannt sind in einer Gemeinschaft, sind definiert, die anderen nicht. Natürlich kann man z. B. nicht jeden individuellen Stein definieren bzw. benennen. Die meisten Objekte sind nicht öffentlich, nicht gesellschaftlich definiert.

Eine Definition ist eine Aussage, die das *Wesen eines Objektes* bestimmt (später werden wir noch andere Definitionen diskutieren). Eine Definition wird normalerweise durch die Wissensgemeinschaft festgestellt. Zwar kann es auch *private* Definitionen geben. Z. B. haben die Angehörigen von Hans eine solche – inoffizielle, informelle – Definition von ihm. Aber das trifft nicht den eigentlichen Sinn einer Definition als etwas, das von einer *Gemeinschaft* getragen, durch *Übereinkunft* bestimmt wird. Jedenfalls ist eine Definition zunächst eine *Handlung*: man schreibt einem Objekt bestimmte Eigenschaften zu, genauer, man sagt, dass sich das Objekt durch bestimmte Eigenschaften erst *konstituiert*.

2) Subjektive Intension

Verwenden wir hier ein klassisches Beispiel des Logikers Gottlob Frege: ‚Abendstern' und ‚Morgenstern'. Nach Frege gilt:

– Die Intension der Wörter ‚Abendstern' und ‚Morgenstern' („Sinn" nach Frege) soll *unterschiedlich* sein.

– Die Extension („Bedeutung" nach Frege) dieser Zeichen soll aber *gleich* sein, in beiden Fällen handelt es sich um die Venus; zur Extension kommen wir im nächsten Punkt.

Zunächst ist es fraglich, ob die Intension der beiden Wörter sich wirklich unterscheidet, denn es geht um die *wesentlichen* Eigenschaften von Abendstern und Morgenstern; auch wenn wir diese Eigenschaften nicht ganz sicher angeben können, nach der in den vorigen punkten dargestellten *objektiven*, *ontologischen* Theorie müssen sie gleich sein.

Gehen wir aber von der *subjektiven* Theorie aus, kommen wir zu einem anderen Ergebnis.

Präzisieren wir die reale Intension; dabei können wir wieder *2 Stufen* unterscheiden:

1. Stufe: die Intension des Wortes ‚Morgenstern' ist der *Begriff* "Morgenstern",
die Intension des Wortes ‚Abendstern' ist der *Begriff* "Abendstern".
Damit ist aber noch nichts über die weiteren Eigenschaften ausgesagt. Dies geschieht in einer 2. Stufe.

2. Stufe: *Definition* des Begriffs. Diese könnte hier lauten:

„Morgenstern = der in der Morgendämmerung noch sichtbare Planet Venus, wenn er westlich von der Sonne steht"; im Gegensatz dazu:
„Abendstern = der in der Abenddämmerung schon sichtbare Planet Venus".

Wir haben hier also *unterschiedliche Intensionen*. Das lässt sich folgendermaßen erklären: Die Intension bezieht sich primär auf die Eigenschaften, mit denen wir etwa ein Objekt *erfassen*, die wir bei ihm für wesentlich *halten*. Und die unterscheiden sich in der Tat bei Abendstern und Morgenstern. (Bzw. unterschieden sie sich früher – aber das ist ein weiteres Problem, welches ich hier außer Acht lasse.)

Damit haben wir allerdings eine Veränderung der bisherigen Bestimmung von Intension vorgenommen. Ich spreche von *subjektiver* Intension. Und die ist in der Tat die primäre. Sie umfasst die als wesentlich *zugeschriebenen* Eigenschaften von Objekten.

Bestimmt man Intension sprachlich oder psychisch (vgl. 0-3-1-1), wäre der subjektive Ansatz sofort plausibel:

• *sprachliche* Intension: hier gibt es in der Tat eine verschiedene Intension: ‚Morgenstern': z. B. ‚der Stern, der morgens besonders hell leuchtet'; ‚Abendstern': z. B. ‚der Stern, der abends besonders hell leuchtet'.

• *psychische* Intension: auch hier mag man einen entsprechenden Unterschied feststellen: ‚Abendstern' und ‚Morgenstern' sind mit unterschiedlichen Gedanken und Gefühlen verbunden. Das mag sogar bei jedem Individuum anders sein (mancher weiß auch gar nichts damit anzufangen).

Aber ich habe die Intension ja als *real* bestimmt. Doch wie ich oben begründet habe, ist auch für die *realistische* Theorie der *subjektive* Ansatz zu vertreten.

Halten wir fest: Ich bestimme die Intension als *subjektiv*, sie erfasst die als wesentlich *zugeschriebenen* Eigenschaften von Objekten. Allenfalls könnte man unterscheiden:

primäre Intension = *subjektive* Intension = für wesentlich gehaltene Eigenschaften
sekundäre Intension = *objektive* Intension = die wesentlichen Eigenschaften

3) Subjektive Extension

Die – *real-subjektive* – Theorie der Intension betrifft auch die *Extension*. Insofern müssen wir die oben gemachten Aussagen zur Extension präzisieren. Wir erfassen in der Extension Objekte *nicht* mit ihren tatsächlichen, *objektiv* wesentlichen Eigenschaften, sondern mit den Eigenschaften, die wir ihnen *subjektiv* als wesentlich zuschreiben. Also entsprechend der subjektiven Intension.

Das ist von großer Wichtigkeit, denn wir müssen damit die seit Frege verbreitete These aufgeben, dass zwei Zeichen bei *gleicher Intension* eine *unterschiedliche Extension* besitzen können. Das heißt für das Beispiel von ‚Morgenstern' und ‚Abendstern': sie haben auch nicht dieselbe Extension, denn bei ‚Morgenstern' wird die Venus mit anderen Eigenschaften erfasst als bei ‚Morgenstern'. Nur wenn man von den *objektiven,* realen Eigenschaften ausgeht, besitzen ‚Morgenstern' und ‚Abendstern' dieselbe Extension. Es ist natürlich schwierig, eine so etablierte Unterscheidung wie die von Frege aufzugeben; eventuell könnte man sie retten, indem man – entsprechend wie bei der Intension – unterscheidet zwischen:

• *subjektive* Extension: Die *subjektive Extension* umfasst ein Objekt gemäß den ihm *als wesentlich zugeschriebenen* Eigenschaften – so unterscheiden sich ‚Morgenstern' und ‚Abendstern', sie haben eine unterschiedliche Extension.

• *objektive* Extension: hier wäre weiter zu differenzieren zwischen abstrakter und konkreter Extension (vgl. oben). Die *abstrakte (objektive) Extension* ist das Objekt mit allen seinen *wesentlichen* Eigenschaften. Die *konkrete (objektive) Extension* ist das konkrete, reale Objekt selbst, mit *allen seinen wesentlichen und unwesentlichen Eigenschaften.* In beiden Fällen besitzen ‚Abendstern' und ‚Morgenstern' dieselbe Extension – Freges Theorie wäre gerettet; allerdings, wenn man auch von der objektiven Intension ausgeht, wäre das wieder aufgehoben, denn dann wäre eben auch die Intension von ‚Abendstern' und ‚Morgenstern' gleich.

Die *subjektive* Extension ist aber die *eigentliche*, die *primäre* Extension. Man könnte auch bei ihr unterscheiden zwischen abstrakt und konkret; aber von größerer Bedeutung ist nur die abstrakte Variante, denn die subjektive Intension bezieht sich normalerweise auf die wesentlichen Eigenschaften (nicht auf alle Eigenschaften).

Folgende Grafik soll die Hauptunterschiede für das Beispiel „Abendstern – Morgenstern" *vereinfachend* veranschaulichen; dabei erfasse ich in der Intension aber nur *eine* unterscheidende Eigenschaft, die gesamte Intension umfasst natürlich weitere Eigenschaften:

	‚Morgenstern'	*‚Abendstern'*
Intension	in der Morgendämmerung noch sichtbar	in der Abenddämmerung schon sichtbar
	↓	↓
abstrakte Extension	der Himmelskörper, der in Morgendämmerung noch noch sichtbar ist	der Himmelskörper, der in Abenddämmerung schon sichtbar ist
konkrete Extension (reales Objekt)	Venus	

In der *konkreten* Extension stimmen also ‚Morgenstern' und Abendstern' überein, dies ist das *konkrete Objekt*, mit allen seinen wesentlichen und unwesentlichen Eigenschaften, quasi das „Ding an sich", das uns aber nicht zugänglich ist.

Wir können jetzt die obige, allgemeine Grafik erweitern:

Wort/Zeichen
↓
abstraktes Objekt = Träger + Intension
(Extension) (Intension = Begriff = die für wesentlich gehaltenen Eigenschaften)
↓
konkretes Objekt = Träger + wesentliche Eigenschaften + kontingente Eigenschaften

(Die Grafik gibt jeweils die primäre Interpretation wieder: also Intension als subjektive Intension, Extension als subjektive, abstrakte Extension.)

0-3-4-3 VERHÄLTNIS VON EXTENSION UND INTENSION

Ich habe eben gezeigt, dass Extension und Intension weitgehend übereinstimmen, dass bei gleicher Intension zweier Zeichen auch deren Extension gleich ist und umgekehrt. Man kann daher fragen: Wozu benötigt man überhaupt den *Doppelansatz* von Extension und Intension? Kommt man nicht mit einem von beiden aus? Jedenfalls stellt sich die Frage bei dem hier vorgelegten Modell, wonach gilt:

Extension: Objekt (bzw. Träger) einschließlich der definitorischen Eigenschaften
Intension: die definitorischen Eigenschaften

Danach gilt: *Die Intension ist ein Teil der Extension*.

Die Gründe, dennoch an dieser Unterscheidung festzuhalten, sind vielfältig und können hier nicht im Einzelnen dargelegt werden, sie werden aber in späteren Passagen noch verdeutlicht werden, z. B. wenn es um Sätze geht. Beide Ansätze haben ihre Vor- und Nachteile.

Die Intension bestimmt das Objekt *wesentlich*. Z. B. „Ein Mensch ist definiert durch die Eigenschaften *Sinnenwesen* und *vernünftig"*. Die Extension braucht man, um *nicht wesentliche* Eigenschaften anzugeben, die etwa *nur für einen Teil* der Menschen gelten. Z. B. „viele Menschen sind Weintrinker".

Anders gesagt, die Intension bezieht sich nur auf *analytische*, definitorische Eigenschaften; die Extension erfasst analytische, aber auch *synthetische* Eigenschaften.

Wichtig ist folgendes Verhältnis zwischen Extension und Intension: Je *größer* die Extension, desto *kleiner* (i. allg.) die Intension – und umgekehrt. Z. B ist die Extension von ‚Blume' größer als die von ‚Rose': denn die Klasse der Rosen ist *Teilmenge* der Klasse der Blumen.

Andererseits ist die Intension von ‚Blume' kleiner als die von ‚Rose'. Dabei stellt sich man sich die Intension (vereinfacht) als eine *Menge von Eigenschaften* vor. Die Intension von ‚Rose' umfasst alle Eigenschaften von ‚Blume', aber zusätzlich die, welche eine Rose auszeichnen. Die Rose ist definiert als eine Blume, die besondere zusätzliche Eigenschaften besitzt. Somit sind die Eigenschaften von ‚Blume' eine Teilmenge der Eigenschaften von ‚Rose'.

Man könnte zwar denken, unter ‚Blume' fasst man doch viele verschiedene Pflanzen zusammen, Rosen, Tulpen, Nelken usw., also müsste der Begriff der Blume *umfangreicher* sein als der Begriff der Rose. Geht man aber von der gängigen Definitionslehre aus, dann umfasst der Begriff der Blume nur die Eigenschaften, die *allen* verschiedenen Blumen gemeinsam sind, also die *Schnitt-Menge* der – wesentlichen – Eigenschaften. Dass z. B. *einige* Blumen blaue, andere rote, wieder andere gelbe Blüten haben, also die *Unterschiede*, geht nicht in die Definition ein. (Ein Problem ist hier: „Blume" ist intensional gesehen ein *Teil-Begriff* von „Rose", man könnte auch sagen *Unter-Begriff*. Aber wir bestimmen, eigentlich paradoxerweise, Begriffe nach ihrer *Extension*, dann ist „Rose" natürlich ein Unter-Begriff von „Blume", weil die Klasse der Rosen eine Teilmenge der Klasse der Blumen ist.)

Man kann ein Wort vor allem in zweierlei Weise bestimmen: am Beispiel von ‚Mensch' der traditionell als Sinnenwesen (animal) und Vernunftwesen (rationale) definiert ist.

1) *Schnitt-Menge* der *Ober-Klassen* (das ist zentral für die Definition)
   1. extensional: K(Mensch) = K(Sinnenwesen) $\cap$ K(Vernunftwesen)
   2. intensional: E(Mensch) = E(Sinnenwesen) $\cup$ E(Vernunftwesen)

2) *Vereinigungs-Menge* von (wesentlichen) Unter-Klassen
   1. extensional: K(Mensch) = K(Männer) $\cup$ K(Frauen)
   2. intensional: E(Mensch) = E(Männer) $\cap$ E(Frauen)

3) Kombination (manchmal wird folgendermaßen kombiniert, nur über Vereinigung)
   1. extensional: K(Mensch) = K(Männer) $\cup$ K(Frauen)
   2. intensional: E(Mensch) = E(Sinnenwesen) $\cup$ E(Vernunftwesen)

K = Klasse (der Objekte), E = Eigenschaft (ebenfalls als Menge aufgefasst)

Man sieht, dass sich die Mengen-Verknüpfungen extensional und intensional also immer gegensätzlich verhalten (außer bei der Kombination):

Extensional: Schnitt-Menge	Intensional: Vereinigungs-Menge
Extensional: Vereinigungs-Menge	intensional: Schnitt-Menge

0-3-4-4 NOMINAL-DEFINITION UND REAL-DEFINITION

In diesem Punkt wird für *speziell interessierte Leser* ausführlicher auf die *Definition* eingegangen. Wie beschrieben, werden die *Intension* und *Extension* primär durch eine *Definition* bestimmt. Das gilt sowohl für die 1. wie für die 2. Stufe. Im strengen Sinn von Definition spricht man aber erst auf der 2. Stufe, also wenn man z. B. ‚Mensch' als „vernünftiges Sinnenwesen" definiert.

Ein wichtiger Unterschied, auf den bisher noch nicht eingegangen wurde, ist der zwischen *Real-Definition* und *Nominal-Definition*; dieser Unterschied soll im Folgenden erläutet werden, aber nur knapp, weil dieses Thema eher zur Sprachphilosophie gehört.

Als erste Bestimmung kann man sagen:
– *Nominal-Definition*: sie ist eine *Bedeutungs-Bestimmung*, sie gibt die *Bedeutung* eines Zeichens an (bzw. sie gibt die Extension oder Intension eines Zeichens an).

Nominal-Definitionen findet man vorrangig im *Wörter-Buch*.

– *Real-Definition*: sie ist eine *Wesens-Bestimmung*, sie gibt die *wesentlichen Eigenschaften* eines realen Objektes bzw. einer komplexen Eigenschaft an.

Real-Definitionen findet man vorrangig im Lexikon, verstanden als *Sach-Lexikon*.

Obwohl man grundsätzlich sowohl für ‚Mensch' wie für ‚Rappe' eine Real-Definition und eine Nominal-Definition angeben kann, ergibt sich doch ein gewisser Unterschied:
– ‚Der Mensch ist ein vernünftiges Sinnenwesen' – das würde man eher als *Real*-Definition fassen, die eine Aussage über das *Wesen* des Menschen macht.
– ‚Der Rappe ist ein schwarzes Pferd' – das ist eher als *Nominal*-Definition zu fassen, bei der weniger eine Aussage über das Wesen das Rappen gemacht wird, sondern umgekehrt die beiden Wörter ‚Pferd' und ‚schwarz' zu dem Wort ‚Rappe' zusammengefasst werden.

Bisher wurden beide Definitionen verwandt. Da ich primär von der Extension und Intension von *Sprachzeichen* ausgegangen bin, erfolgte zuerst, auf der *1. Stufe*, eine Nominal-Definition. Z. B. die Intension des Wortes ‚Rappe' ist die Eigenschaft „Rappe".

Auf der *2. Stufe*, auf der das Zeichen ‚Rappe', der Begriff „Rappe" oder aber das Objekt *Rappe* durch die Eigenschafts-Verknüpfung „Pferd" und „schwarz" bestimmt wurde, erfolgte primär eine Real-Definition.

Gehen wir darauf im Einzelnen ein:

• *Real-Definition*

Sie gibt an, welche definierenden Eigenschaften ein reales *Objekt*, z. B. das reale Wesen „Mensch" besitzt. Diese Definition wird von der *Wissensgemeinschaft* (bzw. Wissenschaftlergemeinschaft) vorgenommen. Z. B.: Ein Lebewesen (bzw. der Begriff „Lebewesen") ist bestimmt durch die folgenden *essentiellen* Eigenschaften: Stoffwechsel, Informationsverarbeitung, Fortpflanzung u. a. Oder eben unser klassisches Beispiel: ‚Der Mensch ist (definiert als) ein vernünftiges Sinnenwesen'.

Die Definition hat eine merkwürdigen Doppelstatus: zunächst ist es eine – empirische – *Aussage*, aber sie beinhaltet (als Sprachhandlung) auch eine *Festsetzung*.

Dennoch kann eine Definition, jedenfalls die Real-Definition, anders als eine reine Festsetzung, sich in mehrfacher Weise als falsch erweisen und falsifiziert werden.

Erstens, die zugesprochene Eigenschaft kommt dem Objekt nicht tatsächlich zu.
(Z. B. wenn der Mensch real nicht vernünftig wäre.)

Zweitens, die Eigenschaft kommt dem Objekt zwar zu, aber nicht wesentlich, nur kontingent. (Z. B. wenn Vernunft für den Menschen keine wesentliche Eigenschaft wäre.)

Drittens, je nach Formulierung wird das *‚ist definiert'* auch falsifiziert, wenn die betreffende Eigenschaft dem Objekt nicht durch einen Definitions-Akt zugesprochen wurde.

Welches genau die Eigenschaften sind, die ein Objekt, z. B. einen Menschen wesentlich bestimmen, braucht in der *Logik* nicht geklärt zu werden.

Wie gesagt, ich gehe ohnehin davon aus, dass die Real-Definition eigentlich nur die Eigenschaften angibt, die wir *subjektiv* für wesentlich *halten*.

Die klassische Philosophie bestimmte den Menschen wie gesagt als „vernünftiges Sinnenwesen“ (*animal rationale*), gemäß der traditionellen Definitionslehre, und zwar wie folgt:

Ein *Artbegriff (species)*	hier: Mensch	wird definiert durch
– die *nächst höhere Gattung (genus proximum)*	hier: Sinnenwesen und	
– *Art-Differenz* (differentia specifica)	hier: vernünftig	

Realistischer wäre es wohl, ’rational’ mit „vernunftbegabt“ zu übersetzen.

Das heißt, es werden immer nur *2 (zwei)* Begriffe zur Definition herangezogen. Diese sind nicht gleichberechtigt, sondern der Gattungsbegriff ist *übergeordnet*: im Beispiel ist das ‚vernünftig’ untergeordnet, denn es wird dem ‚Sinnenwesen’ zugeordnet.

Indem man immer höhere, abstraktere Gattungs-Begriffe angibt, erhält man eine Hierarchie, die als Baum des Porphyrius berühmt ist.

Obwohl diese Rang-Ordnung ontologisch durchaus Sinn macht, ist es bei der formalen Logik sinnvoller, die Begriffe *gleichberechtigt* und als *Mengen* zu behandeln, also im Beispiel: Intension(‚Mensch’) = E(Sinnenwesen) $\cup$ E(vernünftig).

• *Nominal-Definition*

Man stellt die Nominal-Definition gerne der Real-Definition gegenüber, aber eigentlich gibt es *verschiedene* Nominal-Definitionen zu unterscheiden; um nur die wichtigsten zu nennen:

– Quasi-Real-Definition

Mit dem Wort ‚Rappe’ bezeichnet man ein Wesen (Objekt), das als *wesentliche* Eigenschaften „Pferd“ und „schwarz“ besitzt.

– Angabe des Sprachgebrauchs

Wir *nennen* ein Objekt ‚Rappe’, das die Eigenschaften „Pferd“ und „schwarz“ besitzt.

– sprach-interne Bestimmung

syntaktisch: das Wort ‚Rappe’ ist durch folgende *Wörter* definiert: ‚Pferd’ und ‚schwarz’
semantisch: Das Wort ‚Rappe’ ist definiert durch die *semantischen Merkmale* „Pferd“ und „schwarz“.

Hier besteht allerdings die Notwendigkeit, doch noch einen *Bezug zur Realität* herzustellen, sonst bleibt die Nominal-Definition ein *geschlossenes Sprachsystem*.

– Benennung

Als *Benennungen* kann man die als Beispiel gebrachten Definitionen der *1. Stufe* verstehen: Z. B.: Die Intension von ‚Rappe’ ist per definitionem der Begriff „Rappe“. Oder die Extension von ‚Rappe’ ist per definitionem die Klasse der Rappen. Diese lassen sich als *Benennungen* umformulieren: Hiermit nenne ich die Intension von ‚Rappe’: Begriff „Rappe“. Oder: Hiermit nenne ich die Extension von ‚Rappe’: Klasse der Rappen. Denn das sind ja keine empirischen Aussagen über die Rappen, es sind *Sprachhandlungen* oder *Festlegungen*, die weder wahr noch falsch sind, nur mehr oder weniger nützlich und begründet. Allenfalls kann man diese Statements als empirische Aussagen über einen *vollzogenen Definitionsakt* verstehen. Auch auf der *2. Stufe* kann man in bestimmten Fällen von Benennungen sprechen, z. B.: Hiermit nenne ich ein schwarzes Pferd ‚Rappe’.

Am wichtigsten und interessantesten ist die Angabe des (richtigen) *Sprachgebrauchs*. Diese Definition wird von der *Sprachgemeinschaft* vorgenommen. Hier wird meistens gesagt, in Abgrenzung zu Real-Definition, dass *nicht* auf *wesentliche* Eigenschaften Bezug genommen und so eine metaphysische Falle vermieden wird.

Aber durch eine Definition werden *nicht alle* Eigenschaften erfasst. Erst eine *Beschreibung* oder *Theorie* zielt auf Erfassung *aller* Eigenschaften, kann allerdings auch nicht vollständig sein. Es ist also doch sehr nahliegend zu bestimmen, dass eine Definition nur die *wesentlichen* Eigenschaften erfassen soll. Wenn man den Begriff „wesentlich“ kritisiert, welche Eigenschaften soll denn sonst die Definition erfassen, wenn nicht die essentiellen?

Im Folgenden kann nicht immer auf die verschiedenen *Varianten* der Nominal-Definition eingegangen werden.

• Beziehung zwischen Nominal- und Real-Definition
Es besteht ein sehr kompliziertes Wechselverhältnis, eine *Dialektik* zwischen Nominal- und Real-Definition. Allerdings hat die Nominal-Definition Vorrang: Denn beim Definieren sind wir eben immer auf *Sprache* angewiesen. Zunächst muss ich klären, wen oder was ich mit einem Wort überhaupt meine (Nominal-Definition), erst dann kann ich – eventuell – das Wesen des gemeintes Objekts durch eine Real-Definition bestimmen. Zwar können Nominal- und Real-Definition (weitgehend) übereinstimmen, praktisch ist die Abgrenzung jedoch oft schwierig.

Ein sehr vereinfachendes Beispiel: Die *Nominal*-Definition des Wortes ‚Walfisch' schrieb dem entsprechenden Lebwesen ursprünglich zu, dass es die Eigenschaft habe, Fisch zu sein. Die Wissenschaft stellte dann fest, dass es sich nicht um einen *Fisch*, sondern um ein *Säugetier* handelt; die Real-Definition enthält also die wesentliche Eigenschaft „Säugetier". Entsprechend wurde später dann die Nominal-Definition verändert, heute wird auch anstelle von 'Walfisch' nur noch ‚Wal' gesagt.

• Definition von Prädikatoren
Für *Prädikatoren* wie Substantive lässt sich sowohl eine Nominal-Definition wie eine Real-Definition angeben.

Zunächst zur *Nominal-Definition*: In der *Sprache* sind Prädikatoren definiert. Wenn wir im *Wörter-Buch* unter „Mensch' nachsehen, finden wir eine Erklärung, was das Wort ‚Mensch' (Prädikator) bedeutet, es werden die definierenden Eigenschaften / Merkmale angegeben.

Zur *Real-Definition*: Ebenso finden wir im *Sach-Lexikon* eine Definition, was das Wesen Mensch ist bzw. finden wir eine über die Definition hinausgehende *Beschreibung*.

• Definition von Eigennamen
Für einen Eigennamen wie ‚Hans' gibt es dagegen keine *Nominal-Definition*, die von der *Sprachgemeinschaft* getragen wird. Wenn wir z. B. unter dem Wort ‚Hans' (Eigenname) im Wörter-Buch nachgucken, finden wir keine Bedeutungserklärung – nur die Angabe, wie man das Wort ‚Hans' korrekt schreibt (ich lasse dabei außer Acht, dass man ‚Hans' auch als *Variable* verstehen könnte, um es nicht noch komplizierter zu machen).

Aber man kann selbst – privat – *Benennungen* und damit Nominal-Definitionen vornehmen, die dann in gewisser Weise gesellschaftlich übernommen werden. Dies geschieht z. B. bei der *Taufe* eines Kindes.

In bestimmten, aber ganz eingeschränkten Situationen ist eine Nominal-Definition auch zu umgehen. Z. B. wenn ich auf etwas zeige (ohne es sprachlich zu benennen) und dann eine Real-Definition vornehme.

Es gibt für *individuelle Menschen* (entsprechend *Eigennamen*) aber auch keine *allgemeine Real-Definition*. Nehmen wir zum Beispiel wieder einen bestimmten Menschen namens ‚Hans'. Zwar besitzt das Individuum Hans natürlich wesentliche Eigenschaften. Zwar können Angehörige angeben, welche Eigenschaften sie als wesentlich für Hans ansehen. Aber auch dies ist normalerweise eine *private* Definition; „normale" Menschen – und erst recht Tiere oder andere Objekte, denen wir einen Eigennamen geben – sind nicht von der Gesellschaft, speziell der Wissenschaftlergemeinschaft kollektiv definiert, es sei denn es handelt sich um *Prominente*. Wenn wir im *Lexikon*, in dem Real-Definitionen + zusätzliche Angaben stehen, nachsehen, werden wir ‚Hans' nicht finden (vgl. 0-2-4-2 über Individuen-Konstanten).

Allerdings gibt es auch Individuelles, für das *allgemeine* Definitionen vorliegen: das sind z. B. *Städte* (wie Köln), *Länder* (wie Deutschland), *Flüsse* (wie die Mosel), *Gebirge* (wie die Alpen), *Planeten* (wie der Mars). Es wäre zu diskutieren, ob hier Nominal-Definitionen und/oder Real-Definitionen vorliegen. In erster Linie sicher Real-Definitionen. Denn die Tausenden Namen von Städten und Orten – allein in Deutschland – finden sich natürlich nicht in einem Wörterbuch. Ein normaler Sprecher der deutschen Sprache kennt nicht die Bedeutungen all dieser Städte-Namen, das gehört nicht zu den Definitionen der Sprachgemeinschaft.

Zwar wird auch kaum ein Deutscher all diese Orte (mit ihren wesentlichen Eigenschaften) kennen, dies ist aber prinzipiell Bestandteil des gemeinsamen Wissens der Deutschen. Doch für die Namen von Menschen, also die Eigennamen par excellence, die uns am meisten interessieren, gilt das oben gesagte: Es gibt keine *allgemeine nominal*-definitorische Extension und Intension. Und es gibt auch keine allgemeine *real*-definitorische Extension und Intension.

Allerdings existiert eine *gesellschaftlich-staatliche* Identifizierung bzw. Definierung von Menschen, über Dokumente wie den Pass; dort wird einem Menschen jeweils eine Nummer zugeordnet, sein Geburtsdatum festgehalten usw., aber dies beschreibt sicherlich nicht das Wesen eines Menschen. Auf dieses sehr schwierige Thema „Definition“ gehe ich in einem in Arbeit befindlichen Buch über „Integrale Philosophie“ genauer ein.

Diese Problematik von Nominal- versus Real-Definition sowie allgemein von Extension versus Intension stellt sich bei der *formalen, logischen* Sprache zwar weniger als bei der *normalen* Sprache, weil eben die *konstante* Bedeutung in der formalen Sprache nur eine untergeordnete Rolle spielt. Dennoch besteht die Problematik hier ebenfalls, sie wird nur oft übersehen.

0-3-4-5 ÜBERSICHTEN

Abschließend zum Verhältnis von Extension und Intension drei Übersichten:

- *Übersicht:* Objekte – und Extension versus Intension
- *Übersicht:* Arten von Extension und Intension, am Beispiel (‚Sokrates’, ‚Mensch’)
- *Übersicht:* Arten von Extension und Intension, generell

• *Übersicht:* Objekte – und Extension versus Intension

Formales Objekt	
⇓ + essentielle Eigenschaften	Intension eines Zeichens (Bedeutungs-Definition)
Abstraktes Objekt	Extension eines Zeichens (Bezeichnungs-Definition)
⇓ + kontingente Eigenschaften	Forschung, Untersuchung
Konkretes Objekt	Theorie, Beschreibung

Erläuterung: Ein *formales Objekt* (x) wird durch Hinzufügung der *wesentlichen Eigenschaften* zu einem *abstrakten Objekt*. Die *wesentlichen Eigenschaften* sind die (reale) *Intension* des Zeichens, das abstrakte Objekt ist die Extension des Zeichens. Beide beruhen auf *Definition*. Die Feststellung der *kontingenten, synthetischen Eigenschaften* des Objekts ist vor allem Aufgabe der *Forschung*. In einer wissenschaftlichen Theorie bzw. Gesamt-Beschreibung wird dann das *konkrete Objekt* mit essentiellen und kontingenten Eigenschaften dargestellt.

Übersicht: Beispiel für Eigenname ‚Sokrates' (Individuum) und Prädikator ‚Mensch' (Klasse)

1) Intension	
1. subjektiv (primär)	
– ‚Sokrates'	die für wesentlich *gehaltenen* Eigenschaften des Sokrates
– 'Mensch'	die für wesentlich *gehaltenen* Eigenschaften der Menschen (nur die Eigenschaften, die für alle Menschen gelten)
2. objektiv (sekundär)	
– ‚Sokrates'	die wesentlichen Eigenschaften des Sokrates
– 'Mensch'	die wesentlichen Eigenschaften der Menschen (nur die Eigenschaften, die für alle Menschen gelten)
2) Extension	
1. subjektiv (primär)	
– ‚Sokrates'	Sokrates mit seinen für wesentlich *gehaltenen* Eigenschaften
– 'Mensch'	die Menschen mit ihren für wesentlich *gehaltenen* Eigenschaften (nur die Eigenschaften, die für alle Menschen gelten)
2. objektiv (sekundär)	
– abstrakt	
• Sokrates	Sokrates mit seinen wesentlichen Eigenschaften
• 'Mensch'	die Menschen mit ihren wesentlichen Eigenschaften (nur die Eigenschaften, die für alle Menschen gelten)
– konkret	
• ‚Sokrates'	Sokrates mit *allen* seinen – wesentlichen und unwesentlichen – Eigenschaften
• 'Mensch'	die Menschen mit *allen* ihren – wesentlichen und unwesentlichen – Eigenschaften (auch die Eigenschaften, die jeweils nur für einzelne Menschen gelten)

Übersicht: Arten von Extension und Intension, generell

1) Intension	
1. subjektiv (primär)	die für wesentlich gehaltenen Eigenschaften eines Objekts (als Teil einer Klasse)
2. objektiv (sekundär)	die wesentlichen Eigenschaften eines Objekts (als Teil einer Klasse)
2) Extension	
1. subjektiv (primär)	das Objekt mit seinen für wesentlich gehaltenen Eigenschaften (als Teil einer Klasse)
2. objektiv (sekundär)	
– abstrakt	das Objekt mit allen seinen wesentlichen Eigenschaften
– konkret	das Objekt mit allen seinen – wesentlichen und unwesentlichen – Eigenschaften

Anmerkungen (wie im Text erläutert):

– Die Intension ist immer *abstrakt*, d. h. sie erfasst immer nur das Allgemeine (insofern gibt es keine konkrete Intension in der Tabelle).

– Die *subjektive* Intension (bzw. Extension) ist primär gegenüber der *objektiven*.

– Innerhalb der objektiven Extension gilt aber: Die *abstrakte* Extension ist primär gegenüber der *konkreten*.
– Der Zusatz ‚als Teil einer Klasse' bezieht sich immer auf eine Klasse als Objekt. Genauer könnte man jeweils zwischen *Individuum* und *Klasse* unterscheiden: bei einer Klasse können Eigenschaften nur wesentlich sein, wenn sie für *alle* Elemente der Klasse gelten.

Abschließend hierzu: Bisher wurde überwiegend nur auf Extension/Intension von *Zeichen* eingegangen, kaum auf Extension/Intension von *Sätzen* (Aussagen, Relationen). Dies erfolgt im nächsten Punkt, ausführlich aber erst in dem *Exkurs* zu diesem Kapitel 0.

0-3-5 Extensionaler und intensionaler Ansatz

0-3-5-1 SEMANTISCHE UND SYNTAKTISCHE ANALYSE
Man kann bei Extension und Intension zwei Aspekte unterscheiden:
1. Extension und Intension als *Bedeutung* (*semantischer* Aspekt)
2. Extension und Intension als *Sprachformen* (*syntaktischer* Aspekt)

Bisher habe ich mich vorwiegend mit dem *semantischen* (bzw. ontologischen) Aspekt beschäftigt, also z. B.: „die Extension eines Sprachzeichens ist ein Objekt".

Im Folgenden wird es primär um die *syntaktische* Seite gehen, also um die Unterscheidung von *extensionaler* und *intensionaler Sprache*, z. B. „das *Adjektiv* ist eine *intensionale* Zeichenkategorie".

Es wird sich im Einzelnen zeigen, dass eine Sprache grundsätzlich folgende Eigenschaften haben kann:

extensional bzw. intensional *neutral*
extensional bzw. intensional *festgelegt*

Dabei kann man genauer unterscheiden:
- extensional-intensional neutral
- extensional
- intensional
- gemischt extensional-intensional

Hier ergeben sich wichtige Unterschiede zwischen der *normalen Sprache* und der *Logik-Sprache*.

Normale Sprache
Untersuchen wir zunächst kurz die normale – deutsche – Sprache, inwieweit sie extensional oder intensional ausgerichtet ist.

Bei den deskriptiven *Zeichen* (Wörtern) wird überwiegend extensional und intensional unterschieden, vor allem durch

Substantive: Objekt-Wörter (extensionale Zeichen), z. B. ‚Mensch'
Adjektive: Eigenschafts-Wörter (intensionale Zeichen), z. B. ‚rot'

Wichtig ist dabei:
Auch ein *extensionales* Zeichen besitzt eine *Intension*, aber es zielt *primär* auf die Extension.

z. B. ‚Mensch' (extensionales Zeichen)
primäre = extensionale Bedeutung: *Klasse* der Menschen
sekundäre = intensionale Bedeutung: *Eigenschaft* „menschlich"

Allerdings kann auch eine Eigenschaft *substantivisch* ausgedrückt werden, z. B. ‚Menschsein' bzw. ein Adjektiv *substantiviert* werden, z. B. ‚Menschlichkeit'.

Entsprechend: Auch ein *intensionales* Zeichen besitzt eine *Extension*, aber es zielt *primär* auf die Intension.

z. B. ‚rot' (intensionales Zeichen)

primäre = intensionale Bedeutung: *Eigenschaft* „rot"

sekundäre = extensionale Bedeutung: *Klasse* der roten Objekte

Bei *Sätzen* sieht es ähnlich aus. Auch hier trennt die *normale Sprache* überwiegend zwischen extensional und intensional; die folgenden Bedeutungen könnte man auch anders bestimmen:

z. B. ‚Sokrates ist ein Mensch' (extensionaler Satz)

extensionale Bedeutung: „das Objekt Sokrates ist Element der Klasse der Menschen"

intensionale Bedeutung: „der Begriff Mensch ist Teil des Begriffs Sokrates"

z. B. ‚rot sein heißt farbig sein' (intensionaler Satz)

intensionale Bedeutung: „der Begriff farbig ist Teil des Begriffs rot"

extensionale Bedeutung:„rote Objekte sind Elemente der Klasse der farbigen Objekte"

Auf *Verben* bzw. *Tätigkeiten* will ich hier nicht gesondert eingehen, es ergeben sich entsprechende Verhältnisse wie für Adjektive.

Formale Sprache

Anders als man vielleicht erwarten könnte, scheint die formale Sprache weniger klar in der Unterscheidung von extensional und intensional. Denn *Zeichen* wie die *Prädikatoren* ‚F' und ‚G' stehen gleichermaßen für *Objekte* wie „Menschen" oder *Eigenschaften* wie „weise". Das liegt aber daran, dass die formale Sprache von *formalen Objekten* x, y ausgeht, denen dann Eigenschaften zugeordnet werden, wobei „Mensch" und „weise" gleichermaßen als Eigenschaften gedeutet werden (vgl. oben). So gesehen findet doch eine klare Unterscheidung statt.

Außerdem kann man durch Hinzufügungen (wie ‚K' und ‚E') die Variablen präzisieren, z. B. extensional ‚K(F)' für ‚die Klasse F' und intensional ‚E(F)' für ‚die Eigenschaft F'.

In einem *Satz* wird zusätzlich oft durch den verwendeten *Relator* ausgedrückt, ob es sich um eine extensionale oder intensionale Darstellung handelt. Die genaue Rolle des Relators bei der Unterscheidung von extensional / intensional wird uns im Exkurs zu Kap. 0 beschäftigen.

Wir können nun *3 Ansätze* unterscheiden (Ansätze, die sich in erster Linie *syntaktisch* definieren, aber entsprechend semantische Auswirkungen haben):

- *extensionaler* Ansatz: bezieht sich primär auf *Objekte*, Individuen und Klassen
- *intensionaler* Ansatz: bezieht sich primär auf *Eigenschaften*
- *extensional-intensional gemischter* Ansatz: bezieht sich auf *Objekte und* auf *Eigenschaften*

Zur Unterscheidung dieser Ansätze folgende vereinfachte Vergleiche mit Beispielen, danach folgen dann genauere Einzel-Darstellungen.

Übersicht für *einfache*, atomare Sätze:

- extensional: $x_1 \in F$

„Sokrates ist ein Element der Klasse der Menschen".

- extensional – intensional: Fx_1

„Sokrates besitzt die Eigenschaft, Mensch zu sein".

Hier wird einem Objekt x_1 (extensional) eine Eigenschaft F (intensional) zugeordnet. Man kann das auch als „*gemäßigt intensional*" fassen.

- intensional: $E(F) \subset E(x_1)$

„Der Allgemein-Begriff Mensch ist im Individual-Begriff Sokrates enthalten".

(*Intensionale* Beziehungen sind *analytisch*, meist *per Definition*, daher müsste man eigentlich $E(F) \subset_{df} E(x_1)$ schreiben; das wird im Exkurs genau erklärt.)

Übersicht für *komplexe*, molekulare Sätze (es wären auch andere Formulierungen möglich):

- extensional: $x_1 \in F \rightarrow x_1 \in G$

„Wenn Sokrates ein Element der Klasse der Menschen ist, dann ist er auch ein Element der Klasse der Erdbewohner“.

- extensional – intensional: $Fx_1 \rightarrow Gx_1$

“Wenn Sokrates die Eigenschaft Mensch zukommt, dann kommt ihm auch die Eigenschaft Erdbewohner zu“.

- intensional: $E(F) \subset E(x_1) \rightarrow E(G) \subset E(x_1)$

„Wenn der Allgemein-Begriff Mensch im Individual-Begriff Sokrates enthalten ist, dann ist auch der Allgemein-Begriff Lebewesen im Individual-Begriff Sokrates enthalten“.

Im Folgenden werden die 3 Ansätze *detailliert* dargestellt.

0-3-5-2 EXTENSIONALER ANSATZ

1. ZEICHEN	FORMAL	OBJEKTE
• Individuator (Eigenname)	x_i	Individuum x_i
• Prädikator (Klassen-Zeichen)	F	Klasse
– ganzheitlich	K(F)	die Klasse F
– allgemein	$\{x/ x \in F\}$	alle x, für die gilt: x ist Element von F
– individuell	$x_1, x_2, \ldots , x_n$	Element 1, Element 2 bis zu Element n

2. SATZ (RELATION)	FORMAL	SACHVERHALTE (Relationen)
• Individual-Satz		*Relation von Individuum und Klasse*
	$x_i \in F$	Individuum x_i ist Element der Klasse F
• Klassen-Satz		*Relation zwischen Klassen*
– ganzheitlich:	$F \subset G$	die Klasse F ist Teilmenge der Klasse G
– allgemein:	$\Lambda x(x \in F \rightarrow x \in G)$	alle Elemente von F sind Elemente von G
– individuell:	$(x_1 \in F \rightarrow x_1 \in G) \wedge$ $(x_2 \in F \rightarrow x_2 \in G) \wedge$ $\ldots (x_n \in F \rightarrow x_n \in G)$	wenn x_1 Element von F ist, dann von G und wenn x_2 Element von F ist, dann von G und ... wenn x_n Element von F ist, dann von G
• Molekular-Satz		*Relation zwischen Relationen*
– ganzheitlich	$F \subset G \rightarrow F \subset H$	wenn F Teilmenge von G ist,dann auch von H
– allgemein	$\Lambda x(x \in F \rightarrow x \in G)$ $\rightarrow$ $\Lambda x(x \in F \rightarrow x \in H)$	wenn alle Elemente von F Elemente von G sind, dann sind alle Elemente von F auch Elemente von H
– individuell (vereinfacht)	$x_i \in F \rightarrow x \in G_i$ $\rightarrow$ $x_i \in F \rightarrow x \in H_i$	wenn x_1 Element von F ist, dann auch von G impliziert wenn x_1 Element von F ist, dann auch von H

Dazu folgende *Erläuterungen*:

– Streng genommen müsste man alle Formeln in *Anführungszeichen* , ... , schreiben, ich verzichte aber der Übersichtlichkeit halber darauf.
– Eigentlich sollte man immer ‚K(F)' für *Klasse* F schreiben; der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber kann man aber das ‚K' weglassen, da die extensionale Darstellung Vorrang hat; ich schreibe nur immer ‚E(F)' für „Eigenschaft F", außer bei Fx.
– Wie ich früher erläutert habe, ist $x_1, x_2, ... , x_n$ nicht ausreichend, weil ganz unspezifisch. Aber $x_1[x_1 \in F], x_2[x_2 \in F], ... , x_n[x_n \in F]$ ist zirkulär, $x_1[Fx_1], x_2,[Fx_2 , ... , x_n[Fx_n]$ ist dagegen nicht rein extensional, weil auf die Eigenschaft F Bezug genommen wird.
– Der Klassen-Satz ist zwar *normal-sprachlich* ein *Atom*-Satz, aber *formal-sprachlich* ist er, in der allgemeinen oder individuellen Form, bereits ein *Molekular*-Satz. Daher stehen in der obigen Auflistung auch in der Rubrik „Klassen-Satz" Molekular-Sätze.

0-3-5-3 GEMISCHT EXTENSIONAL – INTENSIONALER ANSATZ

1. ZEICHEN	FORMAL	OBJEKTE
• Individuator (Eigenname)	x_i	Individuum x_i
• Prädikator (Klassen-Zeichen)	F	Klasse
– ganzheitlich	K(F)	die Klasse F
– allgemein	{x/ Fx}	alle x, für die gilt: x hat die Eigenschaft F
– individuell	$x_1, x_2, ... , x_n$	Element 1, Element 2 bis zu Element n

2. SATZ (RELATION)	FORMAL	SACHVERHALTE (Relationen)
• Individual-Satz		*Relation von Individuum und Eigenschaft*
	Fx_i	Individuum x_i besitzt die Eigenschaft F
• Klassen-Satz		*Relation zwischen Klasse und Eigenschaft*
– ganzheitlich:	G(F)	die Klasse F besitzt die Eigenschaft G
– allgemein:	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	alle Individuen mit der Eigenschaft F haben auch die Eigenschaft G
– individuell:	$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge$	wenn x_1 Eigenschaft F hat, dann auch G und
	$(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge$	wenn x_2 Eigenschaft F hat, dann auch G und
	$(Fx_n \rightarrow Gx_n)$	... wenn x_n Eigenschaft F hat, dann auch G
• Molekular-Satz		*Relation zwischen Relationen*
– ganzheitlich	$G(F) \rightarrow H(F)$	wenn F die Eigenschaft G zukommt, dann kommt F auch die Eigenschaft H zu
– allgemein	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	wenn alle Individuen mit der Eigenschaft F auch die Eigenschaft G besitzen,
	$\rightarrow$	dann
	$\Lambda x(Fx \rightarrow Hx)$	besitzen alle Individuen mit der Eigenschaft F auch die Eigenschaft H
– individuell (vereinfacht)	$Fx_i \rightarrow Gx_i$	wenn x_i die Eigenschaft F hat, dann auch die Eigenschaft G

Erläuterungen:
Die Allgemein-Relation G(F) wäre genau zu schreiben: E(G)(K(F)). Sie ist folgendermaßen zu verstehen: „Der Klasse F kommt die Eigenschaft G zu". Diese Deutung ist aber problematisch, weil die Eigenschaft G eigentlich den *einzelnen Elementen* von F zugesprochen wird und nicht der *Klasse als ganzer*.

Das ließe sich präziser quantoren-logisch ausdrücken, als $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$, aber bei der *ganzheitlichen* Darstellung ist dies eben nicht intendiert (vgl. obige Liste).

0-3-5-4 INTENSIONALER ANSATZ

1. ZEICHEN		BEGRIFFE / EIGENSCHAFTEN
• Individuator (Eigenname)	$E(x_i)$	Individual-Begriff $E(x_i)$
• Prädikator (Allgemein-Zeichen)	F	Allgemein-Begriff (Klassen-Eigenschaft)
– ganzheitlich	E(F)	Begriff F bzw. Eigenschaft F
– Vereinigungsmenge	$E(F) \equiv_{df}$ $E(G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_n)$	Begriff F als Vereinigungsmenge von Begriffen G_1 bis G_n
– Schnittmenge	$E(F) \equiv_{df}$ $E(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n)$	Begriff als Schnittmenge von Begriffen H_1 bis H_n

2. SATZ (RELATION)		BEGRIFFS-RELATIONEN
• Individual-Satz	$E(F) \subset_{df} E(x_i)$	der Begriff F ist Teil(menge) vom Begriff x_i (*Relation zwischen einem Individual-Begriff und einem Allgemein-Begriff*)
• Allgemein-Satz	$E(F) \subset_{df} E(G)$	der Begriff F ist Teil vom Begriff G (*Relation zwischen zwei Allgemein-Begriffen*)
• Molekular-Satz		*Relation zwischen Relationen*
– individuell	$E(F) \subset_{df} E(x_i) \rightarrow_{df}$ $E(G) \subset_{df} E(x_i)$	wenn Begriff F Teil vom Begriff x_i ist, dann ist auch Begriff G Teil vom Begriff x_i
– allgemein	$E(F) \subset_{df} E(G) \rightarrow_{df}$ $E(F) \subset_{df} E(H)$	wenn Begriff F Teil vom Begriff G ist, dann ist Begriff F auch Teil vom Begriff H

Erläuterungen

– *Relatoren bei Begriffs-Relationen*

Wie im Exkurs zu diesem Kapitel noch genau erläutert wird: Das Problem ist, welche *Relatoren* man für Beziehungen zwischen Begriffen verwendet. *Spezielle* Relatoren für Beziehungen zwischen Eigenschaften bzw. Begriffen sind nämlich nicht definiert, man müsste ggf. *neue Relatoren* einführen, z. B: E(Blume) $\sqsubset$ E(Rose).

Gelegentlich werden auch *aussagen-logische* Symbole verwendet, vor allem die *Implikation*, zum Beispiel: E(Blume) $\rightarrow$ E(Rose); aber das ist sehr problematisch, u. a. weil es der extensionalen Darstellung entgegenläuft: $\Lambda x(\text{Rose}(x) \rightarrow \text{Blume}(x))$.

– *Begriffe als Mengen*
Man kann aber Begriffe als *Mengen von Eigenschaften* auffassen (*Eigenschafts-Mengen*), und dann Mengensymbole für ihre Relationen verwenden, vor allem das Teilmengen-Symbol $\subset$. Man behandelt dann *Mengen von Eigenschaften* entsprechend *Mengen von Objekten*. Das wirft zwei Probleme auf: Erstens, sind Begriffe nicht immer einfache Mengen von Eigenschaften, sondern eher strukturierte *Systeme von Eigenschaften.* Zweitens ist es etwas irritierend, für den streng intensionalen Bereich der Begriffe ausgerechnet Symbole der eigentlich als extensional verstandenen Mengen-Lehre zu verwenden. Wie ich aber noch im Exkurs erläutern werde, sprechen dennoch die meisten Gründe für diese Lösung.

– *Analytische Relationen*
Zwischen Begriffen gibt es nur *analytische* Beziehungen, die sich aus *Definitionen* ergeben, sogenannte *material-analytischen* Beziehungen (vgl. genauer in 0-5). D. h., es gibt nur Beziehungen zwischen Begriffen, die zueinander im Verhältnis von *Notwendigkeit* oder *Unmöglichkeit* stehen. Ansonsten, bei *synthetischen* Sätzen, lässt sich nur sagen, dass *keine* Notwendigkeit und *keine* Unmöglichkeit besteht, anders gesagt, dass *Möglichkeit* und *Unnotwendigkeit* besteht.

– *Analytische Relatoren*
Da also zwischen Begriffen nur *definitorisch-analytische* (material-analytische) Beziehungen herrschen, muss man *analytische* Symbole für die Relatoren verwenden, also z. B. $\Rightarrow$ statt $\rightarrow$. Weil definitorisch-analytische Beziehungen aber eben *keine formal-analytischen* Beziehungen sind, ist es wohl am besten, man verwendet synthetische Relatoren mit dem Zusatz ‚df', für *definitorisch*. Man schreibe also $\rightarrow_{df}$ oder $\subset_{df}$ u. ä. Auch, weil es für Symbole wie $\subset$ keine eingeführten *analytischen* Varianten gibt (ich verwende allerdings ggf. $^+\!\subset^+$, analog zu den analytischen logischen Relatoren wie z. B. $^+\!\vee^+$).

– *Die Intension eines Satzes*
Ich hatte festgelegt: Die Intension eines Zeichens sind die wesentlichen, analytischen (bzw. für wesentlich gehaltenen) Eigenschaften des bezeichneten Objektes. Die *Intension* eines Satzes ist die analytische Relation zwischen den (analytischen) Eigenschaften oder Begriffen. So wäre im Beispiel die Intension des analytischen Satzes ‚alle Junggesellen sind unverheiratet' die Relation: „der Begriff *unverheiratet* ist im Begriff *Junggeselle* enthalten".
Ausführlich gehe ich auf Extension und Intension von *Sätzen* erst im Exkurs zu Kap. 0 ein.

0-3-5-5 FAZIT

• intensionaler Ansatz
Die *rein intensionale* Betrachtung wirft verschiedene Probleme auf. Ein solcher Ansatz ist im Grunde nur sinnvoll bei definitorisch-*analytischen* Beziehungen. Z. B.: „Der Begriff der Blume ist im Begriff der Rose enthalten". Dagegen ist sie bei *synthetischen* Aussagen wenig aussagekräftig oder sogar falsch. Z. B. der Satz: ‚Peter ist Philosoph'. Hier kann man nicht sagen: ‚Der Begriff *Peter* ist im Begriff *Philosoph* enthalten'. Und ebenso wenig: ‚Der Begriff *Philosoph* ist im Begriff *Peter* enthalten'. Man kann eben nur feststellen – die Begriffe *Peter* und *Philosoph* sind *nicht* ineinander enthalten, und das ist keine sehr gehaltvolle Information (würde man Sokrates anstelle von Peter nehmen, käme man eventuell zu einer anderen Beurteilung).

• extensionaler Ansatz
Die *rein extensionale* Betrachtung führt im Grunde zu einem Zirkel. Angenommen man nimmt wieder die Aussage „Peter ist Philosoph". Wenn man fragt, was bedeutet das, wäre

extensional zunächst die Antwort: „Er gehört zur Klasse der Philosophen". Dies könnte man aber auch übersetzen in: „Peter gehört zur Klasse $x_1, x_2, \dots , x_n$", wobei dies eine Auflistung aller Philosophen sein soll. Die Antwort wäre also z. B.: „Peter gehört zur Klasse Sokrates, Platon, Aristoteles, Anaximander , ... , Habermas". Das wäre aber keine wirkliche Erklärung.

• gemischt extensional-intensionaler Ansatz

Daher ist die *gemischt extensional-intensionale* Betrachtung letztlich überlegen. Hier würde man z. B. erklären: „Peter ist Philosoph" bedeutet, er besitzt die *Eigenschaften* Weisheit, Besonnenheit, Vernunft (im Einzelnen wäre natürlich zu diskutieren, welche Eigenschaften einen Philosophen ausmachen).

Nach den obigen Ausführungen kann man folgende *extensionale* und *intensionale Komponenten* der Logik und ihre *Symbole* unterscheiden (ich verzichte auf Anführungszeichen):

Extensionen

1. Objekte
   – unspezifiziert: X, Y
   – spezifiziert
   - Individuen: x, y
   - Mengen: M, N
   - Klassen: F, G bzw. K(F), K(G)

   – Verknüpfungen: z. B. $M \cup N$, $M \cap N$

2. Relationen zwischen Objekten
   – unstrukturiert: X, Y
   konkret z. B. Aussagen: A, B
   (hier sind Relationen als ganze erfasst, ohne ihre Struktur)
   – strukturiert
   - *atomare* Relationen zwischen X und Y: X R Y
     werden aus Objekt-Zeichen und Relatoren formalisiert
     z. B. $x \in F$ (bzw. $X \in Y$)
   - *molekulare* Relationen: $(X_1 R_1 Y_1)$ R $(X_n R_n Y_n)$
     z. B. $x \in F \rightarrow y \in G$ (bzw. $X_1 \in Y_1 \rightarrow X_2 \in Y_2$)

Intensionen (Eigenschaften bzw. Begriffe)

1. Objekt-Eigenschaften: E(X), E(Y)
   - Individuelle Eigenschaften: E(x), E(y)
   - Mengen-Eigenschaften: E(M), E(N)
   - Klassen-Eigenschaften: E(F), E(G)

2. Relationen zwischen Eigenschaften
   (entsprechend der extensionalen Darstellung)

Generelle Komponenten (Extensionen oder Intensionen)

- unstrukturierte: X, Y
- beliebige: Φ (Phi), Ψ (Psi), Ω (Omega)

Erläuterungen:
Diese Aufstellung ist zu erläutern, insbesondere die Verwendung von X und Y:

- X und Y können für *unstrukturierte Objekte* (x, M, F usw.), aber auch für *unstrukturierte Relationen* A, B stehen.
- Die gemeinsame Bezeichnung von *Objekten* (wie x) und einer Untergruppe von *Relationen* (A, B) durch ‚X', ‚Y' usw. ist aus systematischen Gründen etwas unbefriedigend, aber (derzeit) doch die beste Lösung.

Der Hintergrund ist: Ich möchte ein *einheitliches Logik-Modell* vorlegen, in dem Objekte und unstrukturierte Relationen gleichbehandelt werden (wie später erläutert werden wird).

- Außerdem greife ich eben den Ansatz der *Aussagen-Logik* auf, die mit *unstrukturierten Aussagen* A und B arbeitet. Im Grunde handelt es sich dabei allerdings um *abstrakte* (unechte) Relationen bzw. Aussagen, denn es gibt keine *konkreten* Relationen oder Aussagen ohne Struktur.
- *Strukturierte Relationen* wie z. B. $x \in F$ oder $A \wedge B$ darf man aber nicht unter X bzw. Y fassen, denn X und Y haben einen definierten *Wahrheitswerteverlauf*, der für *strukturierte* Relationen normalerweise nicht gilt. Z. B. setze man $X = A \wedge B$ und $Y = A \vee B$. Man verbinde dann X und Y mit dem Implikator zu $X \rightarrow Y$. $X \rightarrow Y$ ist eine *synthetische* Relation, mit einer bestimmten Wahrheitstafel. Dagegen ist $A \wedge B \rightarrow A \vee B$ eine *analytische* Relation, mit einer entsprechend anderen Wahrheitstafel; man schreibt: $A \wedge B \Rightarrow A \vee B$.
- Ebenso dürfen *strukturierte Objekte* (Verknüpfungen) nicht einfach mit X und Y dargestellt werden. Angenommen man setzt: $X = (M \cap N)$ und $Y = (M \cup N)$. $X \subset Y$ eine *synthetische* Aussage, dagegen ist $(M \cap N) \ {}^{+}\!\!\subset^{+} (M \cup N)$ eine *analytische*, logisch wahre Aussage, denn die Schnitt-Menge ist Teilmenge der Vereinigungs-Menge.
- *Generelle Komponenten* wie Φ (Phi), Ψ (Psi), Ω (Omega). Φ, Ψ können (anders als X, Y) *strukturierte* Relationen sein, und zwar *synthetische* wie $X \rightarrow Y$ oder *analytische* wie $X \Rightarrow Y$. Man kann aber auch generelle Komponenten in Strukturen einbauen, wie z. B. $\Phi \rightarrow \Psi$ bzw. $\Phi \Rightarrow \Psi$.
- Man darf aber bei Verwendung *genereller Komponenten*) nicht einfach Wahrheitstafeln aufstellen, z. B. darf man für $\Phi \rightarrow \Psi$ nicht die Wahrheitstafel der Implikation $X \rightarrow Y$ angeben. Denn die Wahrheitstafel für $\Phi \rightarrow \Psi$ lässt sich nicht allgemein angeben, sondern hängt davon ab, was konkret für Φ und Ψ eingesetzt ist. Dagegen muss die Wahrheitstafel des tautologischen $\Phi \Rightarrow \Psi$ 4+ aufweisen unter dem Relator, denn eine Tautologie hat generell nur +.
- Ich verwende in diesem Manuskript allerdings überwiegend die *Variablen* X und Y, damit sich eindeutige Wahrheitstafeln aufstellen lassen.
- Es gibt zusätzlich *Verbindungen zwischen extensionaler und intensionaler Darstellung*, z. B. Fx: „x hat die Eigenschaft F" (vgl. dazu 0-3-5-5).
- Man kann die Komponenten natürlich auch mit *Zahl-Indizes* bezeichnen, z. B. $X_1, \dots, X_n$

0 – 4 KOPULA

0-4-1 Die Bedeutung der Kopula

0-4-1-1 DEFINITION DER KOPULA
Als Inbegriff der *Kopula* dient sprachlich das ‚ist', dieses ‚ist' steht für eine logische *Relation*. Grundsätzlich können wir 2 Arten von logischen Relationen unterscheiden:

- *Kopula*-Relationen: Relationen der Form: X *ist* ein Y
- *Nicht-Kopula*-Relationen: z. B.: X *oder* Y, X *und* Y

Wir werden später noch diskutieren, inwieweit letztlich doch eine *Äquivalenz* zwischen *logischen* Kopula- und Nicht-Kopula-Relationen besteht.

Zu den Nicht-Kopula-Relationen gehören aber auch *hyper-logische* (bzw. *hyper-korrelative*) Relationen, z. B. X *weil* Y (Kausal-Relation), X *nach* Y (Zeit-Relation) u. ä.; allerdings enthalten die hyper-korrelativen Relationen als Teil auch eine Kopula-Relation.

Die *Kopula* bzw. Kopula-Relation ist die wohl wichtigste Relation, die *Basis-Relation*, in unserer Sprache, unserem Denken, vielleicht auch real. Sie entspricht sprachlich wie gesagt vor allem dem *„ist"* bzw. grammatischen Variationen wie „sind" usw. Wir verwenden sie wortwörtlich z. B. in Individual-Sätzen wie ‚Sokrates *ist* ein Philosoph'.

Prinzipiell wäre es auch möglich, die Kopula als *generelle* bzw. generalisierte Aussagen-funktion zu deuten und somit von dem „ist" zu lösen. Dann wäre *jeder* Satz letztlich ein Kopula-Satz, weil er eben eine Aussage macht. Allerdings möchte ich nicht so weit gehen.

0-4-1-2 ATOM- UND MOLEKÜL-SÄTZE
Eine wichtige Unterscheidung ist die von *Atom-Sätzen* und *Molekül-Sätzen*: Ein Atom-Satz enthält, anders als der Molekül-Satz, keine Untersätze. Die Unterscheidung wird an vielen Stellen dieses Buches thematisiert, muss allerdings, gerade in der Logik, auch relativiert werden. So ist z. B. der Satz der *Mengen-Logik* ‚$F \subset G$' ein Atom-Satz, während er, formuliert in *Quantoren-Logik,* als ‚$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$' ein Molekular-Satz ist (dies wird an späterer Stelle genauer erläutert). Gerade für die *Kopula* spielt die Unterscheidung von Atom-Sätzen und Molekül-Sätzen eine wichtige Rolle.

Ebenso ist es sinnvoll, zur Analyse der Kopula auf den Unterschied zwischen *Oberflächen-Struktur* und *Tiefen-Struktur* zurückzugreifen (vgl. 0-1-5-3). Als *Oberflächen-Struktur* eines Satzes zählt die Form, in der er geschrieben ist; die *Tiefen-Struktur* ist eine veränderte Form, welche die *logischen* bzw. *semantischen* Strukturen klarer und expliziter abbildet (allerdings können die – logische – Oberflächen- und Tiefen-Struktur auch übereinstimmen).

- Atom-Sätze

Atom-Sätze (bzw. Atom-Relationen) sind wie beschrieben *einfache* Sätze, die keine weiteren Sätze (Relationen) als Teile enthalten. Für sie ist die Kopula am einfachsten zu bestimmen.
– Kopula in der *Oberflächen-Struktur*

Z. B. ‚Sokrates ist Philosoph' oder ‚Sokrates ist weise'. Hier taucht das ‚ist' direkt im Satz auf. Wie man sieht, lässt sich die Kopula sowohl mit *Nomen* als auch mit *Adjektiven* (und auch mit Verben) verbinden.

Formal-logisch könnte man dafür schreiben: $x \in F$: x ist Element der Klasse F, das $\in$ symbolisiert die Kopula, das $\in$ bedeutet somit eine fast vollständige Übersetzung des ‚ist'.

– Kopula in der *Tiefen-Struktur*

Z. B. ‚Sokrates gehört zu den Philosophen'. Hier taucht in der Oberflächen-Struktur des Satzes das Wort ‚ist' nicht auf, aber man kann eine Tiefen-Struktur postulieren, in welcher die Kopula auftritt. Diese Tiefen-Struktur wäre dann zu formulieren als ‚Sokrates ist Philosoph' oder noch allgemeiner: ‚Sokrates ist Element der Klasse der Philosophen'.

Denn dies entspricht der formal-logischen (extensionalen) Struktur $x \in F$. Und so würde man auch beide Sätze, ‚Sokrates ist Philosoph' *und* ‚Sokrates gehört zu den Philosophen' formalisieren. Für ‚Sokrates gehört zu den Philosophen' gibt es gar keine *direkte* logische Übersetzung. Bei der logischen *gemischt extensional-intensionalen* Darstellung Fx (Objekt x hat die Eigenschaft F) ist die Kopula auch nicht in der Oberflächen-Struktur repräsentiert. So gesehen könnte man die extensionale Darstellung $x \in F$ als logische Tiefen-Struktur von Fx ansehen. Es ließe sich sogar Standpunkt vertreten, dass *Atom-Sätze* immer tiefenstrukturell Kopula-Sätze sind (vgl. 0-4-3-4).

• Molekül-Sätze

Molekül-Sätze (bzw. Molekül-Relationen) sind wie beschrieben *komplexe* Sätze, die weitere Sätze (Relationen) als Teile enthalten. Für sie ist die Kopula sehr viel schwieriger zu bestimmen. Es gibt nämlich weder in der normalen Sprache noch in der Logik Molekular-Sätze, bei denen die Kopula in ihrer eigentlichen Form in der *Oberflächen-Struktur* auftritt.

– Kopula in der *Tiefen-Struktur*

Wie später noch im Einzelnen gezeigt wird: eine typische Kopula-Struktur für Molekular-Sätze ist *wenn-dann*. Z. B. ‚*Wenn* Sokrates Philosoph ist, *dann* ist er Denker'. Als Kopula-Tiefenstruktur kann man ansetzen: „Sokrates ist Philosoph, *ist*, er ist Denker".

Bei *formal-logischen* Molekular-Sätzen dient in erster Linie die *Implikation* $\rightarrow$ als Kopula:

z. B. $x \in F \rightarrow x \in G$

– Sätze, bei denen, auch in der Tiefen-Struktur, *keine Kopula* auftritt

Das sind einmal Sätze wie die *Konjunktion* $(x \in F) \wedge (x \in G)$ (vgl. allerdings hierzu die Diskussion in 0-4-3-4).

Dies sind andererseits *außer-logische* Sätze wie z. B. der *Kausal-Satz*: ‚weil X, darum Y'. Dieser enthält aber als Komponente den Kopula-Satz ‚wenn X, dann Y'. Insofern X Ursache von Y ist, gilt eben auch: wenn X (als Ursache) auftritt, dann muss auch Y (als Wirkung) auftreten; nur sagt der Kausal-Satz darüber hinaus aus, dass Y von X *verursacht* wird.

Die verwendeten Beispiele sind alles *synthetische* Sätze, aber bei der Kopula gibt es für *analytische* Sätzen keine deutlichen Unterschiede, so dass wir sie vernachlässigen können.

0-4-1-3 KOPULA-DEUTUNG IN DER NORMALEN SPRACHE

Je nach Stufe (Element, Klasse, Relation) und je nach Ausrichtung werden in der *normalen Sprache* unterschiedliche Wörter und Konstruktionen zum Ausdruck der Kopula-Funktion verwendet, vor allem:

– *Konjugationen des Hilfsverbs ‚sein'*: ich bin, du bist, er/sie/es *ist*, wir sind, ihr seid, sie sind bzw. andere Zeitangaben: ‚ich war' usw.)
– *Zahlwörter*: ‚alle Menschen sind sterblich' (für: ‚der Mensch *ist* sterblich')
– *Vollverben*: ‚er denkt' (für: ‚er *ist* ein Denkender')
– *Satz-Konstruktionen*: ‚wenn er Durst hat, trinkt er' (für: ‚er hat Durst, *ist*, er trinkt') usw.

Obwohl manche Formulierungen mit ‚ist' ungewöhnlich oder sogar grammatisch falsch sind, kann man das ‚ist' doch als generelle, einheitliche und neutrale Form der Kopula auffassen.

Es erweist sich als schwierig, die Bedeutung dieser einheitlichen Kopula auf *einen* Begriff zu bringen; vielleicht ist die beste Deutung: *Teilhabe*, *partielle Identität* oder *partielle Gleichheit* (vgl. dazu die *Gleichheits-Logik* in 0-4-5). Z. B. „Sokrates ist Philosoph" wäre dann zu verstehen als „Sokrates hat Teil an der Philosophie". Allerdings kann das ‚ist' auch bereits für *vollständige* Gleichheit, Identität bzw. Äquivalenz stehen, aber das ist die Ausnahme.

0-4-1-4 KOPULA-DEUTUNG IN DER LOGIK

In der logischen Sprache sind die sprachlichen Darstellungen der Kopula viel geringer als in der normalen Sprache, weil eben die Logik nur einen bestimmten Bereich der Wirklichkeit thematisiert, nämlich nur korrelative Relationen zwischen Objekten bzw. Eigenschaften.

So gibt es in der Logik keine Differenzierung zwischen erster, zweiter und dritter *Person*, die logische Sprache kennt nur die dritte Person; entsprechend existiert keine Konjugation in der Logik, ein Kopula-Zeichen wie ‚$\in$' wird nicht konjugiert. Auch gibt es in der reinen Logik keine *Zeit*, die Kopula-Relation ist hier *zeitlos*; dies auch im Gegensatz zur natürlichen Sprache, in der verschiedenen Zeitstufen wie Präsens, Perfekt, Imperfekt, Futur usw. auch für die Kopula unterschieden werden – entsprechend er *ist*, er *war*, er *ist gewesen*, er *wird sein* usw.

Dennoch findet man auch in der Logik verschiedene Darstellungen der Kopula, in Verbindung mit verschiedenen Logik-Kalkülen. Um nur die bekanntesten bzw. gebräuchlichsten Formalisierungen bzw. Deutungen aufzuführen:

- Individuen-Relationen (Atom-Relationen):
  - extensional: $x \in F$
  - gemischt extensional-intensional: Fx
- Mengen-Relationen (Atom- oder Molekül-Relationen, je nach Logik)
  - Klassen-Logik: $F \subset G$
  - Quantoren-Logik:
    extensional: $\Lambda x(x \in F \rightarrow x \in G)$
    gemischt: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
  - Prädikaten-Logik
    extensional: $(x_1 \in F \rightarrow x_1 \in G) \wedge ... \wedge (x_n \in F \rightarrow x_n \in G)$
    gemischt: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
- Struktur-Relationen (Molekular-Relationen):
  Implikations-Relation $A \rightarrow B$

Nur wird eben normalerweise nicht erkannt und nicht ausgewiesen, dass es sich hier prinzipiell um *dieselbe* Relation handelt, die *Kopula-Relation*. Die *extensionale* und die gemischte *extensionale-intensionale* Darstellung sind strukturell gleich, somit können wir zunächst die extensionale-intensionale Darstellung zurückstellen. Auch die hier nicht aufgeführte *intensionale* Darstellung lässt sich (wie ausführlich erläutert) mengentheoretisch darstellen und braucht nicht extra berücksichtigt zu werden. So ergibt sich nur noch folgende Unterscheidung:

- Individuen-Relationen: Element-Relation $\in$
- Mengen-Relationen: Teilmengen-Relation $\subset$
- Molekular-Relationen: Implikations-Relation $\rightarrow$

Man kann aber die *Element*-Relation (∈) und die *Teilmengen*-Relation (⊂) zusammenfassen, in beiden geht es um ein *Enthaltensein*, beide nutzen die Sprache der *Mengenlehre;* so kommt man hier mit dem *Teilmengen-Relator* ⊂ aus. Dagegen nutzt man üblicherweise für *Molekular*-Relationen die *Aussagen-Logik*, und zwar den *Implikator* (→).

0-4-1-5 ZWEI GRUND-DEUTUNGEN DER KOPULA

Es gilt also primär nur 2 Deutungen der Kopula zu unterscheiden:

1. *Mengen-Lehre*: Teilmengen-Relation (⊂)
   Die verwendet man bei *atomaren* Relationen (einfachen Sätzen):
   Individuen-Relationen wie $x \subset F$ oder Mengen-Relationen wie $F \subset G$.
   Diesen Ansatz nenne ich *mengen-relational* oder kurz *relational*.

2. *Aussagen-Logik*: *Implikation* (→)
   Die verwendet man bei *molekularen* Relationen (komplexen Sätzen),
   zur Verknüpfung von atomaren Relationen, z. B.: $(F \subset G) \rightarrow (F \subset H)$.
   Diesen Ansatz nenne ich *wahrheits(wert)-funktional* oder kurz *funktional* (wie noch erläutert wird)

Wichtig ist: Der *relationale* Ansatz muss nicht *extensional* ausgerichtet sein, d. h. sich auf *Objekte* bzw. *Objekt-Mengen* beziehen. Denn man kann – *intensional* – *Eigenschaften* auch als *Eigenschafts-Mengen* bestimmen, und zwischen solchen Eigenschafts-Mengen (intensionalen Mengen) können ebenfalls *Teilmengen-Relationen* bestehen. Nur für eine *extensional-intensional gemischte* Darstellung ist der relationale Ansatz nicht geeignet. Im Übrigen sind Teilmengen-Relationen immer nur zwischen *Mengen* definiert.

Ebenso ist der *funktionale* Ansatz offen für eine extensionale oder intensionale und auch für eine gemischte Deutung. Dabei muss er sich nicht notwendig auf *Mengen* beziehen.

Es geht in der Wissenschaft immer darum, möglichst eine *einheitliche* Darstellung und Deutung zu finden, und dies ist auch das besondere Ziel der *Integralen Logik*. Nach meinen Untersuchungen lässt sich zeigen: Bei der *Teilmengen-Relation* ⊂ und der *Implikation* → (bzw. der Positiv-Implikation *→) handelt es sich strukturell um *dieselbe* Relation. Und dann ist es wesentlich übersichtlicher, man verwendet auch nur *ein* Symbol hierfür.

Man könnte natürlich ein zusätzliches, *neutrales* Symbol einführen, das für beide Deutungen offen ist; dies könnte z. B. das folgende sein: ⊏; als Struktur ergibt sich dann $X \sqsubset Y$ oder allgemein $\Phi \sqsubset \Psi$. Da dieses Symbol aber nicht eingeführt ist, werde ich es nur in Ausnahmefällen verwenden und mich ansonsten auf die üblichen Symbole ⊂ oder → beschränken.

Ich werde im Folgenden beide Möglichkeiten durchspielen:

- erstens nur Verwendung der *Mengen-Theorie* (mit dem Symbol ⊂)
- zweitens nur Verwendung der *Aussagen-Logik* (mit dem Symbol →).

0-4-2 Kopula als Teilmengen-Relation

0-4-2-1 INDIVIDUEN-RELATIONEN

Individuen-Relationen können zwischen zwei oder mehreren Individuen bestehen, sind aber vorrangig *Relationen zwischen Individuen und Mengen* bzw. Klassen.

Ich verwende hier im Folgenden immer die *Individuen-Variable* ‚x', da dies übersichtlicher ist, obwohl man streng genommen eine *Individuen-Konstante* (z. B. ‚x_1') verwenden müsste (vgl. 0-2-4). Normalerweise verwendet man bei *extensionalen* Individuen-Relationen das Symbol ‚$\in$'. Aber für die einheitliche Formalisierung kann man (wie erläutert) das Teilmengen-Symbol ‚$\subset$' verwenden, um so mehr, als man ein Individuum auch als *ein-Element-Menge* auffassen kann. Es ergibt sich dann:

$x \subset F$ = x ist *Element* der Klasse F (bzw. eben ist Teilmenge der Klasse F)

Man verwendet hier die Sprache der *Mengen-Lehre*.
Beispiel: „Sokrates ist Philosoph“ = „Sokrates ist Element der Klasse der Philosophen“.
Streng extensional formuliert: „Das Objekt Sokrates ist Teilmenge der Objekt-Klasse der Philosophen“.

Auf die *intensionale* (bzw. extensional-intensional gemischte) Darstellung der Kopula-Funktion verzichte ich hier wie gesagt, um die ohnehin komplizierten Verhältnisse nicht zusätzlich zu verkomplizieren; im Punkt 0-3 bin ich ausführlich auf das Thema „extensional versus intensional“ eingegangen.

Man kann die Auffassung vertreten, dass auf der Ebene der *Individuen* überhaupt *nur* die Kopula-Relation im Sinne von „ist Element von“ als logische Relation vorkommt, natürlich einschließlich der *Negation*: „ist nicht Element von“, weil es nur diese 2 Möglichkeiten eines Beziehung eines Individuums zu einer Klasse gebe (so finden sich z. B. in der Mengenlehre für Individuen-Relationen auch nur die Zeichen $\in$ und $\notin$). Man kann diese These allerdings auch bezweifeln. Ich komme darauf zurück.

Es ist in jedem Fall unproblematisch, für die Individuen-Relation „ist Element von“ das Zeichen für die *Teilmengen*-Relation („ist Teilmenge von“) $\subset$ zu verwenden, denn offensichtlich geht es hier um dieselbe Relation, die Kopula-Relation.

Ich gebrauche hier bei der Kopula – zur besseren Unterscheidung – *spezifische* Symbole wie ‚A' und B' oder ‚F' und ‚G', man könnte aber auch *generell* ‚X' und ‚Y' schreiben.

0-4-2-2 MENGEN-RELATIONEN / KLASSEN-RELATIONEN

Es geht hier um Relationen zwischen *Mengen* bzw. zwischen *Klassen*.

So wie man individuell sagt ‘Sokrates ist ein Philosoph’, kann man allgemein sagen ‘alle Philosophen sind Denker’. Oder, wenn man genau das ‘ist’ verwenden will: ‘Der Philosoph ist ein Denker’.

Wir hatten die Individuen-Relation extensional formuliert: ‘Sokrates ist Element der Klasse der Philosophen’. Hier ergibt sich jetzt entsprechend, wiederum in der Sprache bzw. mit Symbolen der extensionalen *Mengen-Lehre*: ‘Die Klasse der Philosophen ist eine Teilmenge der Klasse der Denker’. Streng: ‘Die Objekt-Klasse der Philosophen ist eine Teilmenge der Objekt-Klasse der Denker’. Denn z. B. sind ja auch Mathematiker Denker, aber wer kein Denker ist, zählt nicht zu den Philosophen. Formal schreibt man:

$F \subset G$ = Die Klasse F ist Teilmenge der Klasse G

Man kann anstelle der *ganzheitlichen* Darstellung $F \subset G$ die *Kopula-Relation* zwischen Klassen auch anders darstellen:
– *kollektiv*: alle Elemente der Klasse F sind Elemente der Klasse G
– *individualistisch*, durch *Aufzählung*: F_1 ist ein G, F_2 ist ein G usw.

Auf die entsprechende *quantoren-logische* bzw. *prädikaten-logische* Formalisierung wird an anderer Stelle eingegangen, es würde hier nur die Argumentation stören.

Die wichtigsten Relationen zwischen Klassen bzw. Mengen sind wiederum die Kopula-Relationen oder *Teilmengen*-Relationen. Einschließlich der Teilmengen-Relation $F \subset G$ gibt es verschiedene Varianten:

$F \subset G$	Teilmenge F ist (echte) Teilmenge von G *Alle F sind G, einige G sind F*
$F \not\subset G$	Nicht-Teilmenge F ist nicht Teilmenge von G *Einige F sind nicht G* (nach der üblichen Deutung)
$F = G$	Identität F und G sind identisch (oder gleich) F ist Teilmenge von G, G ist Teilmenge von F *Alle F sind G, alle G sind F*

Entsprechendes gilt für die *Umkehrung* der Teilmengen-Relation: $F \supset G$ (F enthält G als Teil) und dessen Negation. (Auf den Unterschied von *inklusiver* und *exklusiver* Darstellung betreffend $F \subseteq G$ versus $F \subset G$ komme ich noch zu sprechen.) Zwar sind auch andere logische Relationen zwischen Mengen möglich, aber sie spielen eine geringere Rolle, worauf schon verweist, dass es keine gebräuchlichen Zeichen dafür gibt. Ich werde an späterer Stelle eine Erweiterung und Korrektur der obigen Mengen-Relationen vorschlagen.

0-4-2-3 MOLEKULAR-RELATIONEN

Es geht hier um *Relationen zwischen Relationen*. Diese nenne ich *Molekular-Relationen*, im Gegensatz zu den *Atomar-Relationen* (Relationen zwischen Individuen bzw. Mengen).

Aber in der Logik werden diese Molekular-Relationen oft *ganzheitlich* (ohne ihre Struktur) erfasst, in dem man ihnen die Buchstaben ‚A' und ‚B' zuordnet. So wird z. B. eine Relation $F \subset G$ gleich A gesetzt, ohne ihre Struktur zu berücksichtigen.

Dabei wird gerade hier die *sprachliche* Deutung herausgehoben, indem man ‚A' und ‚B' als „Aussagen" oder „Sätze" bezeichnet.

Der wohl wichtigste Relator zur Verbindung von Relationen ist der *Implikator* $\rightarrow$ (bzw. $*\!\rightarrow$). Es handelt sich hierbei um die *Kopula*. Nur ist die Kopula-Funktion oft nicht direkt erkennbar. Man spricht nicht: 'A ist B', stattdessen: 'A impliziert B'. Oder: 'Wenn A dann B'. Oder: 'Aus A folgt B'.

Formal schreibt man herkömmlich: $A \rightarrow B$

Heißt: „Die Aussage A impliziert die Aussage B" oder „Wenn die Aussage A wahr ist, ist auch die Aussage B wahr".

Aus Sicht der Integral-Logik ist der Bezug auf *Aussagen* aber wie gesagt nicht notwendig. Es geht – strukturell – um *Molekular-Relationen*, z. B. der Form:

$F_1 \subset G \rightarrow F_2 \subset H$.

Wenn F_1 Teilmenge von G ist, dann ist F_2 Teilmenge von H.

Man setzt also $A = F_1 \subset G$ und $B = F_2 \subset H$.

Nun geht es hier darum zu zeigen, dass sich auch für *Molekular-Relationen* eine Kopula-Deutung mit $\subset$ geben lässt, vereinfacht, dass man für $A \rightarrow B$ auch $A \subset B$ einsetzen kann.

Die *Mengen-Deutung* für $A \subset B$ ist allerdings ungewöhnlich (und entspricht erst einmal auch nicht der Kopula). Angenommen es gilt:

A: Der Himmel regnet

B: Die Strasse ist nass

Dann kann man interpretieren: „Die Fälle, in denen der Himmel regnet, sind eine Teilmenge der Fälle, in denen die Strasse nass ist". (Statt von *Fällen* könnte man hier auch von *Welten* sprechen.) Oder exakter: „Die Klasse der Fälle, in denen der Himmel regnet, sind eine Teilmenge der Klasse der Fälle, in denen die Strasse nass ist". Denn die Strasse kann ja auch aus anderen Gründen nass werden, z. B. weil jemand seinen Wagen wäscht. Allgemeiner: „Die Klasse der Welten, in denen A gültig ist, ist eine Teilmenge der Klasse der Welten, in denen B gültig ist".

Bei diesem Beispiel ist aber die eigentliche Struktur der Molekular-Relation nicht berücksichtigt, weil wir auf die Symbole ‚A' und ‚B' zurückgreifen. Nehmen wir daher ein genaueres Beispiel.

Zunächst formal: $(F \subset G) \subset (G \subset H)$.

Bedeutet: „Die Klasse der Relationen $F \subset G$ ist eine Teilmenge der Klasse der Relationen $G \subset H$".

Konkretes Beispiel: „Die Klasse der Relationen, dass die Klasse der Lehrer eine Teilmenge der Klasse der Zeitungsleser ist, ist Teilmenge der Klasse der Relationen, dass alle Zeitungsleser auch Kinogänger sind".

0-4-2-4 INDIVIDUALISTISCHE ANALYSEN

Probleme ergeben sich allerdings, wenn man diese Relationen *individualistisch* ausdrückt, bezogen auf *Elemente*.

1) *Deutungen für* $F \subset G$

Betrachten wir zunächst den einfacheren Fall: $F \subset G$. Hier gibt es vor allem folgende zwei Deutungs-Möglichkeiten:

- Vereinigungsmenge von Sachverhalten

$$(x_1 \in F \subset x_1 \in G) \cup (x_2 \in F \subset x_2 \in G) \cup ... \cup (x_n \in F \subset x_n \in G)$$

$F \subset G$ ist eine Relation zwischen Mengen bzw. ein Sachverhalt, der *bestehen* kann oder nicht. Hier haben wir aber eine *Vereinigungsmenge* von Sachverhalten vor uns. Kann eine Menge bestehen oder nicht bestehen? Nach herkömmlichem Verständnis kann man von einer Menge nicht sagen, dass sie besteht oder nicht. Man könnte postulieren, dass dies bei einer (Vereinigungs-)Menge von Sachverhalten anders ist, aber eine Menge bleibt eine Menge, egal, welche Elemente sie enthält (vgl. allerdings die spätere funktionale Ausweitung).

- Konjunktion von Sachverhalten

$$(x_1 \in F \subset x_1 \in G) \wedge (x_2 \in F \subset x_2 \in G) \wedge ... \wedge (x_n \in F \subset x_n \in G)$$

So scheint diese Lösung besser, wo wir eine *Konjunktion* von (komplexen) Sachverhalten haben; denn bei einer Konjunktion von Sachverhalten kann man gut sagen, sie besteht oder nicht. Entsprechend kann man von einer Konjunktion von Aussagen sagen, sie ist wahr oder falsch.

2) *Deutungen für* $(F \subset G) \subset (F \subset H)$.

Nehmen wir jetzt den komplexeren Satz: $(F \subset G) \subset (F \subset H)$.

Auch hier drei Deutungen:

- Teilmengen-Relation zwischen Vereinigungsmengen von Sachverhalten

$$[(x_1 \in F \subset x_1 \in G) \cup (x_2 \in F \subset x_3 \in G) \cup ... \cup (x_2 \in F \subset x_n \in G)] \subset$$
$$[(x_1 \in F \subset x_1 \in H) \cup (x_1 \in F \subset x_2 \in H) \cup ... \cup (x_n \in F \subset x_n \in H)]$$

Dieser Fall ist relativ unproblematisch, denn es wird gesagt, dass eine (Vereinigungs-)Menge von Sachverhalten *Teilmenge* einer anderen (Vereinigungs-)Menge ist. Dies ist ein komplexer Sachverhalt, also haben wir hier wie gewünscht einen Sachverhalt.

• Teilmengen-Relation zwischen Konjunktionen von Sachverhalten

$$[(x_1 \in F \subset x_1 \in G) \wedge (x_2 \in F \subset x_2 \in G) \wedge ... \wedge (x_n \in F \subset x_n \in G)] \subset$$
$$[(x_1 \in F \subset x_1 \in H) \wedge (x_2 \in F \subset x_2 \in H) \wedge ... \wedge (x_n \in F \subset x_n \in H)]$$

Die Lösung mit der *Konjunktion* ist problematisch, denn hier ist eine Konjunktion Teilmenge einer anderen Konjunktion. Normalerweise geht man aber davon aus, dass eine Konjunktion nur eine andere Konjunktion implizieren kann, aber nicht Teilmenge von ihr sein kann. Es müsste also gelten:

• Implikation zwischen Konjunktionen von Sachverhalten

$$[(x_1 \in F \subset x_1 \in G) \wedge (x_2 \in F \subset x_2 \in G) \wedge ... \wedge (x_n \in F \subset x_n \in G)] \rightarrow$$
$$[(x_1 \in F \subset x_1 \in H) \wedge (x_2 \in F \subset x_2 \in H) \wedge ... \wedge (x_n \in F \subset x_n \in H)]$$

Dies entspricht jedoch nicht dem Ziel, hier eine rein *mengen-theoretische* Darstellung zu liefern.

Wir haben hier also das Problem, dass in einem Fall die *Mengen-Lösung* ($\cup$) richtig ist, im anderen Fall die *Logik-Lösung* ($\wedge$). Auf eine weitere Diskussion will ich verzichten, man vergleiche aber den nachfolgenden *funktionalen Ansatz*, bei dem der Unterschied zwischen Mengen und Sachverhalten (Relationen) relativiert ist

Wir haben hier immer nur *synthetische* Relationen behandelt; bei *material-analytischen* oder *formal-analytischen* Relationen ergäben sich allerdings entsprechende Ergebnisse:

– formal-analytisch: $F \,^{+}\!\!\subset^{+} F$. . $^{+}\!\!\subset^{+}$ steht für eine formal-analytische Teilmengen-Relation

– material-analytisch: $F \subset_{df} G$. $\subset_{df}$ steht für eine material-analytische Teilmengen-Relation

Genauer würde man hier $\subseteq$ bzw. $\subseteq$ verwenden. Um es aber nicht noch komplizierter zu machen, gehe ich auf analytische Relationen nicht gesondert ein,.

0-4-2-5 ZUSAMMENFASSUNG

Bei der *Teilmengen-Relation* $\subset$ geht es um ein *Enthaltensein*. Hierzu werden, je nach Anwendung auf Individuen oder Mengen/Klassen, 2 verschiedene Zeichen $\in$ und $\subset$ verwendet, was aber nicht notwendig ist. Ich wähle nur das Zeichen $\subset$ für die Teilmengen-Relation. Dann ergeben sich folgende Möglichkeiten:

- $x \subset F$: Das Individuum x ist Teilmenge der Klasse F
- $F \subset G$: Die Klasse F ist Teilmenge der Klasse G
- $A \subset B$: Die Relation A ist Teilmenge der Relation B

- $\Phi \subset \Psi$: Die Komponente Φ ist Teilmenge der Komponente Ψ

So wäre unter Absehung der speziellen Anwendung allgemein zu schreiben.

Will man die herkömmliche *Kopula-Formulierung* (mit ‚ist') verwenden, müsste man sagen:

- $x \subset F$: x ist ein F
- $F \subset G$: Jedes F ist G
- $A \subset B$: A ist unter allen Bedingungen B

0-4-3 Kopula als Implikation

0-4-3-1 WAHRHEITSWERT-FUNKTIONALE DEUTUNG

Bei dieser Deutung geht es darum, dass eine Relation eine andere Relation *impliziert*. Dabei ist die *Implikation* $\rightarrow$ neutral gegenüber extensionaler Interpretation (Objekte) oder intensionaler Interpretation (Eigenschaften). Man kann sie durchaus auf Mengen und Klassen anwenden; nur bestimmt man keine Teilmengen-Relation zwischen diesen, sondern eben eine implikative Relation.

Allerdings ist ein wichtiger Unterschied zwischen der *Teilmengen-Relation* $\subset$ und der *Implikation* $\rightarrow$ zu beachten. Die Implikation ist, wie überhaupt alle Relatoren der Aussagen-Logik, *wahrheitswert-funktional* definiert. Das bedeutet: Der *Wahrheitswert* der Gesamtaussage A $\rightarrow$ B ist eine *Funktion* der Wahrheitswerte der Einzel-Aussagen A bzw. B. Wenn man weiß, dass A wahr ist und B wahr ist, dann weiß man auch, dass A $\rightarrow$ B wahr ist. Oder kurz: Wenn A wahr ist und B wahr ist, dann ist auch A $\rightarrow$ B wahr. Formal: $(A \wedge B) \Rightarrow (A \rightarrow B)$. Man kann den *implikativen* Ansatz daher auch *wahrheits(wert)-funktionalen* oder kurz *funktionalen* Ansatz nennen.

Dies in Abgrenzung zum *mengen-relationalen* Ansatz. Dort wird eine solche Deutung nicht vorgenommen: Wenn die Mengen X und Y belegt („gefüllt") sind, heißt dies noch nicht, dass X Teilmenge von Y ist: $\{X\} \neq \varnothing \;\wedge\; \{Y\} \neq \varnothing \;\;\neg\!\Rightarrow \{X\} \subset \{Y\}$. (Es gibt allerdings Ausnahmen: Wenn $\{X\} = \varnothing$, dann gilt $\{X\} \subset \{Y\}$, denn die leere Menge ist Teilmenge jeder anderen Menge.)

Ich verwende hier zur Einfachheit zwar die *normale Implikation* X $\rightarrow$ Y, aus Gründen der *Paradoxien* dieser Implikation wäre aber eigentlich die *Positiv-Implikation* X $*\!\rightarrow$ Y zu gebrauchen (vgl. 0-2-5-5), die eine wirkliche Parallele zur Mengen-Relation X $\subset$ Y darstellt.

Die Interpretation von *Atom-Sätzen* mittels der Implikation, z. B. einer *Wenn-dann-Relation*, ist und klingt ungewöhnlich, hat aber durchaus ihre Plausibilität und Eleganz, wenn man sich auf diese Formulierungen einlässt. Dagegen ist die Implikation bei *Molekular-Sätzen* die gewohnte Kopula-Deutung.

0-4-3-2 INDIVIDUEN-RELATION

Die Individuen-Relation wäre zu schreiben:

$x \rightarrow F$ bzw. $x_1 \rightarrow F$.

Oder wenn man herausstellen will, dass es sich bei F um eine *Klasse* (und nicht um eine *Eigenschaft* handelt): $x_1 \rightarrow K(F)$

Im Beispiel: „Sokrates $\rightarrow$ Philosoph".

Normale Sprache:

Mit Verwendung des Begriffs ‚impliziert' könnte man interpretieren:

„Sokrates impliziert die Klasse der Philosophen".

Aber andere Deutungen sind plausibler, z. B. mit „*wenn – dann*", womit die Implikation ja meistens wiedergegeben wird.

„Wenn Sokrates existiert, ist die Klasse der Philosophen belegt (nicht leer)".

„Wenn die ein-Element-Klasse *Sokrates* belegt ist, dann ist auch die Klasse der Philosophen belegt" u. ä.

Oder: „Es ist nicht wahr, dass Sokrates existiert und die Klasse der Philosophen leer ist".

Formale Sprache:

Formal ergeben sich entsprechende Deutungen, z. B. für $x_1 \rightarrow F$:

„Wenn das Individuum x_1 existiert, dann hat die Klasse F mindestens ein Element".

Hier sind auch extensional-intensional gemischte Deutungen möglich, z. B.:

„Wenn x_1 existiert, dann hat die Eigenschaft F mindestens einen Träger".

0-4-3-3 MENGEN-RELATION

Es geht hier um die Mengen-Relation / Klassen-Relation, z. B. F $\rightarrow$ G bzw. K(F) $\rightarrow$ K(G); dabei steht ‚K' für Klasse (da $\rightarrow$ ebenso für *intensionale* Deutungen steht, kann man durch Einfügen von ‚K' die *extensionale* Interpretation unterstreichen).

Dabei bieten sich folgende *Deutungen* an:

„Wenn die Klasse F belegt („gefüllt") ist, dann auch die Klasse G".

„Wenn die Klasse F mindestens ein Element besitzt, dann auch die Klasse G".

Im Beispiel: K(Philosoph) $\rightarrow$ K(Denker).

„Die Klasse der Philosophen impliziert die Klasse der Denker".

„Wenn die Klasse der Philosophen belegt ist, ist auch die Klasse der Denker belegt".

Auch *intensionale* Relationen sind so darzustellen, z. B. E(Blume) $\rightarrow$ E(Rose).

„Der Begriff der Blume impliziert den Begriff der Rose".

Allerdings sind hier Missverständnisse möglich. Normal-sprachlich würde man eher umgekehrt formulieren, also: ‚Der Begriff der Rose impliziert den Begriff der Blume'; aber das ist nicht wirklich intensional, denn intensional weist der Pfeil in die andere Richtung wie extensional. In der Sprache der *Mengen-Theorie* wäre wie folgt zu formulieren:

extensional:	K(Rose) $\rightarrow$ K(Blume).	Die Klasse der Rosen ist Teilmenge der Klasse der Blumen
intensional:	E(Blume) $\rightarrow$ E(Rose)	Die Eigenschafts-Klasse „Blume" ist Teilmenge der Eigenschafts-Klasse „Rose"

0-4-3-4 MOLEKULAR-RELATION

Für Molekular-Relationen ist die *Implikation* $\rightarrow$ wie gesagt die *übliche* Darstellung der Kopula-Funktion. Hier wählt man sprachlich meistens die *Wenn-dann-Form*.

Beispiele wurden bereits gebracht.

Formal-sprachlich:

A $\rightarrow$ B in der Aussagen-Logik oder in der Quantoren-Logik $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

Halb-Formal:

Die Sonne scheint $\rightarrow$ Das Wasser ist warm

Normal-sprachlich:

Wenn die Sonne scheint, ist das Wasser warm.

Nun sind neben der Implikation A $\rightarrow$ B andere *implikative* Beziehungen zu unterscheiden, die eine Kopula-Funktion haben können, insbesondere:

Implikation	$A \rightarrow B$
Verneinte Implikation	$A \rightarrow \neg B$
Replikation	$A \leftarrow B$
Verneinte Replikation	$\neg A \leftarrow B$

(Mit Einschränkung auch die *Äquivalenz* $A \leftrightarrow B$ oder verneinte Äquivalenz $A \leftrightarrow \neg B$.)

• *Kopula-Relationen und Nicht-Kopula-Relationen*
Allerdings kann hier folgender Einwand gemacht werden: Es ist nicht berechtigt, den *Kopula-Relator* Implikation und andere implikative Relationen bzw. Relatoren von den übrigen Relatoren als *Nicht-Kopula-Relatoren* der Logik abzugrenzen.

Diese übrigen Relatoren wie z. B. $\wedge$ oder $\vee$ lassen sich *in die Implikation umformen* (jedenfalls mit Verwendung der Negation oder anderer Relatoren). Z. B.:

$$A \wedge B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (\neg A \to B) \wedge (\neg A \to \neg B)$$

Umgekehrt lässt sich, wie schon beschrieben, die Implikation in andere Junktoren umformen, z. B.

$$A \to B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \qquad \text{oder} \qquad A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$\neg(A \wedge \neg B)$ übersetzt man hier am besten mit: „Es ist nicht wahr, dass A wahr ist und B falsch ist"; $\neg A \vee B$ mit „A ist falsch oder B ist wahr".

Die These ist also: Es gibt letztlich keinen relevanten Unterschied zwischen Kopula-Relationen und nicht Kopula-Relationen, sie sind *logisch äquivalent*. Man könnte vielleicht sagen, dass sich die *Kopula-Funktion* zwar am direktesten durch die Implikation ausdrücken lässt, indirekt aber auch durch Umformungen der Implikation.

Gegen diesen Einwand ist Folgendes zu erwidern:

Erstens, die entsprechenden Ausdrücke wie $A \to B$ und $\neg(A \wedge \neg B)$ sind zwar *logisch äquivalent*, aber nicht *bedeutungsgleich*; und zwar besitzen sie eine unterschiedliche extensionale Bedeutung. Dies wird im Exkurs zu diesem Kapitel ausführlich begründet.

Zweitens, der normal-sprachlichen Kopula entspricht sehr viel besser die *Positiv-Implikation* $A^*\!\to B$ als die Implikation $A \to B$. Und die Positiv-Implikation lässt sich nicht in eine Konjunktion, Disjunktion oder eine andere Relation umformen; denn die Positiv-Implikation $A \,{}^*\!\!\to B$ ist nur für 2 Welten definiert, dagegen sind $A \wedge B$, $A \vee B$ usw. jeweils für 4 Welten definiert. Ich werde zwar im Folgenden zunächst die Implikation weiter verwenden (weil sie besser eingeführt ist), man muss aber bedenken, dass sich die Aussagen oft besser auf die Positiv-Implikation beziehen lassen.

• *Atom- und Molekül-Relationen*
Allerdings ist es berechtigt, hier einen *Unterschied* zwischen *Atomar-Relationen* und *Molekular-Relationen* zu konstatieren:

Bei den *Atomar*-Relationen geht es vorrangig um die *Kopula-Relation* (wie auch immer sie formal dargestellt wird). Man könnte sogar die konsequente These vertreten, dass bei Atomar-Relationen *nur* die Kopula Sinn macht, nicht dagegen Relatoren wie der Konjunktor $\wedge$, der Disjunktor $\vee$ u. a.

Z. B. ist K(Philosoph) $\to$ K(Mensch) implikativ recht unproblematisch zu interpretieren, nämlich: „Wenn die Klasse der Philosophen belegt ist, dann auch die Klasse der Menschen".

Schwieriger ist es dagegen, einen Atom-Satz wie ‚K(Philosoph) $\wedge$ K(Mensch)' sinnvoll zu deuten.

In erster Linie betrifft dieses Problem aber Atom-Relationen, in denen ein *Individuum* vorkommt (bzw. Atom-Sätze mit Individuumszeichen). Ob ein *Individual-Satz* mit *Konjunktion* wie:

$x \wedge F$, z. B. ‚Sokrates $\wedge$ Mensch'

sich plausibel interpretieren lässt, kann man in Frage stellen. Der Satz ‚Sokrates $\wedge$ Mensch' ist ja noch stärker als die Äquivalenz ‚Sokrates $\leftrightarrow$ Mensch' – und schon die macht wenig Sinn.

Allerdings hatten wir 'Sokrates ist ein Mensch' auch übersetzt mit: ‚Es ist nicht wahr, dass Sokrates existiert, aber kein Mensch existiert'. Dies hat aber die logische Struktur $\neg(x \wedge \neg F)$; hier wird also doch die Konjunktion in einem Individual-Satz verwendet, wenn auch in *negierter* Form (vgl. unten).

Bei den *Molekular*-Relationen sind dagegen *alle* Relatoren bzw. Junktoren sinnvoll anzuwenden und gebräuchlich.

$A \wedge B$, $A \vee B$, $A \mid B$, A >< B, A >– B, A –< B usw.

0-4-3-5 ZUSAMMENFASSUNG

Mit dem Implikator $\rightarrow$ ergeben sich folgende Möglichkeiten:

- Individuen-Relation: $x \rightarrow F$
- Klassen-Relation: $F \rightarrow G$ bzw. $M \rightarrow N$
- Molekular-Relation: $A \rightarrow B$

Wie gesagt abstrahiert die Integral-Logik wo möglich von diesen Unterschieden und schreibt allgemein $X \rightarrow Y$ bzw. noch allgemeiner: $\Phi \rightarrow \Psi$, mit der Bedeutung:

„Wenn Φ (positiv) ist, dann ist auch Ψ (positiv)“
„Φ und Ψstehen in der Relation der Implikation“
„Φ impliziert Ψ“

Die Implikations-Deutung ist bei *Relationen* (Sätzen) üblich, aber bei *Objekten* (Wörtern) ungewöhnlich. Sie wird hier dennoch auch auf Individuen und Mengen angewandt, die durch den Relator quasi *relationiert* werden, also selbst in eine Relation (bzw. eine Aussage) umgewandelt werden.

Aus „Sokrates“ wird „Sokrates existiert“.
Aus „Klasse Mensch“ wird „Die Klasse Mensch hat Elemente“.
(oder „Die Klasse Mensch ist belegt“.)

Anders gesagt: Die herkömmliche *Unterscheidung zwischen Dingen und Sachverhalten* bzw. *Wörtern* und *Sätzen* wird hier aufgehoben. Man sagt nicht nur von Sätzen, sondern auch von Wörtern, dass sie „wahr“ oder „falsch“ sind. Man geht davon aus, dass sich grundsätzlich für alle Entitäten angeben lässt, ob sie positiv („wahr“) oder negativ („falsch“), besser „belegt“ oder „nicht belegt“ (= „leer“) sind.

Das lässt sich folgendermaßen begründen:
Wörter (Zeichen) haben wie Sätze eine *Doppelfunktion*:

- *Bezeichnung*
- *Existenz-Behauptung* (bzw. Wahrheits-Behauptung).

Zunächst zu *Sätzen*: Bei einem *Satz* geht man zunächst davon aus, dass er wahr ist; er enthält *implizit* eine *Wahrheits-Behauptung*. So ist der Satz ‚Sokrates ist ein Mensch’ zu verstehen als: ‚Es ist wahr, dass Sokrates ein Mensch ist’. Natürlich kann der Satz auch falsch sein, dann kennzeichnet man das normalerweise durch eine *Negation*: ‚Sokrates ist *kein* Mensch’ oder mit Verwendung von ‚falsch’: ‚Es ist falsch, dass Sokrates ein Mensch ist’. Für diesen Satz gilt dann allerdings wiederum die implizite Wahrheitsbehauptung: ‚Es ist wahr, dass es falsch ist, dass Sokrates ein Mensch ist’. In der Wahrheitstafel der Logik wird einem Satz entsprechend als *möglicher* Wert sowohl „wahr“ wie „falsch“ zugeordnet. Man kann also sagen, dass ein Satz einerseits einen Sachverhalt *bezeichnet*, andererseits eine *Wahrheits-Behauptung* vornimmt, nämlich dass der Sachverhalt besteht (vgl. z. B. Exkurs Kap. 2, 1.1).

Jetzt zu *Wörtern*: Entsprechend kann man bei *Wörtern* diese *Doppelfunktion* feststellen: z. B. der Name ‚Sokrates’: Er *bezeichnet* einerseits die Person Sokrates, andererseits behauptet er *implizit* auch die *Existenz* von Sokrates. Man könnte ‚Sokrates’ daher verstehen als ‚Sokrates existiert’. Damit würde ein Wort quasi bereits zu einem Satz. Eine Aussage wie ‚Sokrates ist Philosoph’ wäre dann zu verstehen als: ‚Sokrates existiert und ist Philosoph’. Will man ausdrücken, dass Sokrates nicht existiert, müsste man ein ‚nicht’ vor den Namen setzen:

‚nicht Sokrates', im Sinne: „es ist nicht wahr, das Sokrates existiert"; allerdings ist diese Schreibweise in der normalen Sprache nicht üblich.

Genauso wie man für einen Satz eine *Wahrheitstafel* aufstellt, so könnte man dies auch für ein Wort tun. Man kann auch hier die möglichen Welten unterscheiden: das Wort ist „wahr", d. h. es bezeichnet etwas Existierendes, oder es ist „falsch", seine Extension ist leer.

Es ist im Grunde nicht einzusehen, warum man diesbezüglich eine strikte Abgrenzung von Sätzen und Zeichen/Wörtern vornehmen soll: Sätze bezeichnen etwas (oder sagen etwas aus) und behaupten Wahrheit, Wörter dagegen bezeichnen nur etwas – nein, man kann Wörter auch so verstehen, dass sie Existenz behaupten. Natürlich geht es hier nicht um alle Wortklassen, nicht um Partikel usw. Man könnte allerdings einschränken und sagen, dass Wörter nur *im Kontext einer Relation*, also innerhalb eines Satzes, eine Existentbehauptung besitzen und somit selbst als ein Satz fungieren.

Ähnlich wird auch in der herkömmlichen *Quantoren-Logik* verfahren: Aus „Alle Menschen sind sterblich" der normalen Sprache macht die Logik: „Für alle x gilt: wenn sie Menschen sind, dann sind sie sterblich". Formal: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$. D. h. das Zeichen/Wort ‚Mensch' wird in einen *Konditional-Satz* umgewandelt ‚wenn sie Menschen sind'. Betrachtet man die vollständige Konstruktion, wird aus ‚Mensch' sogar ein *Satzgefüge*: 'Für alle x gilt'(Hauptsatz): ‚wenn sie Menschen sind...' (Nebensatz).

0-4-4 Funktionale Logik

0-4-4-1 GENERELLER FUNKTIONALER ANSATZ

Ich habe zwei *einheitliche* Ansätze zur Interpretation der Kopula diskutiert:

- Kopula als *Teilmengen-Relation* (Mengen-Lehre)
- Kopula als *Implikations-Relation* (Aussagen-Logik)

Ich halte das *implikative Modell* für überlegen. Man kann es, wie schon oben bemerkt, auch das *funktionale Modell* nennen, weil hier der Wahrheitswert einer Relation (Struktur) eine *Funktion* der Wahrheitswerte der Relata ist, natürlich einschließlich der Definition der Relation. Eine solche *wahrheitswert-funktionale Semantik* ist in der Aussagen-Logik bekannt, man kann z. B. aus der Wahrheit der Sätze ‚A' und ‚B' auf die Wahrheit von ‚$A \rightarrow B$' als Gesamtsatz schließen.

Mein Ansatz geht aber weiter. Ich kann auch bei dem Satz ‚Sokrates ist Philosoph' ($x_1 \rightarrow F$) aus der „Wahrheit" von ‚Sokrates' und ‚Philosoph' auf die Wahrheit des Gesamtsatzes schließen. Allgemein: Man vermag aus der *Gültigkeit/Ungültigkeit* der Relata die Gültigkeit/Ungültigkeit des Relationssystems ableiten. Ich verwende den Begriff der Gültigkeit (Ungültigkeit) also nicht eingeschränkt auf logische Schlüsse, wie dies sonst häufig vorgenommen wird. Im Speziellen lässt sich für *Gültigkeit* bzw. *Ungültigkeit* festlegen:

- *Abstrakte Entitäten*
  - Klasse: hat Elemente (+), hat keine Elemente, ist leer (–)
  - Individuum: ist definiert (+), ist nicht definiert (–)
  - Relation: ist positiv (+), ist negativ (–)
- *Real*
  - Ding: existiert (+), existiert nicht (–)
  - Sachverhalt: besteht (+), besteht nicht (–)
- *Sprachlich*
  - Wort: hat eine Extension (+), hat keine Extension (–)
  - Satz: ist wahr (+), ist falsch (–)

- *Psychisch*
  Begriff: hat Träger (+), hat keinen Träger (–)
  Urteil: ist richtig (+), ist falsch (–)

Allerdings sind verschiedene *Einwände* denkbar, von denen ich jetzt drei im Einzelnen diskutieren werde.

0-4-4-2 EINWAND: SINNLOSIGKEIT VON NICHT-EXISTENZ-AUSSAGEN

Ich habe gesagt, dass man dem Wort ‚Sokrates' zwei Werte zuweisen kann: „gültig" oder „nicht gültig": Sokrates existiert – Sokrates existiert nicht. Nun könnte man einwenden: Eine Aussage wie ‚Sokrates existiert nicht' ist unsinnig. Denn wenn Sokrates nicht existiert, lässt sich ja keine Aussage über ihn machen, nicht einmal die Aussage seiner Nicht-Existenz – man gerät in eine *Paradoxie*. Man könnte andererseits ‚Sokrates existiert' als Tautologie bezeichnen, denn man könne eben nur etwas über ihn aussagen, wenn er existiert – damit folgt man aber bereits der Argumentation des funktionalen Ansatzes.

Dieser Einwand ist, wenn man es genau sieht korrekt, allerdings betrifft er nicht nur den funktionalen Ansatz; sondern es ist ein bekanntes Problem in der Philosophie, z. B. wird ja auch von „*leeren Mengen*" gesprochen wird, was letztlich die gleichen Probleme aufwirft. Eine entsprechende Situation besteht bei *negativen* oder *nicht bestehenden Sachverhalten* (z. B. „Sokrates ist kein Mensch"). Man könnte die Problematik auch weiter ausdehnen und sagen: Es gibt keine *negativen* Sachverhalte – also alle Sachverhalte der Art „x ist kein F", „Alle F sind keine G" usw. sind unsinnig.

Man kann sich diesen Problemen aber leicht entziehen durch einen Rückgriff auf die *sprachliche* Ebene, die *Meta-Ebene*. Denn man kann sehr wohl sinnvoll sagen:

> Das Wort (der Name) ‚Sokrates' hat *eine* Extension.
> Oder eben: Das Wort (der Name) ‚Sokrates' hat *keine* Extension.
> Bzw.: Es gibt nichts, das von dem Wort ‚Sokrates' bezeichnet wird.

Dies lässt sich auch durch eine Relation fassen: Das Wort ‚Sokrates' steht zu keinem realen Objekt in der Relation der Bezeichnung.

Auch um solchen Schwierigkeiten zu entgehen, hat sich die neuere Logik überwiegend von der *realen* Objekt-Ebene zur *sprachlichen* Meta-Ebene orientiert, insbesondere von den *Sachverhalten* abgewandt und den *sprachlichen* Relationen, *Aussagen* oder *Sätzen* zugewandt. Ich halte dieses Problem insgesamt für vernachlässigbar.

0-4-4-3 EINWAND: DYSFUNKTIONALE ÜBERSETZUNG

Wird durch die funktionale Umformung die Aussage wirklich inhaltlich getroffen? Kann man wirklich folgendermaßen übersetzen?

> „Sokrates ist Philosoph" in:
> „Wenn Sokrates existiert, dann ist die Klasse der Philosophen belegt" oder:
> „Wenn (der Eigenname) ‚Sokrates' eine Extension besitzt, dann besitzt auch (der Prädikator) ‚Philosoph' eine Extension".

Zunächst kann man denken, diese Übersetzung bzw. Analyse wird der ursprünglichen Struktur prinzipiell gar nicht gerecht. Denn wenn im ersten Fall Sokrates existiert und es Philosophen gibt, heißt das denn schon, dass Sokrates ein Philosoph ist? Aber wenn Sokrates und die Klasse der Philosophen eben in bestimmter Weise *zusammen* belegt oder nicht belegt sind, dann drückt dies offensichtlich genau die Kopula-Bedeutung „ist" aus.

Oder drückt „Sokrates ist Philosoph“ eine (partielle) *Identität* aus, die Übersetzung dagegen nur eine *Korrelation*, die auch zufällig sein könnte? Man könnte postulieren, „Sokrates ist weise“ sagt eben aus, dass die Weisheit *an* der Person Sokrates auftritt, z. B. an der gleichen *Raum-Zeit-Stelle*.

Ob die Aussage durch die *funktionale Umformulierung* wirklich *vollständig* erfasst wird, das wäre in weiteren Untersuchungen zu klären. Eventuell müsste man unterscheiden zwischen einer *rein funktionalen*, korrelativen Kopula-Aussage und einer *hyper-korrelativen* Kopula-Aussage, die noch zusätzliche Eigenschaften besitzt; aber die Basis ist in jedem Fall die korrelative Aussage, die sich auch durch Implikation darstellen lässt.

Eine ähnliche Problematik ergibt sich auch bei *Molekül-Sätzen*:

z. B. ‚Wenn es regnet, ist die Strasse nass’.

Bei diesem Wenn-dann-Satz liegt offensichtlich nicht nur eine Korrelation vor, sondern auch eine *Kausalbeziehung*. Dagegen:

z. B. ‚Wenn ein Mensch groß ist, ist er besonders klug’.

Dieser Zusammenhang mag stimmen oder auch nicht, aber wenn, wäre er nach unserem Wissen rein *zufällig*, keine Kausalrelation.

0-4-4-4 EINWAND: KEINE EXISTENZ-BEHAUPTUNG

Der dritte Einwand hängt speziell mit der *Implikation* zusammen. Er besagt: Die Implikation $X \rightarrow Y$ ist so definiert, dass sie auch wahr ist, wenn X falsch ist. Im Beispiel: Der Satz ‚Sokrates $\rightarrow$ Philosoph’ wäre demnach auch wahr, wenn ‚Sokrates’ falsch ist, also Sokrates nicht existiert. Dies entspricht nun in der Tat gar nicht dem normalsprachlichen Satz. Aber dieses Problem ergibt sich nicht durch das funktionale Modell, sondern durch die Definition der Implikation (die Problematik der Implikation beschäftigt uns an vielen Stellen in diesem Buch).

Man kann der Schwierigkeit entgehen, wenn man die *Positiv-Implikation* $X \ast\!\rightarrow Y$ verwendet, denn die ist wie beschrieben nur für die Fälle definiert, in denen X wahr ist (im Beispiel, wenn Sokrates existiert).

Festhalten möchte ich:

1. Ich halte den *Implikations-Ansatz* (funktionales Modell) zur Darstellung der Kopula für überlegen, auch im Hinblick auf Wörter/Zeichen bzw. Objekte. Es ist ein Modell mit großer Kompetenz zur *Vereinheitlichung*. Man kann es sowohl auf Extensionen wie Intensionen beziehen. Und es wirkt – technisch – eleganter.

2. Allerdings hat das implikative Modell auch Nachteile: So ist die Darstellung als *Teilmengen-Relation* (z. B. „die Klasse der Mathematiker ist eine Teilmenge der Klasse der Wissenschaftler“) *ontologisch* unproblematischer als die implikative Darstellung „wenn jemand Mathematiker ist, dann ist er auch Wissenschaftler“ oder in der konjunktiven Umformung „es ist nicht möglich, dass jemand Mathematiker, aber nicht Wissenschaftler ist“); denn es ist fraglich, wie eine *Konditional-Beziehung* (wenn – dann) oder ein ausgeschlossener, *negativer Sachverhalt* ontologisch einzuordnen sind. Allenfalls die Formulierung mit ‚impliziert’ ist ontologisch einigermaßen unproblematisch, aber gerade bei Klassen ungewöhnlich, z. B. „die Klasse der Mathematiker impliziert die Klasse der Wissenschaftler“. Auch verbindet man mit dem Begriff der *Extension* eines (kopulativen) Satzes eher eine Mengen-Relation als eine Wenn-dann-Relation. Hier ist der *Mengen-Ansatz* überlegen.

Auch *partikuläre* (oder statistische) Aussagen wie ‚*einige* F sind G’ lassen sich durch Mengen-Relationen einfacher darstellen. *Funktional* müsste man z. B. formulieren: ‚Wenn F realisiert ist, dann ist in *einigen* Fällen auch G realisiert’.

3. Obwohl ich das Implikations-Modell dennoch insgesamt für überlegen halte, werde ich im Wesentlichen an der üblichen Darstellung festhalten,
• dass man nämlich bei *Wörtern* (bzw. *Atom-Relationen*) den Mengen-Ansatz verwendet, also die Kopula als *Teilmengen-Relation* darstellt (z. B. $x_1 \subset F$) und
• dass man nur bei *Sätzen* (bzw. *Molekül-Relationen*) die Kopula als Implikation darstellt (z. B. $A \to B$).
Diese Differenzierung kann man als ‚*kombiniertes Modell*' bezeichnen.
Der Grund für die Wahl ist: Ich möchte mich möglichst weitgehend in den bekannten Logikbahnen bewegen, um meinen Text nicht unnötig schwierig zu gestalten.

0-4-4-5 ZUSAMMENFASSUNG

Abschließend hierzu zwei Übersichten:

3 Kopula-Modelle: Mengen-Modell, Implikations-Modell und kombiniertes Modell
Parallele von Objekten und Relationen betreffend die Kopula

3 Kopula-Modelle

Ich fasse noch einmal vereinfachend die wichtigsten Unterschiede zusammen zwischen:
• *Teilmengen*-Modell (relational): nur Teilmengen-Relation $\subset$
• *Implikations*-Modell (funktional): nur Implikation $\to$
• *Kombiniertes* Modell: $\subset$ / $\in$ und $\to$ (atomar: Teilmenge/Element, molekular: Implikation)

• *Teilmengen-Modell*
1. atomar
   – extensional: $K(F) \subset K(G)$
   – intensional: $E(G) \subset E(F)$
2. molekular
   – extensional: $K(F) \subset K(G) \quad \subset \quad K(F) \subset K(H)$
   – intensional: $E(G) \subset E(F) \quad \subset \quad E(H) \subset E(F)$

• *Implikations-Modell*
1. atomar
   – extensional: $K(F) \to K(G)$
   – intensional: $E(G) \to E(F)$
2. molekular
   – extensional: $K(F) \to K(G) \quad \to \quad K(F) \to K(H)$
   – intensional: $E(G) \to E(F) \quad \to \quad E(H) \to E(F)$

• Kombiniertes Modell
1. atomar
   mengen-theoretisch
   – extensional: $K(F) \subset K(G)$
   – intensional: $E(G) \subset E(F)$
2. molekular
   implikativ
   – extensional: $K(F) \subset K(G) \quad \to \quad K(F) \subset K(H)$
   – intensional: $E(G) \subset E(F) \quad \to \quad E(H) \subset E(F)$

Anmerkung: Wie in 0-3 erläutert, sind Relationen zwischen Eigenschaften meistens *material-analytisch*, normalerweise müsste man daher $\to_{df}$ oder $\subset_{df}$ (für Definition) schreiben.

Parallele von Objekten und Relationen bezüglich der Kopula

OBJEKTE	KOPULA-RELATIONEN
1. *Individuen* x	1. Individuen-Relationen M-M: $x \in F$ I-M: $x \rightarrow F$
2. *Mengen/Klassen* (= Vereinigungen von Individuen)	2. Allgemein-Relationen (= Konjunktionen von Individuen-Relationen)
Darstellungen • ganzheitlich F, G	• ganzheitlich: M-M: $F \subset G$ I-M: $F \rightarrow G$
• allgemein	• allgemein
M-M: $\{x / x \subset F\}$	$\Lambda x((x \subset F) \subset (x \subset G))$
I-M: $\{x / x \rightarrow F\}$	$\Lambda x((x \rightarrow F) \rightarrow (x \rightarrow G))$
K-M: $\{x / x \in F\}$	$\Lambda x((x \in F) \rightarrow (x \in G))$
• individuell $x_1 \cup x_2 \cup ... \cup x_n$	• individuell
M-M:	$(x_1 \subset F) \subset (x_1 \subset G) \wedge \ldots \wedge (x_n \subset F) \subset (x_n \subset G)$
I-M:	$(x_1 \rightarrow F) \rightarrow (x_1 \rightarrow G) \wedge \ldots \wedge (x_n \rightarrow F) \rightarrow (x_n \rightarrow G)$
K-M	$(x_1 \in F) \rightarrow (x_1 \in G) \wedge \ldots \wedge (x_n \in F) \rightarrow (x_n \in G)$

Anmerkungen:
– M-M = Mengen-Modell, I-M = Implikatives Modell, K-M = Kombiniertes Modell
– Die Darstellung ist selektiv, der intensionale und der gemischt extensional-intensionale Ansatz wird nicht berücksichtigt, der Unterschied von Konstanten und Varianten wird ausgeklammert, außerdem werden nicht alle Schreibvarianten aufgeführt usw.
– Im Deutschen gibt man mit ‘ist’ auch *Identität* wieder, aber das entspricht nicht der Kopula im engeren Sinn. Daher berücksichtige ich auch keine Individuen-Relationen der Form x = y.

0-4-5 Gleichheits-Logik

0-4-5-1 BEGRÜNDUNG EINER GLEICHHEITS-LOGIK
Ich habe bisher die *implikative* Relation und damit die *Kopula* in den Mittelpunkt gestellt, sie als *basale* logische Relation dargestellt.

Es ist aber auch denkbar, die *Gleichheit* bzw. die *Äquivalenz* als fundamentale logische Relation darzustellen. Schon im Jahr 1972 habe ich (als meine allererste Logik-Arbeit) eine *Gleichheits-Logik* konzipiert.

Bei der Gleichheits-Logik wird nur zwischen *Gleichheit* und *Ungleichheit* unterschieden. Man kann dafür folgende Symbole verwenden:

- mathematische: = und $\neq$
- logische: $\leftrightarrow$ und ><

Da es sich hier um einen logischen Ansatz handelt, ziehe ich die logischen Symbole vor.

Gleichheit entspricht hier also der logischen *Äquivalenz*: $\leftrightarrow$.

Grundsätzlich wären verschiedene *Negationen* der Äquivalenz denkbar. Die direkte, *kontradiktorische* Äquivalenz ist aber die *Kontravalenz* ><. X >< Y bedeutet: entweder X oder Y bzw. X und Y schließen sich gegenseitig aus.

Es gilt: $\neg(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X >< Y)$. Somit ist $(X \leftrightarrow Y) \vee (X >< Y)$ eine *Tautologie*, es gilt der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*.

Die Gleichheits-Logik oder *Äquivalenz-Logik* lässt sich am besten *graphisch* darstellen, z. B. in einem *Rechteck* bzw. *Quadrat*.

$$\begin{array}{ccc} X & \leftrightarrow & Y \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ V & \leftrightarrow & Z \end{array}$$

Mittels der herkömmlichen Logik, bei Verwendung der *Implikation* $\rightarrow$ bzw. $\Rightarrow$, könnte man die Relationen in diesem Quadrat folgendermaßen bestimmen, je nachdem, wo man beginnt:

1. $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \wedge (Z \leftrightarrow V) \;\Rightarrow\; (V \leftrightarrow X)$
2. $(Y \leftrightarrow Z) \wedge (Z \leftrightarrow V) \wedge (V \leftrightarrow X) \;\Rightarrow\; (X \leftrightarrow Y)$
3. $(Z \leftrightarrow V) \wedge (V \leftrightarrow X) \wedge (X \leftrightarrow Y) \;\Rightarrow\; (Y \leftrightarrow Z)$
4. $(V \leftrightarrow X) \wedge (X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \;\Rightarrow\; (Z \leftrightarrow V)$

Hier ist jeweils eine *Tautologie* gegeben, die durch die logische Implikation $\Rightarrow$ ausgedrückt wird.

Die Frage ist, wie sich das analytische Element in dem Quadrat der Gleichheits-Logik widerspiegelt, welche Äquivalenz-Relation hier tautologisch ist.

Dafür gibt es viele theoretisch vorstellbare Möglichkeiten, von denen ich hier nur vier nenne. (Die Beweise mittels Wahrheitstafel lasse ich weg, das würde an dieser Stelle zu weit führen.)

- $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \wedge (Z \leftrightarrow V) \;\Leftrightarrow\; (V \leftrightarrow X)$?

Man könnte meinen, dies müsste auch gelten, analog zur o. g. Implikation, aber dies gilt nicht.

- $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \wedge (Z \leftrightarrow V) \;\leftrightarrow\; (V \Leftrightarrow X)$?

Hier wäre das jeweils letzte Glied selbst analytisch bzw. tautologisch. Dies gilt schon gar nicht, $V \leftrightarrow X$ ist in jedem Fall synthetisch.

- $X \leftrightarrow Y \leftrightarrow Z \leftrightarrow V \;\Leftrightarrow\; X$?

Dies scheint am ehesten der Darstellung im Quadrat zu entsprechen, aber auch das ist falsch, hier liegt keine Tautologie vor. Man müsste sonst für die Gleichheits-Logik andere Ableitungs-Regeln definieren, was problematisch wäre.

- $(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z) \leftrightarrow (Z \leftrightarrow V) \;\Leftrightarrow\; (V \leftrightarrow X)$?

Hier liegt in der Tat eine *Tautologie* vor. Man kann die Äquivalenz, die das jeweils letzte Glied verbindet, als analytisch (Tautologie) kennzeichnen. Wenn man also die logischen Verhältnisse im Quadrat durch die Aussagen-Logik darstellen möchte, muss man in dieser Weise formalisieren.

Will man die letzte Formel im *Quadrat* darstellen, könnte man das wie folgt tun (man gibt dabei entweder *alle* Positionen an oder schreibt nur die 1, welche die erste Relation angibt):

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & X & \leftrightarrow & Y & \\ 4 & \Updownarrow & & \updownarrow & 2 \\ & V & \leftrightarrow & Z & \\ & & 3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ X & \leftrightarrow & Y \\ \Updownarrow & & \updownarrow \\ V & \leftrightarrow & Z \end{array}$$

Auch hier gibt es also 4 Möglichkeiten:

1. $(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z) \leftrightarrow (Z \leftrightarrow V) \Leftrightarrow (V \leftrightarrow X)$
2. $(Y \leftrightarrow Z) \leftrightarrow (Z \leftrightarrow V) \leftrightarrow (V \leftrightarrow X) \Leftrightarrow (X \leftrightarrow Y)$
3. $(Z \leftrightarrow V) \leftrightarrow (V \leftrightarrow X) \leftrightarrow (X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z)$
4. $(V \leftrightarrow X) \leftrightarrow (X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z) \Leftrightarrow (Z \leftrightarrow V)$

Ein zweiter Fall, bei dem neben der Äquivalenz $\leftrightarrow$ auch die *Kontravalenz* $><$ vorkommt:

$$\begin{array}{ccc} X & >< & Y \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ V & >< & Z \end{array}$$

Hier gilt herkömmlich mit Verwendung der *Implikation*:

1. $(X >< Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \wedge (Z >< V) \Rightarrow (V \leftrightarrow X)$
2. $(Y \leftrightarrow Z) \wedge (Z >< V) \wedge (V \leftrightarrow X) \Rightarrow (X >< Y)$
3. $(Z >< V) \wedge (V \leftrightarrow X) \wedge (X >< Y) \Rightarrow (Y \leftrightarrow Z)$
4. $(V \leftrightarrow X) \wedge (X >< Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \Rightarrow (Z >< V)$

Man dabei muss bedenken, dass es sich um ein *2-wertiges* System handelt, es ist nur $\leftrightarrow$ oder $><$ möglich.

In der Gleichheits-Logik, unter ausschließlicher Verwendung der *Äquivalenz* bzw. der *Kontravalenz* (als Negation der Äquivalenz) ergibt sich:

1. $(X >< Y) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z) \leftrightarrow (Z >< V) \Leftrightarrow (V \leftrightarrow X)$
2. $(Y \leftrightarrow Z) \leftrightarrow (Z >< V) \leftrightarrow (V \leftrightarrow X) \Leftrightarrow (X >< Y)$
3. $(Z >< V) \leftrightarrow (V \leftrightarrow X) \leftrightarrow (X >< Y) \Leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z)$
4. $(V \leftrightarrow X) \leftrightarrow (X >< Y) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z) \Leftrightarrow (Z >< V)$

Ein drittes Beispiel:

$$\begin{array}{ccc} X & >< & Y \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ V & \leftrightarrow & Z \end{array}$$

Dieses Quadrat ist logisch falsch, widersprüchlich.

Hier müsste nämlich gelten:

$(X >< Y) \leftrightarrow (Y \leftrightarrow Z) \leftrightarrow (Z >< V) \Leftrightarrow (V >< X)$

0-4-5-2 IMPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Als eine zentrale Aussage kann man formulieren: *Implikaton ist partielle Gleichheit*. Bzw. *Implikation ist partielle Äquivalenz*. Dazu folgende Überlegung:

$$X \leftrightarrow Y \Leftrightarrow (X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y)$$

Man könnte analysieren:

das Ganze: $X \leftrightarrow Y$	Äquivalenz
1. Teil: $X \rightarrow Y$	Implikation
2. Teil: $X \leftarrow Y$	Replikation

Man könnte als zweiten Teil auch $Y \rightarrow X$ formalisieren, so dass man *zwei Implikationen* hätte. Also gilt: Die *Gleichheit (Äquivalenz) ist das Ganze*, die *Implikation ist der Teil*.

Damit führen uns die Überlegungen über *Gleichheit / Ungleichheit bzw. partielle Gleichheit* auch zu Aussagen über *Ganzheit / Teil* in der Logik – was aber nicht gleichgesetzt werden darf.

Die Teile des logischen Ganzen werden durch *Konjunktion* $\wedge$ verknüpft. Eine Konjunktion gilt dann als wahr, wenn beide bzw. alle Teile (zusammen) wahr sind. D. h. auf das Ganze bezogen: Das Ganze ist nur wahr, wenn beide Teile wahr sind.

Hier gilt: Das Ganze impliziert logisch den Teil (bzw. jeden Teil):

1. $X \leftrightarrow Y \Rightarrow (X \rightarrow Y)$
2. $X \leftrightarrow Y \Rightarrow (X \leftarrow Y)$

Man kann das so interpretieren: Wenn das Ganze realisiert ist, dann muss auch der Teil realisiert sein.

Betrachten wir – nach der *logischen* Analyse – die Verhältnisse in der *Mengen-Lehre*, wobei wir ‚M' und ‚N' für Mengen verwenden. Hier gilt entsprechend:

$$M = N \Leftrightarrow (M \subset N) \wedge (M \supset N)$$

1. $M = N \Rightarrow (M \subset N)$
2. $M = N \Rightarrow (M \supset N)$

0-4-5-3 KONJUNKTIONS-MODELL

Man kann die obige Analyse als *konjunktives* Modell der Ganzheit bezeichnen, weil Ganzheit (Äquivalenz) als *Konjunktion* von Implikation und Replikation dargestellt wird. Wenn man allgemein sagen kann, *das Ganze ist die Summe seiner Teile*, dann hat die Konjunktion hier die Bedeutung der *Summierung*, der Summen-Operation.

Nehmen wir ein anderes Beispiel, bei dem Ganzheit nicht direkt durch $\leftrightarrow$ und Teil nicht direkt durch $\rightarrow$ dargestellt wird:

$$(X \wedge Y) \;\Leftrightarrow\; (X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y)$$

Hier ist das Ganze $X \wedge Y$ (eine Konjunktion), die Teile sind drei Disjunktionen (oder-Verbindungen).

Ich habe oben postuliert: $\leftrightarrow$ (bzw. $\Leftrightarrow$) ist die Gleichheit, $\rightarrow$ (bzw. $\Rightarrow$) ist die partielle Gleichheit. Somit gilt hier: Zwischen $(X \wedge Y)$ und $(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee Y)$ besteht *(vollständige) Gleichheit*, und das wird durch die Äquivalenz ausgedrückt.

Dagegen besteht *partielle Gleichheit* zwischen z. B. $(X \wedge Y)$ und $(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$. Oder zwischen $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y)$. Und diese partielle Gleichheit drückt eben die Implikation aus.

Im konjunktiven Modell gilt wie gesagt: Das Ganze impliziert logisch die einzelnen Teile:

$$(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y),\ (X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee \neg Y),\ (X \wedge Y) \Rightarrow (\neg X \vee Y).$$

Dies ist ein *analytisches* Beispiel, bei dem $\Leftrightarrow$ und $\Rightarrow$ in tautologischer Form vorkommen. Man könnte auch ein *synthetisches* Beispiel nehmen, z. B. $X \leftrightarrow (Y \wedge Z)$, wo dann entsprechend gälte: $X \rightarrow Y$, $X \rightarrow Z$.

0-4-5-4 DISJUNKTIONS-MODELL

Verwenden wir jetzt ein Beispiel, das dem obigen analytischen Beispiel ähnlich ist, aber doch ganz anders strukturiert: Es geht hier nämlich um eine *Disjunktion* von Teilen, wobei die Teile *Konjunktionen* sind. Und nicht wie oben um eine Konjunktion von Teilen (wobei die Teile Disjunktionen sind).

$$(X \vee Y) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)$$

$X \vee Y$ ist hier die *Ganzheit*, die Konjunktionen sind die *Teile*. Diese Teile werden aber durch Disjunktion $\vee$ verknüpft bzw. summiert.

Es gilt z. B.:

$$X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$$

D. h. *ein Teil impliziert logisch das Ganze*. Wie lässt sich das interpretieren? Man kann nicht sagen, wie beim konjunktiven Modell: Wenn der Teil realisiert ist, dann ist auch das Ganze realisiert. Aber man könnte anführen: Die Implikation $\rightarrow$ entspricht der *Teilmengen-Relation* $\subset$. Insofern gilt: Der Teil ist im Ganzen enthalten.

Wenn man aber zu dem *einen* Teil alle anderen Teile hinzufügt, dann wird aus der Implikation die Äquivalenz. Die Hinzufügung erfolg durch die *Disjunktion* (nicht etwa durch die Konjunktion).

0-4-5-5 DISKUSSION

Ist das *konjunktive* oder *disjunktive* Modell der Ganzheit angemessen? Wird Ganzheit durch *Konjunktion* oder *Disjunktion* der Teile dargestellt?

Ziehen wir zur Analyse die *Mengenlehre* heran. Die *Vereinigungs-Menge* von M und N ist die Verknüpfung von M und N mittels des Vereinigungs-Operators $\cup$: $M \cup N$; sie enthält alle Elemente, die in M oder in N enthalten sind. Dagegen enthält die *Schnitt-Menge* $M \cap N$ nur die *gemeinsamen* Elemente von M und N. Hier gelten folgende Relationen:

$$M \subset (M \cup N),\ N \subset (M \cup N)$$
$$(M \cap N) \subset M,\ (M \cap N) \subset N$$
$$(M \cap N) \subset (M \cup N)$$

Die Schnitt-Menge $M \cap N$ kann also nicht das Ganze sein. Denn $M \cap N$ ist Teil(menge) von M, und das Ganze kann ja nicht Teilmenge des Teils sein.

Bezeichnen wir die Vereinigungs-Menge $M \cup N$ als K, also $K = M \cup N$.

D. h. das Ganze (K) ergibt sich durch *Vereinigungs-Operation* $\cup$ von M und N.

Nun gibt es folgende Entsprechungen zwischen Aussagen-Logik und Mengen-Theorie:

Konjunktion $\wedge$	entspricht	Schnittmengen-Operator $\cap$
Disjunktion $\vee$	entspricht	Vereinigungs-Operator $\cup$

Diese Entsprechungen zeigen ja bereits die ähnlich gestalteten Symbole.

Man könnte nun folgern: So wie sich in der Mengen-Lehre das Ganze durch *Vereinigung* $\cup$ von Mengen ergibt, so muss sich in der Aussagen-Logik das Ganze durch *Disjunktion* $\vee$ von Relationen (Aussagen) ergeben. Also wäre das disjunktive Modell angemessen.

Dann bekommen wir allerdings Probleme mit der Hauptthese, dass Implikation partielle Äquivalenz ist, somit $X \rightarrow Y$ ein Teil von $X \leftrightarrow Y$ ist. Es müsste genau umgekehrt sein. Äquivalenz wäre partielle Implikation. Dies ließe sich z. B. folgendermaßen darstellen:

$$(X \leftrightarrow Y) \vee (X \wedge \neg Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y)$$

D. h. durch *Disjunktion* der beiden Teile $(X \leftrightarrow Y)$ bzw. $(X \wedge \neg Y)$ erhält man $X \rightarrow Y$ als Ganzes.

Das ist nun aber offensichtlich unsinnig: Gleichheit/Äquivalenz kann nicht Teil von partieller Gleichheit/Implikation sein. Insofern müssen wir letztlich doch das *konjunktive* Modell als das richtige ansehen.

Wenn also das Ganze die Summe seiner Teile ist, dann gilt in der Logik: Die ganze Relation ist die Konjunktion der Teil-Relationen. Und im Sonderfall: Die Äquivalenz ist die Konjunktion der relevanten Implikationen.

Wie erklärt sich aber die Diskrepanz zur *Mengen-Lehre*? Hier ist folgendes zu berücksichtigen, man muss unterscheiden zwischen *Mengen* und *Relationen*:

- Bei Mengen/Klassen als Ganzem gilt: das Ganze ist die *Vereinigung* (Vereinigungsmenge) der Teil-Mengen.
- Bei Sätzen/Relationen als Ganzem gilt aber: das Ganze ist die *Konjunktion* der Teil-Relationen.

Die *Parallelität* von $\wedge$ und $\cap$ bzw. $\vee$ und $\cup$ wird dadurch relativiert, aber nicht aufgehoben. Ich werde später auch noch andere Relativierungen zeigen. Z. B. kann man *alle* Elemente einer Menge mittels $\cup$ aufzählen: $x_1 \cup x_2 \cup ... \cup x_n$. Dagegen schreibt man einen *All*-Satz bzw. eine All-Relation mittels der Konjunktion: $Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge ... \wedge Fx_n$.

0 – 5 SYNTHETISCH UND ANALYTISCH

0-5-1 Gegenüberstellung

Der Unterschied zwischen *synthetisch* und *analytisch* wurde schon mehrfach angesprochen, soll aber erst jetzt systematisch und ausführlich erläutert werden; das Thema wird allerdings auch in den folgenden Kapiteln immer wieder aufgegriffen und weiter vertieft.

Ich bin bisher überwiegend von *synthetischen* Relationen (bzw. Sätzen) ausgegangen. Doch die Logik zielt eigentlich auf die *analytischen* Relationen. Die wichtigsten analytischen Relationen sind die *Schlüsse* oder *Folgen*. Man bezeichnet auch die ganze Logik als „Lehre von der Folgerichtigkeit".

Der Unterschied zwischen synthetischen und analytischen Relationen (bzw. Sätzen, Aussagen, Urteilen, Sachverhalten) ist von großer Bedeutung, in der Logik, in der Sprachphilosophie, aber im Grunde in der gesamten Philosophie. Diese Unterscheidung spielt auch im vorliegenden Buch eine wesentliche Rolle, sie ist sogar maßgeblich in die *inhaltliche* Unterteilung des Buches eingegangen. Allerdings ist es kompliziert und umstritten, wie man „analytisch" und „synthetisch" am besten definiert. Ich möchte hier zunächst fünf Möglichkeiten diskutieren. Dabei wählt man am günstigsten einen s*prachlichen* Ansatz, d. h. man geht von *Sätzen / Aussagen* aus und nicht neutral von *Relationen* (oder von Urteilen bzw. Sachverhalten). Dabei beschränke ich mich zunächst auf *einfache* (atomare) Sätze, später untersuche ich auch *komplexe* (molekulare) Sätze wie z. B. logische Schlüsse.

Folgende Parameter dienen zur *Unterscheidung* von synthetischen und analytischen Sätzen:

- enthalten sein / neu hinzukommen
- zerlegen / zusammenfügen
- sichere Wahrheit / unsichere Wahrheit
- vollständige theoretische Wahrheit / partielle theoretische Wahrheit
- theoretische Wahrheitsprüfung / empirische Wahrheitsprüfung

Dabei konzentriere ich mich in diesem einführenden Punkt 0-5-1 über *einfache* (atomare) Sätze auf *inhaltlich* bestimmte analytische / synthetische Sätze und auf die *normale Sprache*.

0-5-1-1 ENTHALTEN SEIN ODER NEU HINZUKOMMEN

Bezüglich dieser Dichotomie ergibt sich folgender Unterschied zwischen analytischen und synthetischen Sätzen:

– *analytischer* Satz: das Prädikat ist im Subjekt bereits *enthalten*.

Z. B. der Satz ‚alle Ehemänner sind verheiratet'. Hier ist der Begriff „verheiratet" schon im Begriff „Ehemann" enthalten.

– *synthetischer* Satz: das Prädikat ist im Subjekt *nicht enthalten*, fügt ihm Neues hinzu.

Z. B.: ‚alle Ehemänner sind glücklich'. Hier ist das Prädikat nicht im Subjekt enthalten, das zeigt sich auch schon daran, dass dieser Satz offensichtlich falsch ist.

In dieser Weise werden synthetische und analytische Sätze oft definiert. Das ist aber nicht ganz korrekt. Denn es ist zu berücksichtigen, dass der Terminus ‚Prädikat' in unterschiedlicher Bedeutung verwendet wird; ich will hier nur zwei Möglichkeiten unterscheiden.

Nehmen wir als Beispiel den einfachen Satz ‚Sokrates ist Philosoph'.

• Logische Grammatik*: Oberflächenstruktur* – entsprechend die *traditionelle Grammatik*

Argument (Subjekt)	Sokrates
Prädikat	ist Philosoph

• Logische Grammatik: *Tiefenstruktur* (vgl. 0-1-5-3)

Argument_1	Sokrates
Prädikat	ist (Element von)
Argument_2	Philosoph (Klasse der Philosophen)

Im Beispiel gilt als Prädikat ‚ist' oder ‚ist Philosoph'. So gesehen dürfen wir jedenfalls ‚Philosoph' (alleine) nicht als *Prädikat* bezeichnen. Entsprechend zu einem *Subjekt-Begriff* („Sokrates") können wir "Philosoph" aber als *Prädikat-Begriff* bezeichnen, man spricht auch von 'Prädikatsnomen' oder ‚Prädikativum'.

Kehren wir zurück zu unseren Bestimmungen. Präzise können wir dann sagen:

• *synthetischer* Satz: der Prädikat-Begriff ist *nicht* im Subjekt-Begriff schon enthalten

• *analytischer* Satz: der Prädikat-Begriff ist im Subjekt-Begriff schon enthalten

Oder man würde auch das Subjektiv *prädikativisch* beschreiben, dann erhielt man im Beispiel: ‚x ist Sokrates, impliziert x ist Philosoph'. Wie auch immer man es am besten formuliert, entscheidend ist, ob das Prädikat(snomen) *semantisch* Teil des Subjekts ist oder nicht.

0-5-1-2 ZERLEGEN ODER ZUSAMMENFÜGEN

Die obige Definition hat eine Schwäche. Man betrachtet nämlich nicht nur einen Satz wie ‚alle Ehemänner sind verheiratet' als *analytisch*, sondern auch den Satz ‚alle Ehemänner sind unverheiratet'. Hier ist der Prädikat-Begriff „unverheiratet" aber gerade *nicht* im Subjekt-Begriff „Ehemänner" *enthalten*, sondern vielmehr *ausgeschlossen*. Im ersten Fall liegt eine *Tautologie* vor, im zweiten Fall eine *Kontradiktion*.

Wir unterscheiden somit:

Analytisch-*tautologische* Sätze
Analytisch-*kontradiktorische* Sätze

Um auch solche kontradiktorischen Fälle zu erfassen, könnte man modifiziert formulieren:

• *analytischer* Satz: das Prädikat kann durch *Zerlegung* des Subjekts gefunden werden.

Dies passt auch deswegen, weil *Analyse* ja wörtlich Zerlegung bedeutet. Durch Analyse des Begriffs „Ehemann" kann man sowohl den *notwendigen* Begriff „verheiratet" wie den *unmöglichen* Begriff „unverheiratet" finden.

• *synthetischer* Satz: das Prädikat wird nur durch Hinzufügung, Zusammenfügung gefunden.

Auch dies passt besonders gut, weil das Wort ‚Synthese' wörtlich *Zusammenfügung* bedeutet. Im Begriff „Ehemann" findet man nicht den Begriff „glücklich", dieser verhält sich zufällig zum Begriff „Ehemann". Der Prädikatbegriff wird also hinzugefügt, mit dem Subjektbegriff zusammengefügt.

0-5-1-3 SICHERE ODER UNSICHERE WAHRHEIT

Man betrachte folgende zwei Beispiel-Sätze:

– ‚Dieser Junggeselle ist blond'.
– ‚Dieser Junggeselle ist unverheiratet'.

Der erste Satz kann wahr sein oder falsch, seine Wahrheit ist somit *ungewiss*, nicht sicher.
Der zweite Satz ist dagegen *mit Sicherheit* wahr, ein Falschsein ist ausgeschlossen.

Man kann diese Unterschiede mit Hilfe der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* genau angeben. Die theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = r/n$ gibt an: erstens, die Anzahl der logisch möglichen Welten (= n), zweitens, in wie vielen dieser Welten der Satz wahr ist (= r). Anders gesagt, die theoretische Wahrscheinlichkeit gibt an, wie sicher die Wahrheit eines Satzes ist. Diese Wahrscheinlichkeit wird im Punkt 0-5 (an mehreren Stellen) nur informell eingeführt und verwendet, eine genaue und systematische Darstellung erfolgt in Kap. 3 und Kap. 4.

Wir bestimmen nun die *Sicherheit* der Beispielsätze mittels der theoretischen Wahrscheinlichkeit:

– Zum Satz ‚Dieser Junggeselle ist blond':
Er hat eine Chance von 50%, wahr zu sein (bzw. falsch zu sein), seine theoretische Wahrscheinlichkeit beträgt somit 0,5. Dieser Satz ist *synthetisch*.

– Zum Satz ‚Dieser Junggeselle ist unverheiratet':
Da er sicher wahr ist, hat er eine theoretische Wahrscheinlichkeit von 1,0. Dieser Satz ist *analytisch-tautologisch*.

Wir können festhalten:

• *synthetischer* Satz: er hat eine theoretische Wahrscheinlichkeit < 1 und > 0

• *analytisch-tautologischer* Satz: er hat eine theoretische Wahrscheinlichkeit von 1

Kontradiktionen sind weniger bedeutsam als Tautologien. Sie haben eine theoretische Wahrscheinlichkeit von 0. Wir können zusammenfassend sagen: Analytische Sätze haben eine *deterministische* theoretische Wahrscheinlichkeit, d. h. den Wert 1 oder den Wert 0.

0-5-1-4 VOLLSTÄNDIGE ODER PARTIELLE THEORETISCHE WAHRHEIT

Dieser Punkt knüpft am vorausgegangenen an. Wir können unterscheiden zwischen einer *empirischen* und einer *theoretischen* Wahrheit. Die theoretische Wahrheit nenne ich auch *Tautologie*. Es geht es hier in erster Linie um Wahrheit *innerhalb eines Systems*. Man nennt die theoretische Wahrheit, die Tautologie, oft auch *‚logische Wahrheit'*, aber man sollte damit vorsichtig sein, denn all diese Bestimmungen finden im Rahmen der Logik statt, sind also gewissermaßen „logisch".

Nun lässt sich *quantitativ* gleichsetzen:

theoretische Wahrscheinlichkeit = theoretische Wahrheit

Der theoretischen Wahrscheinlichkeit entspricht somit quantitativ ein Grad an theoretischer Wahrheit, man kann auch sagen ein *Tautologie-Grad*.

Auch wenn die theoretische *Wahrscheinlichkeit* und die theoretische *Wahrheit* quantitativ *den gleichen Wert* haben, können wir doch *semantisch* unterscheiden:

– für den synthetischen Satz: ‚Dieser Junggeselle ist blond' gilt:
er ist *mit* 50 % (theoretischer) Wahrscheinlichkeit (empirisch) wahr
er ist *zu* 50% (theoretisch) wahr, zu 50% tautologisch

– für den analytischen Satz: ‚Dieser Junggeselle ist unverheiratet' gilt:
er ist *mit* 100 % (theoretischer) Wahrscheinlichkeit (empirisch) wahr
er ist *zu* 100% (theoretisch) wahr, zu 100% tautologisch

Zwar lassen sich auch interessante Aussagen über die *empirische* Wahrheit von synthetischen und analytischen Sätzen machen, z. B. ist ein *tautologischer* Satz auch immer *empirisch wahr* und ein *kontradiktorischer* Satz immer *empirisch falsch*. Dennoch, zur Abgrenzung von analytischen und synthetischen Sätzen dient nur die *theoretische* Wahrheit. Es gilt also:

• analytischer Satz

– Tautologien sind *theoretisch* vollständig wahr (100%)

– Kontradiktionen sind *theoretisch* gar nicht wahr bzw. vollständig falsch (0%)

• synthetischer Satz

Synthetische Sätze sind theoretisch partiell wahr, sie haben einen partiellen *Grad von theoretischer Wahrheit* (zwischen 0% und 100% bzw. zwischen 0 und 1).

Denn – nach meiner Theorie – kommt *synthetischen* Sätzen auch eine theoretische Wahrheit oder Falschheit zu. Allerdings ist ein synthetischer Satz nie *tautologisch* (= *vollständig* theoretisch wahr) und nie *kontradiktorisch* (= *vollständig* theoretisch falsch), sondern er besitzt einen nur einen gewissen *Grad an theoretischer Wahrheit*. Genaueres zur Abgrenzung von theoretischer Wahrscheinlichkeit und theoretischer Wahrheit vor allem in 4-1-5-1.

0-5-1-5 THEORETISCHE ODER EMPIRISCHE WAHRHEITSPRÜFUNG

Wir können auch anstatt vom *Wahrheitsstatus* des Satzes selbst auszugehen, die Notwendigkeit einer (empirischen) *Prüfung* des Satzes als Kriterium der Unterscheidung von synthetisch und analytisch verwenden.

Dies ist eine fünfte, mehr *pragmatische* Bestimmung. Hier gilt:

• *analytischer* Satz: seine Wahrheit kann durch *theoretische Analyse* bestimmt werden – bzw. bedarf es gar keiner Untersuchung.

Um zu beurteilen, ob eine analytische Relation (ein analytischer Satz) *empirisch* wahr ist, muss ich keine empirischen Untersuchungen vornehmen. Dass der Satz ‚Jeder Ehemann ist verheiratet' wahr ist, weiß ich *a priori*, ich muss dazu nicht Ehemänner untersuchen, sondern nur die *Definitionen* meiner Sprache kennen. Ebenso weiß ich, dass der Satz ‚jeder Ehemann ist unverheiratet' falsch ist. Allerdings wäre es *möglich*, einen solchen Satz auch empirisch zu *prüfen*: Ich muss dann eben alle Ehemänner z. B. befragen, ob sie verheiratet sind.

Für die Ermittlung der *theoretischen* Wahrheit muss ich einen Satz natürlich ohnehin nicht empirisch untersuchen, sondern eine theoretische Analyse vornehmen, obwohl es normalerweise evident ist, ob ein Satz tautologisch bzw. kontradiktorisch ist oder nicht.

• *synthetischer* Satz: seine *empirische* Wahrheit muss durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden. Z. B. der Satz: ‚Jeder Ehemann ist glücklich'.

Um zu beurteilen, ob dieser synthetischer Satz wahr ist, muss ich empirische Untersuchungen anstellen: Beobachtung, Befragung, Experiment usw. Ich kann die Wahrheit oder Falschheit des Satzes nur *a posteriori* feststellen. Denn dieser Satz kann offensichtlich wahr oder falsch sein (real dürfte er wie gesagt falsch sein); um die Richtigkeit herauszufinden, muss ich Ehemänner befragen und statistische Methoden verwenden.

Aber auch bei einem *synthetischen* Satz muss bzw. kann ich die *theoretische* Wahrheit durch theoretische Analyse feststellen.

Daher darf man zwar behaupten: Die Wahrheit eines *analytischen* Satzes wird allein durch (theoretische) Analyse festgestellt. Aber man darf nicht behaupten: Die Wahrheit eines synthetischen Satzes wird allein *empirisch* festgestellt, seine *theoretische Wahrheit* wird ebenfalls durch Analyse ermittelt. Wichtig ist daher, ich vermeide folgende Gleichsetzung:

synthetisch ≠ empirisch, analytisch ≠ theoretisch

Soll hier heißen: Ein synthetischer Satz hat nicht nur empirische, sondern auch theoretische Eigenschaften; entsprechend hat ein analytischer Satz theoretische und empirische Merkmale.

Abschließend hierzu: Die o. g. fünf Bestimmungen von *synthetisch* und *analytisch* legen zwar unterschiedliche Schwerpunkte, zielen aber doch auf denselben Sachverhalt; man kann sie alle, mit den genannten Einschränkungen verwenden. Später werden wir noch weitere, vor allem *quantitative* Charakterisierungen von analytisch und synthetisch kennen lernen.

Im vorliegenden Punkt haben wir uns auf *einfache*, *normal-sprachliche, material-analytische (bzw. synthetische)* Sätze als Beispiele konzentriert. Im Folgenden geht es primär um *formal-logische*, *molekulare* Sätze, d. h. aussagen-logische Sätze wie ‚X → Y'.

0-5-2 Synthetische Relationen

0-5-2-1 BESTIMMUNG

Als erstes sollen *synthetische* Relationen genauer beschrieben werden. Zur zusammenfassenden Definition von „synthetisch" greife ich zunächst auf die in 0-5-1 vorgestellten Ansätze zurück.

Für einen *synthetischen* Satz gilt:

- das Prädikat(snomen) ist im Subjekt *nicht enthalten*
- das Prädikat wird *nicht durch Analyse* gefunden
- seine empirische Wahrheit ist *nicht sicher*, er kann wahr sein oder falsch
- er ist *theoretisch* nicht vollständig wahr (und nicht vollständig falsch)
- seine (empirische) Wahrheit muss durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden.

0-5-2-2 SYNTAKTISCHE BESTIMMUNG

Ich habe bisher nur *logisch-semantische* Kriterien angegeben. Man kann aber auch *syntaktische* Kriterien zur Abgrenzung von synthetisch und analytisch verwenden. Für einen synthetischen Satz gilt, *syntaktisch* betrachtet:

Rechts und *links* von der *Kopula* ‚ist' (oder einem entsprechenden Ausdruck) stehen nur unterschiedliche deskriptive Zeichen, z. B. ‚Sokrates – ist – Philosoph'.

Speziell für aussagen-logische Relationen kann man formulieren:

Rechts und *links* vom *Relator* stehen *nur unterschiedliche* deskriptive Zeichen.

Also z. B. $X \rightarrow Y$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$ usw.

Man kann das allerdings auch *semantisch* deuten:

Bei einer synthetischen Relation sind die *Relata* unterschiedlich, d. h. es werden unterschiedliche *Objekte (*bzw. Eigenschaften) miteinander in Beziehung gebracht.

0-5-2-3 MATERIAL UND FORMAL

Man unterscheidet normalerweise nur zwischen material-analytisch und formal-analytisch, aber man kann entsprechend auch zwischen *material-synthetisch* und *formal-synthetisch* unterscheiden. Zu Erklärung müssen wir am besten auf die Bestimmungen von *material*-analytisch und *formal*-analytisch *v*orgreifen (vgl. 0-5-3-4).

Material

- Material-analytisch ist ein Satz, dessen Wahrheit (oder Falschheit) auf *Definitionen* beruht, z. B. ‚alle Junggesellen sind unverheiratet'. Ein Junggeselle ist definiert als ‚unverheirateter Mann', insofern ist der Beispielsatz laut Definition wahr.
- *Material-synthetisch* ist daher ein Satz, dessen Wahrheit (oder Falschheit) *nicht* auf Definitionen beruht, z. B. ‚alle Junggesellen sind blond'; denn der Begriff ‚blond' gehört nicht zur Definition von ‚Junggeselle'.

Formal

- Formal-analytisch ist ein Satz, dessen Wahrheit allein auf *logischen Gesetzen* beruht, z. B. ‚alle Junggesellen sind Junggesellen' oder $X \Rightarrow X$. (Und $X \Rightarrow X$ ist ein logisches Gesetz.)
- *Formal-synthetisch* ist daher ein Satz, dessen Wahrheit nicht allein auf logischen Gesetzen beruht. Somit ist z. B. auch der material-analytische Satz ‚alle Junggesellen sind unverheiratet' ein formal-synthetischer Satz, entsprechend $X \rightarrow Y$.

0-5-2-4 ATOMAR UND MOLEKULAR

Ein *Atom-Satz* ist wie beschrieben ein *einfacher* Satz, ein *Molekular-Satz* dagegen ein *komplexer*, aus mehreren Teilsätzen zusammengefügter Satz, wobei die genaue Abgrenzung jedoch schwierig ist (vgl. 0-4-1-2).

• Atom-Satz

Ein *synthetischer* Atomsatz ist z. B. ‚Peter ist Weinliebhaber' (*prädikaten-logisch*: $x \in F$). Wir hatten synthetisch u. a. definiert: Man kann aus dem Subjekt nicht auf das Prädikat schließen, das Prädikat ist nicht im Subjekt enthalten. Im Beispiel: Aus ‚Peter' können wir nicht auf ‚(ist) Weinliebhaber' schließen. *Aussagen-logisch* wird ein Atom-Satz *ohne Struktur* dargestellt, also z. B. als ‚X'. ‚X' könnte *material*-analytisch sein, aber nicht *formal*-analytisch – und darauf kommt es hier an, daher können wir ‚X' als *synthetisch* bestimmen.

• Molekular-Satz

Im Beispiel: ‚Wenn Peter Weinliebhaber ist, dann ist Peter auch Zigarrenliebhaber'. Dies ist offensichtlich ein synthetischer Satz. Hier liegt logisch gesehen eine Implikation vor, formal $X \rightarrow Y$. Wiederum: ‚$X \rightarrow Y$' könnte *material*-analytisch sein, aber nicht *formal*-analytisch.

Die *Implikation* $X \rightarrow Y$ hat bekanntlich folgende *Wahrheitstafel*:

	$X \rightarrow Y$	
1.	+ + +	$X \wedge Y$
2.	+ – –	$X \wedge \neg Y$: in dieser Welt ist $X \rightarrow Y$ falsch
3.	– + +	$\neg X \wedge Y$
4.	– + –	$\neg X \wedge \neg Y$

Daraus können wir erstens sehen: Entsprechend wie wir oben sagten, der Prädikat-Begriff ist nicht (semantisch) im Subjekt-Begriff enthalten, gilt hier: das *Folgeglied* Y ist nicht im *Vorderglied* X enthalten.

Anders gesagt: Man kann die Gültigkeit von Y (Folgeglied) nicht erkennen, in dem man X (Vorderglied) analysiert. In der vertrauten Sprache der Aussagenlogik: Man kann die Wahrheit von Y (Nachsatz) nicht erkennen, in dem man X (Vordersatz) analysiert.

Wie die Wahrheitstafel zeigt: Wenn ich weiß, dass X wahr ist, weiß ich noch nichts über die Wahrheit von Y – wenn mir nicht bekannt ist, ob der Gesamtsatz $X \rightarrow Y$ wahr ist; Y kann wahr sein (1. Zeile) oder falsch (2. Zeile).

Es gibt aber noch eine *zweite* Deutung: Man betrachtet hier den *Gesamt-Satz* $X \rightarrow Y$. Ein synthetischer Satz ist nicht in jeder *möglichen Welt* wahr und nicht in jeder möglichen Welt falsch. Die möglichen Welten lassen sich anhand der *Wahrheitstafel* ermitteln, es sind 4:

$X \wedge Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$.

Für einen synthetischen Satz ist es bestimmend, dass er in *einigen* Welten wahr ist und in *einigen* falsch.

So gilt für den Molekular-Satz $X \rightarrow Y$:

wahr ist er in den drei (3) Welten: $X \wedge Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$

falsch ist er in der einen (1) Welt: $X \wedge \neg Y$.

0-5-2-5 TAUTOLOGIE-GRAD

Man kann aber nicht nur angeben, ein synthetischer Satz ist *nicht (ganz) tautologisch* und ist *nicht (ganz) kontradiktorisch*, sondern genauer den *Grad der Tautologie* bzw. den Grad der

Kontradiktion bestimmen. Denn wie schon beschrieben, gebe ich auch für synthetische Sätze einen Tautologie-Grad an, der auf der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* beruht.

Z. B. $X \rightarrow Y$ kann empirisch wahr sein oder falsch, je nachdem, wofür X und Y stehen. Bei synthetischen Sätzen hängt die Wahrheit also von der *Bedeutung* ab, man kann für einen *formalen* Satz wie $X \rightarrow Y$ nicht vorab sagen, ob er empirisch wahr ist, man muss zunächst wissen, was ‚X' und ‚Y' bedeuten; so kann man z. B. für den *inhaltlich bestimmten* Satz ‚Es regnet → die Strasse ist nass' angeben, dass er wahr ist.

Allerdings ist es apriori *wahrscheinlicher*, dass der formale Satz $X \rightarrow Y$ wahr ist. Denn wie man in der Wahrheitstafel sieht: in 3 von 4 möglichen Fällen gilt $X \rightarrow Y$ als wahr. Anders gesagt: Obwohl die Relation $X \rightarrow Y$ synthetisch ist, ist sie zu 3/4 *tautologisch*. Diese Bestimmung dürfte ungewohnt sein, weil man normalerweise davon ausgeht, dass synthetische Sätze keinen oder jedenfalls nicht einen so hohen Tautologiegrad haben.

Man kann den *Grad der Tautologie* berechnen nach dem *Wahrheitswertverlauf*, konkret:

$$\frac{\text{Anzahl der +}}{\text{Anzahl der + und –}}$$

D. h. man berechnet die Anzahl der Welten, in denen die Relation *positiv* (+) ist, in Relation zu der *Gesamtanzahl* der Welten (+ und −). Das wird an späterer Stelle, in Kap. 3, noch genauestens erläutert.

0-5-3 Analytische Relationen

0-5-3-1 BESTIMMUNG

Analytische Relationen sind
1) *Tautologien* oder
2) *Kontradiktionen*

Für eine *Tautologie* gilt:
- das Prädikat ist im Subjekt *enthalten*, fügt ihm nichts Neues hinzu
- das Prädikat wird nur durch *Analyse* des Subjekts gefunden
- ihre (empirische) Wahrheit ist *vollständig sicher*
- sie ist theoretisch *vollständig wahr*, ist in allen möglichen Welten wahr
- ihre (empirische) Wahrheit muss *nicht* durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden

Für eine *Kontradiktion* gilt:
- das Prädikat ist im nicht Subjekt *enthalten*, wird vielmehr von ihm ausgeschlossen
- das Prädikat wird durch Analyse des Subjekts, nämlich dessen Verneinung gefunden
- ihre (empirische) Falschheit ist *vollständig sicher*
- sie ist theoretisch *vollständig falsch*, ist in allen möglichen Welten falsch
- ihre (empirische) Falschheit muss *nicht* durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden

0-5-3-2 SYNTAKTISCH

Sowohl für Tautologien wie für Kontradiktionen gilt: *links* und *rechts* von der *Kopula*, dem Junktor, dem Relator o. ä. finden sich *(partiell) gleiche* Zeichen.

z. B. Tautologie: $X \Rightarrow X$, $(X \wedge Y) \Rightarrow X$, $X \vee \neg X$

z. B. Kontradiktion: $(X \vee \neg X) \not\Rightarrow (X \wedge \neg X)$

(Allerdings gibt es hier Ausnahmen, Pseudo-Tautologien wie $X \Rightarrow Y \vee \neg Y$, vgl. später.)

0-5-3-3 TAUTOLOGIE VERSUS KONTRADIKTION

• *Tautologien*
Wir hatten ursprünglich (für einen *Atom-Satz*) bestimmt: Ein Satz ist *analytisch*, wenn das Prädikat im Subjekt enthalten ist, genauer der Prädikats-Begriff im Subjekt-Begriff enthalten ist. Z. B.: ‚Jeder Junggeselle ist unverheiratet'.

Bei einem logischen *Molekular-Satz*, einer *Implikation,* kann man entsprechend zu der ursprünglichen Bestimmung sagen: Eine Implikation ist dann analytisch-tautologisch, wenn das Nachglied im Vorderglied enthalten ist.

Als Beispiel die *Abtrennungs-Regel*:

(X	∧	Y)	⇒	Y
+	+	+	+	+
+	−	−	+	−
−	−	+	+	+
−	−	−	+	−

Bei diesem Beispiel ist es – schon syntaktisch – besonders deutlich: Y ist Teil von $X \wedge Y$. Aber *logisch-semantisch* gilt auch bei: $X \Rightarrow X \vee Y$; $X \vee Y$ ist Teil von X.

Anders gesagt: Wenn das Vorderglied $X \wedge Y$ positiv ist, dann ist auch das Nachglied Y positiv, mit Sicherheit (denn es gibt nur *einen* derartigen Fall, die erste Zeile der Wahrheitstafel). Dabei ist die Gesamtrelation *immer*, *in jeder möglichen Welt* positiv, sie ist zu 4/4 tautologisch, besitzt also einen Tautologiegrad von 1. Man kann also aus der *Analyse* der Prämissen die Gültigkeit des *Schluss-Satzes* erkennen, deshalb heißen solche Relationen *analytisch*.

Noch einmal in der Sprache der Aussagenlogik gesagt: Bei einer analytischen Implikation (logischen Folge) ist der *Informationsgehalt* des Schluss-Satzes (Y) in der Konjunktion der Prämissen $(X \wedge Y)$ enthalten.

Aber man kann auch wieder Bezug auf den *Gesamtsatz*, z. B. $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$ nehmen.
Dann lässt sich definieren:
– *Tautologie:* ist in *jeder* möglichen Welt wahr
hat in der Wahrheitstafel nur + (plus) unter dem *Zentral-Relator*
– *Kontradiktion*: ist in *keiner* möglichen Welt wahr, also in jeder möglichen Welt falsch
hat in der Wahrheitstafel nur – (minus) unter dem *Zentral-Relator*
Hier muss man sich allerdings vor Missverständnissen hüten:

Man könnte meinen, bei 2 Variablen müsste es sich immer um *4* mögliche Welten handeln. Das ist aber nur bei *synthetischen* Sätzen gesichert, dort gibt es immer:

$X \wedge Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$

Dagegen müssen bei *analytischen* Sätzen nicht alle 4 logischen Welten vorkommen, also

$\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \wedge \neg\Psi$, $\neg \Phi \wedge \Psi$, $\neg\Phi \wedge \neg\Psi$.

Denn *logisch unmögliche* Welten tauchen bei der Tautologie gar nicht in der Wahrheitstafel auf. Bei $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$ gibt es nur *3* mögliche Welten in der Wahrheitstafel, $(X \wedge Y) \wedge \neg Y$ taucht gar nicht auf, weil eben $\Phi \wedge \neg\Psi$ bei der Implikation ausgeschlossen ist.

Und bei $X \Rightarrow X$ gibt es sogar nur *2* Welten in der Wahrheitstafel: $X \wedge X$ und $\neg X \wedge \neg X$.

Wahr *in jeder möglichen Welt* heißt bei dem Beispiel $X \wedge Y \Rightarrow Y$ also:

wahr in der Welt $(X \wedge Y) \wedge Y$
wahr in der Welt $\neg(X \wedge Y) \wedge Y$
und wahr in der Welt $\neg(X \wedge Y) \wedge \neg Y$.

Dies schreibt man formal als logische Implikationen:

$$(X \wedge Y) \wedge Y \quad \Rightarrow \quad X \wedge Y \Rightarrow Y \qquad \wedge$$
$$\neg(X \wedge Y) \wedge Y \quad \Rightarrow \quad X \wedge Y \Rightarrow Y \qquad \wedge$$
$$\neg(X \wedge Y) \wedge \neg Y \quad \Rightarrow \quad X \wedge Y \Rightarrow Y$$

Unabhängig davon gibt es auch in der Wahrheitstafel eines *tautologischen* Satzes prinzipiell 4 Welten, wenn man nur auf die *Atom-Sätze* schaut: $X \wedge Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$.

Man kann hier noch einen weiteren Aspekt hinzufügen: Bei einem analytisch-tautologischen Satz wie $X \Rightarrow X$ kann man *unabhängig von der Bedeutung* sagen, dass er wahr ist; ein tautologischer Satz ist allein von seiner *Form* her wahr, hier brauche ich nicht zu wissen, wofür ‚X' und ‚Y' stehen, ich muss diese Variablen nicht interpretieren.

• *Kontradiktion*

Bisher ging es vor allem um Tautologien. Aber auch *Kontradiktionen,* d. h. logisch widersprüchliche Relationen, rechnet man zu den *analytischen* Relationen. Ein *atomare* Kontradiktion ist: ‚Alle Junggesellen sind verheiratet'.

Bei der – *molekularen* – *Implikation* gilt: Eine Kontradiktion ist nur gegeben, wenn das *Vorderglied tautologisch* und das *Nachglied kontradiktorisch* ist. Zur Symbolisierung verwende ich den durchgestrichenen Doppelpfeil.

$$\begin{array}{cccccccccc}
(X & \vee & \neg & X) & \not\Rightarrow & (X & \wedge & \neg & X) \\
+ & + & - & + & - & + & - & - & + \\
+ & + & - & + & - & + & - & - & + \\
- & + & - & + & - & - & - & + & - \\
- & + & - & + & - & - & - & + & -
\end{array}$$

0-5-3-4 FORMAL-ANALYTISCH / MATERIAL-ANALYTISCH

Wie schon angesprochen, muss man genau unterscheiden zwischen:

- *material-analytischen* Relationen (beruhen auf *Definitionen:*„material")
- *formal-analytischen* Relationen (beruhen nur auf logischen Gesetzen)

Beispiele:

• material-analytisch: „Jeder Junggeselle ist unverheiratet"

Um die Wahrheit dieser Relation zu erkennen, muss man keine Untersuchungen machen, man muss nur die *Bedeutungen* und *Definitionen* kennen, also wissen: Ein *Junggeselle* ist definiert als *unverheirateter Mann*. Insofern ist die Aussage „Jeder Junggeselle ist unverheiratet" laut Definition wahr. Material-analytische Relationen bzw. Sätze spielen in der *formalen* Logik keine große Rolle, weil hier eben normalerweise *vom Inhalt abstrahiert* wird.

• formal-analytisch: „Jeder Junggeselle ist ein Junggeselle"

Um die Wahrheit dieser Relation festzustellen, muss man nicht einmal die Bedeutung von ‚Junggeselle' kennen, man muss nur um das *logische Gesetz* $X \Leftrightarrow X$ wissen: „Jedes Objekt ist mit sich selbst identisch bzw. logisch äquivalent". $X \Leftrightarrow X$ ist dann natürlich selbst auch formal-analytisch. Es mag irritieren, dass ich hier einen *normal*-sprachlichen Satz wie ‚Jeder Junggeselle ist ein Junggeselle' als Beispiel für *formal*-analytisch nennen. Aber ‚formal' meint hier eben nicht, dass der Satz *formalisiert* ist, sondern nur, dass seine Analyzität allein auf *formalen* Gesetzen beruht. Und da die Begriffe ‚formal-analytisch' und ‚material-analytisch' eingeführt sind, möchte ich sie nicht verändern.

Man kann hier allerdings *zwei* Ansätze unterscheiden:
– Erstens, ein formal-analytischer Satz ist auch material-analytisch.
formal-analytisch $\Rightarrow$ material-analytisch
Demnach wäre ‚Jeder Junggeselle ist Junggeselle' nicht nur formal-analytisch, sondern auch material-analytisch, etwa mit der Begründung, dass *Definitionen* in jedem Fall eine Rolle spielen.

– Zweitens, ein formal-analytischer Satz ist nicht material-analytisch.
formal-analytisch $\Rightarrow \neg$ material-analytisch bzw. material-analytisch $\Rightarrow \neg$ formal-analytisch
Demnach wäre ‚Jeder Junggeselle ist Junggeselle' nur formal-analytisch, nicht material-analytisch. Etwa mit der Begründung, dass hier *nur* logische Gesetze eine Rolle spielen, denn man kann ja auch rein formal $X \Rightarrow X$ schreiben, unter Absehung von jeglicher Bedeutung und Definition. Ich halte diesen zweiten Ansatz für besser begründet.

Ich beschränke ich mich nachfolgend in erster Linie auf *formal* analytische (bzw. *formal* synthetische) Relationen, denn nur diese sind wirklich logisch relevant. Bei materialen Sätzen spielen wie erläutert auch der Inhalt und die Definitionen eine Rolle. Als Bespiele verwende ich hier zunächst nur Implikationen, später werde ich auch andere Junktoren verwenden.

Die obigen analytischen Beispiele beziehen sich auf *Tautologien*. Zu den analytischen Relationen zählen aber eben auch die *Kontradiktionen*, Relationen, die in keiner Welt gültig sind.

Ein Beispiel jeweils für eine *materiale* und eine *formale* Kontradiktion:
- materiale Kontradiktion: „Jeder Junggeselle ist verheiratet"
- formale Kontradiktion: „Jeder Junggeselle ist kein Junggeselle"

0-5-3-5 TAUTOLOGIE-GRAD
Wir haben schon vom Tautologie-Grad bei *synthetischen* Relationen gesprochen. Selbstverständlich können wir auch bei *analytischen* Relationen einen Tautologie-Grad bestimmen. Allgemein können wir festlegen:

	Tautologie-Grad
synthetisch	$< 1 \wedge > 0$
analytisch	
– tautologisch	1
– kontradiktorisch	0

Der Tautologie-Grad wird mittels der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* berechnet. Diese werde ich aber wie gesagt erst in Kap. 3 bzw. 4 im Einzelnen einführen. Kurz wurde sie hier schon erläutert.

0-5-4 Semi-analytische Relationen

0-5-4-1 BESTIMMUNG
Diese Unterscheidung zwischen synthetisch und analytisch ist grundlegend. Ich vertrete aber die These, dass man dazwischen als drittes *partiell analytische* Relationen bzw. Strukturen unterscheiden kann. Anstelle von ‚partiell analytisch' kann man auch ‚semi-analytisch' sagen.

Z. B. *material*: ‚Dieser Junggeselle ist unverheiratet (analytisch) und glücklich (synthetisch)'. Der Satz ist *semi-analytisch*, weil der Begriff ‚unverheiratet' zur *Definition* von ‚Junggeselle' gehört, der Begriff ‚glücklich' aber nicht.

Oder *formal* die Relation $(X \vee Y) \longrightarrow Y$. Sie hat folgende Wahrheitstafel:

(X	∨	Y)	⟶	Y
+	+	+	+	+
+	+	−	−	−
−	+	+	+	+
−	−	−	+	−

Diese Relation ist, wie $X \rightarrow Y$, in 3 von 4 Welten positiv, sie ist also auch zu 3/4 tautologisch. Sie hat sogar den gleichen Wahrheitswerte-Verlauf wie $X \rightarrow Y$ (+ − + +).

Dennoch liegt hier *keine synthetische* Relation vor. Im Gegensatz zum synthetischen $X \rightarrow Y$ kommt Y schon in dem Vorderglied $X \vee Y$ vor. D. h. man kann durch *Analyse* des Vordergliedes etwas über die Wahrheit von Y erfahren. Wenn ich weiß, dass $X \vee Y$ positiv ist, weiß ich mit gewisser *Wahrscheinlichkeit* (nämlich 2/3), dass Y positiv ist, ohne die Gültigkeit der Gesamt-Relation zu kennen. Allerdings erhält man keine *sichere* Information.

$(X \vee Y) \longrightarrow Y$ kann man auch einen *induktiven* Schluss nennen, im Gegensatz zu einem (streng) *deduktiven* Schluss wie z. B. $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$.

Auch anders lassen sich *synthetische* und *semi-analytische* Relationen unterscheiden. Z. B. hat die *synthetische* Implikation $X \rightarrow Y$ grundsätzlich den Wahrheitsverlauf + − + +; dagegen kann eine *semi-analytische* Implikation $\Phi \longrightarrow \Psi$ jeden möglichen Wahrheitsverlauf annehmen, mit Ausnahme von + + + + (Tautologie) oder − − − − (Kontradiktion).

Zur Abgrenzung von *streng analytischen* Relationen können wir sagen: Solche vollständig analytischen Relationen wie *Tautologie* und *Kontradiktion* sind *Grenzfälle* der semi-analytischen Relationen.

Generell können wir für *semi-analytische* Relationen (bzw. Sätze) festlegen:

- das Prädikat ist *partiell* im Subjekt *enthalten*, fügt ihm partiell Neues hinzu
- das Prädikat wird *partiell* durch *Analyse des Subjekts* gefunden
- die empirische Wahrheit ist nicht vollständig sicher
- sie ist theoretisch *partiell* wahr – nicht vollständig wahr und nicht vollständig falsch
- ihre empirische Wahrheit muss *partiell* durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden.

Die *partiell analytische Implikation* (semi-analytische Implikation) kennzeichne ich durch den *langen Pfeil* $\longrightarrow$ im Gegensatz zum *kurzen Pfeil* $\rightarrow$ der synthetischen Implikation.

Herkömmlicherweise werden *semi-analytische* Relationen den *synthetischen* gleichgesetzt oder – falls man sie als Schluss ausgibt – als falscher, *ungültiger Schluss* interpretiert. Ich meine aber, dass sie eine Sonderrolle besitzen.

Alle Relatoren können *semi-analytisch* verwendet werden. Aber am wichtigsten sind auch hier die *implikativen* Relationen. Dabei unterscheidet man folgende Relationen (als Symbol verwende ich jeweils einen *verlängerten* Pfeil):

semi-analytische Implikation $\longrightarrow$
semi-analytische Replikation $\longleftarrow$
semi-analytische Äquivalenz $\longleftrightarrow$

Ich halte die Annahme semi-analytischer Relationen für wesentlich.

Allerdings kann man verschiedene *Einwände* gegen das Modell der partiell analytischen Relationen erheben. Darauf will ich hier kurz eingehen.

0-5-4-2 ÄQUIVALENZ-EINWAND

1. Einwand: *Semi-analytische* Relationen sind logisch analytisch äquivalent mit *synthetischen* Relationen, z. B. gilt:

$$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y \;\Leftrightarrow\; (X \vee Y)$$

Antwort: Hier zeigt sich, dass *Wahrheitswerte* nicht ausreichen, um unterschiedliche Relationen bzw. Sätze zu unterscheiden. Wahrheitswerte sind zwar ggf. *notwendig*, um die Bedeutung eines Satzes zu bestimmen, aber nicht *hinreichend*. $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ und $X \vee Y$ sind jedenfalls nach meiner Definition jedenfalls extensional nicht gleich.

Allerdings definieren viele Logiker die Extension eines Satzes *nicht* als *Sachverhalt* und die Intension nicht als "Begriffsverhalt", sondern anders: die *Extension* eines Satzes ist für sie der *Wahrheitswert*, d. h. wahr bzw. falsch; die *Intension* ist dann die *Extension in allen möglichen Welten*, also analog der Wahrheitstafel. Die Intension von $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ wäre somit der Verlauf: wahr, wahr, wahr, falsch; und dann wären $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ und $X \vee Y$ *intensional gleich* – und damit auch *extensional gleich*. Dies ist jedoch sehr fragwürdig (vgl. Exkurs zu Kap. 0).

Jedenfalls wäre es absurd zu behaupten, alle Strukturen mit *gleichem* Wahrheitswerteverlauf seien ganz *gleichbedeutend*, so hätten z. B. alle logischen Gesetze (Werteverlauf + + + +) dieselbe Bedeutung, wozu brauchte man dann überhaupt mehr als *ein* Gesetz?

Die beiden Relationen

$$(X \vee Y) \text{ und } (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$$

haben zwar denselben Wahrheitswerteverlauf (+ + + –), aber nur $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ ist *partiell analytisch*. $X \vee Y$ ist dagegen *synthetisch*. Bei $X \vee Y$ wird eine Relation zwischen zwei (vorher) *unabhängigen* Sätzen X und Y konstatiert, bei $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ ist der Satz Y ja bereits *Teil* von $X \rightarrow Y$, die beiden Relata $X \rightarrow Y$ und Y sind also logisch voneinander *abhängig*.

Das sei an der Wahrheitstafel genauer erläutert:

X	∨	Y
+	+	+
+	+	−
−	+	+
−	−	−

Bei dem *synthetischen* $X \vee Y$ kommt jede mögliche Kombination von X und Y in der Wahrheitstafel vor: + +, + –, – +, – –. Das beweist die *Unabhängigkeit*.

Dagegen die (vereinfachte, deutlichere) Wahrheitstafel der semi-analytischen Relation:

	(X → Y)	⟶	Y
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	+	+	+
4.	+	−	−

Hier kommen nur 3 Kombinationen von $X \rightarrow Y$ und Y vor: + + (1. und 3. Zeile), + – (4. Zeile), – – (2. Zeile), dagegen kommt die Kombination – + nicht vor, weil sie *logisch unmöglich* ist. D. h.:

$$\neg(X \rightarrow Y) \;^{-}\!\wedge^{-}\; Y \quad \text{ist eine Kontradiktion.}$$

Das zeigt die *Abhängigkeit* von $X \rightarrow Y$ und Y.

0-5-4-3 ZWISCHENGLIED-EINWAND

2. Einwand: Es gibt *kein Zwischenglied* von synthetischen und analytischen Relationen. So gilt:

$$(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg X)$$

Fügt man nun noch $(X \wedge \neg Y)$ disjunktiv hinzu, so erhält man eine *Tautologie*, denn $(X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg X)$ ist tautologisch.

D. h. es gibt quasi einen *fließenden Übergang* von einem synthetischen Satz wie $X \rightarrow Y$ zu einem analytischen Satz, einer Tautologie. Wo ist hier Platz für ein Zwischenglied, wo ist Platz für partiell-analytische Relationen?

Antwort: Das mit dem *fließenden Übergang* ist richtig, und aus diesem Grund habe ich eine andere neuartige Definition von 'synthetisch' vorgenommen (die später noch genauer erläutert werden wird). Synthetische Sätze können nämlich „beinahe" tautologisch oder auch „beinahe" kontradiktorisch sein. Darin stimmen sie mit semi-analytischen Sätzen überein. Das bedeutet aber nicht, dass synthetische und semi-analytische Relationen identisch sind. Sie werden eben auf andere Weise, syntaktisch und semantisch, voneinander unterschieden.

0-5-4-4 MODAL-LOGIK-EINWAND

3. Einwand: Semi-analytische Relationen widersprechen der *Modal-Logik*.

In der Modal-Logik gilt: notwendig $\Rightarrow$ möglich

Nun könnte man definieren:

tautologisch = notwendig, semi-analytisch = möglich

Müsste demnach nicht gelten: tautologisch $\Rightarrow$ semi-analytisch?

Dies stimmen aber nicht, denn:

Eine Tautologie kann keine semi-analytische Relation logisch implizieren, sondern eine Tautologie impliziert logisch *nur* wiederum eine Tautologie: Tautologie $\Rightarrow$ Tautologie; somit kann aus einer Tautologie keine semi-analytische Relation logisch folgen.

Faktisch gilt das Umgekehrte:

semi-analytisch $\Rightarrow$ tautologisch

z. B. $[(X \vee Y) \longrightarrow Y] \Rightarrow [(X \wedge Y) \Rightarrow Y]$

Das hieße aber: Semi-analytische Relation (= möglich) $\Rightarrow$ Tautologie (= notwendig), also:

möglich $\Rightarrow$ notwendig

Somit widerspricht das Konzept der semi-analytischen Relationen der Modal-Logik.

Antwort: Hier liegt eine unzulässige Übertragung vor: „notwendig $\Rightarrow$ möglich" bezieht sich auf *dieselbe* Relation. Wenn eine Relation $R(\Phi, \Psi)$ notwendig ist, dann ist sie auch möglich. $(X \vee Y) \longrightarrow Y$ und $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$ sind aber unterschiedliche Relationen, für die das Gesetz „notwendig $\Rightarrow$ möglich" nicht gilt. Außerdem lässt sich dieses Gesetz, wie überhaupt eine vollständige Modal-Logik, ohnehin nur im Rahmen der *Quantoren-Logik* begründen, nicht innerhalb der *Aussagen-Logik* (wie später noch zu erläutern ist).

Des weiteren: Wir müssen unterscheiden zwischen „möglich" und „genau möglich". Die obige Argumentation bezieht sich auf „möglich" *inklusiv*; ‚Φ ist möglich', schließt nicht aus, dass auch gelten kann: ‚Φ ist notwendig'. Bei „genau möglich" (*exklusiv*) liegen die Verhältnisse anders als bei „möglich" (inklusiv), hier gilt:

notwendig $\Rightarrow \neg$*genau* möglich bzw. *genau* möglich $\Rightarrow \neg$notwendig.

Eine semi-analytische Relation ist aber „genau möglich", es wird ausgeschlossen, dass sie auch tautologisch (= notwendig) ist. Zwar kann die semi-analytische Relation $(X \vee Y) \longrightarrow Y$

die Tautologie $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$ logisch implizieren (wie ja jeder Schluss auf eine Tautologie selbst tautologisch ist). Aber die semi-analytische Relation $X \vee Y \longrightarrow Y$ kann nicht eine „Tautologie“ $X \vee Y \Rightarrow Y$ logisch implizieren, weil es diese Tautologie eben gar nicht gibt.

Weiter können diese komplizierten Verhältnisse hier nicht verfolgt werden, auf Modal-Logik wird aber an späterer Stelle ausführlicher eingegangen.

0-5-4-5 FAZIT

Bringen wir noch einen zusammenfassenden Vergleich von synthetischen, analytischen und semi-analytischen Relationen. Wir konzentrieren uns dabei auf die *Implikation* bzw. Kopula-Funktion, die im Mittelpunkt unseres Interesses steht.

1) Logisch-semantische Aspekte

Für einen *synthetischen* Satz gilt:
- das Prädikat (bzw. der Nachsatz) ist im Subjekt (bzw. im Vorder-Satz) *nicht enthalten*
- das Prädikat wird nur durch *Hinzufügung*, Zusammenfügung gefunden
- seine *Wahrheit ist nicht sicher*, er kann (empirisch) wahr sein oder falsch
- er ist *theoretisch nicht vollständig wahr*, hat einen Tautologie-Grad $< 1 \wedge > 0$
- seine (empirische) Wahrheit muss durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden

Für eine *Tautologie* gilt:
- das Prädikat (bzw. der Schluss-Satz) ist im Subjekt (bzw. der Prämisse) schon *enthalten*
- das Prädikat wird nur durch *Analyse* des Subjekts gefunden
- ihre (empirische) Wahrheit ist *vollständig sicher*
- sie ist theoretisch *vollständig wahr*, ist in allen Welten wahr: Tautologie-Grad 1
- ihre (empirische) Wahrheit muss *nicht* durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden

Für eine *Kontradiktion* gilt:
- das Prädikat ist im nicht Subjekt *enthalten*, wird vielmehr von ihm ausgeschlossen
- das Prädikat wird durch *Analyse* des Subjekts, nämlich dessen Verneinung gefunden
- ihre (empirische) *Falschheit ist vollständig sicher*, ist in allen möglichen Welten falsch
- sie ist theoretisch *vollständig falsch*, Tautologie-Grad von 0
- ihre (empirische) Falschheit muss nicht durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden

Für einen *semi-analytischen* Satz gilt:
- das Prädikat ist *partiell* im Subjekt *enthalten*, fügt ihm partiell Neues hinzu
- das Prädikat wird *partiell* durch Analyse des Subjekts gefunden
- seine *Wahrheit ist nicht sicher*, er kann (empirisch) wahr sein oder falsch
- er ist theoretisch *partiell wahr*, Tautologie-Grad $< 1 \wedge > 0$
- seine (empirische) Wahrheit muss *partiell* durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden

2) Syntaktische Aspekte

Zur Formalisierung (in der Aussagen-Logik):

- *synthetisch* $X \rightarrow Y$
- *partiell analytisch* $X \vee Y \longrightarrow X$
- *analytisch* $X \Rightarrow X$

Wie man sieht, verwende ich je nach dem Relations-Typ *unterschiedliche Implikations-Pfeile*, damit man der Relation bzw. Struktur direkt ihren logischen Status ansieht.

- *synthetische Implikation*
  liegt vor, wenn (vorab) keine Abhängigkeit zwischen X und Y besteht, syntaktisch rechts und links vom Implikations-Pfeil *keine* gleichen Objekt-Zeichen stehen.
- *partiell analytische Implikation*
  liegt dann vor, wenn eine partielle Abhängigkeit zwischen den Objekten (X, Y) besteht, syntaktisch rechts und links vom Implikations-Pfeil *wenigstens ein* gleiches Objekt-Zeichen verwendet wird. Das ist aber nur ein notwendiges, kein hinreichendes Kriterium.
- *analytische Implikation (logische Folge)*
  liegt vor, wenn völlige Abhängigkeit zwischen den Objekten besteht, genauer wenn sprachlich gesehen der *Informationsgehalt* der Konklusion eine – echte oder unechte – *Teilmenge* des Informationsgehaltes der Prämisse(n) ist. Syntaktisch gilt, wie bei den partiell analytischen Relationen), dass *wenigstens ein* gleiches Objekt-Zeichen rechts und links vom Implikations-Pfeil verwendet wird.

3) Terminologische Aspekte

Begrifflich variiere ich zwischen folgenden Termini, um mich nicht immer zu wiederholen:
- *(synthetische) Implikation*
  = nicht analytische Implikation = Wenn-Dann-Relation = Wenn-Dann-Satz
  (dagegen ist der Begriff ‚empirische Implikation' problematisch)
- *Semi-analytische Implikation*
  = partiell analytische Implikation = semi-analytischer Schluss = partieller Schluss = partiell tautologischer Schluss = partielle logische Folge u. ä.
- *Analytische Implikation*
  = streng analytische Implikation = strenger Schluss = vollständig analytischer Schluss = vollständiger Schluss = tautologischer Schluss = (vollständige) logische Folge u. ä.
  (Von Kontradiktionen sehe ich hier ab.)

Abschließend sei aber durchaus zugegeben, dass beim Ansatz der *semi-analytischen* Relationen noch Fragen offen sind, dass es noch ungelöste Probleme gibt. Im *quantitativen* Bereich ist das Konzept der semi-analytischen Relationen allerdings relativ unproblematisch (vgl. später). Das Konzept *partiell analytischer Relationen* (z. B. Implikationen) ist zwar wichtig für die vorliegende Arbeit, aber keinesfalls entscheidend für mein logisches Gesamtmodell. Die meisten Aussagen behielten auch dann ihre Berechtigung, wenn man – in herkömmlicher Weise – nur zwischen synthetisch und analytisch unterscheidet und keinen Zwischenbereich annimmt.

0-5-5 Symbole

0-5-5-1 IMPLIKATIVE RELATIONEN

Für die *Implikation* bzw. *implikative* Relationen verwende ich folgende Pfeil-Symbole:
- synthetisch $X \rightarrow Y$
- semi-analytisch $X \vee Y) \longrightarrow Y$
- tautologisch $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$
- kontradiktorisch $(X \vee \neg X) \nRightarrow (X \wedge \neg X)$

Zur besseren Veranschaulichung bringe ich auch noch einmal *materiale,* inhaltliche Beispiele (obwohl die in der Logik im engeren Sinn keine Rolle spielen):

- synthetisch — Dieser Junggeselle ist Porschefahrer
- semi-analytisch — Dieser Junggeselle ist ein lediger Professor
- tautologisch — Dieser Junggeselle ist ein Junggeselle
- kontradiktorisch — Dieser Junggeselle ist seit 10 Jahren verheiratet

„Dieser Junggeselle ist ein lediger Professor" ist ein semi-analytischer Satz, weil „verheiratet" ein analytisches Merkmal ist, „Professor" aber ein synthetisches.

Zwar könnte man aussagen-logisch auch in jedem der vier *formalen* Fälle immer nur dasselbe Symbol $\rightarrow$ verwenden, es würde scheinbar zu einfacheren Formeln führen. Aber ich finde es wichtig, den logischen Status einer Relation (sofort sichtbar) herauszustellen. Meistens schreibt man die Formeln ohne Wahrheitstafel, so dass ihr logischer Status nicht immer unmittelbar zu erkennen ist.

Implikation, *Replikation* und *Äquivalenz* kann man als *implikative Relationen* zusammenfassen, obwohl das etwas willkürlich ist, weil sich auch andere Relationen in Implikationen umformen lassen (vgl. 0-4).

Für die *Replikation* $X \leftarrow Y$ und die *Äquivalenz* $X \leftrightarrow Y$ gilt Entsprechendes wie für die Implikation und ich verwende entsprechende Symbole, also für die Äquivalenz-Tautologie $\Leftrightarrow$ bzw. für die Replikations-Tautologie $\Leftarrow$.

0-5-5-2 POSITIV-IMPLIKATION

Hier gibt es die entsprechenden Relationen: Ich verwende wie beschrieben jeweils das Symbol der *normalen* Implikation mit Stern * davor.

- synthetisch — $X \; {*}{\rightarrow} \; Y$
- semi-analytisch — $X \vee Y) \; {*}{\longrightarrow} \; Y$
- tautologisch — $(X \wedge Y) \; {*}{\Rightarrow} \; Y$
- kontradiktorisch — $(X \vee \neg X) \; {*}{\nRightarrow} \; (X \wedge \neg X)$

Zu den Besonderheiten komme ich später.

0-5-5-3 ANDERE RELATOREN

Bisher habe ich nur die *Implikation* behandelt. Auch bei anderen Relatoren bzw. Junktoren wie der *Konjunktion* oder der *Disjunktion* gibt es prinzipiell die gleichen 4 Arten von Relationen, obwohl die semi-analytischen Relationen besonders bei den implikativen Relationen von Bedeutung sind. Nun ist das Problem, dass es – anders als bei der Implikation – keine verbreiteten Symbole für die verschiedenen Möglichkeiten gibt.

Ich verwende folgende Symbole (als Beispiel Konjunktion):

- ohne Zusatz: für synthetische Relation: $X \wedge Y$
- mit + + für Tautologie: $X \; {}^{+}\!\wedge^{+} \; Y$
- mit – – für Kontradiktion: $X \; {}^{-}\!\wedge^{-} \; Y$
- mit + – für semi-analytische Relation: $X \; {}^{+}\!\wedge^{-} \; Y$

Das + – schreibe ich aber nur, wenn die semi-analytische Relation die *Hauptrelation* eines Relationssystems ist, weil es optisch sonst stört.

Insofern müsste der o. g. kontradiktorische Ausdruck korrekt wie folgt geschrieben werden:

$(X \;{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \;\not\Rightarrow\; (X \;{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$

So ist sofort zu erkennen, dass vorne eine Tautologie und hinten eine Kontradiktion steht.

Diese Symbole + (plus) und – (minus) sind quasi *selbsterklärend*, sie beziehen sich unmittelbar auf die Wahrheitstafel:

bei einer Tautologie gibt es nur +
bei einer Kontradiktion nur –
bei der semi-analytischen Relation + –.

0-5-5-4 ÜBERSICHT ÜBER ANALYTISCHE SYMBOLE

Ich habe oben verschiedene *Notationen* für Relatoren eingeführt und erläutert, fasse hier aber noch einmal die Symbole für *(semi-)analytische* Relationen zusammen.

Implikative Relationen formalisiere ich immer durch einen Pfeil (wie weit verbreitet):

Tautologien durch einen *Doppelpfeil*,
Kontradiktionen durch den *durchgestrichenen Doppelpfeil*
semi-analytische Relationen durch den *verlängerten Pfeil*.

• *Implikation*
Tautologie: $\Rightarrow$
Kontradiktion: $\not\Rightarrow$
Semi-analytisch: $\longrightarrow$

• *Äquivalenz*
Tautologie: $\Leftrightarrow$
Kontradiktion: $\not\Leftrightarrow$
Semi-analytisch: $\longleftrightarrow$

• *Replikation*
Tautologie: $\Leftarrow$
Kontradiktion: $\not\Leftarrow$
Semi-analytisch: $\longleftarrow$

Andere, nicht implikative Tautologien formalisiere ich durch ++ über dem Junktor, z. B. ${}^{+}\!\vee^{+}$
Kontradiktionen durch – – über dem Junktor, z. B. ${}^{-}\!\wedge^{-}$
Semi-analytische Relationen durch +– über dem Junktor, z. B. ${}^{+}\!\!>\!<^{-}$.

Allerdings verzichte ich bei semi-analytischen Relationen ggf. auch auf die Kennzeichnung durch $^{+\,-}$, denn aus der Struktur ist normalerweise direkt erkennbar, ob ein Ausdruck synthetisch ist oder (semi-)analytisch ist, und Tautologien und Kontradiktionen werden eben ausgewiesen.

Die Kennzeichnung von tautologisch, kontradiktorisch und semi-analytisch durch hochgestellte + +, – –, + – ist nicht üblich, aber sie hat, wie schon erläutert, große Vorteile.

Konjunktion
Tautologie: ${}^{+}\!\wedge^{+}$
Kontradiktion: ${}^{-}\!\wedge^{-}$
Semi-analytisch: ${}^{+}\!\wedge^{-}$

Disjunktion
Tautologie: ${}^{+}\vee^{+}$
Kontradiktion: ${}^{+}\vee^{-}$
Semi-analytisch: ${}^{-}\vee^{-}$

Analytische Relationen kürze ich ggf. mit 'A' ab (*A-Relation*), also z. B. *A-Implikation* für die analytische Implikation. Wenn man die *synthetischen* Relationen hervorheben will, kann man sie mit ‚S' kennzeichnen, also als S-Relationen.

0-5-5-5 BEDEUTUNG DER SYMBOLISIERUNG

Die Wahl geeigneter *Symbole* ist sehr wichtig. Denn man verwendet Symbole ja schließlich dazu, einen Sachverhalt klarer, präziser und übersichtlicher darzustellen. Wenn die Symbole das nicht leisten, sind sie Fehl am Platz. Insofern sind bei der Wahl der Symbole verschiedene Aspekte zu berücksichtigen:

Bekanntheit, optische Prägnanz, Verwechslungsmöglichkeiten, Systematik, Schreibtechnik und andere. So wäre es aus *systematischen* Gründen z. B. optimal, auch die implikativen Relationen (inklusive der Positiv-Implikation) mit der +/– Symbolik darzustellen, also die Implikation $\rightarrow$ mit ${}^{+}\!\rightarrow^{+}$ und ${}^{-}\!\rightarrow^{-}$ und ${}^{+}\!\rightarrow^{-}$. Da aber der Doppelpfeil $\Rightarrow$ und der durchgestrichene Doppelpfeil $\nRightarrow$ gut eingeführt sind, habe ich sie beibehalten. Auch für die *Positiv-Implikation* habe ich viele Symbole ausprobiert, um möglichst geeignete zu finden, aber es bleibt immer ein Kompromiss.

EXKURS: EXTENSION UND INTENSION VON SÄTZEN

Ich gebe vorab eine detaillierte *Inhalts-Übersicht* vom Exkurs.

1. Extensionale und intensionale Definition

Ich habe im bisherigen Text vor allem die Extension und Intension von *Zeichen* (Wörtern) dargestellt. Dabei ergab sich:

- Extension von Zeichen: Objekte (Individuen, Klassen)
- Intension von Zeichen: (wesentliche) Eigenschaften / Begriffe

Im Folgenden geht es vor allem um die Extension und Intension von *Sätzen*.
Allgemein habe ich schon bestimmt:

- die Extension eines Satzes ist ein *Sachverhalt* (Relation zwischen Objekten)
  genauer:
  die Extension eines *Atom*-Satzes ist ein *Sachverhalt*
  die Extension eines *Molekül*-Satzes ist eine Relation zwischen *Sachverhalten*
- die Intension eines Satzes ist ein „*Begriffsverhalt*“ (Relation zwischen Begriffen)
  genauer:
  die Intension eines *Atom*-Satzes ist ein *Begriffsverhalt*
  die Intension eines *Molekül*-Satzes ist eine Relation zwischen *Begriffsverhalten*

Allgemeiner kann man festlegen: Sätze bezeichnen *Relationen zwischen Entitäten*.

1.1 ZWEI THEORIEN

Hier ergeben sich jetzt zwei Möglichkeiten bzw. Theorien:

• Erstens, auch die Extension und Intension eines Satzes wird *nur* über die Entitäten bestimmt, also über *Objekte versus Begriffe/Eigenschaften*. Dann gilt:

Die *Extension* eines Satzes ist ein Sachverhalt, eine *beliebige* Relation zwischen zwei oder mehr *Objekten* (bzw. zwischen zwei oder mehr Sachverhalten).

Die *Intension* eines Satzes ist ein Begriffsverhalt, d. h. eine *beliebige* Relation zwischen zwei oder mehr *Begriffen* oder *Eigenschaften (bzw.* zwischen zwei oder mehr Begriffsverhalten).

• Zweitens, die Extension und Intension eines Satzes wird *zusätzlich* über die *Relation* bestimmt. D. h. Extension und Intension unterscheiden sich hier *auch* durch die *Art der Relation*.

Dabei müssen wir neben *extensional* und *intensional* auch noch *gemischt extensional-intensional* berücksichtigen, also einen Satz, in dem einem *Objekt* (extensional) eine *Eigenschaft* (intensional) zugeschrieben wird.

Die Zuordnung könnte folgendermaßen sein:

extensional:	Mengen-Relation	z. B. $x \in F$ oder $F \subset G$
intensional:	Implikations-Relation	z. B. $F \to G$
gemischt:	Zukommens-Relation	z. B. Fx

Wir werden beide Theorien jetzt untersuchen.
Wenn die zweite Theorie zutrifft, also extensional, intensional (und gemischt) *auch* über die *Relation* unterschieden werden, dann muss es s*pezifische Relationen* bzw. Relatoren für extensional und intensional (oder gemischt geben). Es ist daher zu untersuchen, welche Relationen für extensional, intensional und gemischt hier in Frage kommen. Ich beschränke mich dabei auf die *Kopula-Struktur* und auf die formale logische Sprache.

1.2 EXTENSIONALE RELATION

Hier bietet sich im Grunde nur *eine* Relation an, die *Mengen-Relation*.
Ein Sachverhalt ist eine Mengen-Relation zwischen Objekten.

Element-Relation $x \in F$: Individuum x ist Element von Klasse F
Teilmengen-Relation $F \subset G$: Klasse F ist Teilmenge von Klasse G

Dies scheint zunächst eine elegante Lösung, aber es ergeben sich vor allem 2 Probleme:

– Erstens, bei *komplexen Sätzen* ist die Teilmengen-Relation sehr schwierig semantisch zu deuten bzw. zu verstehen, etwa der komplexe Satz $(F \subset G) \subset (F \subset H)$; z. B.:
„Alle Kölner sind Deutsche" ist enthalten in „alle Kölner sind Europäer"; genauer:
Der Sachverhalt, dass die Klasse der Kölner Teilmenge der Klasse der Deutschen ist, ist Teilmenge des Sachverhaltes, dass die Klasse der Kölner Teilmenge der Klasse der Europäer ist (im Grunde müsste es noch komplizierter ausgedrückt werden).

Komplexe Sätze verknüpft man besser mit der *Implikation*, weil sich so die Bedeutung viel einfacher und eleganter darstellen bzw. verstehen lässt: $(F \subset G) \rightarrow (F \subset H)$, im Beispiel: Wenn alle Kölner Deutsche sind, sind auch alle Kölner Europäer, genauer: Wenn die Klasse der Kölner eine Teilmenge der Klasse der Deutschen ist, dann ist die Klasse der Kölner auch eine Teilmenge der Klasse der Europäer.

– Zweitens, ich werde unten noch zeigen, dass auch *Relationen zwischen Eigenschaften* bzw. *Begriffen* als *Mengen-Relationen* verstanden werden können.

Somit ist der extensionale Satz in doppelter Weise nicht durch Mengen-Relationen von intensionalen Sätzen abzugrenzen. Erstens benötigt man für *komplexe* extensionale Sätze auch die Implikation, zweitens werden auch *intensionale* Sätze mit Mengen-Relationen dargestellt. Das ändert natürlich nichts daran, dass man *einfache* extensionale Sätze am besten mittels der *Mengen-Relatoren* $\in$, $\notin$, $\subset$, $\subseteq$, $\not\subset$, $\supset$, $\supseteq$ u. ä. darstellt.

1.3 GEMISCHT EXTENSIONALE-INTENSIONALE RELATION

Hier geht es um die Relation des *Zukommens*, *Besitzens* oder *Seins* einer *Eigenschaft* in Bezug auf ein *Objekt*; formal wird dafür *gar kein* Zeichen verwendet, nur die *Stellung* symbolisiert diese Relation.

individuelle Relation: Fx oder F(x): x kommt die Eigenschaft F zu, x besitzt die Eigenschaft F, F ist Eigenschaft von x
allgemeine Relation: G(F): die Klasse F besitzt die Eigenschaft G, G ist Eigenschaft der Klasse F

Ich lasse zuerst offen, ob diese Relation zur Abgrenzung geeignet ist.

1.4 INTENSIONALE RELATION

Hier geht es um (analytische) *Relationen zwischen Begriffen*; ich will dabei vier mögliche Relationen diskutieren, beschränke mich dabei wieder auf *eine* bestimmte Struktur:

1.4.1 Teil-Relation $\sqsubset$

$F \sqsubset G$: „Der Begriff F ist Teil vom Begriff G", z. B.: „Der Begriff Blume ist Teil vom Begriff Rose".

Eine solche *Teil-Relation* ist in der Logik nicht definiert, man müsste sie also neu einführen. Es sprechen aber durchaus Gründe für diese Lösung; es ergäbe sich nämlich:

extensional	die Teilmengen-Relation $\subset$
extensional-intensional	die Eigenschafts-Relation (ohne Symbol)
intensional	die Teil-Relation $\sqsubset$

Hier könnte man also nicht nur die Objekte / Eigenschaften, sondern auch die *Relationen* dazu verwenden, extensional, extensional-intensional und intensional voneinander abzugrenzen, da jeder der drei Möglichkeiten ein unterschiedlicher Relator zugeordnet wird.

Das hätte auch zur Folge, dass man grundsätzlich auf die komplizierten Formalisierungen mit ‚K' (für Klasse) und ‚E' (für Eigenschaft) verzichten könnte. Denn bei ‚$F \subset G$' wäre es auf Grund des Relators klar, dass es sich im einen *extensionalen* Satz handelt, bei ‚$F \sqsubset G$' wäre es auf Grund des Relators klar, dass es sich im einen *intensionalen* Satz handelt.

Dennoch habe ich nach Abwägung vieler (hier nicht alle zu nennender) Argumente diese Lösung zurückgestellt; einige Gründe sind:

Man sollte nur *neue Begriffe* mit *neuen Symbolen* einführen, wenn es unumgänglich ist. Wie man unten jedoch sieht, ist mit der *Teilmengen-Relation* eine ähnliche Relation bereits etabliert; allerdings werden bei der Teil-Relation Begriffe als *Systeme* oder Ganzheiten aufgefasst, nicht als einfache *Mengen*.

Wichtiger ist aber das Folgende: Ich habe oben gezeigt, dass sich *komplexe* extensionale Sätze nur in unbefriedigender Weise ausschließlich mit Mengen-Relationen wie $\subset$ oder $\supset$ darstellen lassen; das Entsprechende gilt für die Teil-Relation $\sqsubset$ zwischen Begriffen, auch hier kommt man (bei komplexen Sätzen) ohne zusätzliche Verwendung der Implikation $\rightarrow$ kaum aus. Damit ist aber die oben aufgestellte Systematik der Abgrenzung hinfällig.

1.4.2 Implikation ($\rightarrow$)

$F \rightarrow G$: „Der Begriff F impliziert den Begriff G". Z. B.: „Der Begriff Rose impliziert den Begriff Blume".

Ebenso wie bei der Teil-Relation hat man es bei Wahl der *Implikation* für Begriffs-Relationen in allen drei Fällen mit unterschiedlichen Relationen zu tun: *extensional* die Teilmengen-Relation $\subset$, *extensional-intensional* die Eigenschafts-Relation (ohne Symbol) und *intensional* die implikative Relation $\rightarrow$. Auch hier könnte man also nicht nur die Objekte/Eigenschaften, sondern auch die Relationen dazu verwenden, extensional, extensional-intensional und intensional voneinander abzugrenzen.

Leider sprechen verschiedene Gründe gegen diese elegante Lösung: erstens wird die Implikation normalerweise nur für Relationen zwischen *Sätzen* oder *Aussagen* verwendet; zweitens ist die Implikation so definiert, dass sie von den *Wahrheitswerten* der Komponenten, hier F und G, abhängt – aber Begriffen kann man keinen *Wahrheitswert* zuweisen (außer in einer erweiterten Theorie, vgl. 0-4-4); außerdem benötigt man eben die Implikation doch für *komplexe* extensionale Sätze.

1.4.3 Eigenschafts-Relation

G(F): „Der Begriff G ist Eigenschaft vom Begriff F", z. B.: „Der Begriff Blume ist Eigenschaft vom Begriff Rose".

Hier verwendete man für *extensional-intensional gemischte* Sätze und *rein intensionale* Sätze dieselbe Relation, die *Eigenschafts-Relation*; eine Abgrenzung über Relationen wäre also nicht möglich. Die Eigenschafts-Relation ist außerdem intensional schwer zu handhaben, vor allem bei komplexen Sätzen. So müsste man z. B. formulieren: „Der Begriff G ist Eigenschaft vom Begriff F“ ist Eigenschaft von „der Begriff G ist Eigenschaft vom Begriff H“ – das kann man kaum verstehen. Bei einfachen *gemischt extensional-intensionalen* Sätzen ist die Eigenschafts-Relation brauchbar, aber bei *rein intensionalen* Sätzen nicht.

1.4.4 Teilmengen-Relation ($\subset$)

$F \subset G$: „der Begriff F ist Teilmenge vom Begriff G“, z. B. „der Begriff Blume ist Teilmenge vom Begriff Rose“ (man könnte denken, das müsste umgekehrt lauten, diese Fehlvermutung wurde jedoch schon erläutert).

Hier werden Begriffe als *Mengen bzw. Vereinigungsmengen* von Teilbegriffen oder aber als *Schnittmengen* von Oberbegriffen aufgefasst.

Z. B. Begriff(Quadrat) = Begriff(Rechteck) $\cup$ B(gleichseitig)

Dabei gilt: alle Begriffe, auch Individual-Begriffe, sind bereits *zusammengesetzt*, sind also Mengen von Teilbegriffen; eine Ausnahme könnten *Kategorial-Begriffe* oder *Transzendental-Begriffe* bilden (was hier aber nicht diskutiert werden soll).

In diesem Fall wird intensional also die gleiche Relation verwendet wie extensional: die Teilmengen-Relation; also ist *keine* eindeutige Zuordnung der Relationen und somit keine relationale Abgrenzung von extensional, extensional-intensional und intensional möglich.

Dennoch halte ich diese Möglichkeit für die beste: es ist weitaus am elegantesten und einfachsten, Begriffe als *Mengen* darzustellen, zwischen denen *Mengen-Relationen* bestehen.
Z. B.: Die Eigenschafts-Menge „Blume“ ist eine Teilmenge der Eigenschafts-Menge „Rose“.

Formal: $E(G) \subset E(F)$.

Bei Intension schreibe ich immer das ‚E’ für *Eigenschaft* oder Begriff, bei Klassen kann man dagegen das ‚K’ weglassen, weil die Klassen-Formalisierung die übliche ist.

Zwar könnte man *ontologische* Einwände dagegen erheben, dass z. B. die Begriffe „Rose“ und „rot“ gleichbehandelt werden; man könnte fordern, dass „Rose“ (als Artbegriff) einen anderen Status hat als „rot“; aber in der modernen Logik ist dieser Unterschied zwischen Substanz und Eigenschaft generell aufgehoben – und es wäre sehr problematisch, hier eine Revision vorzunehmen.

Es gibt allerdings einige Unterschiede zwischen den extensionalen und intensionalen Mengen-Relationen: Da wie oben angemerkt, *Begriffe* (mit Ausnahme von Grundbegriffen) immer *zusammengesetzt* sind, kommen hier nur *Mengen*-Relationen in Frage, keine *Element*-Relationen wie $\in$ und $\notin$; aber der Unterschied zwischen Element-Relation und Teilmengen-Relation ist wie schon in 0-4-2 ausgeführt ohnehin relativ, ja verzichtbar. Außerdem sind *intensionale* Relationen immer *analytisch* – material oder formal –, während *extensionale* Relationen synthetisch oder analytisch sein können.

1.5 FOLGERUNG

Meine Folgerung daraus ist: Obwohl zunächst einiges dafür spricht, den Unterschied zwischen extensional und intensional *auch* über *Relationen* zu definieren, sprechen doch mehr Gründe dagegen (wie oben aufgezeigt).

D. h. umgekehrt: Der Unterschied zwischen extensionalen, intensionalen und gemischten Sätzen soll allein über die *Entitäten* bestimmt werden:

- extensional: Relation zwischen *Objekten* (Individuen, Klassen)
- intensional (analytische) Relation zwischen *Eigenschaften* (bzw. *Begriffen*)
- gemischt: Relation zwischen *Objekten und Eigenschaften*

Nachdem oben schon ansatzweise die extensionale und intensionale Bedeutung von Sätzen thematisiert wurde, gehe ich im Folgenden *detailliert* auf dieses Thema *Extension* und *Intension* von Sätzen ein. Nicht gesondert behandele ich die *gemischte Extension-Intension*: Die *gemischte Extension-Intension* eines Satzes wäre ein „Sach-Begriffs-Verhalt" oder „Begriffs-Sach-Verhalt".

Dabei beschränke ich mich vorwiegend auf *Kopula-Sätze*. Die Kopula-Relation bedeutet „X ist ein Y" bzw. negativ: „X ist nicht ein Y". Das ‚ist' kann sprachlich zwar auch für anderes stehen, aber die eigentliche Kopula meint diese Relation.

2. Extension eines Satzes

2.1 SACHVERHALT

Die Extension eines Satzes ist ein *Sachverhalt*. Das ist die klassische Definition, die ich aber weiterhin für die beste halte.

Beginnen wir *aussagen-logisch*: Die Extension des Satzes ‚A' ist der Sachverhalt A.

Hier kann man im Grunde keine *normal-sprachliche* Entsprechung bzw. kein Beispiel angegeben. Denn typisch für die Aussagen-Logik ist eben gerade, dass ihre Sätze *unstrukturiert* sind.

Interessanter wird es daher bei *prädikaten-logischen* Sätzen: Z. B. ist die Extension des Satzes ‚Sokrates ist Philosoph' der Sachverhalt: Sokrates ist Philosoph. Entsprechend ist dann die Extension des formalen Satzes ‚$x_i \in F$' der Sachverhalt $x_i \in F$.

Ein Sachverhalt ist eine *Relation zwischen Objekten* (Individuen und Klassen). Diese Relation kann ganz unterschiedlich sein, sie kann auch *außer-logische*, z. B. kausale Elemente enthalten. Die *Logik* erfasst aber nur *logische* Strukturen. Und ich berücksichtige hier wie gesagt fast nur die (logische) *Kopula-Relation*, die man vor allem als Element-Relation $\in$, Teilmengen-Relation $\subset$ oder Implikation $\rightarrow$ darstellt.

Wie ich in 0-3 gezeigt habe, gilt:

die *abstrakte* Extension eines Zeichens / Wortes ist ein *abstraktes* Objekt
die *konkrete* Extension eines Zeichens / Wortes ist ein *konkretes* Objekt

Die *primäre*, die eigentliche Extension eines Zeichens ist dabei die *abstrakte*: Bei ihr wird das Objekt (ein abstraktes Individuum oder eine abstrakte Klasse) nur mit seinen *wesentlichen* (bzw. für wesentlich gehaltenen) Eigenschaften erfasst.

Das Entsprechende gilt für Sätze:

die *abstrakte* Extension eines Satzes ist ein *abstrakter* Sachverhalt
die *konkrete* Extension eines Satzes ist ein *konkreter* Sachverhalt

Was ist ein *konkreter* Sachverhalt? Z. B. wenn ich den Sachverhalt „Der Mensch ist ein Säugetier" so erfasse, dass dabei *alle* Eigenschaften *jedes* Menschen und *alle* Eigenschaften *jedes* Säugetiers miteingehen. Es ist sicher sofort deutlich, dass wir einen solchen Sacherverhalt nicht erfassen können.

Man kann „Der Mensch ist ein Säugetier" aber auch als *abstrakten* Sacherverhalt erfassen, dann werden nur die Eigenschaften berücksichtigt, die *allen* Menschen bzw. *allen* Säugetieren *gemeinsam* sind. Der abstrakte Sachverhalt betrifft die nicht die ganze, konkrete Realität, sondern nur das Wesentliche, er *abstrahiert* vom Kontingenten. Und auf diese Weise ist der Sachverhalt zugänglich bzw. darstellbar.

So gesehen kann man sagen: Die *primäre* Extension eines Satzes ist die *abstrakte* Extension, die sich auf einen *abstrakten Sachverhalt* bezieht.

Nun gehört die Eigenschaft „Säugetier“ zur Definition von Mensch. Bei ‚der Mensch ist ein Säugetier' handelt es sich also um einen *analytischen* Satz. Anders der Satz: ‚50% der Menschen sind Vegetarier'. Dieser Satz ist *synthetisch*, denn hier wird eine Eigenschaft – die *nicht zur Definition* gehört – nur von einem *Teil* der Menschen ausgesagt. Dadurch wird die abstrakte Klasse der Menschen ein wenig *konkretisiert* bzw. ist der Sachverhalt konkreter.

Im Grunde können wir daher 3 Kategorien von Sachverhalten unterscheiden:

• rein abstrakter Sachverhalt
bei analytischen Sätzen, bei denen einem Objekt eine (wesentliche) Eigenschaft zugesprochen wird, die schon in seiner Definition enthalten ist.

• teils abstrakter, teils konkreter Sachverhalt
bei synthetischen Sätzen, wenn einem (abstrakten) Objekt eine konkrete (kontingente) Eigenschaft zugesprochen wird und dieses Objekt dadurch etwas *konkretisiert* wird.

• rein konkreter Sachverhalt
wäre gegeben, wenn alle Eigenschaften der beteiligten Objekte erfasst würden, das ist aber real nicht möglich.

Auch bei der Extension von Sätzen kann man *2 Stufen* unterscheiden, die entsprechend bestimmt sind wie bei der Extension von Zeichen. Die 2. Stufe der Extension eines Satzes bezieht sich dann auf die 2. Stufe der Extension der *verwendeten Zeichen*.
Z. B. der Satz ‚Sokrates ist ein Mensch'.

1. Stufe: Extension = der Sachverhalt: Sokrates ist ein Mensch
(oder logisch exakt: Das Individuum Sokrates ist Element der Klasse der Menschen)

2. Stufe: Extension = der Sachverhalt: dasjenige Objekt, das folgende Eigenschaften hat: Philosoph, Erfinder der sokratischen Methode usw. ist Element der Klasse der Objekte, welche die Eigenschaften „Sinnenwesen“ und „vernünftig“ besitzen – folgt man der klassischen Definition des Menschen.

Diese 2. Stufe spielt bei der Extension von Sachverhalten eine untergeordnete Rolle. Allerdings ist das Konzept des Sachverhaltes nicht ganz unproblematisch. Als schwieriges Problem gilt das *negativer* Sachverhalte, z. B.: X ist *nicht* Y. Aber warum sollen negative Sachverhalte besondere ontologische Probleme aufwerfen? Zum einen gibt es eine *Äquivalenz positiver und negativer Sachverhalte*, z. B. $X \rightarrow Y \Leftrightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$. *Quantitativ* betrachtet gibt es einen *fließenden Übergang* zwischen positiven und negativen Sachverhalten (wobei „negativ“ hier durch $p = 0$ dargestellt wird): z. B. $p = 1$, $p = 0{,}5$, $p = 0{,}1$, $p = 0{,}01$ ... $p = 0$. (Eine weitere Frage ist, ob man auch die Beziehung zwischen einem *Objekt und einer Eigenschaft* als ‚Sachverhalt' bezeichnen soll, aber dies betrifft nur den *gemischt extensional-intensionalen* Ansatz, den wir hier ausklammern.)

Da die *extensionale* Sprache *Vorrang* gegenüber der intensionalen Sprache hat, schreibe ich normalerweise für die Klasse F nur ‚F' und nicht ‚K(F)' (und entsprechend), um die logische Satzform nicht unnötig zu komplizieren. Damit keine Verwechslung möglich ist, werde ich dagegen bei der *intensionalen* Sprache immer das ‚E' für Eigenschaft verwenden, also z. B. ‚E(F)' für die Eigenschaft F.

Wir müssen nun genauer unterscheiden zwischen:

• *synthetischen* und *analytischen* Sätzen
• *Atom-Sätzen* und *Molekül-Sätzen*
• *Individual-Sätzen* und *Klassen-Sätzen*
• *normal-sprachlichen* und *formal-sprachlichen* Sätzen

Alle diese Unterscheidungen wurden im vorausgegangenen Kapitel 0 schon erläutert.

Dabei geht es zunächst nur um *synthetische* Sätze. Manche der im Folgenden vorgenommenen Formalisierungen sind noch partiell provisorisch.

2.2 SYNTHETISCHE SÄTZE

2.2.1 Atom-Satz

Ein *Atom-Satz* (oder Atomar-Satz oder atomarer Satz) ist ein *einfacher Satz*, der keine weiteren Sätze bzw. Relationen enthält. Allerdings bestehen hier Unterschiede zwischen normaler und formaler Sprache sowie zwischen *Tiefen-Struktur* und *Oberflächen-Struktur* (vgl. vor allem 0-1-5-3). So ist der Satz „Alle Menschen sind sterblich" *normal-sprachlich* ein Atomar-Satz, *formal-sprachlich* dagegen ein Molekular-Satz der Struktur: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$.

Bei den Atom-Sätzen beschränke ich mich hier auf die Mengen-Relationen „ist-Teilmenge von" und „ist-Element-von", die man beide als „ist-enthalten-in" zusammenfassen kann.

2.2.1.1 *Individual-Satz*

Ein Individual-Satz bezieht sich auf ein *Individuum*, sprachlich enthält er in Subjekt-Funktion einen *Eigennamen*, eine singuläre Kennzeichnung oder eine andere *Individuen-Konstante*.
– *normal-sprachlicher* Satz: ‚Sokrates ist Grieche'.
Extension ist der *Sachverhalt*:
Das Individuum Sokrates ist Element der Klasse aller Griechen.
Man könnte sich bei diesem wie manchen Beispielen streiten, ob es wirklich ein *synthetischer* oder eventuell ein *material-analytischer* Satz ist, im Beispiel, ob es zur Definition von Sokrates gehört, dass er Grieche ist; diese Unterscheidung ist aber für die Argumentation nicht von Wichtigkeit.

Es gibt allerdings auch *singuläre* Prädikate bzw. Eigenschaften, z. B.: ‚Anne ist Mutter von Karin'. Bei diesem Satz ist es wenig sinnvoll zu analysieren ‚Anne ist Element der Klasse aller Mütter von Karin', denn es gibt eben nur *eine* Mutter. Solche Fälle werden hier aber nicht berücksichtigt, wir haben uns ohnehin schon ziemlich weit aus der reinen Logik in die Sprachanalyse begeben, und das soll nicht unnötig ausgeweitet werden.

– *formal-sprachlicher Satz:* ‚$x_i \in F$'
Extension ist der Sachverhalt: $x_i \in F$
bzw. normal-sprachlich gefasst: x_i ist Element der Klasse F

2.2.1.2 Klassen-Satz

– *normal-sprachlicher* Satz: 'Alle Philosophen sind Erdbewohner'.
Extension ist der Sachverhalt:
Die Klasse der Philosophen ist eine Teilmenge der Klasse der Erdbewohner.
Man könnte die Extension bei einer *individuellen* Darstellung noch anders ausdrücken, nämlich als Aufzählung: Philosoph_1 ist Erdbewohner, Philosoph_2 ist Erdbewohner usw.

– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$F \subset G$'
Extension ist der Sachverhalt: $F \subset G$ bzw.: Die Klasse F ist eine Teilmenge der Klasse G

2.2.2 Molekül-Satz

Ein *Molekül-Satz* (Molekular-Satz oder molekularer Satz) ist aus zwei oder mehr Sätzen zusammengesetzt bzw. enthält zwei oder mehr Relationen. Die sind *verknüpft*. Als Verknüpfung dienen *normal-sprachlich* Bindewörter (Konjunktionen) wie ‚wenn – dann', ‚und', ‚oder' und andere. *Logisch* werden entsprechend aussagen-logische *Relatoren* verwendet, also beispielsweise $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$. Da der *Implikations-Satz* (wenn – dann) mit $\rightarrow$ aber der wichtigste Molekül-Satz ist, wollen wir uns hier auf ihn beschränken.

Aussagen-logisch nehmen wir z. B. den Satz: ‚$A \rightarrow B$'. Seine Extension ist der Sachverhalt: $A \rightarrow B$. Wie gesagt kann man bei der Aussagen-Logik im Grunde keine *normal-sprachliche* Entsprechung bzw. kein Beispiel angegeben. Denn typisch für die Aussagen-Logik ist eben gerade, dass ihre Sätze *unstrukturiert* sind. Zwar gibt man als Beispiel für ‚$A \rightarrow B$' gerne an: ‚Wenn es regnet, ist die Straße nass'. Korrekt müsste das etwa heißen: ‚Wenn der Himmel regnet, ist die Straße nass'. Das ist aber bereits eine *prädikaten-logische* Struktur: $Fx_i \rightarrow Gx_j$. Dennoch werde ich im Text – zur Veranschaulichung – immer auch wieder *sprachliche Beispiele* für aussagen-logische Sätze bringen.

Kommen wir jetzt zur *Prädikaten-Logik* und beschränken uns hier ebenfalls auf die *Implikation*. Dabei besteht allerdings das Problem, dass für $\rightarrow$ (wie aber auch für die anderen Junktoren) keine *klassische extensionale* Deutung vorgesehen ist. D. h. hier ist keine Deutung im Sinne einer *Mengen-Relation* („ist Teilmenge von") üblich (vgl. 0-4-2-3). Nun wurde zwar gesagt, dass der Status „extensional" nur über *Objekte* definiert wird, nicht über *Relationen*; somit müssten auch andere Relationen außer den Mengen-Relationen für eine extensionale Darstellung möglich sein. Andererseits soll die Extension auf die *reale Welt* Bezug nehmen, einen realen Sachverhalt kenneichnen. Eine *Wenn-dann*-Relation, mit der die Implikation primär übersetzt wird, kann schwerlich als realer Sachverhalt bezeichnet werden. Sie ist *hypothetisch*, nicht „real".

Ich unterscheide daher zwischen:

– *schwacher* (implikativer) *Extension* und

– *starker* (mengen-relationaler) *Extension*

Diese Unterscheidung kommt nur bei den *Molekular-Sätzen* zum tragen.

Die (extensionalen) *Atom-Sätze* sind grundsätzlich *mengen-relational* geschrieben, als Teilmengen- bzw. Element-Relation, z. B. $x_i \in F$.

Ein (kopulativer) Molekül-Satz kann aber als Zentral-Relator ebenfalls das Teilmengen-Symbol ‚$\subset$' besitzen oder den Implikator ‚$\rightarrow$' (vgl. die Diskussion in 0-4).

Es ergeben sich daher jeweils zwei Möglichkeiten:

- *schwache (implikative) Extension*: z. B. der molekulare Sachverhalt: $x_i \in F \rightarrow x_i \in G$
  Konkret: W*enn* x_i Element der Klasse F ist, dann ist x_i auch Element der Klasse G.
- *starke (mengen-relationale) Extension*: z. B.: $(x_i \in F) \subset (x_i \in G)$
  Konkret: Der Sachverhalt $x_i \in F$ *ist eine Teilmenge* des Sachverhaltes $x_i \in G$.
  Hier wird $\rightarrow$ durch $\subset$ ersetzt; allerdings ist diese Schreibweise bzw. Deutung sehr ungewohnt.

Man kann auch beim Molekül-Satz zwischen einem *Individual*-Molekül-Satz und einem *Klassen*-Molekül-Satz unterscheiden.

2.2.2.1 Molekül-Individual-Satz

– *Normal-sprachlicher Satz*: ‚Wenn Sokrates philosophiert, dann ist er ein Mensch'. (Wenn nur Menschen philosophieren, wäre dies ein material-analytischer Satz, aber es kann ja auch andere philosophierende Wesen geben, ebenso wie *nicht alle* Menschen philosophieren).

• schwache (implikative) Extension:

der *Sachverhalt*: Wenn Sokrates Element der Klasse der Philosophierenden ist, dann ist er Element der Klasse der Menschen.

- starke (mengen-relationale) Extension:

der *Sachverhalt*: Der Sachverhalt, dass Sokrates Element der Klasse der Philosophierenden ist, ist enthalten in dem Sachverhalt, dass Sokrates Element der Klasse der Menschen ist („enthalten" ist hier nicht analytisch zu verstehen).

Man könnte sich einen solchen *Individual*-Satz strukturell auch als *Klassen*-Satz vorstellen, etwa über die *Zeit* quantifiziert. Es gibt z. B. 100 *Zeitpunkte*, zu denen Sokrates philosophiert. Aber auch ein Philosoph wie er philosophiert nicht zu jedem Zeitpunkt, er ist aber zu jedem Zeitpunkt Mensch. So ist die Menge der Zeitpunkte, an denen Sokrates philosophiert, eine *Teilmenge* der Zeitpunkte, an denen Sokrates Mensch ist. Jetzt können wir die Extension streng bestimmen, nämlich als folgenden Sachverhalt: Die Klasse der Sachverhalte, dass Sokrates Element der Klasse der Philosophen ist, ist eine Teilmenge der Klasse der Sachverhalte, dass Sokrates Element der Klasse der Menschen ist.

– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$x_i \in F \rightarrow x_i \in G$'

Formal gilt Entsprechendes: der formal-sprachliche Satz ‚$x_i \in F \rightarrow x_i \in G$' hat als

- schwache (implikative) Extension: den Sachverhalt: $x_i \in F \rightarrow x_i \in G$

(umformuliert): wenn x_i Element der Klasse F ist, dann ist x_i auch Element der Klasse G.

- starke (mengen-relationale) Extension: den Sachverhalt: $(x_i \in F) \subset (x_i \in G)$

(umformuliert): die Klasse der Sachverhalte $x_i \in F$ ist eine Teilmenge der Sachverhalte $x_i \in G$
Wollte man die streng bzw. stark extensionale Deutung auch schon in der *Satz-Form* ausdrücken, müsste man auch schreiben ‚$x_i \in F \subset x_i \in G$'; nur ist diese Schreibweise eben, genau wie die Deutung selbst, nicht üblich.

2.2.2.2 Molekül-Klassen-Satz

– *normal-sprachlicher Satz*: ‚Wenn alle Lehrer Geistesarbeiter sind, dann sind auch alle Lehrer gebildet' (synthetischer Satz)

- schwache (implikative) Extension

ist der Sachverhalt: Wenn die Klasse der Lehrer Teilmenge der Klasse der Geistesarbeiter ist, dann ist die Klasse der Lehrer auch Teilmenge der Klasse der Gebildeten (das kann man auch mit ‚alle' formulieren).

- starke (mengen-relationale) Extension

ist der Sachverhalt: Der Sachverhalt, dass die Klasse der Lehrer Teilmenge der Klasse der Geistesarbeiter ist, ist Teilmenge des Sachverhaltes, dass die Klasse der Lehrer Teilmenge der Klasse der Gebildeten ist.

Man kann aber auch jeweils auf eine *Klasse* von Sachverhalten Bezug nehmen (wie der Begriff „Teilmenge" nahe legt). Dann ergibt sich als Extension: Die Klasse der Sachverhalte, dass alle Lehrer Elemente der Klasse Geistesarbeiter sind, ist Teilmenge der Klasse der Sachverhalte, dass alle Lehrer Elemente der Klasse der Gebildeten sind.
(Lehrer$_1 \in$ Klasse der Geistesarbeiter $\cup \ldots \cup$ Lehrer$_n \in$ Klasse der Geistesarbeiter) $\subset$
(Lehrer$_1 \in$ Klasse der Gebildeten $\cup \ldots \cup$ Lehrer$_n \in$ Klasse der Gebildeten)

– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$F \subset G \rightarrow F \subset H$'

- schwache (implikative) Extension: $F \subset G \rightarrow F \subset H$
  Normal-sprachlich formuliert ist die Extension der folgende *Sachverhalt*:
  Wenn die Klasse F Teilmenge der Klasse G ist,
  dann ist die Klasse F auch Teilmenge der Klasse H
- starke (mengen-relationale) Extension: $(F \subset G) \subset (F \subset H)$

Normal-sprachlich formuliert ist die Extension der folgende *Sachverhalt*:
Die Klasse der Sachverhalte $F \subset G$ ist eine Teilmenge der Klasse der Sachverhalte $F \subset H$.

2.3 ANALYTISCHE SÄTZE

Es ging bisher um *synthetische* Sätze. Wie ich allerdings schon anmerkte, manche der obigen Beispiele könnte man auch als *material-analytisch* ansehen. Ein Satz ist dann material-analytisch (tautologisch), wenn der Prädikat-Begriff durch *Definition* bereits im Subjekt-Begriff enthalten ist:

z. B.: ‚alle Quadrate sind Rechtecke', halb-formal: K(Quadrate) $\subset$ K(Rechtecke).

Die Unterscheidung zwischen *synthetisch* und *material-analytisch* war für die obige Darstellung nicht von großer Bedeutung, aber normalerweise sollten *material-analytische* Sätze doch markiert werden, mit einem *Index* ‚df' oder ‚pd' (per definitionem).

Für *normal-sprachliche* Sätze wie ‚alle Quadrate sind Rechtecke' ist die Kennzeichnung verzichtbar, denn man kann oft an den Wörtern bzw. Objekten erkennen, ob es sich um ein material-analytisches oder ein synthetisches Verhältnis handelt.

Bei *halb-formalen* Sätzen wie K(Quadrate) $\subset_{pd}$ K(Rechtecke) sollte man um der Präzision willen den Index setzen.

Vor allem aber bei *rein formalen* Sätzen, denen man nicht ansieht, ob sie *synthetisch* und *material-analytisch* sind, braucht man den Index. Daher sollte man unterscheiden:

$F \subset G$ bzw. $K(F) \subset KG)$: hier liegt eine *synthetische* Relation vor

$F \subset_{pd} G$ bzw. $K(F) \subset_{pd} K(G)$: hier ist eine *material*-analytische Relation gemeint (allerdings spielen *material-analytische* Relationen in der *formalen* Sprache kaum eine Rolle, da dort von der konkreten Bedeutung abstrahiert wird.)

Nun ließen sich die obigen Unterscheidungen von Satztypen auch auf *formal*-analytische Sätze anwenden, z. B.:

‚$F\ ^{+}\!\subseteq^{+} F$': Extension ist der Sachverhalt: Klasse F ist eine Teilmenge der Klasse F (das hochgestellte doppelte + steht für *Tautologie*). Hier schreibt man keinen Index ‚pd', denn der Satz ist nicht auf Grund von Definitionen, sondern allein auf Grund von logischen bzw. mathematischen Gesetzen analytisch-tautologisch.

Insgesamt ergeben sich bei formal-analytischen Sätzen aber dieselben Ergebnisse wie bei den synthetischen Sätzen, weshalb eine systematische Analyse verzichtbar ist.

Man könnte allerdings auch fragen, ob formal-analytische Sätze überhaupt eine Extension besitzen. Dies ist aber zu bejahen. Zwar könnte man einwenden: Ein analytischer Satz wie ‚alle Bundesländer sind Bundesländer' ist empirisch gar nicht zu fassen. Aber man kann doch die Bundesländer prüfen und wird eben feststellen, dass sie alle Bundesländer sind.

Wie wir gleich sehen werden, spielt bei der *Intension* von Sätzen die Unterscheidung zwischen synthetischen und analytischen Sätzen eine wichtige Rolle.

2.4 THEORIE: EXTENSION EINES SATZES = SEIN WAHRHEITSWERT

Ich habe oben als *Extension eines Satzes* den von ihm bezeichneten *Sachverhalt* bestimmt.

In der neueren Logik (seit Frege) wird dagegen vielfach behauptet,
die Extension eines Satzes sei sein Wahrheitswert.

D. h. es gibt danach nur zwei *extensionale Bedeutungen* für einen Satz: *wahr* oder *falsch*.

Ich halte diese These für nicht überzeugend; sie hat zwar den Vorteil der *Einfachheit*, man erspart sich die ontologischen Probleme, einen Sachverhalt zu definieren u. ä., allerdings überwiegen die *Nachteile*:
– Es ist recht künstlich, ja *willkürlich*, als Extension eines Satzes seinen Wahrheitswert anzusetzen.
– Es besteht dann kaum mehr eine *Entsprechung* zwischen der Extension eines Wortes (Objekte) und der eines Satzes (Wahrheitswerte).
– Der Begriff des *Wahrheitswertes* ist ebenfalls nicht unproblematisch; man muss im Grunde zunächst den äußerst schwierigen Begriff ‚Wahrheit' klären.
– Der Begriff des *Sachverhaltes* ist letztlich kaum verzichtbar, auch die neuere Logik greift darauf zurück, etwa in der berühmten Definition der Wahrheit von Alfred Tarski; danach ist ein Satz dann wahr, wenn der Sachverhalt, den er bezeichnet, besteht.
– Vor allem hätten alle wahren bzw. alle falschen Sätze dann *dieselbe* extensionale Bedeutung, wahre (bzw. falsche) Sätze ließen sich extensional gar nicht mehr unterscheiden.

Fazit: Die These, dass die Extension eines Satzes sein *Wahrheitswert* ist, überzeugt nicht; in keinem Fall für einen Satz der normalen Sprache mit konkreter Bedeutung, aber auch für einen formalen Satz wie z. B ‚$x_i \in F$'. Ohnehin lässt sich ja für einen *formalen* Satz mit *Variablen* gar kein fester Wahrheitswert angeben; wie ich aber gezeigt habe, fungieren letztlich auch Konstanten in der formalen Sprache als Variablen.
Ich halte somit daran fest, dass die *Extension eines Satzes* ein *Sachverhalt* ist.

3. Intension eines Satzes

Was ist die Intension eines Satzes? Hierzu gibt es verschiedene Theorien:
• Aussage
Intension eines Satzes = die Aussage, die er macht.
Das klingt erst einmal plausibel, ist aber letztlich nichtssagend. Es besagt letztlich nur, dass ein Sachverhalt gegeben ist. Wie soll man eine Aussage semantisch von einem Sachverhalt unterscheiden? Eine Aussage ist im Grunde eine zusätzliche Funktion, die besagt, dass etwas wahr ist. Sie hat weniger einen semantischen Status, als vielmehr einen *pragmatischen*, nämlich den der (Wahrheits-)*Behauptung*, ähnlich wie *Frage*, *Auforderung* u. ä. Wenn man die Intension *real* versteht und nicht psychisch oder sprachlich, nützt die „Aussage" wenig.
• Wahrheitswerte
Intension eines Satzes = sein Wahrheitswert in allen möglichen Welten.
Das ist eine interessante These, die ich ausführlich in 3.4 diskutieren werde.
• Begriffs-Relation
Intension eines Satzes = eine Relation zwischen Begriffen (Begriffsverhalt)
bzw. eine Relation zwischen Begriffsverhalten.
Diese Theorie werde ich vertreten, sie passt auch am besten zur Bestimmung der Intension von *Wörtern*, hat allerdings ihre Schwierigkeiten.

Zuweilen bezieht man den Terminus ‚Intension' nicht generell auf den Satz, sondern auf *bestimmte* Sätze bzw. deren Analyse. Es heißt dann, das z. B. *Glaubens-Sätze* (‚x glaubt, dass F zutrifft') nicht *extensional*, sondern nur *intensional* zu verstehen und zu analysieren sind.

Damit meint man meistens, dass diese Sätze *nicht wahrheitswert-funktional* sind. M. E. ist dieses Kriterium aber wenig geeignet, die Intension eines Satzes zu definieren.
Wesentlich ist: Die Intension richtet sich nur auf *analytische* Beziehungen:

- bei *Atom*-Sätzen: auf analytische Beziehungen zwischen Subjekt und Prädikat
- bei *Molekular*-Sätzen: auf analytische Beziehungen zwischen den beiden Teilsätzen, zwischen Vordersatz und Nachsatz.

3.1 BEGRIFFSVERHALT

Die Intension eines (deskriptiven) *Zeichen/Wortes* habe ich bestimmt als *Begriff* (oder *Eigenschaft*), genauer als die Menge der *definierenden* Eigenschaften. Entsprechend wird hier festgelegt: Die Intension eines Satzes ist ein „Begriffsverhalt", d. h. eine *Relation zwischen Begriffen* (oder *Eigenschaften*) bzw. zwischen einfacheren Begriffsverhalten.

Der Terminus ‚Begriffsverhalt' wurde analog zum extensionalen ‚Sachverhalt' gebildet. Man darf nicht einschränken, dass es nur um *definierende* Relationen bzw. *definierende* Eigenschaften geht, denn dann hätten *synthetische* Sätze wie z. B. der Satz ‚alle Quadrate sind blau' gar keine Intension (weil „blau" keine definierende Eigenschaft von „Quadrat" ist), was unbefriedigend wäre.

Allerdings ist das Konzept der Intension am tragfähigsten und überzeugendsten bei *material-analytischen* Sätzen, also Sätzen, die unmittelbar auf *Definitionen* beruhen (wie z. B. ‚alle Quadrate sind rechteckig').

Dabei ist zu unterscheiden zwischen der *Definition* selbst und der *Ableitung aus der Definition*. Ich schreibe *Eigenschaften* oder *Begriffe* wie gesagt normalerweise mit großem ‚E', z. B. E(Quadrat). Ob man die Eigenschaft normal-sprachlich mit *Substantiv* (z. B. ‚Quadrat') oder mit *Adjektiv* (z. B. ‚quadratisch') schreibt, ist hier ohne Relevanz − auf die ontologische Problematik dieses Unterschieds bin ich schon eingegangen.

Als erstes Beispiel nehme ich eine *vereinfachte* Definition von ‚Quadrat' bzw. ‚quadratisch':

- *Definition*: $E(\text{quadratisch}) =_{df} E(\text{rechteckig}) \cup E(\text{gleichseitig})$,

zu lesen: die Eigenschaft(smenge) „quadratisch" ist definiert als Vereinigungsmenge der Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig". Für die *Definition* schreibe ich: $=_{df}$. Die Definition bedeutet eine *vollständige* Angabe, und sei es ggf. auch nur durch eine nicht völlig bestimmte Folge:

$$E(X) =_{df} E(Y_1) \cup ... \cup E(Y_n)$$

- *Ableitung aus der Definition*: $E(\text{rechteckig}) \subset_{pd} E(\text{quadratisch})$

Die Eigenschaft(smenge) „rechteckig" ist *per Definition* Teilmenge der Eigenschaft(smenge) „quadratisch". Für die *Ableitung aus der Definition* schreibe ich: $=_{pd}$ (per definitionem).

Die Ableitung enthält nur einen *Teil* der Definition oder ergibt sich aus anderen Definitionen; z. B. könnte man auch schreiben: $E(\text{eckig}) \subset_{pd} E(\text{quadratisch})$

Diese definitorischen Relationen sind *material-analytische* Relationen, nicht formal-analytisch. Erst durch Kombinationen bzw. Zusätze erhält man *formal-analytische* Relationen, z. B.:

$$E(\text{quadratisch}) =_{df} E(\text{rechteckig}) \cup E(\text{gleichseitig}) \Rightarrow E(\text{rechteckig}) \subset_{pd} E(\text{quadratisch})$$

Diese *Definitions-Prämisse* fügt man aber normalerweise nicht hinzu, wenn man die Intension angibt.

Kommen wir jetzt zu *Molekular-Relationen*. Folgendes Beispiel:

$$E(\text{rechteckig}) \subset_{pd} E(\text{quadratisch}) \rightarrow_{pd} E(\text{eckig}) \subset_{pd} E(\text{quadratisch}).$$

Hier muss der Implikations-Pfeil mit dem Index ‚pd' belegt werden. Eine Umwandlung in einen formalen Schluss könnte folgendermaßen aussehen:

$E(\text{eckig}) \subset_{pd} E(\text{rechteckig}) \wedge E(\text{rechteckig}) \subset_{pd} E(\text{quadratisch}) \Rightarrow$
$E(\text{eckig}) \subset_{pd} E(\text{quadratisch})$.

Ich sehe dabei einmal davon ab, dass ich die Intension letztlich *subjektiv* bestimmt habe, also dass sie nicht die *objektiv* wesentlichen Eigenschaften, sondern nur die für wesentlich *erachteten* (abstrakten) Eigenschaften umfasst; man kann diesen Aspekt hier vernachlässigen und braucht die Thematik nicht noch komplizierter zu machen.

Nun gibt es Eigenschaften, die nicht (oder nur vernachlässigbar) durch *Definitionen* verbunden sind. Die Relationen zwischen ihnen kann man (material) '*synthetisch*' nennen.
Beispiel: E(Lehrer) und E(Raucher). Keine der beiden *Eigenschaftsmengen* ist Teilmenge der anderen; man kann daher schreiben:

$E(\text{Raucher}) \not\subset E(\text{Lehrer}) \wedge E(\text{Lehrer}) \not\subset E(\text{Raucher})$

Etwa wie folgt zu lesen: ‚*Einige* Unter-Eigenschaften der komplexen Eigenschafts-Menge „Raucher" sind *nicht* Elemente der komplexen Eigenschafts-Menge „Lehrer" und umgekehrt'; warum nicht von *allen* Eigenschaften die Rede ist, wird später noch erklärt.

Man könnte sich darüber streiten, ob hier auch ein *Definitions-Index* (beim $\not\subset$) gesetzt werden soll. Es ließe sich argumentieren: Zwischen Eigenschaften sind *alle* Relationen *definitorisch*, d. h. auch wenn zwei Eigenschaften voneinander ganz *unabhängig* sind (und die Beziehung zwischen ihnen normalerweise durch negierte Relationen dargestellt wird), folgt dies ebenfalls aus den Definitionen. Ich möchte aber bei synthetischen Relationen keinen pd-Index setzen, auch zur besseren Unterscheidung von analytischen Relationen. Das gilt sowohl für Atom-Relationen wie für Molekular-Relationen.

Zum Abschluss dieses Punktes eine Übersicht (mit Beispielen):

– Atom-Relationen
 synthetisch: $E(\text{Lehrer}) \not\subset E(\text{Raucher})$
 material-analytisch: $E(\text{Mensch}) \subset_{pd} E(\text{Lehrer})$
 formal-analytisch: $E(\text{Raucher}) \; {}^{+}\!\!\subseteq^{+} E(\text{Raucher})$
 ${}^{+}\!\!\subseteq^{+}$ (mit hochgestellten $^{++}$) steht für eine formal-analytische, *tautologische* Teilmengen-Relation.
– Molekular-Relationen
 synthetisch: $E(\text{Mensch}) \subset_{pd} E(\text{Lehrer}) \rightarrow E(\text{Tier}) \subset_{pd} E(\text{Affe})$
 material-analytisch: $E(\text{Mensch}) \subset_{pd} E(\text{Lehrer}) \rightarrow_{pd} E(\text{Lehrer}) \subset_{pd} E(\text{Pädagoge})$
 formal-analytisch: $E(\text{Mensch}) \subset_{pd} E(\text{Lehrer}) \Rightarrow E(\text{Mensch}) \sqcap_{pd} E(\text{Lehrer})$

Zwischen $E(\text{Mensch}) \subset_{pd} E(\text{Lehrer})$ und $E(\text{Tier}) \subset_{pd} E(\text{Affe})$ besteht *keine direkte definitorische* Relation, sondern nur eine *synthetische* Relation, daher wird der Pfeil $\rightarrow$ ohne Index verwandt. ‚$E(\text{Mensch}) \sqcap_{pd} E(\text{Lehrer})$' ist zu lesen als: Die Eigenschaftsmenge „Mensch" *schneidet* (per def.) die Eigenschaftsmenge „Lehrer" (zur Erklärung von $\sqcap$ später in 4.3).

Ich werde jetzt verschiedene *Satz-Typen* untersuchen, analog der Analyse bei der Extension. Zunächst müssen wir wieder unterscheiden zwischen *analytischen* und *synthetischen* Sätzen. Wir beginnen diesmal mit den *analytischen* Sätzen. Dabei konzentrieren wir uns auf die *material*-analytischen Sätze, welche auf *Definitionen* beruhen; die *formal*-analytischen Sätze sind für die Analyse der Intension weniger interessant.

Auch wenn hier die Intension, die intensionale *Bedeutung* von Sätzen das Thema ist, gehen wir zunächst von der extensionalen *Form* der Sätze aus, weil diese viel gebräuchlicher ist.

3.2 ANALYTISCHE SÄTZE

3.2.1 Atom-Satz

Atomare Sätze sind wie beschrieben solche, die nicht andere Sätze oder Relationen als Teile enthalten. Dies können *Individual*- oder *Allgemein*-Sätze sein (bei der Intension spreche ich lieber von ‚Allgemein-Sätzen' als von ‚Klassen-Sätzen').

3.2.1.1 Individual-Satz

– *normalsprachlicher Satz*: ‚Sokrates ist Mensch'
Auf das Problem der Definition von *Eigennamen* bin ich schon eingegangen.
Intension ist der Begriffsverhalt: der Begriff „Mensch" ist im Begriff „Sokrates" enthalten; wir gehen also davon aus, das zur Definition von Sokrates die Eigenschaft „Mensch" gehört.

Die Intension lässt sich natürlich auf verschiedene Weise *sprachlich ausdrücken*, z. B.

- der Allgemein-Begriff „Mensch" ist Teilbegriff des Individual-Begriffs „Sokrates"
- die Begriffs-Klasse „Mensch" ist Teilmenge der Begriffs-Klasse „Sokrates"
- die Eigenschafts-Menge „Mensch" ist Teilmenge der Eigenschafts-Menge „Sokrates".

Zur Vollständigkeit könnte man immer hinzufügen: ‚definitorisch' oder ‚per definitionem' (‚per Definition), also z. B.: der Allgemein-Begriff „Mensch" ist *definitorisch* Teilbegriff des Individual-Begriffs „Sokrates". Entsprechend: der Allgemein-Begriff „Mensch" ist *wesentlich* Teilbegriff des Individual-Begriffs „Sokrates" Aber während man in der exakten *formalen* Sprache diese Kennzeichnung vornehmen sollte, ist sie in der normalen Sprache verzichtbar, wird ja auch i. allg. nicht verwendet.

– *formal-sprachlicher Satz*: $F_{pd}x_i$ oder $x_i \in_{pd} F$ (pd = per definitionem)
Die obige *extensionale* Form des Satzes ist die verbreitetste. Der formal-sprachliche Satz kann allerdings auch schon eine *intensionale Form* haben, nämlich ‚$E(F) \subset E(x_i)$'.

Intension ist in jedem Fall der folgende *Begriffsverhalt*: $E(F) \subset E(x_i)$.
Non-formal: Intension = der Allgemein-Begriff F ist Teilmenge des Individual-Begriffs x_i.
Oder exakter: Intension = die allgemeine Eigenschafts-Menge F ist Teilmenge der individuellen Eigenschafts-Menge x_i. Exakt muss und sollte man auch hier mit *Definitions-Index* schreiben: ‚$E(F) \subset_{pd} E(x_i)$'. Es ließen sich auch *Modal-Ausdrücke* hinzufügen: ‚Der Allgemein-Begriff F ist durch Definition *notwendig* Teilmenge des Individual-Begriffs x_i'.

Ein *formal*-analytischer Satz wäre z. B. ‚$E(x_i) \ {}^{+}\!\subset^{+} E(x_i)$'. Die hochgestellten $^{++}$ zeigen an, dass hier eine *formale* Tautologie vorliegt. Die Intension ist: $E(x_i) \ {}^{+}\!\subset^{+} E(x_i)$ bzw. der *Begriffsverhalt*: Der Begriff x_i ist Teilmenge des Begriffs x_i.

Jede Menge ist auch Teilmenge von sich selbst, denn es gilt: $(X = Y) \Leftrightarrow (X \subseteq Y) \wedge (X \supseteq Y)$.

Es gibt folgenden Zusammenhang von *formal-analytisch* und *material-analytisch*: Angenommen, es gilt $E(F) \subset_{df} E(x_I)$. Man weiß dann, dass aus der *Definition* des Begriffs $E(x_i)$ folgt, dass E(F) ein Teilbegriff ist. Hier liegt ein *material-analytischer* Zusammenhang vor. Wenn man die Definition explizit einführt, z. B. $E(x_i) =_{df} E(F) \cup E(G) \cup E(H)$.

Dann gilt folgender Schluss: $E(x_i) =_{df} E(F) \cup E(G) \cup E(H)] \Rightarrow E(F) \subset_{pd} E(x_I)$.

3.2.1.2 Allgemein-Satz

Man kann bei analytischen Sätzen unterscheiden zwischen *tautologischen* (immer wahren) und *kontradiktorischen* (immer falschen) Sätzen. Die tautologischen Sätze sind wesentlich bedeutender, daher beschränke ich mich hier auf diese definitorisch tautologischen Sätze;

außerdem wird noch gezeigt werden, dass sich bei der Intension *material-analytischer* Sätze kaum eine Kontradiktion angeben lässt.
– *normal-sprachlicher (tautologischer) Satz*:
z. B.: ‚alle Junggesellen sind unverheiratet'.
Intension (in verschiedenen Variationen):
• der Begriff „unverheiratet" ist Teilmenge (Teilbegriff) des Begriffs „Junggeselle"
• die Eigenschaftsmenge „unverheiratet" ist Teilmenge der Eigenschaftsmenge „Junggeselle"
• der Begriff „unverheiratet" ist im Begriff „Junggeselle" enthalten

– *formal-sprachlicher Satz*:
extensionale Form: z. B. ‚$K(F) \subset_{pd} K(G)$'
intensionale Form: ‚$E(G) \subset_{pd} E(F)$'
Intension: $E(G) \subset_{pd} E(F)$
normal formuliert: Der Begriff G ist (definitorisch) Teil des Begriffs F.
exakter: Die Eigenschafts-Menge G ist (definitorisch) Teilmenge der Eigenschafts-Menge F.

3.2.2 Molekül-Satz

Kommen wir jetzt zu den *Molekular-Sätzen*, die aus *mehreren* Sätzen zusammengesetzt sind. Ich unterscheide auch bei der Intension die *schwache* und *starke* Variante, als schwache die *implikative Intension* und als starke die *mengen-relationale Intension.* Hier mache ich diese Unterscheidung sogar bei den normal-sprachlichen Sätzen.

3.2.2.1 Individual-Satz

– *normal-sprachlicher Satz*: ‚Wenn Sokrates Philosoph ist, dann ist Sokrates auch Mensch'. (Ich gehe dabei davon aus, dass Sokrates *definitorisch* Philosoph ist und ein Philosoph *definitorisch* ein Mensch ist.)

Auch hier ergibt sich wieder das Problem mit der Wenn-Dann-Form. So wie ein W*enn-dann*-Satz *extensional* schwierig zu deuten ist, so auch *intensional*: die *Mengen-Deutung* bzw. Enthalten-Deutung ist jedenfalls systematischer, wenn auch komplizierter.

• schwache (implikative) Intension:
Wenn der Begriff „Sokrates" den Begriff „Philosoph" enthält, dann enthält der Begriff „Sokrates" auch den Begriff „Mensch". Bzw.: wenn der Begriff „Philosoph" Teil des Begriffs „Sokrates" ist, dann ist auch der Begriff „Mensch" Teil des Begriffs „Sokrates".
halb-formal:
$E(\text{Philosoph}) \subset E(\text{Sokrates}) \rightarrow E(\text{Mensch}) \subset E(\text{Sokrates})$, denn: $E(\text{Mensch}) \subset E(\text{Philosoph})$.
Als strenger Schluss geschrieben:
$E(\text{Philosoph}) \subset E(\text{Sokrates}) \wedge E(\text{Mensch}) \subset E(\text{Philosoph}) \Rightarrow E(\text{Mensch}) \subset E(\text{Sokrates})$

Also vereinfacht: $E(\text{Mensch}) \subset E(\text{Philosoph}) \subset E(\text{Sokrates})$

• starke (mengen-relationale) Intension:
(der Begriffsverhalt), dass der Begriff „Sokrates" den Begriff „Mensch" enthält, enthält den Begriffsverhalt, dass der Begriff „Sokrates" den Begriff „Philosoph" enthält. Bzw. einfacher: dass der Begriff „Philosoph" Teil des Begriffs „Sokrates" ist, ist enthalten darin, dass der Begriff „Mensch" Teil des Begriffs „Sokrates" ist.
halb-formal: $[E(\text{Philosoph}) \subset E(\text{Sokrates})] \subset [E(\text{Mensch}) \subset E(\text{Sokrates})]$

Problematischer wird es, wenn z. B. ein Teilsatz nicht analytisch, sondern synthetisch ist, darauf gehe ich aber hier nicht ein.

– *formaler Satz*:
Extensionale Form, z. B.: ‚$x_i \in F \rightarrow x_i \in G$' , genauer $x_i \in_{pd} F \rightarrow_{df} x_i \in_{pd} G$
Intensionale Form: ‚$E(F) \subset_{pd} E(x_i) \rightarrow_{pd} E(G) \subset_{pd} E(x_i)$'
Ich unterscheide wieder die *implikative* schwache Intension (als Wenn-dann-Beziehung) und die *mengen-relationale* starke Intension (als Teilmengen-Beziehung):
• schwache, implikative Intension: $E(F) \subset_{pd} E(x_i) \rightarrow_{pd} E(G) \subset_{pd} E(x_i)$
Wenn der Begriff F Teil des Begriffs x_i ist, dann ist auch der Begriff G Teil des Begriffs x_i.
• starke, mengenrelationale Intension: $[E(F) \subset_{pd} E(x_i)] \subset_{pd} [E(G) \subset_{pd} E(x_i)]$

3.2.2.2 *Allgemein-Satz*
– *normal-sprachlicher Satz*: ‚Wenn ein Affe ein Tier ist, dann ist er auch ein Lebewesen' (ich gehe davon aus, dass ein Affe definitorisch ein Tier ist und ein Tier definitorisch ein Lebewesen).
• schwache (implikative) Intension: Wenn der Begriff „Tier" Teil des Begriffs „Affe" ist, dann ist auch der Begriff „Lebewesen" Teil des Begriffs „Affe".
• starke (mengen-relationale) Intension: (der Begriffsverhalt), dass der Begriff „Lebewesen" Teil des Begriffs „Affe" ist, enthält den Begriffsverhalt, dass der Begriff „Tier" Teil des Begriffs „Affe" ist.
Problematischer wird es wiederum, wenn z. B. ein Teilsatz nicht analytisch, sondern synthetisch ist, darauf gehe ich aber hier nicht ein.

– *formaler Satz*
Extensionale Form, z. B.: ‚$F \subset_{pd} G \rightarrow_{pd} F \subset_{pd} H$'
Intensionale Form: ‚$E(G) \subset_{pd} E(F) \rightarrow_{pd} E(H) \subset_{pd} E(F)$'
Ich unterscheide die *implikative* schwache Intension (als Wenn-dann-Beziehung) und die *mengen-relationale* starke Intension:
• schwache (implikative) Intension: $E(G) \subset_{pd} E(F) \rightarrow_{pd} E(H) \subset_{pd} E(F)$, d. h. wenn der Begriff G Teil des Begriffs F ist, dann ist auch der Begriff H Teil des Begriffs F.
• starke (mengen-relationale) Extension: $[E(G) \subset_{pd} E(F)] \subset_{pd} [E(H) \subset_{pd} E(F)]$

Ich möchte das Thema des *Definitions-Index* ‚pd' bzw. ‚df' noch einmal systematischer aufgreifen, in Bezug auf die gerade besprochenen *analytischen* Sätze.
– normaler, inhaltliche Sprache
z. B. ‚alle Junggesellen sind Männer'.
Hier braucht man den Index nicht zu setzen, denn normalerweise erkennt ein kompetenter Sprecher (bzw. ein normal gebildeter Mensch), ob hier ein material-analytisches Verhältnis vorliegt oder nicht. Er weiß, dass ein Junggeselle als ein unverheirateter Mann *definiert* ist. Man muss also *nicht* sagen: ‚Alle Junggesellen sind *durch Definition* Männer'.
– halb-formale Sprache
z. B. extensional: K(Junggeselle) $\subset_{pd}$ K(Mann)
D. H.: Die Klasse der Junggesellen ist *per definitionem* Teilmenge der Klasse der Männer.
In diesem Fall sollte man zur Präzision besser den Index setzen, es ist aber nicht wirklich notwendig.

Intensional sieht es etwas anders aus. Zunächst würde man auch den *Index* schreiben:
E(Mann) $\subset_{pd}$ E(Junggeselle), denn es ist eben ein definitorisch-analytisches Verhältnis, weder ein synthetisches noch ein formal-analytisches.
Nun könnte man einwenden, dass Relationen zwischen Eigenschaften *immer* material-analytisch sind, immer auf Definitionen beruhen – das habe ich aber schon kritisiert (in 3.1).

Doch könnte man weiter einwenden, dass sich aus der Verwendung des *Teilmengen-Zeichens* $\subset$ ergibt, dass hier ein material-analytische Relation vorliegt (anders als z. B. bei $\not\subset$, das bei material-analytischen *und* synthetischen Relationen vorkommen kann). Dies ist zwar richtig, macht es aber unnötig kompliziert – besser setzt man in solchen Fällen den Index.

– formale Sprache

z. B. extensional $K(F) \subset_{pd} K(G)$ bzw. intensional $E(G) \subset_{pd} E(F)$

Hier *muss* man den Index setzen, wenn man ‚$K(F) \subset_{pd} K(G)$' als material-analytischen Satz meint, denn dies ist aus der Form absolut nicht zu ersehen. Andererseits könnte man auch bestreiten, dass ein solcher formaler Satz generell überhaupt material-analytisch sein kann, jedenfalls wenn man nicht eine konkrete Interpretation mitliefert, z. B. F = Junggeselle und G = Mann.

Intensional könnte man wieder die Argumente von oben heranziehen und ggf. auch, ohne Index, nur $E(G) \subset E(F)$ schreiben.

Bei $K(F) \subseteq K(F)$ erkennt der logisch geschulte Mensch dagegen sofort, das hier ein *formal*-analytischer Satz vorliegt. Ich kennzeichne diesen Satz aber, um es für alle Leser direkt ersichtlich zu machen, durch 2 hochgestellte ++ für Tautologie, also: $K(F) \;^{+}{\subseteq}^{+}\; K(F)$.

Diese Ausführungen bezogen sich auf *Atom-Sätze* (oberflächen-strukturell betrachtet), aber für Molekül-Sätze gilt Entsprechendes.

3.3 SYNTHETISCHE SÄTZE

Von großer Bedeutung ist die Intension nur bei *analytischen* Sätzen, vor allem *material-analytischen* Sätzen. Bei *synthetischen* Sätzen ist die Extension ungleich wichtiger als die Intension, diese lässt sich auch nur sehr schwer bestimmen, wie ich gleich zeigen werde. Ich will daher hier nicht die ganze Systematik unterschiedlicher Satzarten durchgehen, sondern beschränke mich auf die Analyse *eines* (normal-sprachlichen) Satzes.

Nehmen wir als Beispiel den *synthetischen* Satz: ‚Einige Quadrate sind blau'.

Zunächst zum Vergleich einen *analytischen* Satz: ‚Alle Quadrate sind rechteckig'.

Zur Erinnerung, hier ist die Intension (der Begriffsverhalt):

Die Eigenschaft „rechteckig" ist Teil der Eigenschaft „quadratisch".

Kann man bei dem Satz ‚einige Quadrate sind blau' entsprechend die Intension bestimmen als: Die Eigenschaft „blau" ist Teil der Eigenschaft „quadratisch"? Offensichtlich nicht, denn die Intension soll ja die *definitorischen* (bzw. als wesentlich erachteten) Eigenschaften angeben. Für ein Quadrat ist es aber nicht definierend, dass es blau ist, es kann genau so gut rot, grün oder von jeder anderen Farbe sein. Was ist aber dann die Intension dieses Satzes?

Man könnte die Frage stellen, ob ein solcher synthetischer Satz *überhaupt eine Intension* hat, generell ob synthetische Sätze eine Intension besitzen oder nur extensional zu deuten sind. Aber die mögliche Lösung, synthetische Sätze haben keine Intension, wäre doch sehr unbefriedigend.

Zunächst bietet sich nur eine *„negative" Intension* an, nämlich:

Intension(‚einige Quadrate sind blau') = die Eigenschaft „blau" ist *nicht* Teil der Eigenschaft „quadratisch".

Halb-formal wäre zu schreiben: $E(\text{blau}) \not\subset E(\text{quadratisch})$.

Das könnte man übersetzen: *Einige* Teilbegriffe von „blau" sind nicht Teilbegriffe von „quadratisch". Aus $M \not\subset N$ folgt nicht automatisch $N \not\subset M$, aber bei unserem Beispiel trifft beides zu. Man könnte also die Intension noch erweitern, als:

$$E(\text{blau}) \not\subset E(\text{quadratisch}) \wedge E(\text{quadratisch}) \not\subset E(\text{blau})$$

Nun ergibt sich hier ein Problem: M $\not\subset$ N heißt genau: *mindestens ein* Element von M ist *nicht* Begriff von N, es ist somit möglich, dass auch *alle* Elemente von M *nicht* Elemente von N sind.

Dieser Fall ist hier aber nicht gegeben: „quadratisch" und „blau" haben z. B. die Eigenschaft „materiell" gemeinsam, beide sind Eigenschaften von materiellen – und nicht von geistigen – Objekten, man kann also nicht postulieren: *alle* Teilbegriffe von „blau" sind *nicht* Teilbegriffe von „quadratisch" (und umgekehrt), man kann *keinen Ausschluss* zwischen ihnen feststellen. Ich werde in 4.4 noch zeigen, dass es intensional im Grunde gar keinen Ausschluss gibt.

Korrekt ist vielmehr: *genau einige* Teile von „blau" sind Teilbegriffe von „quadratisch" und umgekehrt. Nun trifft dies den Sachverhalt, den man *Überschneidung* nennt. Mit dem Konzept der Überschneidung wäre die Intension des Beispielsatzes folgendermaßen zu fassen:

Intension(‚einige Quadrate sind blau') = die Eigenschaft „blau" und die Eigenschaft „quadratisch" überschneiden sich.

So käme man also doch zu einer *positiven* Intension.

Für Überschneidung (als Relation, nicht als Vereinigungs-Menge!) gibt es in der Mengenlehre kein eingeführtes Symbol; ich verwende hierfür, wie schon erläutert, als Symbol $\sqcap$. Man könnte dann halb-formal angeben:

Intension(‚einige Quadrate sind blau') = E(blau) $\sqcap$ E(quadratisch)

Wir können die intensionalen Beziehungen auch mit *Modalbegriffen* kennzeichnen. Zunächst zurück zum *analytischen* Satz ‚alle Quadrate sind rechteckig'. Hier wäre als Intension modal anzugeben: die Eigenschaft „rechteckig" ist *notwendig* in Bezug auf die Eigenschaft „quadratisch".

Beim synthetischen Satz ‚einige Quadrate sind blau' wäre als Intension zunächst anzusetzen:

Die Eigenschaft „blau" ist *nicht notwendig* in Bezug auf die Eigenschaft „quadratisch".
Ebenso gilt aber: Die Eigenschaft „blau" ist *nicht unmöglich* (= möglich) in Bezug auf die Eigenschaft „quadratisch".

Wenn etwas *möglich und nicht notwendig* ist, gilt das in der Philosophie aber als *zufällig* oder *kontingent*. So kann man bestimmen:

Die Intension von „einige Quadrate sind blau' ist:

Die Eigenschaft „blau" ist *kontingent* in Bezug auf die Eigenschaft „quadratisch".

Bei manchen Eigenschaften ist natürlich nicht unmittelbar klar, ob sie notwendig oder kontingent in Relation zu anderen Eigenschaften sind. Ist z. B. der Begriff der Sterblichkeit im Begriff des Menschen enthalten? Man könnte ein Ja und ein Nein vertreten.

Wir haben oben von der *Überschneidung* von Eigenschaften (bzw. Eigenschaftsmengen) gesprochen; diese kann aber bei analytischen wie bei synthetischen Sätzen vorkommen. Zur Abgrenzung könnte man dann z. B. für unseren synthetischen Beispielsatz festlegen: die Eigenschaft „rot" und die Eigenschaft „quadratisch" schneiden sich *zufällig*.

Was hier an einem einzelnen Beispiel-Satz gezeigt wurde, gilt generell für *synthetische* Sätze, für Atom- wie für Molekular-Sätze, natürlich auch für formale: Sie haben *keine spezifische* Intension. Z. B. besitzt auch der aussagen-logische Molekül-Satz ‚A $\rightarrow$ B' (bzw. ‚X $\rightarrow$ Y') keine spezifische Intension; sie wäre am ehesten zu bestimmen als: Der Satz ‚A' und der Satz ‚B' stehen in kontingenter Relation.

Dieses Resultat mag zunächst befremdlich wirken, aber es folgt eben daraus, dass die *spezifische* Intension auf analytische Sätze beschränkt wurde. Nur dann ist es eben möglich, eine umfassende Theorie der Intension vorzulegen, die Wörter (Zeichen) wie Sätze gleichermaßen analysiert.

Es gäbe für *synthetische* Sätze allerdings auch eine – einfachere – Alternative, die *Intension* zu bestimmen, und zwar im Sinne eines *gemischt extensional-intensionalen* Ansatzes.

Danach bedeutet Intension eines Satzes, dass einem *Objekt* (extensional) eine *Eigenschaft* (intensional) zugeordnet wird.

Im Beispiel ist dann die Intension von ‚einige Quadrate sind blau':

Die Eigenschaft „blau" kommt einigen Elementen der Klasse der Quadrate zu.

Dies funktioniert auch bei *analytischen* Sätzen:

Danach ergibt sich z. B. als Intension von ‚Alle Junggesellen sind unverheiratet':

Die Eigenschaft „unverheiratet" kommt allen Junggesellen (bzw. allen Elementen der Klasse der Junggesellen) zu. Und nicht, wie es *streng* intensional heißt:

Die Eigenschaft „unverheiratet" ist Teilmenge der Eigenschaft „Junggeselle".

Aber diese *extensional-intensionale* Kombination ist eben keine *rein intensionale* Lösung.

Abschließend hierzu: Die Intension eines Satzes betrifft nur *analytische* Begriffs-Beziehungen, die auf *Definitionen* oder *logischen Gesetzen* beruhen. *Synthetische* Eigenschaften von Objekten bzw. reale, synthetische, erst recht *quantitative* Beziehungen zwischen Objekten, werden von der Intension nicht erfasst, sondern nur von der Extension. So gibt es intensional z. B. keinen Unterschied zwischen einem Satz wie ‚75% der Quadrate sind blau' und dem Satz ‚25% der Quadrate sind blau'.

Wir haben gezeigt, dass dennoch auch *synthetische* Sätze eine *Intension* besitzen, wenn sie auch *unspezifisch* ist. Ebenso haben wir die Auffassung vertreten, dass auch *analytische* Sätze eine *Extension* besitzen. Man könnte beide Auffassungen kritisieren und behaupten: synthetische Sätze besitzen nur eine Extension, analytische Sätze besitzen nur eine Intension. Ich halte diese These aber nicht für sinnvoll, ohne sie hier im Einzelnen zu diskutieren.

3.4 THEORIE: INTENSION EINES SATZES = SEIN WAHRHEITSWERT IN ALLEN MÖGLICHEN WELTEN

3.4.1 Intension als Wahrheitstafel

Um die Schwierigkeiten einer *begriffs-orientierten* Intensions-Definition zu umgehen, haben Teile der neueren Logik folgende Bestimmung vorgeschlagen:

Die Intension eines Satzes ist sein Wahrheitswert in *allen möglichen* Welten,
d. h. aber der Verlauf der Wahrheitswerte in der *Wahrheitstafel*.
Oder pointiert: Die Intension eines Satzes ist seine *Wahrheitstafel*.

Ich werde diese Theorie am Beispiel des aussagen-logischen Satzes ‚$X \rightarrow Y$' diskutieren. Dies könnte inhaltlich z. B. folgender Satz sein: ‚Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich'.

Allerdings müsste ich ganz korrekterweise ‚$X \rightarrow_{pd} Y$' schreiben, denn die nachfolgenden Erläuterungen gelten in vollem Umfang nur bei einem *analytischen*, z. B. (definitorisch) material-analytischen Satz wie eben ‚$X \rightarrow_{pd} Y$' bzw. äquivalenten Sätzen wie ‚$\neg X \vee_{pd} Y$'.

Da es aber die Darstellung viel unübersichtlicher machen würde, wenn ich ständig den *Index* ‚$_{pd}$' anhängen würde, verzichte ich darauf (bitte ihn aber quasi in Gedanken zu setzen).

Umschreibt man die Wahrheitstafel, so ergibt sich für ‚$X \rightarrow Y$' :

Die Intension von ‚$X \rightarrow Y$' ist:

wahr in der Welt $X \wedge Y$,
falsch in der Welt $X \wedge \neg Y$
wahr in der Welt $\neg X \wedge Y$,
wahr in der Welt $\neg X \wedge \neg Y$

Gibt man nur den *Verlauf der Wahrheitswerte* (in der Wahrheitstafel) an,
so ergibt sich als Intension von ‚$X \rightarrow Y$': wahr – falsch – wahr – wahr.

Manchmal wird auch differenziert: Die Intension eines Satzes ist eine *Funktion*, die ihm in jeder möglichen Welt einen Wahrheitswert zuweist. Aber dies ändert nichts Grundsätzliches an der Theorie.

Zunächst ist zu sagen, dass diese Theorie letztlich nur für *Molekular-Sätze* gilt, die mit *aussagen-logischen* Junktoren wie $\rightarrow$, $\wedge$ oder $\vee$ verbunden sind. Das bedeutet natürlich eine erhebliche Einschränkung, wie unten noch diskutiert wird.

3.4.2 Extension und Intension

Es besteht selbstverständlich ein *Zusammenhang* zwischen folgenden Theorien:

1) die Extension eines Satzes ist sein *Wahrheitswert* (vgl. 2.4).
2) die Intension eines Satzes ist sein *Wahrheitswert in allen Welten*.

Nun muss man allerdings sehen, dass es zwischen diesen beiden Theorien einen gravierenden Unterschied gibt:

Die Extensions-Theorie ist *empirisch*, man kann empirisch überprüfen, ob ein Satz wahr oder falsch ist (Ausnahme: analytische Sätze). Und es gilt die Einschränkung: Für einen *formalen* Satz ist gar nicht zu sagen, ob er wahr oder falsch ist, man muss ihn vorher inhaltlich interpretieren.

Die Intensions-Theorie ist *theoretisch* bzw. *analytisch*, die Wahrheitswerte-Verteilung in allen Welten ist unabhängig davon, ob der Satz real wahr oder falsch ist (wiederum Ausnahme: analytische Sätze, ein tautologischer Satz ist auch real bzw. empirisch wahr).

Allerdings könnte man auch bei der Intension indirekt eine empirische Prüfung vornehmen: Ein Satz ‚$X \rightarrow Y$' ist zwar wahr in 3 möglichen Welten, aber es kann in einem konkreten Fall sein, dass real nur 2 dieser Welten belegt sind, dass also z. B. auch die engere Struktur $X \leftrightarrow Y$ erfüllt ist; dies reicht zur Wahrheit von ‚$X \rightarrow Y$', weil eben $(X \leftrightarrow Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$.

3.4.3 Umdeutung der Wahrheitswerte

Nun ist es recht kompliziert, immer anzugeben: Ein Satz ‚$X \rightarrow Y$' ist in dieser Welt wahr und in jener Welt falsch. Einfacher kann man *direkt* auf die *Welten* bzw. auf *Sachverhalte* Bezug nehmen und sie – wenn der Satz falsch ist – negieren.

So ergibt sich für den Satz ‚$X \rightarrow Y$':

Extension: $X \rightarrow Y$ oder, falls der Satz falsch ist: $\neg(X \rightarrow Y)$

Intension von ‚$X \rightarrow Y$': $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$,

also eine Disjunktion der „wahren" Welten, der Welten, in denen ‚$X \rightarrow Y$' wahr ist.

Von dieser Interpretation gehe ich im Folgenden aus, allerdings bedeutet sie bereits eine Abschwächung der ursprünglichen Theorie.

3.4.4 Äquivalenz von Sätzen

Eine besondere Frage für Extension / Intension ist, wann 2 Sätze die *gleiche* Extension / Intension besitzen. Betrachten wir die beiden *äquivalenten* Sätze: $X \rightarrow Y \Leftrightarrow \neg X \vee Y$

Nach der hier diskutierten Theorie gilt:

Extension(‚$X \rightarrow Y$') = Extension(‚$\neg X \vee Y$')

Denn wenn der eine Satz wahr ist, ist es der andere auch und umgekehrt.

Intension(‚$X \rightarrow Y$') = Intension(‚$\neg X \vee Y$'),

Denn die Sätze sind in den gleichen Welten wahr bzw. falsch.

Generell ergibt sich: Intension gleich $\Rightarrow$ Extension gleich, das Umgekehrte gilt nicht.

3.4.5 Kritik der intensionalen Gleichheit von *äquivalenten* Sätzen

Ich möchte die Behauptung der intensionalen Gleichheit von ‚$X \rightarrow Y$' und ‚$\neg X \vee Y$' kritisieren:

Intension(‚$X \rightarrow Y$') und Intension(‚$\neg X \vee Y$') ist nicht gleich,
denn ‚$X \rightarrow Y$' und ‚$\neg X \vee Y$' haben verschiedene Bedeutung.

Dass die Sätze‚$X \rightarrow Y$' und ‚$\neg(X \wedge \neg Y)$' eine unterschiedliche Intension, eine unterschiedliche Bedeutung haben, würde auch folgendes Experiment zeigen: die wenigsten Menschen (wenn nicht gerade Logiker) würden sicher ‚$X \rightarrow Y$' und ‚$\neg X \vee Y$' als bedeutungsgleich ansehen.

Man kann da einen Vergleich ziehen zu *Zeichen* / *Wörtern*. Ich möchte von *äquivalenten* Wörtern sprechen; diese kann man austauschen, ohne dass sich der Wahrheitswert eines Satzes verändert.

Nehmen wir wieder das bekannte Beispiel von Frege: ‚Abendstern' und ‚Morgenstern'. Frege erklärte: Die Intension (der Sinn) dieser beiden Wörter ist unterschiedlich, aber die Extension (die Referenz) ist gleich, beide Wörter bezeichnen die Venus. Ob das auch für im strengen Sinn *synonyme*, so genannte „bedeutungsgleiche" Wörter wie ‚Briefträger' und ‚Postbote' gilt, möchte ich hier nicht untersuchen.

Man könnte daher *umgekehrt* festlegen, dass gerade die *Extension* die Wahrheitswerte in allen möglichen Welten angibt:

‚$X \rightarrow Y$'
Intension: $X \rightarrow Y$
Extension: $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$

‘$\neg X \vee Y$'
Intension: $\neg X \vee Y$
Extension: $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$,

Dann wäre die Intension von ‚$X \rightarrow Y$' und ‚$\neg X \vee Y$' *unterschiedlich*, die Extension aber *gleich*, so wie nach Frege bei ‚Morgenstern' und ‚Abendstern'.

3.4.6 Kritik der extensionalen Gleichheit von *äquivalenten* Sätzen

Nach meiner Theorie gilt aber: Auch die *Extension* von *äquivalenten* Wörtern ist ungleich, jedenfalls wenn man von der primären, nämlich *subjektiven* Extension ausgeht. So haben nach meiner Analyse die Wörter ‚Morgenstern' und ‚Abendstern' nicht nur eine unterschiedliche Intension, sondern auch eine unterschiedliche Extension.

Und das Entsprechende gilt für Sätze:

Intension(‚$X \rightarrow Y$') $\neq$ Intension(‚$\neg X \vee Y$'), Extension(‚$X \rightarrow Y$') $\neq$ Extension(‚$\neg X \vee Y$')

3.4.7 Intension als Information?

Eine andere Möglichkeit, Intension (und Extension) über Wahrheitswerte zu definieren, wäre noch die folgende: Man bestimmt die *Extension* über die *positiven* Welten und man bestimmt die *Intension* über die *negativen* Welten, entsprechend der Definition der Information (wie sie in Kap. 3 erläutert wird): Danach entspräche die Intension eines Satzes seiner Information.

Dann ergibt sich:

‘$X \rightarrow Y$'
Intension: $X \wedge \neg Y$
Extension $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$

‘$\neg X \vee Y$'
Intension: $X \wedge \neg Y$
Extension: $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$

Hier sind also die Intension und Extension der beiden äquivalenten Sätze *gleich*.
Intension(‚$X \rightarrow Y$') = Intension(‚$\neg X \vee Y$'), Extension(‚$X \rightarrow Y$') = Extension(‚$\neg X \vee Y$').

Das widerspricht aber völlig meiner These, dass Intension und Extension von logisch *äquivalenten* Sätzen (normalerweise) un*gleich* sind.

Generell: In einem Modell der Wahrheitswerte ist die intensionale und extensionale *Ungleichheit* von ‚$X \rightarrow Y$' und ‚$\neg X \vee Y$' gar nicht darzustellen.

Dabei weise ich noch einmal darauf hin, die obigen Aussagen gelten nur für *analytische* Sätze wie ‚$X \rightarrow_{pd} Y$' oder ‚$X \Rightarrow X$'. *Synthetische* Sätze wie ‚$X \rightarrow Y$' haben nach meiner Theorie gar *keine spezifische Intension*. Es macht daher keinen Sinn, bei zwei *äquivalenten* synthetischen Sätzen wie ‚$X \rightarrow Y$' und ‚$\neg X \vee Y$' zu sagen, ihre Intension sei gleich oder ungleich.

Dennoch kann man diese Sätze in ihrer Bedeutung unterscheiden. Denn ‚$X \rightarrow Y$' hat eine andere extensionale Bedeutung, eine andere *Extension* als ‚$\neg X \vee Y$'. Der Satz ‚$X \rightarrow Y$' bezeichnet *subjektiv* einen anderen Sachverhalt als ‚$\neg X \vee Y$', erfasst ihn mit unterschiedlichen Merkmalen, auch wenn die Sachverhalte objektiv übereinstimmen.

3.4.8 Eingeschränkte Theorie

Ich habe schon kurz angemerkt: Die Theorie, dass die Intension eines Satzes sein Wahrheitswert in allen möglichen Welten ist, passt nur auf bestimmte *Molekül-Sätze*, und zwar solche, die mit *aussagen-logischen, wahrheitswertfunktionalen* Junktoren wie $\rightarrow$, $\wedge$ oder $\vee$ formalisiert sind. Denn nur bei solchen Sätzen, wie z. B. ‚$X \rightarrow Y$', sind (in der Wahrheitstafel) die möglichen Welten und der jeweilige Wahrheitswert des Satzes genau erfasst. Dies ist nicht gegeben bei anderen Molekular-Sätzen wie z. B. Kausal-Sätzen, vor allem aber nicht bei *Atom-Sätzen*. Für einen Atom-Satz wie z. B. ‚Sokrates ist ein Philosoph' (formal: ‚$x \in F$') sind – jedenfalls nach der gängigen Auffassung – allenfalls zwei Welten definiert, nämlich:
$x \in F$ und $\neg(x \in F)$ bzw. $x \notin F$. Es gibt also nur *eine* positive Welt, somit wären Extension und Intension von ‚$x \in F$' gleich, beide: $x \in F$, ein sicher unhaltbares Ergebnis.

Allenfalls wenn man im Sinne einer einheitlichen *funktionalen* Logik (vgl. 0-4-4) einen Atomsatz als ‚$x \rightarrow F$' schreiben würde, wäre die Theorie auch auf Atom-Sätze anzuwenden.

Fazit:
Bei der verwandten Theorie, die *Extension eines Satzes* sei sein *Wahrheitswert*, ergab sich das folgende Problem: *alle* wahren Sätze haben dieselbe Extension (und natürlich auch alle falschen), unabhängig von ihrem speziellen Inhalt.

Nach der Theorie, die Intension eines Satzes sei sein Wahrheitswert in allen Welten, ergibt sich ein entsprechendes Problem: alle logisch *äquivalenten* Sätze haben dieselbe Intension (und Extension).

Hier müssen wir zwei Versionen unterscheiden:

- Eine mildere Version: Danach sollen nur *inhaltlich bestimmte äquivalente* Sätze intensional (und extensional) gleich sein. Demnach wären z. B. ‚Wenn es regnet, ist die Straße nass' und ‚Es regnet nicht, oder die Straße ist nass' intensional gleich.
- Eine strikte Version: Der gemäß haben zwei (formale) äquivalente Sätze wie ‚$X \rightarrow Y$' und ‚$\neg X \vee Y$' (mit der gleichen Wahrheitstafel) dieselbe intensionale Bedeutung, *unabhängig vom Inhalt* von X und Y. Im Beispiel hieße das: Ein Satz wie ‚wenn es regnet, ist die Strasse nass" hätte dann dieselbe Intension wie ‚wenn es schneit, ist die Strasse weiß'. Es sollen aber auch alle *formal-analytischen* Sätze wie ‚$X \Rightarrow X$' und ‚$\neg(X \wedge \neg X)$' oder ‚$X \vee \neg X$' dieselbe Intension besitzen.

M. E. sind beide Theorien falsch: äquivalente *synthetische* Sätze haben gar *keine spezifische Intension*, unterscheiden sich aber *extensional*. Und bei äquivalenten *analytischen* Sätzen ist die Intension unterschiedlich.

Sonst hätten alle logischen Gesetze, also alle Tautologien dieselbe Bedeutung – nämlich „wahr" in jeder möglichen Welt. Man fragt sich, warum man dann überhaupt unterschiedliche Gesetze aufstellt, *ein* Gesetz würde doch genügen.

Es bleibt festzuhalten: Für die Theorie, die Intension eines Satzes ist sein Wahrheitswert in allen möglichen Welten, gilt dasselbe wie für die Theorie, die Extension eines Satzes ist sein Wahrheitswert (in der realen Welt): diese Theorien sind elegant, gerade auch in ihrer Verknüpfung – aber sie sind unhaltbar.

Es erfolgt dabei eine *unzulässige Vermischung von Bedeutung und Wahrheitswert*. Man kann allenfalls sagen: Die Wahrheitsstruktur eines Satzes ist ein Teil der Bedeutung, aber sie macht nicht die gesamte Bedeutung aus. Gerade bei normal-sprachlichen Sätzen können wir nicht vom Inhalt abstrahieren. Bei formal-sprachlichen Sätzen könnte man behaupten: Gleiche Wahrheitsstruktur ist *notwendige* Bedingung für Bedeutungsgleichheit, aber eben nicht *hinreichende* Bedingung.

Ich bleibe also bei meinem Modell:
Extension eines Satzes ist ein *Sachverhalt*, *Intension* ist ein *Begriffsverhalt*,
parallel zu Extension und Intension von Zeichen bzw. Wörtern.

4. Intension vs. Extension von Sätzen

Bisher habe ich überwiegend nur *Kopula-Sätze* bzw. *Kopula-Relationen* der (*positiven*) Form „X ist ein Y" berücksichtigt. Ich will nachfolgend aber etwas weiter ausholen (z. B. auch die *negative* Form „X ist kein Y" oder „X ist ein Y und Y ist ein X" berücksichtigen). Dabei stelle ich die *intensionale* Betrachtung in den Vordergrund und mache von dort aus einen Vergleich mit *extensionalen* Sätzen. (vgl. hierzu auch die extensionale Analyse in 1-2-0-5.)

Überwiegend gehe ich von normal-sprachlichen *material-analytischen* Sätzen aus, weil nur die für die Intension wirklich relevant ist. So muss korrekterweise auch immer der *Index* ‚pd' für (per Definition) oder ‚= df' (für: ist definiert als) gesetzt werden, auch wenn es die Formeln etwas unübersichtlicher macht.

Zur Veranschaulichung verwende ich *Euler-Kreise*. Die Euler-Kreise entsprechen der Mengenlehre. Logisch betrachtet entsprechen sie der *Positiv-Implikation*, nicht der *normalen Implikation*. Denn es werden nur die jeweils relevanten (positiven) Welten mit einbezogen, nicht immer alle möglichen 4 Welten; die Kreise beziehen sich immer auf die intensionale Fassung.

4.1. GLEICHHEIT

• Intensional

Das ‚E' – z. B. in ‚E(quadratisch)' – steht wie gesagt für *Eigenschaft* oder *Begriff* bzw. Eigenschaftsmenge, Begriffsmenge bzw. Eigenschaftsklasse, Begriffsklasse.

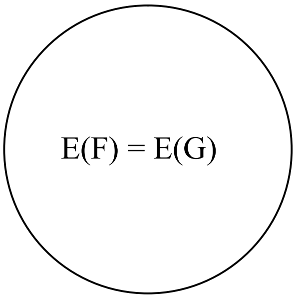
Z. B. ist die Eigenschaftsmenge „quadratisch" (vereinfacht) als Vereinigungsmenge der Eigenschaftsmengen „rechteckig" und „gleichseitig" definiert.

$$E(\text{quadratisch}) =_{df} E(\text{rechteckig}) \cup E(\text{gleichseitig})$$

Allgemein gilt in der Mengenlehre: $(M = N) \Leftrightarrow M \subseteq N \wedge N \subseteq M$. D. h. für Begriffsmengen:

$$E(F) =_{pd} E(G), \text{ bedeutet: } E(F) \subseteq_{pd} E(G) \wedge E(G) \subseteq_{pd} E(F)$$

z. B. Intension des Satzes: ‚Ein Postbote ist dasselbe wie ein Briefträger':
E(Briefträger) $=_{pd}$ E(Postbote); der Begriff „Briefträger" ist gleich dem Begriff „Postbote".
Oder: die Eigenschaftsmenge „Briefträger" ist gleich der Eigenschaftsmenge „Postbote".
(Man könnte auch die intensionale Gleichheit von „Briefträger" und „Postbote" bezweifeln.)



• Extensional (‚K' steht für Klasse)

$K(F) =_{pd} K(G)$, bedeutet: $K(F) \subseteq_{pd} K(G) \wedge K(G) \subseteq_{pd} K(F)$

z. B.: K(Briefträger) $=_{pd}$ K(Postbote);
die Klasse der Briefträger ist gleich der Klasse der Postboten.

4.2 TEILMENGE

• Intensional

$E(G) \subset_{pd} E(F)$

z. B. Intension des Satzes: ‘Eine Rose ist eine Blume’:
E(Blume) $\subset_{pd}$ E(Rose);
der Begriff „Blume" ist Teilmenge (Teilbegriff) des Begriffs „Rose".
Man kann das auch so formulieren: Alle Teilbegriffe von „Blume" sind Teilbegriffe von „Rose".

Nun gilt allgemein: $M \subset N \Rightarrow N \not\subset M$
Also aus einer *positiven* Teilmengen-Relation folgt logisch eine *negierte* Teilmengen-Relation.

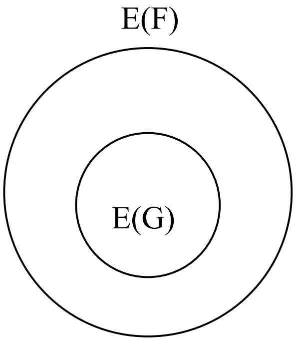
Dabei bedeutet $N \not\subset M$: (mindestens) *einige* Elemente von N sind *nicht* Elemente von M. $M \subset N$ schließt eben aus, dass auch $N \subset M$, also dass *alle* Elemente von N Elemente von M sind, wogegen $M \subseteq N$ nicht ausschließt, dass auch gilt $N \subseteq M$. Denn $M \subset N$ steht für die *echte* Teilmenge, $M \subseteq N$ für die *unechte* Teilmenge, die $M = N$ nicht ausschließt.

Für Begriffsmengen bedeutet das:
$E(G) \subset_{pd} E(F) \Rightarrow E(F) \not\subset_{pd} E(G)$
E(Blume) $\subset_{pd}$ E(Rose) $\Rightarrow$ E(Rose) $\not\subset_{pd}$ E(Blume)

Dabei ist zu berücksichtigen: Die (positive) Teilmengen-Relation $E(G) \subset_{pd} E(F)$ kommt nur bei *material-analytischen* Relationen vor.

Dagegen gibt es zwei Möglichkeiten bei der *negierten* Teilmengen-Relation $E(F) \not\subset_{pd} E(G)$:
– *material-analytisch*: z. B. E(Rose) $\not\subset_{pd}$ E(Blume)
der Begriff „Rose" ist nicht Teilmenge des Begriffs „Blume".
– *synthetisch*: z. B. E(rot) $\not\subset$ E(Rose)

der Begriff „rot“ ist nicht Teilmenge des Begriffs „Rose“
hier gilt aber auch umgekehrt: E(Rose) $\not\subset$ E(rot).
Denn es gibt eine Überschneidung (vgl. 4.3).



• Extensional

K(F) $\subset_{pd}$ K(G), hier ist es also genau umgekehrt wie intensional.

z. B.: K(Rose) $\subset_{pd}$ K(Blume);
die Klasse der Rosen ist eine Teilmenge der Klasse der Blumen.

Extensional kann sowohl die Teilmengen-Relation wie auch die *negierte* Teilmengen-Relation *material-analytisch* oder *synthetisch* sein:

Teilmenge:

analytisch: K(Rose) $\subset_{pd}$ K(Blume)
synthetisch: K(Mensch) $\subset$ K(Erdgeborener)

Begründung für das synthetische Beispiel: Alle Menschen sind (jedenfalls bis heute) auf der Erde geboren; dennoch gehört das nicht zur *Definition* des Menschen, ein Mensch, der z. B. in einer Kolonie auf dem Mond geboren wäre, wäre dennoch ein Mensch.

negierte Teilmenge:

analytisch: K(Blume) $\not\subset_{pd}$ K(Rose)
synthetisch: K(Erdgeborener) $\not\subset$ K(Mensch)

Begründung für das synthetische Beispiel: Die Klasse der Erdgeborenen ist keine Teilmenge der Klasse der Menschen, denn z. B. die Klasse der Tiere gehört auch zu den Ergeborenen.

4.3 ÜBERSCHNEIDUNG

Überschneidung der Mengen M und N bedeutet: (genau) *einige* Elemente von M sind auch Elemente von N, (genau) *einige* Elemente von N sind auch Elemente von M.

Dafür gibt es in der Mengenlehre kein etabliertes Symbol. Ich habe daher das Symbol $\sqcap$ eingeführt. Also M $\sqcap$ N steht für: Die Mengen M und N schneiden sich, d. h. bilden eine *Schnittmenge* – diese Schnittmenge wird als M $\cap$ N bezeichnet, was nicht verwechselt werden darf. Die Überschneidungs-Relation ist symmetrisch: M $\sqcap$ N $\Leftrightarrow$ N $\sqcap$ M (vgl. 1-2-0-5).

Auch bei der Überschneidung ist zu unterscheiden zwischen: *analytisch* und *synthetisch*.

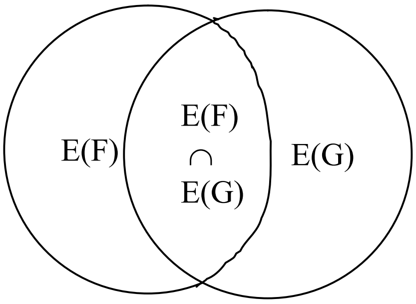
1) *analytisch*

• Intensional

E(F) $\sqcap_{pd}$ E(G)

z. B. Intension des Satzes ‚Mann und Frau sind Gegensätze’:

E(Mann) $\sqcap_{pd}$ E(Frau); die Schnittmenge ist: E(Mann) $\cap$ E(Frau) die Eigenschaftsmenge „Mann“ und die Eigenschaftsmenge „Frau“ schneiden sich.



Es mag verwundern, dass die Begriffe „Mann“ und „Frau“ sich überschneiden. Man könnte erwarten, dass diese Begriffe sich gegenseitig *ausschließen*. Zwar kann niemand zugleich Mann und Frau sein, aber dies ist die *extensionale* Seite. *Intensional* betrachtet haben die Eigenschaften „Mann“ und „Frau“ *gemeinsame Teilbegriffe*, vor allem den Begriff „Mensch“. Denn es gilt: E(Mensch) = E(Mann) $\cap$ E(Frau). Den Menschen macht eben das aus, was Mann und Frau *gemeinsam* haben.

Man könnte einwenden, den Menschen bestimmt nicht nur, was Mann und Frau gemeinsam ist, sondern auch die *Unterschiede* von Mann und Frau gehören zur Definition des Menschen. Aber konsequent gedacht gehört nur das *Allgemeine* in die Definition, Unterschiede werden in eine *Theorie* oder *Beschreibung* des Menschen eingebracht. Allerdings wird eine Definition normalerweise intensional nicht über die *Schnitt*-Menge, sondern über die *Vereinigungs*-Menge realisiert, und da stellt sich das obige Problem gar nicht.

Ein anderes, noch prägnanteres Beispiel: E(Junggeselle) und E(Ehemann) schließen sich auch intensional nicht aus, denn beide enthalten den Teilbegriff E(Mann).

Und das scheint generell bei Begriffen bzw. Eigenschaften so zu sein: Es existieren offensichtlich keine Begriffe, die sich *völlig* gegenseitig ausschließen – zumindest könnte man immer den Begriff „Entität“ als *gemeinsamen* Teil-Begriff nennen (vgl. unten).

Nun hatte ich aufgezeigt, dass es allerdings in der Mengenlehre das Symbol $\not\subset$ gibt, in der Bedeutung „einige nicht“. Könnte man daher die Überschneidung auch anders formulieren, nämlich mit: $E(F) \not\subset E(G) \;\wedge\; E(G) \not\subset E(F)$?

Aber $M \not\subset N$ heißt ja: *mindestens* ein Element von M ist nicht Element von N, d. h. es ist auch möglich, dass *alle* Elemente von M *nicht* Elemente von N sind (und umgekehrt). Das wäre aber keine Überschneidung mehr, sondern ergäbe – graphisch – zwei getrennte Kreise, also Ausschluss. Nur wenn man „einige nicht“ – exklusiv – im Sinne von „*genau* einige nicht“ verwenden würde, ergäbe sich die Überschneidung.

• extensional
Hier ist die Situation bei dem Beispiel von Mann und Frau ganz anders als im intensionalen Fall. Die *Klassen* der Männer und Frauen haben *keine gemeinsame Schnittmenge*, sie schließen sich aus. Graphisch heißt das: die Kreise schneiden sich nicht. Vgl. dazu 4.4.

2) synthetisch
Bisher hatten wir als Beispiele nur *material-analytische* Beziehungen, die auf Definitionen beruhen. Kommen wir nun zu *synthetischen* Relationen.
• intensional

$$E(F) \sqcap E(G)$$

z. B. Intension des Satzes: ‚Einige Männer sind Raucher':

E(Mann) ⊓ E(Raucher);
die Eigenschaftsmengen „Mann“ und „Raucher“ schneiden sich.

Hier ergibt sich keine definitorische Abhängigkeit (wie bei „Mann“ und „Frau“), weder Identität, noch Teilmenge noch Ausschluss. Dennoch zeigt sich eine *Überlappung*. Und beim Beispiel kann man als gemeinsames Merkmal wiederum „Mensch“ nehmen; dabei besteht zwischen Mann und Raucher gar kein *Gegensatz* (nur ein *Unterschied*); jemand kann sehr wohl Mann und Raucher sein, aber auch nur das eine oder keins von beiden. D. h. intensional findet man sowohl bei analytisch *gegensätzlichen* Begriffen (Mann – Frau) als auch bei synthetisch *unterschiedlichen* Begriffen eine *Überlappung* (Mann – Raucher).

• extensional

K(F) ⊓ K(G)

z. B. E(Mann) ⊓ E(Raucher);
die Klassen der Männer und der Raucher schneiden sich.
Hier zeigt sich also eine *Parallele* zu der intensionalen Situation: In beiden Fällen gibt es eine Überschneidung.

4.4 AUSSCHLUSS

Ein *Ausschluss* von M gegenüber N bedeutet: *alle* Elemente von M sind *nicht* Elemente von N. Es gilt dann auch: *alle* Elemente von N sind *nicht* Elemente von M.

Ausschluss bedeutet die *Negation von Überschneidung*.
Auch hier gibt es kein etabliertes Symbol. Ich verwende daher (mangels eines besseren eingeführten Symbols) das negierte ⊓, also ¬⊓. Dabei gilt das *Vertauschungsgesetz*:

(M ¬⊓ N) ⇔ (N ¬⊓ M)

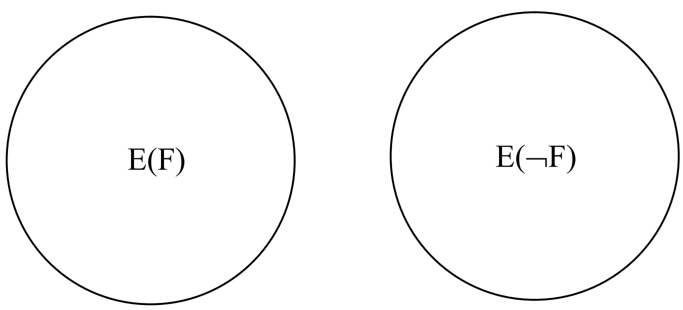
• intensional

Wie schon angesprochen: Normalerweise gibt es zwischen Begriffen *keinen Ausschluss*, auch *gegensätzliche* Begriffe überlappen sich. Ein Begriffs-Ausschluss würde bedeuten: Alle Teilbegriffe von Begriff F sind nicht Teilbegriffe von Begriff G (bzw. umgekehrt) – und dafür lässt sich kein Beispiel finden. Eine Ausnahme wäre vielleicht das Begriffspaar „Sein“ und „Nichts“.

Zwar könnte man auch rein formal die *Negation* eines Begriffs als dessen *Ausschluss* nehmen.

E(F) ¬⊓ E(¬F)

z. B. E(Mensch) ¬⊓ E(¬Mensch);
die Eigenschaftsmenge „Mensch“ und die Eigenschaftsmenge „Nicht-Mensch“ überschneiden sich nicht.



Aber es bleibt die Frage, was das konkret bedeuten soll. Was ist die Eigenschaft „nicht-Mensch“? Umfasst sie jede mögliche Eigenschaft außer „Mensch“? Nun enthält der Begriff „Mensch“ sicher auch den Teilbegriff „Entität“, einen *Transzendentalbegriff*; auch dieser dürfte also in der Menge „nicht-Mensch“ nicht vorkommen. So müsste die Eigenschaftsmenge „nicht-Mensch“ letztlich die *leere Menge* sein. Die leere Menge kann aber andererseits keinen Ausschluss bilden, vielmehr ist die leere Menge Teilmenge jeder anderen Menge. So würde sich ein Begriffs“ausschluss“ letztlich doch nur als *Begriffs-Überlappung* darstellen.

• extensional

$$K(F) \ \neg\sqcap \ K(G)$$

z. B. K(Mann) $\neg\sqcap$ K(Frau);
die Klasse der Männer und die Klasse der Frauen schneiden sich nicht, sie schließen sich gegenseitig aus.

Das lässt sich auch wie folgt ausdrücken: die *Schnittmenge* der Klasse der Männer und der Klasse der Frauen ist leer: K(Mann) $\cap$ K(Frau) = $\emptyset$.

Aber man kann aus der Klasse der Männer und der Klasse der Frauen eine *Vereinigungsmenge* bilden, das ist die Klasse der Menschen: K(Mensch) = K(Mann) $\cup$ Frau.

Man könnte den Gegensatz zwischen der Klasse der Männer und der Klasse der Frauen eventuell auch als *kontradiktorisch* deuten, aber nur, wenn man vorher den *Wertbereich* auf die Klasse der *Menschen* eingeschränkt hat.

Es bietet sich eher an, von einem *konträren* Gegensatz zu sprechen. Nichts ist zugleich Mann und Frau, aber etwas kann weder Frau noch Mann sein.

Zum Ende des Exkurs „Extension und Intension von Sätzen“ folgt jetzt eine *Zusammenfassung*, die auch die Extension und Intension von *Zeichen* bzw. *Wörtern* berücksichtigt.

ZUSAMMENFASSUNG VON EXTENSION UND INTENSION

1) ontologische Voraussetzungen

1. Objekte
   - Bestimmung: ein *Objekt* ist logisch ein *formaler Träger* (x) mit *Eigenschaften;* oder ein *Prinzip*, das Eigenschaften zu einem Ganzem, zu einem Objekt organisiert
   - Individuen und Klassen
     – *Individuen* = singuläre Objekte (z. B. Sokrates)
     – *Klassen* = *alle* Individuen mit einer gemeinsamen, klassenbildenden Eigenschaft, d. h. kollektive Objekte (z. B. die Klasse der Menschen)
   - Abstrakte und konkrete Objekte
     – *abstraktes* Objekt: Träger x mit den *wesentlichen*, definierenden Eigenschaften (z. B. Klasse der Rappen als alle x mit den Eigenschaften „Pferd“ und „schwarz“)
     – *konkretes* Objekt: Träger mit *allen*, wesentlichen und kontingenten, Eigenschaften (z. B. die Klasse der Rappen mit allen individuellen Eigenschaften aller Rappen)

2. Eigenschaften
   - Bestimmung: eine Eigenschaft ist eine Qualität, eine nicht ableitbare *Kategorie*
   - Sprache: Man spricht anstelle von ‚Eigenschaften’ auch von ‚Begriffen’
   - Individual-Eigenschaften und Allgemein-Eigenschaften (Klassen-Eigenschaften)
     – *Individual*-Eigenschaften = Eigenschaften eines Individuums
     – *Allgemein*-Eigenschaften: kollektive Eigenschaften von Mitgliedern einer Klasse
   - Generelle und partikuläre Eigenschaften
     – generelle Eigenschaften
     bei einer *Klasse*: kommen *allen* Elementen einer Klasse zu
     (von individuellen Unterschieden wird abstrahiert)
     bei einem *Individuum*: besitzt es zu *allen* Zeiten bzw. unter allen Bedingungen
     (von nur zeitweiligen Eigenschaften o. ä. wird abstrahiert)
     – partikuläre (bzw. singuläre) Eigenschaften
     bei einer *Klasse*: kommen nur *einigen* Elementen (einem Element) einer Klasse zu
     bei einem *Individuum*: kommen ihm nur *zeitweilig* zu
   - Wesentliche und kontingente Eigenschaften
     – wesentliche Eigenschaften (analytisch)
     wesentliche Eigenschaften geben die *Identität*, das „Wesen“ eines Objektes an. Sie folgen aus der *Definition* eines Objektes, sind daher *analytisch*. Wesentliche Eigenschaften sind normalerweise *generell*. Aber es ist für eine wesentliche Eigenschaft nicht notwendig und nicht hinreichend, dass sie generell ist.
     – kontingente Eigenschaften (synthetisch)
     kontingente („zufällige“) Eigenschaften gehören nicht zur Identität, nicht zum „Wesen“ eines Objektes. Sie folgen nicht aus der Definition eines Objektes, sind daher *synthetisch*. Kontingente Eigenschaften sind normalerweise konkret.

3. Relationen
   - Bestimmung: Relationen sind Beziehungen zwischen Entitäten (Relata) bzw. einschließlich dieser Entitäten; Relation + Relata zusammen = Struktur)
   - Sachverhalte und „Begriffsverhalte“
     – Sachverhalte = Relationen zwischen Objekten
     – Begriffsverhalte = Relationen zwischen Begriffen (oder Eigenschaften)
     – Sach-Begriffs-Verhalte = Relationen zwischen Objekten und Eigenschaften

- Atomare und molekulare Relationen
  – atomare Relationen
    atomare *Sachverhalte* = Relationen zwischen Objekten
    atomare *Begriffsverhalte* = Relationen zwischen Begriffen
  – molekulare Relationen
    molekulare *Sachverhalte* = Relationen zwischen (atomaren) Sachverhalten
    molekulare *Begriffsverhalte* = Relationen zwischen (atomaren) Begriffsverhalten

2) Extension / Intension von (deskriptiven) Zeichen oder Wörtern

1. Extension
   - Bestimmung
     Die Extension von Zeichen / Wörtern sind *Objekte.*
   - Abstrakte und konkrete Extension
     – *abstrakte* Extension von Zeichen = *abstrakte* Objekte
     – *konkrete* Extension von Zeichen = *konkrete* Objekte
     Die *abstrakte* Extension ist die *primäre*, eigentliche Extension
   - Individuen-Zeichen / Eigennamen
     – a*bstrakte* Extension von Individuen-Zeichen = abstrakte Individuen
     – *konkrete* Extension von Individuen-Zeichen = konkrete Individuen
   - Klassen-Zeichen
     – *abstrakte* Extension von Klassen-Zeichen = abstrakte Klassen
     – *konkrete* Extension von Klassen-Zeichen = konkrete Klassen
   - 2 Stufen
     1. Stufe: die Extension des Zeichens ‚F' = das Objekt F. Oder:
        Extension des Zeichens ‚F' = dasjenige Objekt x mit der Eigenschaft F: $\iota x(Fx)$
     2. Stufe: Extension des Zeichens ‚F' = dasjenige Objekt x mit den (wesentlichen) Eigenschaften F_1 bis F_i: $\iota x(F_1 x \ \wedge ... \wedge \ F_i x)$
   - Subjektive und objektive Extension
     – *objektive* Extension = das Objekt mit seinen *tatsächlichen* (wesentlichen) Eigenschaften.
     – *subjektive* Extension = das Objekt mit den Eigenschaften, die wir ihm (als wesentlich) *zuschreiben*.
     Die *subjektive* Extension ist die *primäre*, echte Extension.

2. Intension
   - Bestimmung
     Die Intension von Zeichen / Wörtern sind Begriffe bzw. Eigenschaften.
   - Abstrakte und konkrete Intension
     – *abstrakte* Intension = die *wesentlichen* Eigenschaften (eines Objektes)
     – *konkrete* Intension = *alle* Eigenschaften (eines Objektes)
     Die *abstrakte* Intension ist die *primäre*, die eigentliche Intension.
   - Individuen-Zeichen / Eigennamen
     – *abstrakte* Intension von Individuen-Zeichen = die *wesentlichen* Individuen-Eigenschaften
     – *konkrete* Intension von Individuen-Zeichen = *alle* (wesentlichen und kontingenten) Individuen-Eigenschaften
   - Klassen-Zeichen
     – *abstrakte* Intension von Klassen-Zeichen = die *wesentlichen* Klassen- bzw.

Allgemein Eigenschaften, d. h. die klassenbildende(n) Eigenschaft(en)
– *konkrete* Intension von Klassen-Zeichen = *alle* (wesentlichen und kontingenten) Eigenschaften, die den Klassenmitgliedern zukommen

- 2 Stufen
  – 1. Stufe: die Intension des Zeichens ‚F' = der Begriff „F"
  Die *eine*, ganzheitlich-wesentliche Eigenschaft „F", welche die Klasse F definiert.
  – 2. Stufe: die Intension des Zeichens ‚F' = die Eigenschaften $F_1 \cup ... \cup F_i$
  Die Menge von wesentlichen Eigenschaften F_1 bis F_i,welche F bzw. „F" definiert.
- Subjektive und objektive Intension
  – *objektive* Intension = die *tatsächlichen* (wesentlichen) Eigenschaften des Objektes
  – *subjektive* Intension = die Eigenschaften, die wir einem Objekt (als wesentlich) *zuschreiben*. Die *subjektive* Intension ist die *primäre*, echte Intension.

3) Extension / Intension von Sätzen

1. Extension
   - Bestimmung
   Die Extension eines Satzes ist ein Sachverhalt (eine Objekt-Relation).
   - Atomare und molekulare Sätze
     – die Extension eines *atomaren* Satzes = (normal) ein atomarer Sachverhalt
     – die Extension eines molekularen Satzes = (normal) ein molekularer Sachverhalt
   - Analytische und synthetische Sätze
     – analytisch
     Die Extension eines *analytischen* Satzes = ein *rein abstrakter* Sachverhalt, bei dem (abstrakten) Objekten eine (wesentliche) Klassenzugehörigkeit zugesprochen wird, die schon in ihrer Definition enthalten ist oder aus logischen Gesetzen folgt.
     (z. B. alle Junggesellen sind Elemente der Klasse der Männer.)
     – synthetisch
     Die Extension eines *synthetischen* Satzes = ein *teils abstrakter, teils konkreter* Sachverhalt, in dem (abstrakten) Objekten eine kontingente Klassenzugehörigkeit zugesprochen wird, die nicht schon in ihrer Definition enthalten ist. Es kann auch ein *rein konkreter* Sachverhalt sein, der ist für uns aber real nicht fassbar.
     (z. B. alle Junggesellen sind Elemente der Klasse der Raucher.)

2. Intension
   - Bestimmung
     Die Intension eines Satzes ist ein „Begriffsverhalt" (eine Begriffs-Relation).
   - Atomare und molekulare Sätze
     – die Intension eines *atomaren* Satzes = (normal) ein atomarer Begriffsverhalt
     – die Intension eines *molekularen* Satzes = (normal) ein molekularer Begriffsverhalt
   - Analytische und synthetische Sätze
     – analytisch
     Die Intension eines *analytischen* Satzes = ein rein abstrakter Begriffsverhalt, bei dem einem (abstrakten) Begriff ein anderer (abstrakter) Begriff zugesprochen wird, der schon in der Definition des ersten Begriffes enthalten ist oder aus logischen Gesetzen folgt. (z. B.: Der Begriff „Mann" ist Teilmenge des Begriffs „Junggeselle".)
     – synthetisch
     Die Intension eines *synthetischen* Satzes = ein negativer oder *unspezifischer* Begriffsverhalt.
     (z. B.: Der Begriff „Raucher" ist nicht Teilmenge des Begriffs „Junggeselle".)

DETAILLIERTES INHALTSVERZEICHNIS VON KAPITEL 0