2 ANALYTISCHE RELATIONEN

ÜBERSICHT

2-1 Aussagen-Logik

Hier wird der Unterschied zwischen *synthetischen*, *analytischen* und *partiell analytischen* Relationen herausgearbeitet.

2-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

In diesem Punkt werden zuvorderst die verschiedenen Modelle für *All-Sätze* und *Partikulär-Sätze* auf ihre analytischen Eigenschaften geprüft und danach bewertet. Außerdem wird das *logische Quadrat* im Einzelnen vorgestellt. Dabei spielt auch die Übersetzung der *Quantoren-Logik* in *Prädikaten-Logik* eine wichtige Rolle.

2-3 Quantitative Logik

Hier gibt es eine wesentliche Erweiterung herkömmlicher logischer Gesetze durch Einführung *quantitativer Gesetze*.

2-4 Quantitative Aussagen-Logik

In diesem Unterkapitel werden die klassischen Gesetze der Aussagen-Logik in quantitativer Form dargestellt. Damit werden logische Schlüsse zu Rechenformeln. Es zeigt sich, dass sich so logische Schlüsse viel einfacher und präziser auf ihre Gültigkeit prüfen lassen.

2-5 Quantitative Quantoren-Logik

Die quantitative Quantoren-Logik stellt die quantoren-logischen Gesetze in numerischer Form vor. Es werden dabei auch auf der Quantoren-Logik basierende Modelle z. B. von *Modal-Logik* präsentiert, aber eben quantifizierte Modelle.

Jedes Unter-Kapitel ist wieder folgendermaßen unterteilt:
• Einführung
• Implikation
• Positiv-Implikation
• Systematik
• Inklusiv / Exklusiv
• Erweiterungen

2 – 1 AUSSAGEN-LOGIK

2-1-0 Einführung

2-1-0-1 ANALYTISCHE RELATIONEN
Analytische Relationen (kurz *A-Relationen*) sind – *syntaktisch* gesehen – solche, bei denen auf beiden Seiten des *Relators* (partiell) gleiche Zeichen stehen. Auf die Definition analytischer Relationen bzw. Verknüpfungen bin ich schon in 0-5 eingegangen – und es wird an späterer Stelle, vor allem in 4-1, noch genauer darauf eingegangen werden.

Man kann unterscheiden:

- *Tautologien*
  Sie sind in *jeder* Welt wahr, man sagt auch L-wahr (*logisch* wahr). In der Wahrheitstafel steht nur + (plus = gültig) unter dem Junktor. Sie haben den Status von *Gesetzen*.

- *Kontradiktionen*
  Sie sind in *keiner* Welt wahr, also in jeder falsch, man sagt auch L-falsch. D. h. sie sind *widersprüchlich*. Es steht nur – (minus = ungültig) unter dem Junktor. Kontradiktionen sind natürlich weniger bedeutsam als Tautologien.

Eine herausragende Tautologie ist die *analytische Implikation* (= logische Folge oder Schluss), z. B.: $X \Rightarrow X \vee Y$ mit folgender Wahrheitstafel:

X	$\Rightarrow$	X $\vee$ Y
+	+	+ + +
+	+	+ + −
−	+	− + +
−	+	− − −

Man kann die Wahrheitstafel auch abkürzen, so dass man nur den – entscheidenden – Werteverlauf unter dem Zentral-Relator, hier $\Rightarrow$, horizontal angibt.

$X \Rightarrow X \vee Y$ (+ + + +)

Eine wichtige *Kontradiktion* ist aber die folgende Konjunktion:

$X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ (– – – –)

Eine analytische Relation enthält meistens mehrere (synthetische) Relationen, die durch einen *Zentral-Relator* verbunden sind, z. B.:

$X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$

$X \wedge Y$ und $X \vee Y$ sind hier die *synthetischen* Relationen, der Zentral-Relator ist $\Rightarrow$.
Synthetische Relatoren ($\wedge$) *binden* mehr als *analytische* ($\Rightarrow$), so braucht man $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$ nicht mit Klammern als $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y)$ zu schreiben. Meint man aber eine ganz andere Relation, etwa $X \,{}^{+}\!\wedge^{--} (Y \Rightarrow X \vee Y)$, so muss man natürlich Klammern setzen.

Eine *Tautologie* (mit 2 Variablen) hat *immer* den Wahrheitswerteverlauf + + + +, unabhängig davon, mit welchem Relator sie konstruiert wird, z. B.:

$$X \wedge Y \Rightarrow X,\ X \Leftrightarrow X,\ X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X \text{ usw.}$$

Eine Kontradiktion (mit 2 Variablen) hat ebenfalls *immer* den Wahrheitswerteverlauf – – – –, gleichgültig, mit welchem Relator sie konstruiert wird, z. B.:

$$X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X,\ (X \wedge Y) \not\Leftrightarrow \neg(X \wedge Y),\ (X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X) \text{ usw.}$$

2-1-0-2 PARTIELL ANALYTISCHE RELATIONEN

Als Zwischen-Kategorie zwischen synthetischen und analytischen Relationen habe ich die *partiell-analytischen* oder *semi-analytischen* Relationen eingeführt (kurz *PA-Relationen*). Man könnte anstatt von 'partiell-analytisch' auch von 'partiell synthetisch' sprechen. Semi-analytische Relationen sind zugleich *semi-tautologisch* (dazu später). Ein Beispiel ist:

$$X \vee Y \longrightarrow X \ (+ + - +)$$

Auch bei partiell-analytischen Relationen gilt *syntaktisch*, dass links und rechts vom Relator (partiell) gleiche Zeichen stehen. Aber anders als bei den analytischen Relationen sind partiell analytische Relationen nicht tautologisch und nicht kontradiktorisch, d. h. in der Wahrheitstafel unter dem *Zentral-Relator* kommt sowohl + wie – vor. Z. B. folgende Wahrheitstafel:

(X	→	Y)	⟶	Y
+	+	+	+	+
+	–	–	+	–
–	+	+	+	+
–	+	–	–	–

Ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen *analytischen* und *partiell analytischen* Relationen ist: Eine Tautologie oder Kontradiktion hat immer den *gleichen Wahrheitsverlauf*. Dagegen gibt es (bei 2 Variablen) 14 mögliche Wahrheitsverläufe von semi-analytischen Relationen, entsprechend den 14 möglichen Wahrheitsverläufen von *synthetischen* Relationen.

Wie ich schon in 0-5 angemerkt habe, war es eine schwierige Entscheidung, die Kategorie „semi-analytisch" einzuführen. In mancher Hinsicht wäre ein System einfacher und eleganter gewesen, das nur und genau zwischen *synthetischen* und *analytischen* Relationen unterscheidet (die semi-analytischen Relationen wären dann mit den synthetischen gleichgesetzt worden). Ich will diese Problematik nachfolgend etwas genauer darstellen.

Man kann hier zwischen 2 Modellen unterscheiden: dem *2-stufigen* und dem *3-stufigen*.

• *2-stufiges Modell*

Hier wird nur unterschieden zwischen *synthetisch* und *analytisch.*

Es ergibt sich dann folgende zunächst überzeugende Parallele:

- synthetisch: *wahr* (W) / *falsch* (F)
- analytisch: *tautologisch* = logisch wahr (T) / *kontradiktorisch* = logisch falsch (K)

Innerhalb des *synthetischen* Bereichs gilt: W $\Leftrightarrow \neg$F: d. h. wenn ein Satz wahr ist, dann ist er nicht falsch. Und umgekehrt. Z. B. $X \Leftrightarrow \neg(\neg X)$.

Innerhalb des *analytischen* Bereichs gilt entsprechend T $\Leftrightarrow \neg$K bzw. $\neg$T $\Leftrightarrow$ K, also negative Äquivalenz von T und K: z. B. $(X \vee \neg X) \Leftrightarrow \neg(\neg(X \vee \neg X))$.

Man kann diesen Zusammenhang auch durch *oder*-Relationen darstellen:

T	K	∨	|	><
+	–	+	+	+
+	–	+	+	+
+	–	+	+	+
+	–	+	+	+

Gleichgültig, welche *oder*-Relation man verwendet, man erhält immer eine *Tautologie*.
Man kann also z. B. schreiben: T $^{+}\vee^{+}$ K. Und da ja gilt $\neg$T $\Leftrightarrow$ K, kann man auch schreiben: T $^{+}\vee^{+}$ $\neg$T. Dies ist aber der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*. Anders gesagt:

Eine Negation einer Tautologie ist automatisch eine Kontradiktion.
Eine Negation einer Kontradiktion ist automatisch eine Tautologie.

Modal-logisch gilt dabei: Tautologisch = notwendig. Und: Kontradiktorisch = unmöglich.
Somit gilt auch: Die Negation von „notwendig" ist „unmöglich", und umgekehrt.
„Möglich" ist allein dem synthetischen Bereich vorbehalten.

Obwohl dieses Modell durchaus seine Stärken hat, sprachen aber doch viele sachliche Gründe dagegen, vor allem gegen die *Gleichsetzung* von synthetischen und semi-analytischen Strukturen, so dass ich dieses Modell letztlich verworfen habe.

• *3-stufiges Modell*
Hier wird als 3. (Zwischen-)Stufe *partiell analytisch* bzw. semi-analytisch eingeführt (dieses „semi-analytisch" wird dann im quantitativen Ansatz weiter differenziert).

Die Bestimmungen des 2-stufigen Modells gelten auch hier, werden aber erweitert.
Dabei gilt: (semi-analytisch $\Rightarrow$ $\neg$tautologisch) $\wedge$ (semi-analytisch $\Rightarrow$ $\neg$kontradiktorisch)
Damit entspricht semi-analytisch *modal-logisch*: $\neg$notwendig $\wedge$ $\neg$unmöglich.

Dafür kann man auch sagen: möglich $\wedge$ möglich$\neg$. Das bedeutet aber so viel wie: *genau* möglich. Diese Bestimmung trifft allerdings auch auf *synthetische* Relationen zu.

Wichtig ist, hier nicht *Begriffs-Ebene* und *Logik-Ebene* zu verwechseln. *Begrifflich*: „Wenn ein Satz semi-analytisch ist, dann ist er *nicht tautologisch*". Aber aus einem semi-analytischen Satz folgt *logisch* jede beliebige Tautologie, weil gilt: $\Phi \Rightarrow$ Tautologie (vgl. 2-1-5-3).

Alle Relatoren können *semi-analytisch* verwendet werden. Aber am wichtigsten sind auch hier die *implikativen* Relationen. Dabei unterscheidet man Implikation, Replikation und Ä-quivalenz (als Symbol verwende ich jeweils einen *verlängerten* Pfeil):

semi-analytische Implikation $\longrightarrow$
semi-analytische Replikation $\longleftarrow$
semi-analytische Äquivalenz $\longleftrightarrow$

2-1-0-3 NOTATION

Ich habe schon verschiedene Notationen für Relatoren eingeführt und erläutert, fasse sie hier aber noch einmal systematisch zusammen.

Implikative Relationen formalisiere ich immer durch einen *Pfeil* (wie weit verbreitet):

Tautologien durch einen *Doppelpfeil*
Kontradiktionen durch den *durchgestrichenen Doppelpfeil*
semi-analytische Relationen durch den *verlängerten Pfeil*

• *Implikation*
Tautologie: $\Rightarrow$
Kontradiktion: $\not\Rightarrow$
Semi-analytisch: $\longrightarrow$

• *Äquivalenz*
Tautologie: $\Leftrightarrow$
Kontradiktion: $\not\Leftrightarrow$
Semi-analytisch: $\longleftrightarrow$

• *Replikation*
Tautologie: $\Leftarrow$
Kontradiktion: $\not\Leftarrow$
Semi-analytisch: $\longleftarrow$

Andere Tautologien formalisiere ich durch ++ über dem Junktor, z. B. $^{+}\vee^{+}$
Kontradiktionen durch – – über dem Junktor, z. B. $^{-}\wedge^{-}$
Semi-analytische Relationen durch + – über dem Junktor, z. B. $^{+}\!><\!^{-}$.

• *Konjunktion*
Tautologie: $^{+}\wedge^{+}$
Kontradiktion: $^{-}\wedge^{-}$
Semi-analytisch: $^{+}\wedge^{-}$

• *Disjunktion*
Tautologie: $^{+}\vee^{+}$
Kontradiktion: $^{-}\vee^{-}$
Semi-analytisch: $^{+}\vee^{-}$

2-1-0-4 SYNTHETISCHE WAHRHEITSTAFEL

Man kann unterscheiden zwischen *Wahrheitstafeln* für *synthetische* und *analytische* Relationen (kurz *synthetische* bzw. *analytische Wahrheitstafel*). Ich behandele auch die synthetische Wahrheitstafel genauer erst hier im Kapitel über Analytik, weil man für die Deutung jeder Wahrheitstafel *analytische* Relationen benötigt. Im Detail und mit ausführlichen Erläuterungen gehe ich auf die Wahrheitstafeln erst im *Exkurs* zu diesem Kapitel 2 ein.

1) *Normale Wahrheitstafel*
Ein Beispiel für die *normale* Wahrheitstafel einer *synthetischen* Relation (Implikation) ist:

X	$\rightarrow$	Y
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	+	–

Die (normale) Wahrheitstafel enthält verschiedene *Deutungsmöglichkeiten* bzw. Schlussmöglichkeiten. Die wichtigsten Deutungen sind die *konjunktive* und die *implikative* Deutung. Die konjunktive Deutung ist die *zentrale*, die normale Wahrheitstafel enthält implizit bereits die *konjunktive* Deutung. Die implikative Deutung ist bei *Implikationen* bzw. Schlüssen zusätzlich heranzuziehen, in der quantitativen Logik ist sie besonders wichtig.
Ich zeige diese Deutungsmöglichkeiten auf und entwickle daraus verschiedene Formen von Wahrheitstafeln. Das verdeutliche ich anhand der Implikation X $\rightarrow$ Y.

2) *Konjunktive (Deutung der) Wahrheitstafel*
Bei der konjunktiven Deutung wird aus der *Konjunktion* der beiden Einzel-Komponenten X,Y auf die Gesamt-Relation, z. B. X $\rightarrow$ Y geschlossen.
Die konjunktive Interpretation verdeutlicht folgende Form der Wahrheitstafel:

	X	Y	X $\rightarrow$ Y
1.	+	+	+
2.	+	–	–
3.	–	+	+
4.	–	–	+

Noch deutlicher wird die konjunktive Deutung in der folgenden Darstellung, die man daher auch *konjunktive Wahrheitstafel* nennen kann. Die *Zeilen* der Wahrheitstafel werden zusätzlich durch *Relationen* formalisiert; dabei wird ein – (minus) in der Wahrheitstafel hier in ein ¬ (Negator) übersetzt (vgl. 1-1-0-3):

	$X \wedge Y \;\Rightarrow\; X \rightarrow Y$			
1.	+ + + + +	$X \wedge Y \;\Rightarrow\; X \rightarrow Y$	$+---\;\Rightarrow\;+-++$	
2.	+ − − + −	$X \wedge \neg Y \;\Rightarrow\; \neg(X \rightarrow Y)$	$-+--\;\Rightarrow\;-+--$	$(\Leftrightarrow)$
3.	− − + + +	$\neg X \wedge Y \;\Rightarrow\; X \rightarrow Y$	$--+-\;\Rightarrow\;+-++$	
4.	− − − + +	$\neg X \wedge \neg Y \;\Rightarrow\; X \rightarrow Y$	$---+\;\Rightarrow\;+-++$	

Hier wird aus den *Konjunktionen* $X \wedge Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$ und $\neg X \wedge \neg Y$ auf die Gesamt-Relation $X \rightarrow Y$ geschlossen. Und zwar handelt es sich um *strenge* Schlüsse ($\Rightarrow$).

Der konjunktiven Deutung entspricht folgende *konjunktive Definition* von $X \rightarrow Y$:

$X \rightarrow Y \;\Leftrightarrow_{df} (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$ bzw. :

$X \rightarrow Y \;\Leftrightarrow_{df} \neg(X \wedge \neg Y)$

Also wird $X \rightarrow Y$ definiert durch *Disjunktion* der Konjunktionen, die $X \rightarrow Y$ analytisch implizieren. Bzw. durch die Negation der Konjunktion, welche die Kontradiktion von $X \rightarrow Y$ ist.

3) *Implikative (Deutung der) Wahrheitstafel*

Sie bietet sich nur bei *implikativen* Beziehungen wie $X \rightarrow Y$ an, ist dort aber von besonderer Bedeutung. Hier wird von dem *Vorderglied* (z. B. X) auf das *Nachglied* (z. B. Y) gefolgert.

Imp	$X \rightarrow Y$		
1.	+ + +	$X \rightarrow Y$	$(+-++)$
2.	+ − −	$X \rightarrow \neg Y$	$(-+++)$
3.	− ± +	$\neg X \rightarrow Y$	$(+++-)$
4.	− ± −	$\neg X \rightarrow \neg Y$	$(++-+)$

Ich schreibe die *implikative Wahrheitstafel* mit einem ‚Imp' am Anfang. Wie man aber in der *normalen* Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$ sieht, folgt in der 3. Zeile Y aus ¬X und in der 4. Zeile ¬Y aus ¬X (und in beiden Fällen gilt $X \rightarrow Y$ als wahr). Daher wird in der *implikativen* Wahrheitstafel an beiden Stellen ein ± (für „möglich") unter den Relator geschrieben. Das liest sich wie folgt (3. Zeile): ‚Wenn X falsch ist, dann ist es *möglich* (±), dass Y wahr ist'. Dies ähnelt der *Positiv-Implikation*, bei der die 3. und 4. Stelle „nicht definiert" sind.

Der implikativen Darstellung entspricht folgende Bestimmung der Implikation:

- $(X \rightarrow Y) \;\Leftrightarrow\; \neg(X \rightarrow \neg Y) \vee \neg(\neg X \rightarrow Y) \vee \neg(\neg X \rightarrow \neg Y)$
- $\neg(X \rightarrow Y) \;\Leftrightarrow\; (X \rightarrow \neg Y) \wedge (\neg X \rightarrow Y) \wedge (\neg X \rightarrow \neg Y)$

4) Verstärkte implikative (Deutung der) Wahrheitstafel

Bei der *konjunktiven* Deutung der Wahrheitstafel erhält man ausschließlich *analytische* Relationen wie $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$. Bei der *implikativen* Deutung sind dagegen wie beschrieben alle vier aufgeführten Relationen der Wahrheitstafel *synthetisch*, nämlich:

$X \rightarrow Y$, $X \rightarrow \neg Y$, $\neg X \rightarrow Y$, $\neg X \rightarrow \neg Y$

Und bei synthetischen Relationen gilt: Wenn man nur weiß, dass X gültig (+) ist, kann man noch nichts über Y aussagen, es kann gültig sein oder ungültig (und entsprechend). Erst indem man die Gültigkeit bzw. Ungültigkeit der *Gesamt-Relation*, also $X \rightarrow Y$, mit berücksichtigt, kann man aus X (in gewissen Grenzen) auf Y schließen. Man kann dies eine *verstärkte implikative* Deutung bzw. verstärkte implikative Wahrheitstafel nennen.

Imp	X	$\wedge$	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y		
1.	+	+	+	+	+	$X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$	(+ + + +)
2.	+	−	−	+	−	$X \wedge \neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$	(+ + + +)
3.	−	−	+	±	+	$\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	(+ + + −)
4.	−	−	+	±	−	$\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$	(+ + − +)

$X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$ ist eine *Tautologie*, nämlich der *Modus ponens*. Dies bedeutet aber nicht, dass auch alle *einzelnen* Relationen Tautologien sind. So ist in der 3. bzw. 4. Zeile kein eindeutiger Schluss möglich. Denn in der 3. Zeile wird von $\neg X \wedge (X \rightarrow Y)$ auf Y geschlossen, in der 4. Zeile vom gleichen $\neg X \wedge (X \rightarrow Y)$ auf $\neg Y$.

Damit können hier keine strengen Schlüsse vorliegen, sondern es gilt nur:
$\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ bzw. $\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$. So schreibe ich hier wieder ±.

5) *Weitere mögliche Schlüsse aus der Wahrheitstafel*

• Schluss von X auf $X \rightarrow Y$
$X \Rightarrow (X \rightarrow Y) \vee \neg(X \rightarrow Y)$ (Schluss auf Tautologie = Pseudo-Schluss)
$\neg X \Rightarrow X \rightarrow Y$

• Schluss von Y auf $X \rightarrow Y$
$Y \Rightarrow X \rightarrow Y$
$\neg Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \vee \neg(X \rightarrow Y)$ (Schluss auf Tautologie = Pseudo-Schluss))

• Schluss von X auf Y (dies geht nur, wenn man $X \rightarrow Y$ hinzunimmt, vgl. oben)
$(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$
$\neg(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow \neg Y$
$(X \rightarrow Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y \vee \neg Y$ (Schluss auf Tautologie = Pseudo-Schluss)

• Schluss von Y auf X (dies geht nur, wenn man $X \rightarrow Y$ hinzunimmt)
$(X \leftarrow Y) \wedge Y \Rightarrow X$
$\neg(X \leftarrow Y) \wedge Y \Rightarrow \neg X$
$(X \leftarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow X \vee \neg X$ (Schluss auf Tautologie = Pseudo-Schluss)

• Schluss von $X \rightarrow Y$ auf X, Y
Ein strenger Schluss von $X \rightarrow Y$ auf X, Y, $\neg X$ oder $\neg Y$ ist nicht möglich
Aber es gilt:
$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow X$
$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$

2-1-0-5 ANALYTISCHE WAHRHEITSTAFEL

Die Wahrheitstafel einer (semi-)analytischen Relation nenne ich wie gesagt kurz ‘*analytische Wahrheitstafel’*. Grundsätzlich sind hier die gleichen Unterscheidungen möglich wie bei der synthetischen Wahrheitstafel. Ich nehme als Beispiel die Wahrheitstafel einer *semi-analytischen* Relation, weil die aussagekräftiger ist, und zwar $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$.

1) N*ormale Wahrheitstafel*:
Zunächst die normale Wahrheitstafel von $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$:

$(X$	$\rightarrow$	$Y)$	$\longrightarrow$	Y
+	+	+	+	+
+	–	–	+	–
–	+	+	+	+
–	+	–	–	–

Es sind wieder vor allem 2 Möglichkeiten der Deutung zu unterscheiden: die *konjunktive* und die *implikative* Interpretation der Wahrheitstafel.

2) *Konjunktive (Deutung der) Wahrheitstafel*
Bei einer Relation $\Phi \longrightarrow \Psi$ wird aus der *Konjunktion* von *Prämisse* (Φ) und *Schluss-Satz* (Ψ) auf die Gesamtrelation ($\Phi \longrightarrow \Psi$) geschlossen. Generell ist die konjunktive Interpretation aber bei jeder beliebigen Relation möglich. Bei $(X \vee Y)\ {}^{+}{>}{<}^{-}\ Y$ wird z. B. aus der Konjunktion von $X \vee Y$ und Y auf $(X \vee Y)\ {}^{+}{>}{<}^{-}\ Y$ geschlossen (vgl. auch 1-1-0-3).

Die konjunktive Interpretation demonstriert folgende *konjunktive Wahrheitstafel:*

	$(X \rightarrow Y)$	$\wedge$	Y	$\Rightarrow$	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	
1.	+	+	+	+	+	$(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
2.	–	–	–	+	+	$\neg(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
3.	+	+	+	+	+	$(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
4.	+	–	–	+	–	$(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$

Grundsätzlich wäre zwar auch eine andere Kombination denkbar, nämlich: $\neg(X \rightarrow Y) \wedge Y$. Aber die ist *kontradiktorisch* und somit in der Wahrheitstafel nicht enthalten, die Wahrheitstafel berücksichtig eben nur die *möglichen* Kombinationen. Das ist bei der *analytischen* Wahrheitstafel anders als bei der *synthetischen*, bei der *alle* Kombinationen bzw. Welten vertreten sind (wobei synthetisch allerdings *alle* Kombinationen *möglich* sind).

3) *Implikative (Deutung der) Wahrheitstafel*
Hier wird bei einer (semi)analytischen Relation $\Phi \longrightarrow \Psi$ aus der Prämisse (Φ) auf den Schluss-Satz (Ψ) geschlossen. Es wird also gefragt: Wenn die Prämisse (Φ) wahr ist, ist dann auch der Schluss-Satz (Ψ) wahr usw.? Diese Deutung ist nur bei *implikativen* Relationen (wie $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$ u. ä.) relevant, dort aber besonders wichtig.

Bei *(semi)analytischen* Relationen ist es möglich, allein aus der Prämisse (Φ) in gewissem Ausmaß auf den Schluss-Satz (Ψ) zu schließen, anders als bei den *synthetischen* Relationen: dort ist wie beschrieben ein Schluss nur möglich, wenn man die Gesamt-Relation $\Phi \rightarrow \Psi$ mit berücksichtigt.

Als Beispiel zunächst wieder *der* semi-analytische Schluss $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$.

Imp	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y	
1.	+	±	+	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
2.	–	+	–	$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$
3.	+	±	+	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
4.	+	±	–	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$

In der 1. (bzw. 3.) und 4. Zeile hier wird einmal von $X \rightarrow Y$ auf Y und einmal auf $\neg Y$ geschlossen, somit können diese Schlüsse nur *partiell analytisch* sein. Daher wird hier in der Wahrheitstafel unter dem $\longrightarrow$ wieder ± für „möglich“ eingesetzt.
Es gilt:

+ entspricht $\Rightarrow$ tautologisch (notwendige Folge)
± entspricht $\longrightarrow$ semi-analytisch (mögliche Folge)
– (wäre Kontradiktion, das kann hier unter dem Zentral-Relator nicht vorkommen)

4) *Verstärkte implikative Deutung der Wahrheitstafel*
Hier wird noch berücksichtigt, ob die Gesamtrelation ($\Phi \longrightarrow \Psi$) wahr oder falsch ist. D. h. es wird aus der Prämisse Φ und der Gesamtrelation $\Phi \longrightarrow \Psi$ auf die Konklusion Ψ geschlossen. So ergeben sich in allen Fällen *strenge* Schlüsse.

Nehmen wir als Beispiel zunächst wieder den *semi-analytischen Schluss* $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$. Hier wird also noch die Gesamtrelation $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ als *Verstärkung* hinzugefügt (oder aus anderer Sicht wird die Prämisse $X \rightarrow Y$ hinzugefügt).

Die *verstärkte implikative Wahrheitstafel* mit sämtlich *tautologischen* Relationen lautet:

Imp	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$	$\wedge$	$(X \rightarrow Y)$	$\Rightarrow Y$	
1.	+	+	+	+ +	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$
2.	+	–	–	+ –	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \wedge \neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$
3.	+	+	+	+ +	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$
4.	–	–	+	+ –	$\neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$

5) *Funktionen der Wahrheitstafel*
Die primäre Funktion der Wahrheitstafel ist, die *Wahrheitsbedingungen* einer Relation bzw. eines Relators, eines Satzes oder einer Aussage aufzuzeigen. Dabei ist zu unterscheiden:
• *konjunktive* Wahrheitstafel: sie zeigt die Wahrheitsbedingungen des *Gesamt-Satzes* (z. B. $X \rightarrow Y$) auf, in Abhängigkeit von der *Konjunktion* von Vorder-Satz (X) und Nach-Satz (Y).
• *implikative* Wahrheitstafel: sie zeigt (z. B. bei $X \rightarrow Y$) die Wahrheitsbedingungen des *Nach-Satzes* (Y) auf, in Abhängigkeit vom Vorder-Satz (X).
• *verstärkte implikative* Wahrheitstafel: sie zeigt (z. B. bei $X \rightarrow Y$) die Wahrheitsbedingungen des *Nach-Satzes* (Y) auf, in Abhängigkeit vom Vorder-Satz (X) und von dem Gesamt-Satz $(X \rightarrow Y)$.

Speziell die *synthetische* Wahrheitstafel hat noch folgende *Funktionen*:

Erstens dient die Wahrheitstafel dazu, die *Relatoren zu definieren*.

Zweitens erlaubt sie, für einen realen, empirischen Sachverhalt die treffende Relation zu finden. Hat man z. B. den Sachverhalt bzw. die Menge von Sachverhalten X: „es regnet“, Y: „die Strasse ist nass“, und untersucht, in welchen Kombinationen (die in der Wahrheitstafel aufgeführt sind) diese Sachverhalte auftreten, wird man z. B. als zutreffende Relation herausfinden: „Es regnet $\rightarrow$ die Strasse ist nass“.

Speziell die *analytische* Wahrheitstafel hat folgende Aufgaben:
den *logischen Zusammenhang* zwischen zwei Relationen herauszufinden, also vor allem zu prüfen, ob
- eine *Tautologie* vorliegt (nur + unter dem Zentral-Relator)
- eine *Kontradiktion* vorliegt (nur – unter dem Zentral-Relator)
- eine *semi-analytische* Verbindung vorliegt (+ und – unter dem Zentral-Relator).

Ein Sonderfall ist wie beschrieben die implikative Wahrheitstafel, bei der auch ± (für möglicherweise wahr oder möglicherweise falsch) auftreten kann.

2-1-1 Implikation

2-1-1-1 WAS IST EIN SCHLUSS ?
Was macht eine *tautologische Implikation*, also einen *logischen Schluss* wesentlich aus?
Hier greifen wir zurück auf zwei bereits eingeführte Modelle (vgl. vor allem 0-4):
1) *aussagen-logischer* Ansatz
2) *mengen-theoretischer* Ansatz

Wir können dabei drei *Aspekte* des Schlusses, wie überhaupt einer Relation unterscheiden:
• *Formulierung* bzw. Formalisierung, entsprechend der Oberflächenstruktur
• *Bedeutung* bzw. Definition, entsprechend der Tiefenstruktur
• *Wahrheitsbedingungen* bzw. Wahrheitstafel

Das erläutern wir anhand des folgenden Schlusses $X \wedge Y \Rightarrow Y$ mit seiner Wahrheitstafel:

	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	−	+	+
4.	−	+	−

1) *aussagen-logischer Ansatz*
Für die Aussagen-Logik ist prototypisch, dass sie *wahrheitswert-funktional* bestimmt ist. D. h. die Wahrheit (oder Falschheit) eines Satzes ist eine *Funktion* der Wahrheit (oder Falschheit) eines anderen Satzes bzw. mehrerer anderer Sätze. Dies bezeigt sich besonders bei der *Implikation* bzw. dem *Schluss*: Z. B. ist bei $X \wedge Y \Rightarrow Y$ die Wahrheit von Y eine Funktion der Wahrheit von $X \wedge Y$. Aber diese Wahrheits-Funktionalität gilt generell für die Aussagen-Logik.

• Formulierung
Die *primäre* logische *Formalisierung* des Beispiel-Schlusses ist: $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Dem entspricht die *primäre* sprachliche *Formulierung*, etwa ‚wenn X und Y wahr sind, dann ist auch Y wahr' oder z. B. ‚aus X und Y folgt Y'. Dies ist also eine *implikative* Sprechweise. Um den logischen Schluss von einer *synthetischen* Implikation abzugrenzen, können wir strikter formulieren: ‚Wenn X und Y wahr sind, dann ist Y *logisch notwendig* wahr'. Logisch sind zwar auch andere, äquivalente Formalisierungen möglich, z. B.: $\neg((X \wedge Y) \wedge \neg Y)$. Aber unter einem *Schluss* versteht man immer eine *Implikation* und eine *implikative* Formulierung.

Oft wird auch indirekt definiert: Bei einem Schluss ist die *Konklusion* notwendig wahr, wenn die *Prämisse* wahr ist; allerdings kann ein Schluss auch gültig sein, wenn die Prämisse und die Konklusion falsch sind, daher ist dies nicht so aussagekräftig.

Allgemeine Formalisierung bzw. Formulierung eines Schlusses wäre: $\Phi \Rightarrow \Psi$, d. h.: ‚Wenn Φ wahr ist, dann ist Ψ logisch notwendig wahr'.

• Bedeutung
Man kann zwar auch die eben gebrachten Formulierungen als *Bedeutung* des Schlusses auffassen. Es ließe sich aber die These vertreten, dass diese Formulierungen nur die *Oberflächen-Struktur* (*Oberflächen-Bedeutung*) erfassen, die *Tiefen-Struktur* (*Tiefen-Bedeutung*) aber anders zu bestimmen ist, ohne Verwendung der Implikation, dafür aber durch explizite Anführung *aller möglichen Welten*.

Hierbei nimmt man Bezug auf die *Wahrheitstafel*, welche die Wahrheitsbedingungen angibt. Ohnehin besteht eine enge Verbindung zwischen *Bedeutung und Wahrheitsbedingungen*.

Die Wahrheitstafel wird, wie beschrieben, in erster Linie so, nämlich *konjunktiv*, interpretiert, dass man die Wahrheit einer Relation, damit auch eines Schlusses, durch die Wahrheitswerte seiner *Glieder* bestimmt; das sind beim Schluss die *Prämisse* (hier $X \wedge Y$) und die *Konklusion* (hier Y). Diese Deutung erfasst alle Welten, in denen der Schluss wahr ist. Wir können daher bestimmen: Ein *logischer Schluss* ist eine *Implikation*, die ihn allen Welten wahr ist.

Wir können aber weiter alle möglichen Konjunktionen aus Prämisse und Konklusion *disjunktiv* zusammenfassen, gemäß der Definition (wie sie im Abschnitt über die Wahrheitstafel eingeführt wurde). Dann erhalten wir:

$$[X \wedge Y \Rightarrow Y] \;\Leftrightarrow\; [(X \wedge Y) \wedge Y] \vee [\neg(X \wedge Y) \wedge \neg Y] \vee [\neg(X \wedge Y) \wedge Y]$$

Die 4. Möglichkeit (4. Zeile der Wahrheitstafel) braucht nicht gesondert aufgeführt werden, sie entspricht der 2. Zeile.

Ein *logischer Schluss* ist demnach die *Disjunktion* aller Welten, in denen der Schluss wahr ist, also der Welten, die ihn logisch implizieren; dies können wir als *tiefen-strukturelle* Bedeutung eines Schlusses bezeichnen. Diese Definition entspricht der Definition einer *synthetischen* Relation bzw. eines Relators. (Ein Problem ist hier, dass eine Tautologie aus jeder beliebigen Relation logisch folgt, aber das sei vernachlässigt.)

Allgemein können wir hier bestimmen: die *Tiefenbedeutung* des Schlusses $\Phi \Rightarrow \Psi$ ist: $(\Phi \wedge \Psi) \vee (\neg\Phi \wedge \Psi) \vee (\neg\Phi \wedge \neg\Psi)$. Aber dies ist natürlich nicht die *primäre* Lesart des Schlusses $\Phi \Rightarrow \Psi$.

• Wahrheitsbedingungen

Der wahrheits-funktionale Ansatz der Aussagen-Logik kommt vorrangig bei der *Wahrheitstafel* zum tragen, wo eben der Wahrheitswert der Relation *für jede Welt* festgelegt wird.

In erster Linie versteht man dabei unter wahrheitswert-funktional die *konjunktive* Deutung der Wahrheits-Tafel, bei der die Wahrheit von $\Phi \Rightarrow \Psi$ als Funktion der Konjunktion der Variablen Φ und Ψ definiert wird. Wahrheitswert-funktional ist aber auch die *implikative* Deutung von $\Phi \Rightarrow \Psi$, bei der die Wahrheit von Ψ als Funktion der Wahrheit von Φ gefasst wird.

In unserem Beispiel $X \wedge Y \Rightarrow Y$ ergeben sich bei konjunktiver Deutung folgende *Wahrheitsbedingungen*, die den Zeilen der *Wahrheitstafel* entsprechen (2. Bedingung = der 4.).

	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	Y	
1.	+	+	+	$[(X \wedge Y) \wedge Y] \Rightarrow [X \wedge Y \Rightarrow Y]$
2.	−	+	−	$[\neg(X \wedge Y) \wedge \neg Y] \Rightarrow [X \wedge Y \Rightarrow Y]$
3.	−	+	+	$[\neg(X \wedge Y) \wedge Y] \Rightarrow [X \wedge Y \Rightarrow Y]$
4.	−	+	−	$[\neg(X \wedge Y) \wedge \neg Y] \Rightarrow [X \wedge Y \Rightarrow Y]$

Kennzeichnend für einen Schluss, überhaupt für eine Tautologie ist, dass er/sie unter allen Bedingungen, d. h. aber *in allen Welten* wahr ist, also nur + unter dem Zentral-Relator auftritt. (zur Einschränkung vgl. Bedeutung). Könnte man die *Konjunktion dieser Wahrheitsbedingungen* auch als Form der *Bedeutung* von $X \wedge Y \Rightarrow Y$ verstehen? In diesem Fall wäre das denkbar, denn die Konjunktion von 4 *Tautologien* ergibt wieder eine *Tautologie*, und jede Tautologie ist jeder anderen Tautologie äquivalent, also auch $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Anders wäre es aber bei einem *semi-analytischen* Satz wie z. B. $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$; hier ergibt sich keine Äquivalenz mit der Konjunktion der Wahrheitsbedingungen. Trotz ihrer engen Beziehung sollte man aber *Bedeutung* und *Wahrheitsbedingungen* grundsätzlich nicht identifizieren.

Allgemein wären die (konjunktiven) Wahrheitsbedingungen eines aussagen-logischen Schlusses $\Phi \Rightarrow \Psi$ dann wie folgt zu fassen:

$(\Phi \wedge \Psi) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi)$, $(\neg\Phi \wedge \Psi) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi)$, $(\neg\Phi \wedge \neg\Psi) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow \Psi)$

Nur $\Phi \wedge \neg\Psi$ darf nicht als Prämisse möglich sein, denn dann wäre $\Phi \Rightarrow \Psi$ kein strenger Schluss. (Allerdings ist generell eine Tautologie $\Phi \Rightarrow \Psi$ bei jeder Bedingung gültig.)

Der *aussagen-logische*, *funktionale* Ansatz ist zwar korrekt, aber wenig anschaulich und eindrücklich, man hat nicht den Eindruck, so wirklich zu verstehen, was einen Schluss ausmacht. Schauen wir, wie das im *mengen-theoretischen* Modell aussieht.

2) *mengen-theoretischer Ansatz*

Ich möchte mich bei dem mengen-theoretischem Ansatz nur auf das Thema *Bedeutung* bzw. *Tiefen-Bedeutung* fokussieren. Mengen-theoretische *Formalisierungen* von Schlüssen sind ungewöhnlich, und die *Wahrheitstafel* spielt in der Mengen-Theorie normalerweise eben gerade keine Bedeutung, weil dieser Ansatz nicht wahrheits-funktional ist.

Mengen-theoretisch könnte man als Bedeutung des Schlusses $X \wedge Y \Rightarrow Y$ formulieren: Y ist logisch gesehen *Teilmenge* von $X \wedge Y$.

Hier gilt im Einzelnen:

– Bei einem Schluss ist die Konklusion (Schluss-Satz) bereits in der Prämisse *enthalten*.

– Genauer: Bei einem Schluss ist die *Information* der Konklusion in der *Information* der Prämisse enthalten.

– Bzw.: Bei einem Schluss ist die Information der Konklusion eine *Teilmenge* der Information der Prämisse.

– Definition: Ein Schluss ist eine *Implikation*, bei der die Information der Konklusion bereits in der Information der Prämisse enthalten ist.

Dies ist andererseits ja auch die primäre Definition von *analytisch*: dass das Nachglied schon im Vorderglied enthalten ist.

Dies ist bei dem Schluss $X \wedge Y \Rightarrow Y$ besonders augenfällig: Y ist bereits in $X \wedge Y$ enthalten. Allerdings ist z. B. bei dem Schluss $X \Rightarrow X \vee Y$ die Konklusion $X \vee Y$ *logisch* genauso in der Prämisse X enthalten (obwohl das optisch anders aussieht). Entscheidend für den Bestimmung des *Informationsgehaltes* einer aussagen-logischen Relation ist die Menge der Welten, in denen die Relation *ungültig* (–) ist.

Im obigen Beispiel $X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist laut Wahrheitstafel die Prämisse in der 2., 3. und 4. Zeile bzw. Welt ungültig (wobei die 2. Welt und die 4. Welt übereinstimmen, die Detailunterschiede sind hier nicht relevant). Die Konklusion Y ist dagegen nur in der 2. und 4. Welt ungültig. Insofern ist die Menge der Welten, in den Y ungültig ist, ein *Teilmenge* der Welten, in denen $X \wedge Y$ ungültig ist. Anders gesagt, der *Informationsgehalt* von Y ist eine Teilmenge des Information von $X \wedge Y$. Wir werden später sehen, dass dies auch für *quantoren-logische* und *quantitative* Schlüsse gilt. Hier nur ein Beispiel aus der Quantoren-Logik: „alle Menschen sind sterblich $\Rightarrow$ (mindestens) einige Menschen sind sterblich“. Was für die *Klasse* gilt, gilt auch für eine *Teilklasse*, es geht wieder um eine *Teilinformation*.

Mit Begriffen der *Informationstheorie* kann man auch sagen: Ein logischer Schluss ist *redundant* – oder spezifischer: Beim Schluss ist die Konklusion in Bezug auf die Prämisse *redundant*. Nun muss man damit allerdings vorsichtig sein, denn dies klingt so, als sei ein Schluss gewissermaßen *überflüssig*.

Schlüsse bringen für uns aber durchaus *neue* Erkenntnisse, z. B. ist es eine neue Erkenntnis, dass gilt $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$, also dass $X \rightarrow Y$ aus $X \wedge Y$ folgt. Wir knüpfen hier an die Ausführungen in Kapitel 0 an über *Extension* und *Intension*.

Um den Gedankengang klarer zu fassen, nehmen wir uns als Beispiel eine logische *Äquivalenz* $\Leftrightarrow$ anstatt einer logischen Implikation $\Rightarrow$, z. B. $X \wedge Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)$. Die Äquivalenz ist ein Doppelschluss: $[X \wedge Y \Rightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)] \wedge [X \wedge Y \Leftarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)]$. Die *Bedeutung* von $X \wedge Y$ und $\neg(\neg X \vee \neg Y)$, die *Intension*, aber auch die *Extension*, ist ungleich; nur die *objektive Extension* (auf die man sich normalerweise aber nicht bezieht) ist gleich. D. h.

wenn wir jemand erklären, dass $X \wedge Y$ und $\neg(\neg X \vee \neg Y)$ *logisch äquivalent* sind, wird das für ihn durchaus eine „Information“ sein, es sei denn, er ist eben logisch vorgebildet. Nur wenn wir einen *streng logischen* Informationsbegriff verwenden, der sich nur auf die *Wahrheitstafeln* bezieht, enthalten diese beiden Ausdrücke genau dieselbe Information.

Noch einmal zurück zum Schluss: Auch wenn wir uns auf den strengen Informations-Begriff beziehen, kann ein Schluss für uns eine neue Erkenntnis bringen. Denn wir vermögen oft (subjektiv) in einer *Gesamt-Information* nicht die für uns relevante *Teil-Information* zu erkennen; erst wenn wir sie logisch ableiten, isolieren, wird sie uns bewusst. Darauf verweist auch der Begriff der *Deduktion*, der logischen Ableitung.

Beim Schluss besteht somit ein *inhaltlicher* Zusammenhang zwischen Prämisse und Konklusion. Wie beschrieben vor allem in dem Sinne, dass hier eine logische Abhängigkeit gegeben ist, die mengen-theoretisch betrachtet mit dem Verhältnis *Ganzes – Teil*, also mit Enthaltensein bzw. Umfassen zu tun hat (es geht nicht um Kausalität o. ä.).

Allerdings muss beim Schluss von einer *Tautologie* auf eine andere Tautologie kein inhaltlicher Zusammenhang bestehen, z. B. $(X \Rightarrow X) \Rightarrow (Y \Rightarrow Y)$; entsprechendes gilt für einen Schluss mit einer *Kontradiktion* als Prämisse. Aber auch das lässt sich mit der Informationstheorie erklären: Eine *Tautologie* ist bezüglich der *Information* eine *leere Menge*, denn sie enthält unter dem Zentral-Relator *kein* −. Eine leere Menge ist aber *Teilmenge jeder beliebigen Menge*. So erklärt sich, dass die Tautologie aus jeder beliebigen Relation *folgt*, ihre Information („0-Information“) ist eben in der Information jeder anderen Relation enthalten.

Umgekehrt die *Kontradiktion*: Sie enthält die „*totale Information*“, weil bei ihr unter dem Zentral-Relator nur − vorkommt. So folgt aus ihr logisch jede mögliche Relation, weil deren Information mit Sicherheit Teilmenge der Total-Information der Kontradiktion ist.

2-1-1-2 TAUTOLOGIE

Man kann bei der *analytischen Implikation* zweierlei behandeln:

- Gesetze der Implikation, z. B.: $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \leftarrow \neg Y)$
- Gesetze, in denen eine analytische Implikation vollzogen wird, z. B.: $X \wedge Y \Rightarrow Y$

Im ersten Beispiel geht es um eine analytische *Äquivalenz*, aber zwischen Implikationen. Im zweiten Fall geht es zwar um eine analytische *Implikation*, aber auf der Basis einer Konjunktion. Beides kommt zusammen z. B. in: $(X \rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow X)$.

Generell gilt:

- Die Implikation ist immer gültig, wenn das *Vorderglied ungültig* ist: $- \Rightarrow \ldots$
- Die Implikation ist immer gültig, wenn das *Nachglied gültig* ist: $\ldots \Rightarrow +$
- Natürlich kann das auch zusammenkommen, nämlich: $- \Rightarrow +$

Zusammenfassend haben wir also 3 Fälle: $- \Rightarrow -$, $- \Rightarrow +$, $+ \Rightarrow +$

So ergibt sich z. B.:

$$----\;\Rightarrow\;---+\;\Rightarrow\;--++\;\Rightarrow\;-+++\;\Rightarrow\;++++$$

Anders gesagt: Die Implikation ist nur dann *ungültig*, wenn das *Vorderglied gültig* und das *Nachglied ungültig* ist. (Im Systematik-Teil wird das im Einzelnen dargestellt.)

Ein Beispiel für die Wahrheitstafel einer *Implikations-Tautologie* ist:

(X	→	Y)	∧	X	⇒	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	−	+	+	−
−	+	+	−	−	+	+
−	+	−	−	−	+	−

Wichtige *Gesetze*, eine Auswahl:

• *1 Variable*:

Reflexivität	$X \Rightarrow X$
Reductio ad absurdum	$X \rightarrow \neg X \Rightarrow \neg X$ (es gilt auch $\Leftrightarrow$)

• *2 Variablen*:

Modus (ponendo) ponens	$(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$
Modus tollendo tollens	$(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg X$
Modus ponendo tollens	$(X >< Y) \wedge X \Rightarrow \neg Y$
Modus tollendo ponens	$(X >< Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y$ $(X \vee Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y$
Abtrennungs-Regel	$X \wedge Y \Rightarrow Y, X \wedge Y \Rightarrow X$
Simplifikations-Regel	$X \leftrightarrow Y \Rightarrow X \rightarrow Y$
Paradoxie	$\neg X \Rightarrow X \rightarrow Y$

• *3 Variablen*:

Transitivität	$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \Rightarrow X \rightarrow Z$ $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow \neg Z) \Rightarrow X \rightarrow \neg Z$ $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \Rightarrow X \leftrightarrow Z$

2-1-1-3 KONTRADIKTION UND NEGATION

Eine Implikation kann nur dann *kontradiktorisch* sein, wenn das *Vorderglied eine Tautologie* und das *Nachglied eine Kontradiktion* ist.

Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion

In diesem Fall ist also die analytische Gesamt-Relation bereits aus zwei *analytischen* Relationen zusammengesetzt, z. B.:

$$
\begin{array}{ccc}
(X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) & \not\Rightarrow & (X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X) \\
+ & - & - \\
+ & - & - \\
+ & - & - \\
+ & - & -
\end{array}
$$

Diese scharfe Forderung bedingt, dass Folgen, die man eigentlich für *kontradiktorisch* halten müsste, es doch nicht sind, z. B.:

$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg(X \rightarrow Y) : - + - -$

$\neg(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \rightarrow Y) : + - + +$

Wenn man also aus der Implikation auf ihre *Negation* schließt (und umgekehrt), ergibt sich keine Kontradiktion, sondern nur eine *semi-analytische* Relation. Und obwohl die beiden obigen Relationen logisch gleichwertig sind, hat der eine Schluss 3+, der andere nur 1+. Das ist von unserem normalen Sprach- und Logikverständnis her wenig plausibel.

Wohl noch problematischer ist, dass auch folgende Schlüsse *nicht kontradiktorisch* sind:

$X \longrightarrow \neg X$: $- - + +$

$\neg X \longrightarrow X$: $+ + - -$

Nun könnte man allerdings einwenden:

Um ein nicht-Folgen bzw. sich Ausschließen bei der Implikation auszudrücken, benötigt man gar nicht die kontradiktorische Implikation, sondern es genügt z. B. die *Negation*.

Ich will daher eine *Übersicht über die wichtigsten Negationen* bei der *Implikation* geben:

- Kontradiktion $\Phi \not\Rightarrow \Psi$

Es gilt die Kontraposition: $\neg\Phi \not\Leftarrow \neg\Psi$

Analytisch, z. B.: $(X\ {}^{+}\!\vee^{+}\ \neg X) \not\Rightarrow (X\ {}^{-}\!\wedge^{-}\ \neg X)$

Synthetisch und semi-analytisch: nicht definiert

Eine Kontradiktion, aber der Negation, ist: ${}^{-}\!\neg^{-}(\Phi \Rightarrow \Psi)$

- Konträre Negation: $\Phi \rightarrow \neg\Psi$

$\Phi \rightarrow \neg\Psi$ definiert die *Exklusion* $\Phi \mid \Psi$, es gilt also: $\Phi \rightarrow \neg\Psi \ \Leftrightarrow\ \Phi \mid \Psi$.

Somit entspricht $\Phi \rightarrow \neg\Psi$ dem *konträren* Gegensatz zwischen Φ und Ψ.

Es gilt die Kontraposition: $(\Phi \rightarrow \neg\Psi) \ \Leftrightarrow\ (\neg\Phi \leftarrow \Psi)$

Synthetisch:	$X \rightarrow \neg Y$	$(- + + +)$
Analytisch, Beispiel:	$(X >\!< Y) \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$	$(- + + -) \Rightarrow (- + + +)$
Semi-analytisch, Beispiel:	$X \vee Y \longrightarrow \neg X$	$(+ + + -) \longrightarrow (- - + +)$

Der negative analytische Schluss $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$ darf nicht mit der Kontradiktion verwechselt werden.

Es bleibt die Frage, wie man die konträre Negation interpretiert:

Φ *impliziert nicht* Ψ. Oder: Φ impliziert *nicht Ψ*. Vermutlich gilt das zweite. Denn „Φ *impliziert nicht* Ψ" entspricht eher $\neg(\Phi \rightarrow \Psi)$.

- Doppelte Negation: $\Phi \rightarrow \neg\neg\Psi$

Die doppelte Negation hebt sich auf, somit gilt: $(\Phi \rightarrow \neg\neg\Psi) \ \Leftrightarrow\ (\Phi \rightarrow \Psi)$

Synthetisch: $(X \rightarrow \neg\neg Y) \ \Leftrightarrow\ (X \rightarrow Y)$

Analytisch, Beispiel: $(X \Rightarrow \neg\neg X) \ \Leftrightarrow\ (X \Rightarrow Y)$

Semi-analytisch, Beispiel: $(X \vee Y \longrightarrow \neg\neg Y) \ \Leftrightarrow\ (X \vee Y \longrightarrow Y)$

- Zweifache Negation: $(\Phi \rightarrow \neg\Psi) \wedge (\neg\Phi \rightarrow \Psi)$

$(\Phi \rightarrow \neg\Psi) \wedge (\neg\Phi \rightarrow \Psi)$ definiert die *Kontravalenz* $\Phi >\!< \Psi$,

es gilt also: $[(\Phi \rightarrow \neg\Psi) \wedge (\neg\Phi \rightarrow \Psi)] \Leftrightarrow (\Phi >\!< \Psi)$.

So entspricht $(\Phi \rightarrow \neg\Psi) \wedge (\neg\Phi \rightarrow \Psi)$ dem *kontradiktorischen* Gegensatz zwischen Φ und Ψ.

Es gilt die Kontraposition: $[(\Phi \rightarrow \neg\Psi) \wedge (\neg\Phi \rightarrow \Psi)] \Leftrightarrow [(\neg\Phi \leftarrow \Psi) \wedge (\Phi \leftarrow \neg\Psi)]$.

Synthetisch: $(X \rightarrow \neg Y) \wedge (\neg X \rightarrow Y)$: $(- + + -)$

(die Konjunktion der Prämissen ist allerdings nicht mehr synthetisch)

Analytisch, Beispiel : $[(X \wedge Y) \Rightarrow \neg(X \mid Y)]\ {}^{+}\!\wedge^{+}\ [\neg(X \wedge Y) \Rightarrow (X \mid Y)]$??

Semi-analytisch, Beispiel: $(X \vee Y \longrightarrow \neg Y)\ {}^{+}\!\wedge^{-}\ (\neg(X \vee Y) \longrightarrow Y)$

- Ganze Negation $\neg(\Phi \rightarrow \Psi)$

$\neg(\Phi \rightarrow \Psi)$ definiert $\Phi >\!- \Psi$ bzw. $\Phi \wedge \neg\Psi$.

$\neg(\Phi \rightarrow \Psi)$ ist der kontradiktorische Gegensatz von $\Phi \rightarrow \Psi$, also $(\Phi \rightarrow \Psi)\ {}^{+}\!>\!<^{+}\ \neg(\Phi \rightarrow \Psi)$.

Synthetisch:	$\neg(X \rightarrow Y)$	$(- + - -)$
Analytisch:	$^{-}\neg^{-}(X \Rightarrow X)$	$(- - - -)$
	$^{+}\neg^{+}[(X \,^{+}\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,^{-}\wedge^{-} \neg X)]$	$(+ + + +)$
Semi-analytisch:	$^{+}\neg^{-}(X \vee Y \longrightarrow Y)$	$(- - + -)$

Es gilt: $\neg$(synthetisch) = synthetisch, $\neg$(semi-analytisch) = semi-analytisch, $\neg$(tautologisch) = kontradiktorisch, $\neg$(kontradiktorisch) = tautologisch
Eine Variante ist $\neg(\Phi \rightarrow \neg\Psi)$.

• Negative Folge: $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$
Eigentlich handelt es sich hier nur um die analytische Form der *konträren Negation*: $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$ (vgl. dort). Wegen der besonderen Bedeutung will ich sie aber auch gesondert aufführen.
Analytisch, z. B.: $X >< Y \;\Rightarrow\; \neg(X \wedge Y)$
Synthetisch und semi-analytisch: nicht definiert
Da die *Kontradiktion* bei der normalen Implikation extrem eingeschränkt und damit fast unbrauchbar ist, spielt die *Folge mit Negation* als Alternative eine wichtige Rolle.

• Negation des strengen Schlusses: $\Phi \neg\!\!\Rightarrow \Psi$
$\Phi \neg\!\!\Rightarrow \Psi$ soll bedeuten: Φ impliziert nicht streng (tautologisch) Ψ, sondern nur partiell.
Ψ folgt daher *nicht notwendig* aus Φ.
$\Phi \neg\!\!\Rightarrow \Psi$ kann somit für $\Phi \longrightarrow \Psi$ stehen.
$\Phi \neg\!\!\Rightarrow \Psi$ darf man nicht gleichsetzen mit $^{-}\neg^{-}(X \Rightarrow X)$, das ist ja eine Kontradiktion.
$\Phi \neg\!\!\Rightarrow \Psi$ kann man keine eindeutige Wahrheitstafel zuordnen, sondern nur sagen: die Wahrheitstafel enthält nicht ausschließlich + und nicht ausschließlich –.
Man braucht die Notation $\Phi \neg\!\!\Rightarrow \Psi$ nicht unbedingt, aber sie kann pragmatisch nützlich sein, um eben – sofort optisch erkennbar – hervorzuheben, dass ein Schluss keine Tautologie ist.
Es bleibt zu fragen, ob man auch eine Negation des partiellen Schlusses $\Phi \neg \longrightarrow \Psi$ ansetzen sollte. Aber die Negation einer partiellen Schlussfolgerung führte zu einem synthetischen Satz. Letztlich scheint mir diese Negation zu unklar für eine Verwendung.

Die wichtigsten *Beziehungen dieser Negationen* seien durch ein Diagramm veranschaulicht.

$\Phi \not\Rightarrow \Psi$	$(- - - -)$	Kontradiktion
$\Downarrow$		
$\neg(X \rightarrow Y)$	$(- + - -)$	Ganze Negation
$\Downarrow$		
$(X \rightarrow \neg Y) \wedge (\neg X \rightarrow Y)$	$(- + + -)$	Zweifache Negation
$\Downarrow$		
$X \rightarrow \neg Y$	$(- + + +)$	Konträre Negation
$\Downarrow$		
$\Phi \Rightarrow \neg\Psi$	$(+ + + +)$	Negative Folge

Abschließend sei erwähnt, dass bei der *Positiv-Implikation* die Verhältnisse einfacher sind, wie noch gezeigt werden wird.

2-1-1-4 SEMI-ANALYTISCHE IMPLIKATION

Semi-analytische Relationen können unterschiedlich nahe an der *Tautologie* oder *Kontradiktion* stehen.

$X \vee Y \longrightarrow Y \quad (+ - + +)$
$X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y \quad (+ - - +)$
$X \mid Y \longrightarrow X \wedge Y \quad (+ - - -)$

Man könnte unterscheiden zwischen:

• *unechten* semi-analytischen Schlüssen
z. B. $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$. Unecht, denn der umgekehrte Schluss, die Replikation, ist ein *streng* analytischer Schluss: $X \vee Y \Leftarrow X \wedge Y$

• *echten* semi-analytischen Schlüssen
z. B. $X \wedge Y \longrightarrow X \wedge \neg Y \quad (- + + +)$
Hier ist die Replikation auch eine semi-analytische Folge:
$X \wedge Y \longleftarrow X \wedge \neg Y \quad (+ - + +)$

• *scheinbaren* semi-analytischen Schlüssen
z. B. $X \rfloor Y \longrightarrow X \lfloor Y \; (+ - + +)$
Der Schluss hat also den Wahrheitsverlauf einer semi-analytischen Relation. Wenn man aber $X \rfloor Y$ und $X \lfloor Y$ in einer Wahrheitstafel gegenüberstellt, erhält man auch *alle* möglichen Kombinationen, also + +, + –, – +, – –, wie die nachfolgende Wahrheitstafel zeigt.

$X \rfloor Y$	$\longrightarrow$	$X \lfloor Y$
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	+	–

Das liegt daran, dass $X \rfloor Y$ und $X \lfloor Y$ nur *Pseudo-Relationen* sind, sie entsprechen nämlich genau den Variablen X bzw. Y: $X \rfloor Y \Leftrightarrow X$ und $X \lfloor Y \Leftrightarrow Y$. D. h., X und Y in $X \rfloor Y$ und ebenso $X \lfloor Y$ sind logisch voneinander *unabhängig*. Somit entspricht die *semi-analytische* Relation $X \rfloor Y \longrightarrow X \lfloor Y$ genau dem *synthetischen* $X \rightarrow Y$.

Dieses Phänomen betrifft allerdings nicht nur den Implikations-Relator $\rightarrow$, sondern jeden beliebigen Relator, z. B. $(X \rfloor Y \wedge X \lfloor Y) \Leftrightarrow (X \wedge Y)$.

Wenn man betonen will, dass *keine* strenge logische Folge vorliegt, kann man, wie schon angemerkt, auch $\neg\Rightarrow$ (statt $\longrightarrow$) schreiben, z. B.:
$X \rightarrow Y \neg\Rightarrow X \leftarrow Y$.
Lies: „$X \rightarrow Y$ impliziert nicht streng logisch $X \leftarrow Y$“.

Übersicht
Ich will hier noch einmal eine Übersicht über die *Implikation* geben, einschließlich der *synthetischen* Implikation:

1. synthetisch
   - positiv: $X \rightarrow Y$
   - negativ: $X \rightarrow \neg Y$
   - zweifach negativ: $(X \rightarrow \neg Y) \wedge (\neg X \rightarrow Y)$
   - ganz negiert: $\neg(X \rightarrow Y)$

2. analytisch: tautologisch
   - positiv: $\Phi \Rightarrow \Psi$, z. B.: $X \wedge Y \Rightarrow Y$
   - negativ: $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$, z. B.: $X >< Y \;\Rightarrow\; \neg(X \wedge Y)$
   - zweifach negativ: $(\Phi \Rightarrow \neg\Psi) \;^{+}\!\wedge^{+}\; (\neg\Phi \Rightarrow \Psi)$,
     z. B.: $[(X \wedge Y) \Rightarrow \neg(X \mid Y)] \;^{+}\!\wedge^{+}\; [\neg(X \wedge Y) \Rightarrow (X \mid Y)]$
   - ganz negiert: $^{-}\!\neg^{-}(\Phi \Rightarrow \Psi)$, das ist äquivalent: $\Phi \nRightarrow \Psi$
     d. h. durch Negation einer *Tautologie* ergibt sich eine *Kontradiktion*

3. analytisch: kontradiktorisch

   positiv : $\Phi \nRightarrow \Psi$, z. B.: $(X \;^{+}\!\vee^{+} \neg X) \nRightarrow (Y \;^{-}\!\wedge^{-} \neg Y)$

   negativ: $\Phi \nRightarrow \neg\Psi$, z. B. $(X \;^{+}\!\vee^{+} \neg X) \nRightarrow \neg(Y \;^{+}\!\vee^{+} \neg Y)$

   zweifach negativ : $(\Phi \nRightarrow \neg\Psi) \;^{-}\!\wedge^{-}\; (\neg\Phi \nRightarrow \Psi)$

   ganz negiert: $^{+}\!\neg^{+}(\Phi \nRightarrow \Psi)$, das ist äquivalent $\Phi \Rightarrow \Psi$
   d. h. durch Negation der ganzen *Kontradiktion* ergibt sich eine *Tautologie*

4. semi-analytisch
   positiv: $\Phi \longrightarrow \Psi$, z. B.: $X \vee Y \longrightarrow Y$
   negativ: $\Phi \longrightarrow \neg\Psi$, z. B.: $X \vee Y \longrightarrow \neg Y$
   zweifach negativ: $(\Phi \longrightarrow \neg\Psi) \wedge (\neg\Phi \longrightarrow \Psi)$
   ganz negiert: $\neg(\Phi \longrightarrow \Psi)$, z. B. $\neg(X \vee Y \longrightarrow Y)$
   durch Negation eines partiellen Schlusses ergibt sich wieder ein partieller Schluss

Zum Schluss eine *Übersicht* über alle (semi)analytische Verbindungen des Implikators $\rightarrow$:

		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
	$\rightarrow$	T	$\vee$	$\leftarrow$	$\rfloor$	$\rightarrow$	$\lfloor$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\mid$	$><$	$\lceil$	$>-$	$\rceil$	$-<$	∇	K
1.	T	T	$\vee$	$\leftarrow$	$\rfloor$	$\rightarrow$	$\lfloor$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\mid$	$><$	$\lceil$	$>-$	$\rceil$	$-<$	∇	K
2.	$\vee$	T	T	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\mid$	$\mid$	$\lceil$	$\lceil$	$\rceil$	$\rceil$	∇	∇
3.	$\leftarrow$	T	$\vee$	T	$\vee$	$\rightarrow$	$\lfloor$	$\rightarrow$	$\lfloor$	$\mid$	$><$	$\mid$	$><$	$\rceil$	$-<$	$\rceil$	$-<$
4.	$\rfloor$	T	T	T	T	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\rceil$	$\rceil$	$\rceil$	$\rceil$
5.	$\rightarrow$	T	$\vee$	$\leftarrow$	$\rfloor$	T	$\vee$	$\leftarrow$	$\rfloor$	$\mid$	$><$	$\lceil$	$-<$	$\mid$	$><$	$\lceil$	$-<$
6.	$\lfloor$	T	T	$\leftarrow$	$\leftarrow$	T	T	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\mid$	$\mid$	$\lceil$	$\lceil$	$><$	$><$	$\lceil$	$\lceil$
7.	$\leftrightarrow$	T	$\vee$	T	$\vee$	T	$\vee$	T	$\vee$	$\mid$	$><$	$\mid$	$><$	$\mid$	$><$	$\mid$	$><$
8.	$\wedge$	T	T	T	T	T	T	T	T	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
9.	$\mid$	T	$\vee$	$\leftarrow$	$\rfloor$	$\rightarrow$	$\lfloor$	$\leftrightarrow$	$\wedge$	T	$\vee$	$\leftarrow$	$\rfloor$	$\rightarrow$	$\lfloor$	$\leftrightarrow$	$\wedge$
10.	$><$	T	T	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	T	T	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$
11.	$\lceil$	T	$\vee$	T	$\vee$	$\rightarrow$	$\lfloor$	$\rightarrow$	$\lfloor$	T	$\vee$	T	$\vee$	$\rightarrow$	$\lfloor$	$\rightarrow$	$\lfloor$
12.	$>-$	T	T	T	T	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	T	T	T	T	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
13.	$\rceil$	T	$\vee$	$\leftarrow$	$\rfloor$	T	$\vee$	$\leftarrow$	$\rfloor$	T	$\vee$	$\leftarrow$	$\rfloor$	T	$\vee$	$\leftarrow$	$\rfloor$
14.	$-<$	T	T	$\leftarrow$	$\leftarrow$	T	T	$\leftarrow$	$\leftarrow$	T	T	$\leftarrow$	$\leftarrow$	T	T	$\leftarrow$	$\leftarrow$
15.	∇	T	$\vee$	T	$\vee$	T	$\vee$	T	$\vee$	T	$\vee$	T	$\vee$	T	$\vee$	T	$\vee$
16.	K	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

Diese Tabelle gibt alle *analytischen* oder *semi-analytischen* möglichen Implikationen an. Die Relation in der Tabelle gibt dann an, welchem Relator bzw. welcher synthetischen Relation die (semi)analytische Implikation entspricht: T = Tautologie, K = Kontradiktion.

Die Tabelle ist folgendermaßen zu lesen (erst linke Nummer, dann rechte Nummer):
z. B. 2. 3. $[(X \vee Y) \longrightarrow (X \leftarrow Y)] \Leftrightarrow (X \leftarrow Y)$
z. B. 7.15. $[(X \leftrightarrow Y) \longrightarrow (X \nabla Y)] \Leftrightarrow (X \mid Y)$
Es ist interessant, wie viele *Symmetrien* die Tabelle enthält.

2-1-1-5 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ
Für die *Replikation* sind nicht viele Gesetze ausgewiesen, allerdings kann man die umgekehrten Gesetze der *Implikation* verwenden.

Gesetze der Replikation
$X \Leftarrow X$

$(X \leftarrow Y) \Leftarrow X$

$(X \leftarrow Y) \Leftarrow X \wedge Y$

$(X \vee Y) \Leftarrow X \wedge Y$

$X \Leftarrow (X \leftarrow Y) \wedge Y$

Für die Äquivalenz sind viele Gesetze ausgewiesen, hier nur eine kleine Auswahl:

Gesetze der Äquivalenz

Reflexivität der Äquivalenz	$X \Leftrightarrow X$
Definition der Äquivalenz	$(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y)$
Kontraposition Implikation	$X \rightarrow Y \Leftrightarrow (\neg X \leftarrow \neg Y)$
Kontraposition Äquivalenz	$X \leftrightarrow Y \Leftrightarrow (\neg X \leftrightarrow \neg Y)$
De Morgan	$X \wedge Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)$ $X \vee Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y)$
Vertauschungsgesetz	$X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X$

2-1-2 Positiv-Implikation

Die *analytischen Eigenschaften* der *Positiv-Implikation* sind recht komplex bzw. kompliziert, daher habe ich auch noch keine vollständige der Theorie der (analytischen) Positiv-Implikation entwickelt, hier steht noch Forschungsarbeit aus. Für die Positiv-Implikation ergeben sich z. T. die gleichen, z. T. aber auch andere Gesetze wie für die klassische Implikation.

Es lassen sich 2 Modelle der (analytischen) Positiv-Implikation unterscheiden. Ich nenne sie: *Existenz-Modell* und *Nicht-Existenz-Modell*.

• *Existenz-Modell*

Hier gilt: (X *→ Y) *⇔ ¬(X *→ ¬Y)

Bzw.: (X *→ ¬Y) *⇔ ¬(X *→ Y)

• *Nicht-Existenz-Modell*

Hier gelten die obigen tautologischen Äquivalenzen nicht, sondern nur die *semi-analytische Äquivalenzen* bzw. *analytische Implikationen*:

Nämlich: (X *→ Y) *←→ ¬(X *→ ¬Y). Oder: (X *→ Y) *⇒ ¬(X *→ ¬Y)

Bzw.: (X *→ ¬Y) *←→ ¬(X *→ Y) Oder: (X *→ ¬Y) *⇒ ¬(X *→ Y)

Existenz meint in diesem Fall: Aus der *Negation* von X *→ ¬Y folgt logisch X *→ Y und daraus folgt X. Somit ist die *Existenz* von X gewährleistet. Bei dem Nicht-Existenz-Modell ist das beides nicht gegeben. Allerdings gilt der Schluss auf X nicht aussagen-logisch, sondern nur *quantoren-logisch* bzw. *quantitativ* (denn es gilt nur p > 0, nicht p = 1).

Ich werde hier das *Existenz-Modell* vorstellen. Im Punkt 2-4, über quantitative Aussagen-Logik, werde ich auch das Nicht-Existenz-Modell vorstellen und die beiden Modelle miteinander vergleichen (was auch mit *unterschiedlichen Wahrheitstafeln* verbunden ist). Denn nur im quantitativen Ansatz ist eine verständliche Unterscheidung der beiden Modelle möglich.

2-1-2-1 TAUTOLOGIE

Es gelten z. B. folgende Gesetze:

X *⇒ X

X ∧ Y *⇒ Y

(X *→ Y) ∧ X *⇒ Y

Der Schluss *Modus ponens*: (X *→ Y) ∧ X *⇒ Y soll genauer erklärt werden.
Zunächst Beweis durch *verkürzte* Wahrheitstafel:

(X	*→	Y)	∧	X	*⇒	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	−	+		

Die Lücke in der Wahrheitstafel ergibt sich, weil unter der Konjunktion ∧ in der 2. Zeile ein Minus (–) steht, so dass eben bei der Positiv-Implikation kein Wert daraus folgt. Denn die Positiv-Implikation ist ja nur für die Fälle definiert, in denen das *Vorderglied gültig* (+) ist; sonst wird bei der *verkürzten Wahrheitstafel* eine Lücke gelassen (vgl. aber unten).

Verwendet man die *vollständige Wahrheitstafel* mit □, ergibt sich keine Lücke. Grundsätzlich ist die vollständige Wahrheitstafel vorzuziehen, auch wenn sie optisch unübersichtlicher ist; in bestimmten Fällen können sich bei der verkürzten Wahrheitstafel Fehler bzw. nicht entscheidbare Wahrheitswerte ergeben.

Modus ponens: vollständige Wahrheitstafel:

(X	*→	Y)	∧	X	*⇒	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	−	+	□	−
−	□	+	−	−	□	+
−	□	−	−	−	□	−

Wie schon in erläutert: Wenn links von *→ ein Minus (−) in der Wahrheitstafel unter dem Relator steht, dann gilt *→ als *nicht definiert* und erhält in dieser Zeile ein □.

Definition einer Tautologie der Positiv-Implikation: Eine Positiv-Implikation, bei der *syntaktisch* gesprochen rechts und links von *→ ganz oder teilweise gleiche Zeichen stehen, und bei der außer + nur □ unter dem Zentral-Relator steht, gilt als *analytisch* und wird mit dem Doppelpfeil *⇒ gekennzeichnet. Dies im Unterschied zur *normalen* analytischen Implikation, bei der in der Wahrheitstafel nur + vorkommt.

Es stellt sich die Frage, inwieweit sich Positiv-Relationen mit anderen Relatoren verknüpfen lassen. Verwendet man die *verkürzte* Wahrheitstafel, so ist das nicht besonders problematisch, da in dieser Wahrheitstafel nur + (entsprechend w = wahr) und – (entsprechend f = falsch) vorkommen, für welche die normalen Relatoren definiert sind. Verwendet man dagegen die *vollständige* Wahrheitstafel der Positiv-Implikation, dann treten dort Zeichen wie □ auf. Zunächst ist das Zeichen □ für „nicht definiert“ (und auch das noch einzuführende Zeichen ‚?’ = unbestimmt) nur für die Positiv-Implikation bzw. Positiv-Replikation/Positiv-Äquivalenz definiert. In bestimmten Fällen sind aber auch bei anderen Relatoren wie →, ∧, ∨ usw. Verknüpfungen mit □ möglich. Z. B. weiß man bei der *normalen Implikation*, dass sie *immer* gültig ist, wenn links − (minus) steht, sie muss also auch gültig sein, wenn links − (minus) und rechts □ steht. Oder die *Konjunktion* ist immer ungültig, wenn *ein* − (minus) steht, d. h. sie muss auch ungültig sein, wenn − und □ kombiniert sind.

Dieser Fall ist bei der obigen Wahrheitstafel von (X *→ Y) ∧ X *⇒ Y gegeben. Die Reihe unter ∧ kann man im obigen Beispiel vollständig ausfüllen, obwohl 2x links □ steht. Denn rechts steht dort jeweils minus (−), und die Konjunktion ist ja immer negativ, auch wenn nur ein Minus da steht.

Abschließend noch die Wahrheitstafeln für die beiden anderen anfangs genannten Tautologien:

X	*⇒	X
+	+	+
+	+	+
−	□	−
−	□	−

X	∧	Y	*⇒	Y
+	+	+	+	+
+	−	−	□	−
−	−	+	□	+
−	−	−	□	−

2-1-2-2 KONTRADIKTION

Für die Positiv-Implikation gibt es folgende 3 Möglichkeiten der Kontradiktion:

- Tautologie *⇏Kontradiktion: $^{+}\Phi^{+}$ *⇏ $^{-}\Psi^{-}$
- Position *⇏ Negation: Φ *⇏ ¬Φ
- Relation *⇏ negative Folge: Φ *⇏ ¬Ψ

Dabei ist vorab zu sagen:

Die Positiv-Implikation ist *kontradiktorisch*, wenn unter dem Zentral-Relator außer − (ungültig) nur □ (nicht definiert) steht.

Entsprechend war ja die *Tautologie* der Positiv-Implikation bestimmt worden:

Die Positiv-Implikation ist *tautologisch*, wenn unter dem Zentral-Relator
außer + (gültig) nur □ (nicht definiert) steht.

Dabei ist festzuhalten: Aus der Negation von □ folgt wiederum □. D. h. in der Wahrheitstafel:

wenn $\Phi \;{*}{\rightarrow}\; \Psi$, dann $\neg(\Phi \;{*}{\rightarrow}\; \Psi)$

□ □

- Tautologie $*\nRightarrow$ Kontradiktion

$^{+}\Phi^{+} \;{*}{\nRightarrow}\; {}^{-}\Psi^{-}$

z. B. $(X \;{}^{+}{\vee}^{+}\; \neg X) \;{*}{\nRightarrow}\; (X \;{}^{-}{\wedge}^{-}\; \neg X)$

Dies entspricht der Kontradiktion bei der normalen Implikation und ist nicht weiter erklärungsbedürftig.

- Position $*\nRightarrow$ Negation

$\Phi \;{*}{\nRightarrow}\; \neg\Phi$, z. B.: $X \;{*}{\nRightarrow}\; \neg X$

Die Positiv-Implikation ist also nicht nur kontradiktorisch, wenn das Vorderglied tautologisch und das Nachglied kontradiktorisch ist. Sondern auch, wenn das *Nachglied die Negation des Vorderglieds* bedeutet.

Ebenso ist die Umkehrung kontradiktorisch, also: $\neg\Phi \;{*}{\nRightarrow}\; \Phi$.

Somit ergeben sich z. B. folgende Unterschiede zur normalen Implikation:

Normale Implikation	*Positiv-Implikation* (Kontradiktionen)
$X \longrightarrow \neg X$: − − + +	$X \;{*}{\nRightarrow}\; \neg X$: − − □ □
$\neg X \longrightarrow X$: + + − −	$\neg X {*}{\nRightarrow}\; X$: □ □ − −
$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg(X \rightarrow Y)$: − + − −	$(X \;{*}{\rightarrow}\; Y) \;{*}{\nRightarrow}\; \neg(X \;{*}{\rightarrow}\; Y)$: − □ □ □
$\neg(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \rightarrow Y)$: + − + +	$\neg(X \;{*}{\rightarrow}\; Y) \;{*}{\nRightarrow}\; (X \;{*}{\rightarrow}\; Y)$: □ − □ □

Das heißt, bei der *normalen Implikation* gilt: Wenn X sein kontradiktorisches Gegenteil $\neg X$ impliziert, dann ist diese Implikation nicht kontradiktorisch. Für das Umgekehrte gilt das Gleiche. Dagegen ist bei der *Positiv-Implikation* der Schluss von X auf $\neg X$ kontradiktorisch. Diese Bestimmung der Positiv-Implikation entspricht viel mehr unserer Intuition und unserem Sprachverständnis als die Verhältnisse bei der normalen Implikation.

Ein weiter wesentlicher Unterschied zwischen der normalen Implikation und der Positiv-Implikation ist:

Bei der *normalen Implikation* ist aus der Kontradiktion *alles* abzuleiten:

− − − − $\Rightarrow$ alles

Bei der *Positiv-Implikation* ist aus der Kontradiktion *nichts* abzuleiten:

− − − − $*\!\longrightarrow$ nichts

Denn die Positiv-Implikation ist in diesem Fall *vollständig undefiniert*, sie hat also nur undefinierte Felder, d. h. man bekommt immer einen Wahrheitsverlauf □ □ □ □.

Denn aus − (ungültig) folgt ja bei der Positiv-Implikation immer □: nicht definiert (außer bei einem modifizierten Modell der Positiv-Implikation, auf das ich später eingehe).

Es seien jetzt einige Beispiele für Kontradiktion der Form *Position* $*\nRightarrow$ *Negation* anhand von Wahrheitstafeln veranschaulicht:

Zunächst der Fall, dass *nur* der *Zentral-Relator* eine Positiv-Implikation ist:

(X	$\rightarrow$	Y)	$*\nRightarrow$	$\neg$(X		$\rightarrow$	Y)
+	+	+	−	−	+	+	+
+	−	−	□	+	+	−	−
−	+	+	−	−	−	+	+
−	+	−	−	−	−	+	−

Jetzt der Fall, dass *alle* vorkommenden Relatoren Positiv-Implikationen sind:

(X	$*\rightarrow$	Y)	$*\nRightarrow$	$\neg$(X		$*\rightarrow$	Y)
+	+	+	−	−	+	+	+
+	−	−	□	+	+	−	−
−	□	+	□	□	−	□	+
−	□	−	□	□	−	□	−

Auch das Umgekehrte gilt:

$\neg$	(X	$*\rightarrow$	Y)	$*\nRightarrow$	(X	$*\rightarrow$	Y)
−	+	+	+	□	+	+	+
+	+	−	−	−	+	−	−
□	−	□	+	□	−	□	+
□	−	□	−	□	−	□	−

Ebenso ist bei der Positiv-Implikation X $*\nRightarrow$ $\neg$X bzw. $\neg$X $*\nRightarrow$ X kontradiktorisch.

X	$*\nRightarrow$	$\neg$	X
+	−	−	+
+	−	−	+
−	□	+	−
−	□	+	−

Man kann auch einen Schluss aufstellen, bei dem die *Negation* nicht sofort sichtbar ist, weil der Relator durch dessen *kontradiktorisches* Gegenteil ausgetauscht ist:

X >< Y	$*\nRightarrow$	X $\leftrightarrow$ Y
−	□	+
+	−	−
+	−	−
−	□	+

Bei all diesen Beispielen gilt übrigens nicht nur die Kontradiktion der Positiv-Implikation $*\nRightarrow$, sondern auch der *Positiv-Äquivalenz* $*\nLeftrightarrow$, also z. B.:

(X >< Y) $*\nLeftrightarrow$ (X $\leftrightarrow$ Y), allgemein: $\Phi *\nLeftrightarrow \neg\Phi$.

Aber die Positiv-Äquivalenz ist noch komplizierter darzustellen, und da es für unsere Zwecke reicht, die Positiv-Implikation darzustellen, belasse ich es dabei.

• Relation $*\nRightarrow$ (negative) Folge: $\Phi *\nRightarrow \neg\Psi$ bzw. $\Phi *\nRightarrow \Psi$
Es gibt aber noch eine *dritte* Form der Kontradiktion, die noch weniger Voraussetzungen hat.
Hier liegt also eine Kontradiktion vor, obwohl Φ und ($\neg$)Ψ nicht äquivalent sind.
Wir können 2 Formen unterscheiden:

<u>Erster Fall: (Φ *⇒ Ψ) *⇎ (Φ *⇏ ¬Ψ), z. B.:</u>

X >< Y	*⇒	X | Y
−	□	−
+	+	+
+	+	+
−	□	+

Entsprechend muss gelten:

X >< Y	*⇏	¬	(X | Y)
−	□	+	−
+	−	−	+
+	−	−	+
−	□	−	+

Wenn allgemein die Tautologie Φ *⇒ Ψ der Kontradiktion Φ *⇏ ¬Ψ *entsprechen* soll, könnte man zunächst erwarten, dass folgende *Äquivalenz* gilt: (Φ *⇒ Ψ) *⇔ (Φ *⇏ ¬Ψ) ? Aber technisch kann eine Tautologie nicht mit einer Kontradiktion logisch äquivalent sein, sondern wir müssen den Negator vorsetzen. Somit ergibt sich: (Φ *⇒ Ψ) *⇔ ¬(Φ *⇏ ¬Ψ), ähnlich der Äquivalenz zwischen den *synthetischen* Aussagen: (X *→ Y) *⇔ ¬(X *→ ¬Y). Bzw. [X >< Y *⇒ X | Y] *⇔ ¬[X >< Y *⇏ ¬(X | Y)]. Dies liefert zwar eigentlich gerade nicht die gewünschte Aussage, doch dafür muss man sich Folgendes klarmachen: Φ *→ Ψ und Φ *→ ¬Ψ können nicht zugleich gelten. Ob man Φ *→ ¬Ψ, auf einer Meta-Ebene, als *Kontradiktion* kennzeichnet: Φ *⇏ ¬Ψ, ändert nichts, es bleibt der gleiche Relator *→.

<u>Zweiter Fall: (Φ *⇏ Ψ) *⇎ (Φ *⇒ ¬Ψ)</u>

X >< Y	*⇏	X ∧ Y
−	□	+
+	−	−
+	−	−
−	□	−

X >< Y	*⇒	¬	(X ∧ Y)
−	□	−	+
+	+	+	−
+	+	+	−
−	□	+	−

Also: [X >< Y *⇏ X ∧ Y] *⇎ [X >< Y *⇒ ¬(X ∧ Y)]. Vgl. die Diskussion oben.

2-1-2-3 SEMI-ANALYTISCHE RELATION

Bei der *normalen semi-analytischen* Implikation kommt in der Wahrheitstafel unter dem Relator sowohl plus (+) wie minus (−) vor. Bei der *semi-analytischen Positiv-Implikation* ist das komplizierter: Es muss „plus“ (+) vorkommen, es muss „minus“ (−) oder „unbestimmt“ (?) vorkommen, es kann „undefiniert“ (□) vorkommen.

Zur Erläuterung: Ich hatte gesagt, wenn *links* vom Pfeil „minus“ (−) steht, dann wird die Positiv-Implikation nicht als gültig, sondern als *nicht definiert* verstanden (□), denn „wenn X, dann Y“ ist eben nur für die Fälle positiv definiert, in denen X auch gültig ist.

Hinzufügen kann man: Wenn *links* „nicht definiert“, also □ steht, dann gilt diese Kombination auch als *nicht definiert*. Außer es folgt ein – auf das □, dann gilt die Kombination als *unbestimmt*, wofür ich das *Frage-Zeichen* (?) verwende.

Auch wenn *links* „positiv“ (+) steht und *rechts* „nicht definiert (□), gilt die Kombination als *unbestimmt* (?). Das „unbestimmt“ (?) darf nicht verwechselt werden mit dem „nicht definiert“ (□), bei „unbestimmt“ kann man nicht entscheiden, ob die Relation, in der betreffenden logischen Welt, positiv oder negativ ist (zur Übersicht vgl. unten).

Aus Gründen der Einfachheit würde man gerne mit *einer* Zusatz-Kategorie, also „nicht definiert“ oder „nicht bestimmt“ auskommen. Aber es zeigt sich, dass man diese Unterscheidung benötigt. Denn wie oben beschrieben, gilt eine Positiv-Relation, mit nur + (oder nur + und □) als *tautologisch*. Wenn dagegen auch das ? für *unbestimmt* in der Wahrheitstafel unter dem Relator steht, dann ist die Relation nicht tautologisch oder kontradiktorisch, sondern nur *semi-analytisch*. Daher kommt man auch nicht immer mit der *verkürzten* Wahrheitstafel aus, weil dort z. B. der Unterschied zwischen □ (nicht definiert) und ? (nicht bestimmt) gar nicht erfasst wird. Das wird später, im quantitativen Teil, genauer gezeigt werden.

Ein Beispiel für eine *semi-analytische* Positiv-Implikation ist:

¬(X *→ Y)	*⟶	¬(X → Y)
− + + +	□	− + + +
+ + − −	+	+ + − −
□ − □ +	?	− − + +
□ − □ −	?	− + + −

Stellt man nur die Struktur, nur die entscheidenden Wahrheitsverläufe dar, ergibt sich:

¬(X *→ Y)	*⟶	¬(X → Y)
−	□	−
+	+	+
□	?	−
□	?	−

In der 3. und 4. Zeile muss unter dem Zentral-Relator*⟶ jeweils ? (unbestimmt) stehen, weil hier links □ und rechts − steht. Denn wenn man anstelle des ? auch ein □ setzen würde, wäre die Implikation ja *tautologisch* (□ + □ □). Wie man am besten im quantitativen Ansatz zeigen kann, ist das falsch. Nachfolgend eine Übersicht über die *wichtigsten Kombinationen*:

Φ	*→	Ψ
+	+	+
+	−	−
+	?	□
−	□	+
−	□	−
−	□	□
□	□	+
□	?	−
□	□	□

Man könnte allerdings auch *andere* Definitionen vornehmen. Z. B. wäre die Deutung + – □ für manche Fälle vorteilhaft, für andere aber nicht. Ursprünglich hatte ich festgelegt, dass gilt: + □ □. Dann kommt man partiell zu anderen Gesetzen.

Beim heutigen Stand haben sich aber die Festlegungen als am sinnvollsten erwiesen, die in der Übersicht oben aufgeführt sind (wie eben + ? □) – später wird gezeigt werden, dass bei einem anderen Modell der Positiv-Implikation, dem *Nicht-Existenz-Modell*, z. T. veränderte Definitionen erforderlich sind.

Auf die analytische *Positiv-Replikation* ⇐* bzw. ⇍* muss hier nicht gesondert eingegangen werden, es gilt entsprechend das für die Positiv-Implikation gesagte.

2-1-2-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

• Definition der Positiv-Implikation

Ich habe schon darauf hingewiesen, dass ich hier nur das *Existenz-Modell* der Positiv-Implikation vorstelle. Und in diesem Modell gilt:

(X *→ Y) *⇔ ¬(X *→ ¬Y)
¬(X *→ Y) *⇔ (X *→ ¬Y)

Diese Relationen kann man als *definierend* für die Positiv-Implikation ansehen. Sie seien durch die Wahrheitstafeln erläutert:

(X	*→	Y)	*⇔	¬	(X	*→	¬	Y)
+	+	+	+	+	+	+	−	+
+	−	+	□	−	+	−	+	−
−	□	+	□	□	−	□	−	+
−	□	−	□	□	−	□	+	−

(X	*→	¬	Y)	*⇔	¬	(X	*→	Y)
+	−	−	+	□	−	+	+	+
+	+	+	−	+	+	+	−	−
−	□	−	+	□	□	−	□	+
−	□	+	−	□	□	−	□	−

Auch hier gibt es Unterschiede zur normalen Äquivalenz bzw. normalen Implikation.
Denn dies sind Äquivalenzen, die bei der Positiv-Implikation gelten und bei der Implikation nicht. So ergeben sich folgende Unterschiede:

Implikation:	¬(X → Y) ⇒ (X → ¬Y)	(− + − −) ⇒ (− + + +)
Positiv-Implikation:	¬(X *→ Y) *⇔ (X *→ ¬Y)	(− + □ □) *⇔ (− + □ □)
Implikation:	¬(X → ¬Y) ⇒ (X → Y)	(+ − − −) ⇒ (+ − + +)
Positiv-Implikation:	¬(X *→ ¬Y) *⇔ (X *→ Y)	(+ −□ □) *⇔ (+ −□ □)

• Kontraposition

Es gibt auch Äquivalenzen, die bei der normalen Implikation gelten, bei der Positiv-Implikation aber nicht. Z. B. gilt die *Kontraposition* (X → Y) ⇔ (¬X ← ¬Y) bei Verwendung der Positiv-Implikation bzw. Positiv-Äquivalenz nicht streng analytisch, sondern ist ganz *undefiniert* (es sei denn, man nimmt eine besondere Variante der Positiv-Implikation an). Dies ist von großer Wichtigkeit, denn die Kontraposition spielt eine wesentliche Rolle.

(X	*→	Y)	*←→	(¬X	←*	¬Y)
+	+	+	□	− +	□	− +
+	−	−	□	− +	−	+ −
−	□	+	□	+ −	□	− +
−	□	−	□	+ −	+	+ −

Wie man sieht, ist die Kontraposition völlig *undefiniert* (bei einer anderen Interpretation ständen in der 1. und 4. Zeile ein ? statt □, was aber auch nichts Wesentliches änderte).
Generell gelten, beim derzeitigen Stand, folgende Regeln bei der Positiv-Äquivalenz:

Φ	*↔	Ψ			
+	+	+			
−	□	−			
□	□	□			
+	−	−	(−	−	+)
+	□	□	(□	□	+)
−	?	□	(□	?	−)

2-1-2-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Ich möchte zunächst noch einmal auf *Unterschiede* zwischen Implikation und Positiv-Implikation eingehen, anhand einiger ausgesuchter Relationen, dann auf Beziehungen zwischen ihnen.

Unterschiede von Normal-Implikation und Positiv-Implikation

• Implizierung von X

$(X \rightarrow Y) \longrightarrow X$ $\quad$ $(X \,{*}{\rightarrow}\, Y)\ {*}{\longrightarrow} X$ $\quad$ (+ □ ? ?)

$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow X$ $\quad$ $\neg(X \,{*}{\rightarrow}\, Y)\ {*}{\longrightarrow} X$ $\quad$ (□ + ? ?)

Die *normale Implikation* impliziert nicht die Gültigkeit (Existenz) der Prämisse (X), der Schluss ist nur semi-analytisch (+ + − −). *Paradoxerweise* impliziert aber die Negation der normalen Implikation die Gültigkeit von X. Auch bei der *Positiv-Implikation* wird in bejahter und negierter Form nicht die Gültigkeit von X impliziert, allerdings in gleicher Weise (im *quantitativen* Modell wird jedoch impliziert, dass p(X) > 0, dazu später).

• Paradoxie der Implikation

$\neg X \Rightarrow X \rightarrow Y$ $\quad$ $\neg X\ {*}{\longrightarrow}\ X \,{*}{\rightarrow}\, Y$ $\quad$ (□ □ ? ?)

Diese Paradoxie tritt bei der Positiv-Implikation nicht auf. Die Relation ist vollständig undefiniert bzw. unbestimmt.

• Negation

$X \longrightarrow \neg X$ $\quad$ (− − + +) $\qquad$ $X\ {*}{\not\Rightarrow}\ \neg X$ $\quad$ (− − □ □)

$\neg X \longrightarrow X$ $\quad$ (+ + − −) $\qquad$ $\neg X\ {*}{\not\Rightarrow}\ X$ $\quad$ (□ □ − −)

Diese beiden Relationen sind bei Verwendung der *normalen Implikation* semi-analytisch, liegen also zwischen analytisch und kontradiktorisch. Bei der *Positiv-Implikation* sind beide Relationen *kontradiktorisch*.

Das heißt, bei der *Normal-Implikation* gilt: Wenn X sein *kontradiktorisches Gegenteil* ¬X impliziert, dann ist diese Implikation nicht kontradiktorisch. Für das Umgekehrte gilt das Gleiche. Das ist von unserem normalen Sprachverständnis her doch sehr problematisch. Dagegen ist bei der *Positiv-Implikation* der Schluss von X auf nicht X kontradiktorisch. Auf weitere Negationen wurde ja schon ausführlich eingegangen.

Beziehungen zwischen Implikation und Positiv-Implikation:
Es sind vor allem 4 Relationen zwischen Implikation und Positiv-Implikation zu untersuchen:

- X *→ Y Positiv-Implikation X → Y
- X *→ Y Implikation X →Y
- X → Y Positiv-Implikation X *→ Y
- X → Y Implikation X *→ Y

• *Positiv*-Schluss von der Positiv-Implikation auf die Implikation: (X *→ Y) *⇒ (X → Y)
Hier liegt eine streng-analytische Positiv-Implikation, ein *strenger* Schluss vor. Denn außer dem + kommt nur das □ vor. Und in diesem Fall gilt die Relation als tautologisch.

(X	*→	Y)	*⇒	(X	→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	□	+	−	−
−	□	+	□	−	+	+
−	□	−	□	+	+	−

• Schluss von der Positiv-Implikation auf die Implikation : (X *→ Y) ⇒ (X → Y)

(X	*→	Y)	⇒	(X	→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	+	+	−	−
−	□	+	+	−	+	+
−	□	−	+	+	+	−

Auch bei der Verwendung der normalen Implikation erhält man einen *vollständigen* Schluss Obwohl in der 3. und 4. Zeile ein □ unter dem *→ steht (und die Implikation keine Deutung von □ beinhaltet), kann man ein + unter den Pfeil ⇒ setzen. Denn unter dem → steht in diesen Zeilen ebenfalls ein +. Und die Implikation hat ja immer den Wert +, wenn das Nachglied, also hier X → Y den Wert + hat, egal welchen Wert das Vorderglied hat.
Somit gilt: Ein *strenger Schluss* von der Positiv-Implikation auf die Implikation ist möglich.

• *Positiv*-Schluss von der Implikation auf die Positiv-Implikation:(X → Y) *⟶ (X *→ Y)

(X	→	Y)	*⟶	(X	*→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	□	+	−	−
−	+	+	?	−	□	+
−	+	−	?	+	□	−

Der Schluss von der Implikation auf die Positiv-Implikation mittels der Positiv-Implikators ist nur *partiell-analytisch*. (Allerdings könnte man auch vertreten, dass hier ein *strenger* Schluss vorliegen muss, auf dieses sehr komplizierte Problem gehe ich im Punkt 2-4 ein.)

• Schluss von der Implikation auf die Positiv-Implikation $(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \,{*}{\rightarrow}\, Y)$

(X	→	Y)	⟶	(X	*→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	+	+	−	−
−	+	+	∅	−	□	+
−	+	−	∅	+	□	−

Hier ist gar kein Schluss möglich. Denn wie die Wahrheitstafel oben zeigt: in der 3. und 4. Zeile steht links unter dem → ein + und rechts unter dem *→ ein □. Die *normale* Implikation ist aber gar nicht für □ definiert, insofern ist kein Schluss möglich, hierfür wähle ich das Symbol ∅ (bei einer anderen Deutung der Positiv-Implikation aber ein anderes Ergebnis).

2-1-3 Systematik

Es gibt (bei 2 Variablen) 16 bzw. 14 Relatoren, wenn man *Antilogator* und *Tautologator* nicht dazu zählt. So gibt es bei der Verknüpfung von zwei einfachen Relationen 16 x 16 x 16 = 4096 Kombinationen bzw. 14 x 14 x14 = 2744 Kombinationen.

Z. B. $(X \wedge Y) \wedge (X \wedge Y)$. Für die drei $\wedge$ (bzw. anstelle) kann man eben 16 (bzw. 14) Relatoren einsetzen.

Es gibt verschiedene *Darstellungs-Möglichkeiten*. Das sei an folgendem Beispiel erläutert:

- $(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\wedge^{-}\ (X \leftarrow Y)$
  Einfachste Darstellung
- $(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\wedge^{-}\ (X \leftarrow Y)$: + − − +
  Hier wird anschließend der Wahrheitsverlauf der *Gesamtrelation* angegeben (in Klammern oder nicht). Dies ist vor allem sinnvoll bei *semi-analytischen* Relationen wie ${}^{+}\wedge^{-}$, denn bei tautologischen Relationen wie ${}^{+}\wedge^{+}$ lautet der Verlauf ja ohnehin immer + + + + und bei kontradiktorischen entsprechend − − − −.
- $X \rightarrow Y$ (+ − + +) ${}^{+}\wedge^{-}$ $X \leftarrow Y$ (+ + − +)
  Hier werden die Wahrheitsverläufe der Teil-Relationen, im Beispiel $X \rightarrow Y$ und $X \leftarrow Y$, jeweils in Klammern nachgestellt; daher setzt man die Teil-Relationen selbst nicht in Klammern (dies ist aber unübersichtlich und wird nicht verwendet).
- $(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\wedge^{-}\ (X \leftarrow Y)$ (+ − + +) ${}^{+}\wedge^{-}$ (+ + − +)
  Hier werden die Wahrheitsverläufe der Teil-Relationen, im Beispiel $X \rightarrow Y$ und $X \leftarrow Y$, jeweils gesondert dargestellt, zur besseren Übersichtlichkeit.
- $(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\wedge^{-}\ (X \leftarrow Y)$ (+ − + +) ${}^{+}\wedge^{-}$ (+ + − +)
  + − − +
  Es wird der Wahrheitsverlauf der Einzelrelationen und der Gesamtrelation angegeben.

2-1-3-1 NULL+RELATOR

Hier kommt nur der *Antilogator* ⊥ in Frage, der aber wie gesagt kein *echter* Relator ist.
$X \perp Y$ hat den Wahrheitsverlauf: − − − −

Eine Tautologie ist hier per definitionem ausgeschlossen, auch eine semi-analytische Relation. Gleichgültig, welche Relationen man mit dem Antilogator verbindet, es ergibt sich immer eine *Kontradiktion*.

Das hat vor allem für die Implikation eine paradoxe Auswirkung: Aus der Antilogie lässt sich jede beliebige Relation logisch ableiten, sogar eine *Kontradiktion*.

$X \perp Y \;\Rightarrow\; X \wedge \neg X \;\; (++++)$

Bei der *Positiv-Implikation* ergibt sich dieses Problem nicht, denn ein solcher Schluss ist hier nicht definiert, weil die Positiv-Implikation bei ungültigem Vorderglied grundsätzlich nicht definiert ist.

2-1-3-2 EIN+RELATOREN

Hier geht es um die *Konjunktion* bzw. verwandte Relatoren X >– Y, X –< Y, X ∇ Y.

• Tautologie

Eine Tautologie der Konjunktion ist nur möglich, wenn zwei Tautologien verknüpft werden:

$(X \vee \neg X) \;{}^{+}\!\wedge^{+}\; \neg(X \wedge \neg X) \qquad (++++) \;{}^{+}\!\wedge^{+}\; (++++)$

• Kontradiktion

Eine Kontradiktion ist dann gegeben, wenn in jeder Welt mindestens einer der zu verbindenden Relationen ungültig (–) sind, z. B.:

$(X \wedge Y) \;{}^{-}\!\wedge^{-}\; (X \wedge \neg Y) \qquad (+---) \;{}^{-}\!\wedge^{-}\; (-+--)$

• Semi-analytisch

$(X \rightarrow Y) \;{}^{+}\!\wedge^{-}\; (X \leftarrow Y) \qquad (+-++) \;{}^{+}\!\wedge^{-}\; (++-+)$

2-1-3-3 ZWEI+RELATOREN

Die Zwei+Relatoren ↔ und >< werden an anderer Stelle behandelt. Hier geht es um die Relatoren: X⌋Y, X⌊Y, X⌉Y, X⌈Y

• Tautologie

Mit dem Relator ⌋ erzeugt man nur dann eine Tautologie, wenn links von dem Relator eine Tautologie steht, was dann rechts steht, ist gleichgültig, z. B.:

$(X \vee \neg X) \;{}^{+}\!\rfloor^{+}\; (X \wedge Y) \qquad (++++) \;{}^{+}\!\rfloor^{+}\; (+---)$

• Kontradiktion

Mit dem Relator ⌋ ergibt sich nur dann eine Kontradiktion, wenn links vom Relator eine Kontradiktion steht, z. B.:

$(X \wedge \neg X) \;{}^{-}\!\rfloor^{-}\; (X \wedge Y) \qquad (----) \;{}^{-}\!\rfloor^{-}\; (+---)$

• Semi-analytisch

Semi-analytisch sind alle anderen Kombinationen, z. B.:

$(X \rightarrow Y) \;{}^{+}\!\rfloor^{-}\; (X \leftarrow Y) \qquad (+-++) \;{}^{+}\!\rfloor^{-}\; (++-+)$

Entsprechendes gilt für die anderen genannten Relatoren.

2-1-3-4 DREI+RELATOREN

Die Drei+Relatoren →, ←, ∨ und | werden systematisch an anderer Stelle behandelt.
Es sei deshalb nur kurz auf die Implikation → eingegangen.

• Tautologie

Die Implikation ist nur ungültig, wenn links vom → plus (+) steht und rechts minus (–), in allen anderen Fällen ist sie gültig, z. B.:

$(X \wedge Y) \;\Rightarrow\; Y \qquad (+---) \;\Rightarrow\; (+-+-)$

• Kontradiktion

Eine Kontradiktion gibt es nur, wenn gilt: Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion, z. B.:

$(X \vee \neg X) \not\Rightarrow (X \wedge \neg X)$ $(+ + + +) \not\Rightarrow (- - - -)$

• Semi-analytisch

$(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \leftarrow Y)$ $(+ - + +) \longrightarrow (+ + - +)$

2-1-3-5 VIER+RELATOR

Hier ist der *Tautologator* $\top$ zu nennen, der allerdings, wie erläutert, kein echter Relator ist.

• Tautologie

Die Verbindung zweier beliebiger Relatoren durch den Tautologator führt in jedem Fall zu einer Tautologie, selbst die Verbindung zweier Kontradiktionen, z. B.:

$(X \wedge \neg X) \top (Y \wedge \neg Y)$ $(- - - -) \top (- - - -)$

Man braucht hier für die Tautologie nicht $^{+}\top^{+}$ schreiben, denn es ergibt sich ja immer eine Tautologie.

• Kontradiktion

Die Verbindung zweier Relationen durch den Tautologator ergibt in keinem Fall eine Kontradiktion.

• Semi-analytisch

Die Verbindung zweier Relationen durch den Tautologator ergibt in keinem Fall eine semi-analytische Relation.

2-1-4 Inklusiv / Exklusiv

2-1-4-1 DEFINITION

Hier sollen zunächst die Begriffe *inklusiv* und *exklusiv* – jetzt im analytischen Bereich – noch einmal präzisiert werden. Diese beziehen sich in erster Linie auf die *Disjunktion* $X \vee Y$ und die *Kontravalenz* $X >< Y$. Dabei geht es um das Verhältnis zur Konjunktion $X \wedge Y$.

Genauer ist zu unterscheiden zwischen *aufsteigender* und *absteigender* Inklusion.

Unter *aufsteigender* Inklusion verstehe ich, dass ein „oder“ das höhere „und“ als *Möglichkeit* mit einschließt: oder $\longrightarrow$ und

Unter *absteigender* Inklusion verstehe ich, dass das „und“ ein „oder“ als *Notwendigkeit* mit einschließt: und $\Rightarrow$ oder

• Disjunktion (inklusiv)

- aufsteigend: $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ $(+ + + -) \longrightarrow (+ - - -)$

- absteigend: $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$ $(+ - - -) \Rightarrow (+ + + -)$

• Kontravalenz (exklusiv)

Bei dem exklusiven „oder“ kann weder aufsteigende noch absteigende Inklusion zu $X \wedge Y$ vorliegen, sondern vielmehr erhält man durch *Negation* jeweils einen strengen Schluss:

- aufsteigend: $X >< Y \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$ $(- + + -) \Rightarrow (- + + +)$

(zwar hat $X >< Y \longrightarrow X \wedge Y$ denselben Wahrheitswert wie $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$, aber wenn $X >< Y$ gültig ist, ist $X \wedge Y$ ungültig, und umgekehrt)

- absteigend: $X \wedge Y \Rightarrow \neg(X >< Y)$ $(+ - - -) \Rightarrow (+ - - +)$

Wie man sieht, schließen sich X >< Y und $X \wedge Y$ gegenseitig aus, wie es der Definition von „exklusiv“ entspricht.

2-1-4-2 DISJUNKTION

Zunächst will ich auf die analytische *Disjunktion* eingehen.

• Tautologie

Am bekanntesten ist hier der „Satz vom ausgeschlossenen Dritten“:

$$
\begin{array}{llll}
X & {}^{+}\vee^{+} & \neg & X \\
+ & + & - & + \\
+ & + & - & + \\
- & + & + & - \\
- & + & + & -
\end{array}
$$

Generell gilt: $\Phi \ {}^{+}\vee^{+} \neg\Phi$ (für Φ kann jeder beliebige Ausdruck eingesetzt werden).

• Kontradiktion

Eine Kontradiktion der Disjunktion ist nur möglich, wenn 2 Kontradiktionen verknüpft werden, also z. B.:

$$(X \ {}^{-}\wedge^{-} \neg X) \ {}^{-}\vee^{-} \ (Y \ {}^{-}\wedge^{-} \neg Y)$$

• Partiell-analytisch

Hier sind beliebige Beispiele möglich, z. B.:

$(X \wedge Y) \ {}^{+}\vee^{-} (X \wedge \neg Y)$: + + – –

• Gesetze der Disjunktion (vgl. 1-1-4-5):

Hier nur eine kleine Auswahl:

$(X \vee Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y$

$(X \vee Y) \wedge \neg Y \Rightarrow X$

De-Morgan-Gesetze :

$X \vee Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y)$

$X \vee \neg Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge Y)$

$\neg X \vee Y \Leftrightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$

$\neg X \vee \neg Y \Leftrightarrow \neg(X \wedge Y)$

2-1-4-3 KONTRAVALENZ

Die *Kontravalenz* betrachte ich wie gesagt als *exklusives* (ausschließendes) „oder“: *entweder – oder*, aber beides zusammen ist ausgeschlossen.

• Tautologie

Eine *Tautologie* der Kontravalenz ist nur möglich, wenn zwei Relationen verknüpft werden, die zueinander in *Kontradiktion* stehen: denn die Kontravalenz gilt ja nur als gültig, wenn + und – verknüpft werden, z. B.:

$(X >< Y) \ {}^{+}{>}{<}^{+} \neg(X >< Y)$

$(X \wedge Y) \ {}^{+}{>}{<}^{+} \neg(X \wedge Y)$

• Kontradiktion
Eine *Kontradiktion* der Kontravalenz ist nur möglich, wenn zwei Relationen verknüpft werden, die *äquivalent* sind, z. B.:

$$(X \vee Y)\ {}^{-}{>}{<}^{-}\ \neg(\neg X \wedge \neg Y)$$

• partiell-analytisch

z. B.: $(X \wedge Y)\ {}^{+}{>}{<}^{-}\ (X \rightarrow Y)$: $- - + +$

• Gesetze der Kontravalenz
Diese Gesetze spielen auch bei der *Quantoren-Logik* eine wichtige Rolle :

$(X >< Y) \Leftrightarrow (\neg X >< \neg Y)$
$(X >< Y) \Leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)$
$\neg(X >< Y) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$

• Problem der Kontravalenz
Hier muss man sich vor einem Missverständnis hüten: Der Begriff 'Kontradiktion' ist *doppeldeutig*: *Kontradiktion* versus *kontradiktorischer Gegensatz*.

1. *Kontradiktion*
Eine Kontradiktion nennt man jede (analytische) Relation, bei der in der Wahrheitstafel unter dem Zentral-Relator nur – steht, egal mit welchem Relator die Relation gebildet ist: z. B.

$\Phi\ {}^{-}\wedge^{-}\ \Psi,\ \Phi\ {}^{-}\vee^{-}\ \Psi,\ \Phi \not\Rightarrow \Psi$

2. *Kontradiktorischer Gegensatz* (kontradiktorische Relation)
Der kontradiktorische Gegensatz wird durch den Relator *Kontravalenz* >< gebildet, und zwar kann dieser kontradiktorische Gegensatz synthetisch oder analytisch sein.
- *Synthetisch*: $X >< Y$: $- + + -$
- *Analytisch*:

tautologisch, z. B.: $(X \wedge Y)\ {}^{+}{>}{<}^{+}\ (X \mid Y)$ $\quad (+ - - -)\ {}^{+}{>}{<}^{+}\ (- + + +)$

kontradiktorisch, z. B. $(X \vee \neg X)\ {}^{-}{>}{<}^{-}\ (Y \vee \neg Y)$ $\quad (+ + + +)\ {}^{-}{>}{<}^{-}\ (+ + + +)$
Hier ist also der kontradiktorische Gegensatz selbst kontradiktorisch, allerdings entspricht das nicht dem normalen Verständnis von einem kontradiktorischen Gegensatz.

Man kann diesem Missverständnis aus dem Weg gehen, wenn man anstatt von 'Kontradiktion' von 'Antilogie' (im Unterschied zur Tautologie) spricht; da der Begriff aber ungebräuchlicher ist, werde ich auch den Kontradiktionsbegriff in seiner doppelten Bedeutung verwenden.

Man kann eine Verbindung zwischen Kontradiktion und kontradiktorischem Gegensatz herstellen:

$(X >< Y)\ {}^{-}\wedge^{-}\ (X \wedge Y)$ $\qquad (- + + -)\ {}^{-}\wedge^{-}\ (+ - - -)$
$[(X \wedge Y)\ {}^{+}{>}{<}^{+}\ (X \mid Y)]\ {}^{-}\wedge^{-}\ [(X \wedge Y)\ {}^{-}\wedge^{-}\ (X \mid Y)]$ $\qquad (+ + + +)\ {}^{-}\wedge^{-}\ (- - - -)$

Diese beiden Formeln zeigen für synthetische und analytische Relationen:
Wenn Φ und Ψ in kontradiktorischem Gegensatz (><) stehen, dann führt die Konjunktion von $\Phi >< \Psi$ mit der Konjunktion $\Phi \wedge \Psi$ zu einer Kontradiktion (${}^{-}\wedge^{-}$).

Bei der *Positiv-Implikation* stellen sich alle diese Probleme nicht, wie noch gezeigt werden wird.

2-1-4-4 EXKLUSION

• Tautologie

Eine Tautologie ist nur möglich, wenn 2 Relationen verknüpft werden, die in keiner Welt beide gültig sind, d. h. sie stehen in einem *konträren* (oder kontradiktorischen) Gegensatz, z. B.:

$$(X \wedge Y) \ {}^{+}|^{+} \ (X \wedge \neg Y)$$

• Kontradiktion

Eine Kontradiktion der Exklusion ist nur möglich, wenn zwei Tautologien miteinander verknüpft werden, z. B.:

$$(X \vee \neg X) \ {}^{-}|^{-} \ \neg(X \wedge \neg X)$$

• partiell-analytisch

In allen anderen Fällen ist die Exklusion semi-analytisch, z. B.: $(X \wedge Y) \ {}^{+}|^{-} \ (X \vee Y)$

2-1-4-5 VERBINDUNGEN

Hier folgen die wichtigsten Beziehungen zwischen *Disjunktion*, *Kontravalenz* und *Exklusion*:

Zunächst Verbindungen mit der *Implikation*:

• Kontravalenz $\Rightarrow$ Disjunktion

$X >< Y \Rightarrow X \vee Y$ $\quad (-++-) \Rightarrow (+++-)$

• Kontravalenz $\Rightarrow$ Exklusion

$X >< Y \Rightarrow X \mid Y$ $\quad (-++-) \Rightarrow (-+++)$

• Disjunktion $\longleftrightarrow$ Exklusion

$(X \vee Y) \longleftrightarrow (X \mid Y)$ $\quad (+++-) \longleftrightarrow (-+++)$

Die Implikation zwischen Disjunktion und Exklusion ist nicht analytisch, sondern nur partiell analytisch. Es gilt:

$X \vee Y \longrightarrow X \mid Y \ (-+++)$ bzw. $X \mid Y \longrightarrow X \vee Y \ (+++-)$ bzw.
die partielle Äquivalenz $(X \vee Y) \longleftrightarrow (X \mid Y)$

Fasst man das in einem Dreieck zusammen:

$$\begin{array}{ccc} & X >< Y & \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ X \vee Y & \longleftrightarrow & X \mid Y \end{array}$$

Nachfolgend *oder-Verknüpfungen*:

$(X \vee Y)$	$\vee$	$(X >< Y)$	$+++-$
	$><$		$+---$
	$\mid$		$+--+$
$(X \vee Y)$	$\vee$	$(X \mid Y)$	$++++$
	$><$		$+--+$
	$\mid$		$+--+$
$(X >< Y)$	$\vee$	$(X \mid Y)$	$-+++$
	$><$		$---+$
	$\mid$		$+--+$

Analytisch ist also nur die folgende Verknüpfung:

$X \vee Y \;\, {}^{+}\!\vee^{+} \;\, X \mid Y$

2-1-5 Erweiterungen

2-1-5-1 LOGISCHES QUADRAT

Man kann wichtige Beziehungen zwischen bestimmten Relatoren durch das *logische Quadrat* bzw. Rechteck angeben (obwohl dieses in der *Quantoren-Logik* wesentlicher ist, vgl. 2-2).

(+ − − −)	$X \wedge Y$	${}^{+}\!\mid^{+}$	$X \nabla Y$	(− − − +)
	$\Downarrow$	${}^{+}\!\!>\!\!<^{+}$	$\Downarrow$	
(+ + + −)	$X \vee Y$	${}^{+}\!\vee^{+}$	$X \mid Y$	(− + + +)

2-1-5-2 GEGENSÄTZE

Man unterscheidet in der Logik verschiedene *Gegensätze*, nach ihrer Stärke geordnet:

Kontradiktorisch	$X >< Y$: entweder ist X gültig oder Y
Konträr	$X \mid Y$: X und Y sind nicht beide gültig
Subkonträr	$X \vee Y$: X und Y sind nicht beide ungültig
Subaltern	$X \rightarrow Y$: wenn X gültig ist, dann auch Y

Als stärkster Gegensatz gilt der kontradiktorische, dann der konträre, dann der subkonträre; den subalternen interpretieren wir im normalen Sprachgebrauch kaum als Gegensatz.
Die Gegensätze werden durch die oben genannten *Relatoren* logisch ausgedrückt.

Man könnte zwar auch *synthetische* Gegensätze definieren (entsprechend den oben genannten Relatoren), aber normalerweise versteht man in der Logik die Gegensätze als *analytisch*; insofern kommen die analytischen Versionen der Relatoren zum Einsatz:

$${}^{+}\!\!>\!\!<^{+} \quad {}^{+}\!\mid^{+} \quad {}^{+}\!\vee^{+} \quad \Rightarrow$$

Gegensatz und logisches Quadrat

Die Gegensätze lassen sich im *logischen Quadrat* darstellen:

		Konträr		
	$X \wedge Y$	${}^{+}\!\mid^{+}$	$X \nabla Y$	
subaltern	$\Downarrow$	kontra- ${}^{+}\!\!>\!\!<^{+}$ diktorisch	$\Downarrow$	subaltern
	$X \vee Y$	${}^{+}\!\vee^{+}$	$X \mid Y$	
		subkonträr		

Zur besseren Anschaulichkeit könnte man einsetzen:
Für $X \mid Y$: $\neg X \vee \neg Y$
Für $X \nabla Y$: $\neg X \wedge \neg Y$

Zur besseren Übersicht seien die einzelnen Gegensatz-Relationen des Quadrats aufgelistet:
$X \wedge Y \;{}^{+}{>}{<}^{+}\; X \mid Y$ kontradiktorisch
$X \nabla Y \;{}^{+}{>}{<}^{+}\; X \vee Y$

$X \wedge Y \;{}^{+}|^{+}\; X \nabla Y$ konträr

$X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$ subaltern
$X \nabla Y \Rightarrow X \mid Y$

$X \vee Y \;{}^{+}\vee^{+}\; X \mid Y$ subkonträr

2-1-5-3 ANALYTISCH UND SEMI-ANALYTISCH

In diesem Punkt sollen weitere Aspekte der Beziehung zwischen *analytischen* Relationen − Tautologie, Kontradiktion − und *semi-analytischen* Relationen beleuchtet werden.
Dabei gilt es vor allem zwei Ebenen zu unterscheiden
1) *Logische* Ebene
Hier geht es um logische Beziehungen zwischen *unterschiedlichen Relationen*
2) *Begriffliche* Ebene
Hier geht es um die Beziehung zwischen verschiedenen logischen Eigenschaften (tautologisch, kontradiktorisch usw.) *derselben Relation*

1) *Logische Ebene*
Ich schreibe im folgenden für die tautologischen Relationen nicht ${}^{+}\vee^{+}$ und ${}^{+}\wedge^{+}$, sondern nur $\vee$ und $\wedge$, weil das hier übersichtlicher ist; dasselbe gilt für kontradiktorische und semi-analytische Relationen.
Als Beispiele nehme ich vorrangig: als *Tautologie* $X \vee \neg X$, als *Kontradiktion* $X \wedge \neg X$, als *semi-analytische Relation* $(X \vee Y) \wedge X$.
In unseren Beispielen gelten die nachfolgenden Definitionen: *tautologisch*: 4x +, *kontradiktorisch*: 4x −, *semi-analytisch*: 1x +, 2x + oder 3x +. Wenn nur X vorkommt (und nicht Y), würde es zwar genügen, nur *zwei* Welten zu berücksichtigen (d. h. für eine Tautologie + +). Aber für die bessere Vergleichbarkeit nehmen wir immer *vier* Welten.

- Tautologie $\nRightarrow$ Kontradiktion
  $X \vee \neg X \nRightarrow X \wedge \neg X$ $\quad$ $++++ \nRightarrow ----$
- Kontradiktion $\Rightarrow$ Tautologie
  $X \wedge \neg X \Rightarrow X \vee \neg X$ $\quad$ $---- \Rightarrow ++++$
- Tautologie $\longrightarrow$ semi-analytische Relation
  $X \vee \neg X \longrightarrow (X \vee Y) \wedge X$ $\quad$ $++++ \longrightarrow ++--$
- semi-analytische Relation $\Rightarrow$ Tautologie
  $(X \vee Y) \wedge X \Rightarrow X \vee \neg X$ $\quad$ $++-- \Rightarrow ++++$
- Kontradiktion $\Rightarrow$ semi-analytische Relation
  $X \wedge \neg X \Rightarrow (X \vee Y) \wedge X$ $\quad$ $---- \Rightarrow ++--$
- semi-analytische Relation $\longrightarrow$ Kontradiktion
  $(X \vee Y) \wedge X \longrightarrow X \wedge \neg X$ $\quad$ $++-- \longrightarrow ----$

Verwendet man auch zweimal die gleiche Kategorie in einem Schluss, kommt hinzu:

- Tautologie $\Rightarrow$ Tautologie
  $X \vee \neg X \Rightarrow X \Leftarrow X$ $++++ \Rightarrow ++++$
- Kontradiktion $\Rightarrow$ Kontradiktion
  $X \wedge \neg X \Rightarrow X >< X$ $---- \Rightarrow ----$
- semi-analytische Relation $\longrightarrow$ semi-analytische Relation
  $(X \vee Y) \wedge X \longrightarrow (X \vee Y) \wedge Y$ $++-- \longrightarrow +-+-$

Teilweise gelten auch *Äquivalenzen*:

- Tautologie $\Leftrightarrow$ Tautologie
  $X \vee \neg X \Leftrightarrow X \Leftarrow X$ $++++ \Leftrightarrow ++++$
- Kontradiktion $\Leftrightarrow$ Kontradiktion
  $X \wedge \neg X \Leftrightarrow X >< X$ $---- \Leftrightarrow ----$
- Tautologie $\not\Leftrightarrow$ Kontradiktion
  $X \vee \neg X \not\Leftrightarrow X \wedge \neg X$ $++++ \not\Leftrightarrow ----$

Man kann *kontradiktorische* Implikationen oder Äquivalenzen auch durch *negative tautologische* Implikationen bzw. Äquivalenzen ausdrücken bzw. ersetzen:

- Tautologie $\Rightarrow$ $\neg$Kontradiktion
  $X \vee \neg X \Rightarrow \neg(X \wedge \neg X)$ $++++ \Rightarrow \neg(----)$
- Tautologie $\Leftrightarrow$ $\neg$Kontradiktion
  $X \vee \neg X \Leftrightarrow \neg(X \wedge \neg X)$ $++++ \Leftrightarrow \neg(----)$
- Kontradiktion $\Leftrightarrow$ $\neg$Tautologie
  $X \wedge \neg X \Leftrightarrow \neg(X \vee \neg X)$ $---- \Leftrightarrow \neg(++++)$

Im Grunde gilt das, was ich hier für semi-analytische Relationen angebe, auch für *synthetische.*

2) *Begriffliche Ebene*
Hier geht es wie gesagt um die Beziehung zwischen verschiedenen *logischen Eigenschaften* (tautologisch, kontradiktorisch usw.) *derselben* Relation (also z. B. von $X \vee \neg X$).

- tautologisch $\Rightarrow$ $\neg$kontradiktorisch
  „$X \vee \neg X$“ ist tautologisch $\Rightarrow$ „$X \vee \neg X$“ ist nicht kontradiktorisch
- kontradiktorisch $\Rightarrow$ $\neg$tautologisch
  „$X \wedge \neg X$“ ist kontradiktorisch $\Rightarrow$ „$X \wedge \neg X$“ ist nicht tautologisch
- tautologisch $\Rightarrow$ $\neg$semi-analytisch
  „$X \vee \neg X$“ ist tautologisch $\Rightarrow$ „$X \vee \neg X$“ ist nicht semi-analytisch
- semi-analytisch $\Rightarrow$ $\neg$tautologisch
  „$(X \vee Y) \wedge X$“ ist semi-analytisch $\Rightarrow$ „$(X \vee Y) \wedge X$“ ist nicht tautologisch
- kontradiktorisch $\Rightarrow$ $\neg$semi-analytisch
  „$X \wedge \neg X$“ ist kontradiktorisch $\Rightarrow$ „$X \wedge \neg X$“ ist nicht semi-analytisch
- semi-analytisch $\Rightarrow$ $\neg$kontradiktorisch
  „$(X \vee Y) \wedge X$“ ist semi-analytisch $\Rightarrow$ „$(X \vee Y) \wedge X$“ ist nicht kontradiktorisch

Man kann hier auch mit *Konjunktionen* die Aussagen erweitern, z. B.:
tautologisch $\Rightarrow$ $\neg$semi-analytisch $\wedge$ $\neg$kontradiktorisch

„$X \vee \neg X$“ ist tautologisch $\Rightarrow$ „$X \vee \neg X$“ ist nicht kontradiktorisch und nicht semi-analytisch

Es fragt sich, ob etwa bei diesem Beispiel auch die *Äquivalenz* $\Leftrightarrow$ gilt. In meinem Modell werden unterschieden: *tautologisch*, *kontradiktorisch*, *semi-analytisch*, aber auch *synthetisch*. Eine Äquivalenz könnte daher folgendermaßen gefasst werden:

„$X \vee \neg X$“ ist tautologisch $\Leftrightarrow$ „$X \vee \neg X$“ ist nicht kontradiktorisch und nicht semi-analytisch und nicht synthetisch

Eine weitere wichtige Frage lautet: Ist ein Satz wie ‚„$X \vee \neg X$“ ist tautologisch’ selbst eine *Tautologie*. Weiter gefasst: Sind alle der obigen Einzel-Aussagen Tautologien?
Wir können hier prinzipiell drei Möglichkeiten unterscheiden:

Erstens, es handelt sich um *synthetische* Sätze. Ob ‚„$X \vee \neg X$“ ist tautologisch’ gültig ist, stellt man aber nicht durch *empirische* Überprüfung fest. Wer die logischen Regeln und die Definitionen kennt, kann allein durch logisches Denken feststellen, dass der Satz gilt.

Zweitens, die Aussagen sind *formale Tautologien*. Das scheidet aus, denn einer (aussagen-logischen) formalen Tautologie können wir eindeutig eine Wahrheitstafel zuweisen, in der unter dem zentralen Relator nur + vorkommt; dies ist aber bei ‚„$X \vee \neg X$“ ist tautologisch’ nicht möglich. (Man könnte allerdings prinzipiell den Satz auch in einen rein formal-logischen umwandeln, so dass man diese Möglichkeit nicht ganz ausschließen sollte.)

Drittens, wir haben hier *materiale* Tautologien vorliegen. Das bedeutet, die Wahrheit dieser Aussagen beruht auf logischen Regeln, aber auch auf außer-logischen, *sprachlichen Definitionen*. Diese dritte Möglichkeit ist m. E. am realistischen. Und wenn man von ihr ausgeht, wäre es korrekter, nicht den formal-logischen (tautologischen) Relator $\Rightarrow$ zu verwenden, sondern z. B. $\Phi \rightarrow_{df} \Psi$ oder $\Phi \Rightarrow_{df} \Psi$ zu schreiben, in der Bedeutung: „Φ impliziert material-logisch Ψ“. Der Einfachheit halber verwende ich aber doch $\Rightarrow$.

Wir haben oben logische Implikationen (Schlüsse) zwischen diesen Aussagen hergestellt. In jedem Fall gilt dabei: Wenn die *Prämisse* (z. B. ‚„$X \vee \neg X$“ ist tautologisch’) eine Tautologie ist, dann muss auch die *Konklusion* (z. B. ‚„$X \vee \neg X$“ ist nicht kontradiktorisch’) eine Tautologie sein. Denn nur dann ist der Schluss gültig (+ + + + $\Rightarrow$ + + + +).

Es sei noch einmal veranschaulicht, dass es wichtig ist, die *logische* und *begriffliche* Ebene zu unterscheiden, denn z. B:

- *logisch* gilt: semi-analytische Relation $\Rightarrow$ Tautologie

  $(X \vee Y) \wedge X \Rightarrow X \vee \neg X$

d. h. aus einer semi-analytischen Relation folgt logisch eine Tautologie,
aber:

- *begrifflich* gilt: semi-analytisch $\Rightarrow \neg$tautologisch

  „$(X \vee Y) \wedge X$ “ ist semi-analytisch $\Rightarrow$ „$(X \vee Y) \wedge X$ “ ist nicht tautologisch,

d. h. wenn eine Relation semi-analytisch ist, dann ist sie nicht tautologisch.

2-1-5-4 MODAL-LOGIK

Die *Modal-Logik* behandelt die Beziehungen zwischen Begriffen bzw. Operatoren wie: *notwendig*, *möglich*, *nicht notwendig*, *nicht möglich* u. ä. Damit hat sie auch mit *Gegensätzen* zu tun.

Die Modal-Logik lässt sich teilweise auf die *Aussagen-Logik* zurückführen. Wie ich noch genauer zeigen und begründen werde, lässt sich auf der *Aussagen-Logik* aber nur eine Modal-Logik aufzubauen, die ausschließlich *zwei* Werte unterscheidet: „notwendig“ und „unmöglich“ (bzw. „notwendig, dass nicht“).

Für Einbeziehung von „möglich“ und „möglich, dass nicht“ benötigt man die *Quantoren-Logik* oder eine höhere Logik. Dagegen lässt sich „nicht möglich“ sehr wohl im Rahmen der

Aussagen-Logik darstellen. „Nicht möglich“ (= „unmöglich“) besitzt logisch einen ganz anderen Status als „möglich“; das wird am besten in der später vorzustellenden quantitativen Modal-Logik verdeutlicht.

Wir haben in 1-1-5-1 eine Modal-Logik kennen gelernt, die auf die *synthetische* Aussagen-Logik Bezug nimmt; hier geht es aber um die *analytische* Aussagen-Logik, die mit „tautologisch“, „kontradiktorisch“ und auch „semi-analytisch“ operiert.

Und zwar gilt folgende Entsprechung:

Notwendig (N) $=_{df}$ tautologisch. *Unmöglich* (U) = $_{df}$ kontradiktorisch

Man kann unterscheiden *absoluter* und *relativer* Modalität.

Absolut: eine logische Relation ist *für sich* tautologisch bzw. kontradiktorisch.

Relativ: eine logische Relation (bzw. ein logischer Ausdruck) ist *im Verhältnis zu* einer anderen Relation tautologisch bzw. kontradiktorisch, konkret sie ist logische *Folge* oder kontradiktorische ‘Folge’ der anderen Relation.

• *Notwendigkeit* (Tautologie)

- absolut

z. B.: $X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$ Notwendig($X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$) N($X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$)

Hier kann man auch nur schreiben ‘N($X \vee \neg X$)’, denn durch den Modal-Ausdruck „notwendig“ wird bereits ausgedrückt, dass eine Tautologie vorliegt.

- relativ

z. B.: $X \wedge Y \Rightarrow Y$ Notwendig($Y, X \wedge Y$) N($Y, X \wedge Y$)

Lies: ‘Y ist (analytisch) notwendig in Bezug auf $X \wedge Y$’.

Allerdings ist $X \wedge Y \Rightarrow Y$ im Ganzen ebenfalls *absolut* notwendig.

Für die Darstellung der relativen Notwendigkeit bietet sich die *Implikation* oder *Positiv-Implikation* an. Allgemein: $N(\Psi, \Phi) =_{df} \Phi \Rightarrow \Psi$ (bzw. $\Phi \,{*}\!\Rightarrow \Psi$)

• *Unmöglichkeit* (Kontradiktion)

Man kann Unmöglichkeit als „notwendig nicht“ oder „nicht möglich“ darstellen, aber ich verwende hier zur Einfachheit keinen abgeleiteten Begriff.

- absolut

z. B. $X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ Unmöglich($X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$) U($X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$)

- relativ

z. B.: $(X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$

Unmöglich($X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X, X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$) U($X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X, X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$)

Die Bestimmung des *relativen* „Unmöglich“ ist nicht sehr überzeugend, denn $X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ ist ja bereits *absolut* unmöglich, weil kontradiktorisch, es ist wenig informativ, dass es zusätzlich auch noch relativ unmöglich ist.

Naheliegend wäre dagegen $U(Y, (X \rightarrow \neg Y) \wedge X))$. Man geht also davon aus: Wenn X nicht-Y impliziert und X gültig ist, dann ist $\neg Y$ *relativ notwendig:* $(X \rightarrow \neg Y) \wedge X \Rightarrow \neg Y$. In diesem Fall müsste aber Y *relativ unmöglich* und der gesamte Schluss eine Kontradiktion sein. Nur leider stimmt das nicht. Das mag die (vereinfachte) Wahrheitstafel verdeutlichen:

$(X \rightarrow \neg Y)$	$\wedge$	X	$\longrightarrow$	Y
−	−	+	+	+
+	+	+	−	−
+	−	−	+	+
+	−	−	+	−

Wie man sieht: der Schluss von $(X \rightarrow \neg Y) \wedge X$ auf Y führt keineswegs zu einer *Kontradiktion*, sondern es liegt ein *semi-analytischer* Schluss vor, der sogar in 3 von 4 Welten gültig ist. Dies liegt allerdings auch wieder an den Besonderheiten der Implikation, worauf schon öfters eingegangen wurde.

Verwendet man nämlich die *Positiv-Implikation*, ergibt sich ein anderes Bild:

$(X *\!\rightarrow \neg Y)$	$\wedge$	X	$*\!\nRightarrow$	Y
−	−	+	□	+
+	+	+	−	−
□	−	−	□	+
□	−	−	□	−

In diesem Fall ergibt sich nämlich eine *Kontradiktion*, wobei daran erinnert sei, dass eine Positiv-Implikation als kontradiktorisch gilt, wenn außer „minus“ (–) nur „nicht definiert“ (□) unter dem Zentral-Relator steht. Hier gilt also: Wenn X nicht-Y impliziert und X gültig ist, dann ist Y *relativ unmöglich*. D. h. bei Verwendung der Positiv-Implikation könnte man z. B. formulieren: $*U(Y, X *\!\rightarrow \neg Y \wedge X)$. Das * bei dem U (also *U) weist darauf hin, dass die *Positiv-Implikation* $*\!\rightarrow$ verwendet wird.

Hier kann man bestimmen: $*\text{Unmöglich}(\Psi, \Phi) =_{df} \Phi *\!\Rightarrow \neg\Psi$

Oder kurz: $*U(\Psi, \Phi) =_{df} \Phi *\!\Rightarrow \neg\Psi$

• *Relationen*

In der hier dargestellten Modal-Logik sind z. B. folgenden Schlüsse oder Äquivalenzen möglich:

$N \Leftrightarrow \neg M \neg$, z. B.: $N(X\, {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \Leftrightarrow \neg M \neg (X\, {}^{+}\!\vee^{+} \neg X)$

dafür kann man auch schreiben: $N(X\, {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \Leftrightarrow \neg M(X\, {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$

rein aussagen-logisch wäre zu notieren: $(X\, {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \Leftrightarrow \neg(X\, {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$

$N \Leftrightarrow U\neg$, z. B.: $N(X\, {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \Leftrightarrow U\neg(X\, {}^{+}\!\vee^{+} \neg X)$

dafür kann man auch schreiben: $N(X\, {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \Leftrightarrow U(X\, {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$

2-1-5-5 PROBLEMFALL „MÖGLICHKEIT“

Ich hatte anfangs gesagt, *aussagen-logisch* lässt sich nur „notwendig“ und „unmöglich“ darstellen, aber nicht der Modus „möglich“. Man könnte dagegen einwenden: Der Bereich *semi-analytisch* oder aber *synthetisch* steht für „möglich“ bzw. „unnotwendig“. Z. B. könnte man folgende aussagen-logische Ausdrücke modal-logisch als *Möglichkeits*-Aussagen deuten:

relativ: $X \vee Y \longrightarrow Y$ als $M(Y, X \vee Y)$

absolut: $X \vee Y$ als $M(X \vee Y)$.

Es ist zwar richtig, dass aussagen-logisch der *semi-analytische* Bereich generell für die Welt des (logisch) Möglichen steht und somit alle semi-analytischen Relationen logisch möglich sind – Entsprechendes gilt für den *synthetischen* Bereich.

Aber es gelingt aussagen-logisch nicht, *Beziehungen* zwischen *möglich* und *notwendig* (oder unmöglich) adäquat darzustellen. Das werde ich an einem der zentralen Gesetze der Quantoren-Logik zeigen, nämlich:

notwendig $\Rightarrow$ möglich

Das besagt: „Wenn etwas notwendig ist, dann ist es auch (mindestens) möglich“.

Dieses Gesetz werde ich nachfolgend für verschiedene Punkte diskutieren.

• $N(X \vee \neg X) \Rightarrow M(X \vee \neg X)$
Wir gehen zunächst von einem begrifflichen Ansatz aus: „$X \vee \neg X$“ ist notwendig, kurz gefasst als: $N(X \vee \neg X)$.
Dann muss entsprechend gelten: „$X \vee \neg X$“ ist möglich, kurz: $M(X \vee \neg X)$
Wir haben hier 2 Alternativen:
Erstens, ‚$N(X \vee \neg X)$’ und ‚$M(X \vee \neg X)$’ sind beides tautologische Aussagen, allerdings *material-tautologisch*, unter bezug auf *Definitionen* (nicht formal-tautologisch).
$N(X \vee \neg X)$ und $M(X \vee \neg X)$ sind *synthetische* Aussagen.
Da der zweite Fall nicht haltbar ist, will ich nur den ersten Fall diskutieren. Nun gilt: Eine Tautologie impliziert logisch nur eine andere Tautologie: Tautologie $\Rightarrow$ Tautologie (+ + + + $\Rightarrow$ + + + +). Insofern wäre der Schluss $N(X \vee \neg X) \Rightarrow M(X \vee \neg X)$ gerechtfertigt (sieht man einmal von dem o.g. Problem ab, dass $\Rightarrow$ eigentlich nur formal-analytisch definiert ist). Aber dies ist nur eine Schein-Lösung, denn durch Verwendung von ‚N’ und ‚M’ bewegen wir uns ja gerade in der *Modal-Logik*, haben keine Rückführung auf die *Aussagen-Logik* vollzogen, um diese Reduktion geht es jedoch gerade.

• $X \vee \neg X \Rightarrow$?
Wir müssen also $N(X \vee \neg X) \Rightarrow M(X \vee \neg X)$ nun in *reine Aussagen-Logik* übersetzen. Für $N(X \vee \neg X)$ setzen wir einfach mit $X \vee \neg X$ ein, denn die *Tautologie* drückt ohnehin schon *Notwendigkeit* aus.
Aber was sollen wir für $M(X \vee \neg X)$ einsetzen? Es gibt eben keinen aussagen-logischen Ausdruck, der hier passt.
Wichtig ist dabei: Wir wollen hier Aussagen machen über *dieselbe* Relation $X \vee \neg X$; wir wollen sagen, dass wenn $X \vee \neg X$ *notwendig* ist, dass dann dasselbe $X \vee \neg X$ auch *möglich* ist. Es geht nicht darum, ob wenn $X \vee \neg X$ notwendig ist, ob dann eine *andere* Relation möglich ist. Allgemein kann man den Schluss formulieren als Notwendig(Φ) $\Rightarrow$ Möglich(Φ).

• $X \vee \neg X \Leftarrow X \vee Y$
Nehmen wir dennoch versuchsweise mal zwei *unterschiedliche* Relationen, nämlich: $X \vee \neg X$ und $X \vee Y$. „$X \vee \neg X$“ steht als *Tautologie* wie gesagt für *Notwendigkeit*, $X \vee Y$ steht als *synthetische* Relation für *Möglichkeit*. Da gilt: notwendig $\Rightarrow$ möglich, gilt dann auch der *strenge* Schluss $X \vee \neg X \Rightarrow X \vee Y$?
Nein, es gilt nur *semi-analytisch*: $X \vee \neg X \longrightarrow X \vee Y$ (+ + + + $\longrightarrow$ + + + −).
Schlimmer ist aber, *umgekehrt* gilt der strenge Schluss:

$X \vee \neg X \Leftarrow X \vee Y$ bzw. $X \vee Y \Rightarrow X \vee \neg X$

Das hieße aber modal-logisch: möglich $\Rightarrow$ notwendig, und das ist völlig unhaltbar.

• $X \vee \neg X \Leftarrow X \vee X$
Nun könnte man einwenden: Wir wollen hier das Verhältnis zwischen *semi-analytischen* und tautologischen Relationen angeben, nicht zwischen *synthetischen* und tautologischen.
Wie wir aber gezeigt haben, gilt für semi-analytische Aussagen: sie sind *nicht tautologisch* und *nicht kontradiktorisch*, das entspricht aber modal-logisch „genau möglich“, und hier gilt (was bei der *quantoren-logisch* begründeten Modal-Logik im Einzelnen erläutert wird):

notwendig $\Rightarrow \neg$genau möglich

Wir dürfen hier aber die *begriffliche* und *logische* Eben nicht verwechseln. Auch wenn *begrifflich* gilt: Ein notwendiger Satz *ist nicht* ein genau möglicher Satz, so *folgt logisch* dennoch ein notwendiger (tautologischer) Satz aus einem semi-analytischen Satz:
Nehmen wir als Beispiel die semi-analytische Relation $X \vee X$ (+ + − −): Man könnte X alleine (ohne Y) auch nur über 2 Welten definieren, aber die gewohnte Definition über 4 Wel-

ten ist verständlicher. Hier ergibt sich: $X \vee \neg X \Leftarrow X \vee X$. Dies ist ein entsprechendes Ergebnis wie im *synthetischen* Fall (und das wundert nicht, denn auch synthetische Relationen sind weder tautologisch noch kontradiktorisch). Also auch unter Verwendung von „genau möglich“ gelingt es nicht, *Möglichkeit* aussagen-logisch auszudrücken.

• $N(Fx \vee \neg Fx) \Rightarrow M(Fx \vee \neg Fx)$

Es wird sich später zeigen: Den Modus der *Möglichkeit* kann man nur in einer *quantoren-logischen* oder *quantitativen* Logik adäquat und vollständig ausdrücken. Das wird dort eingehend erläutert, eine quantoren-logische Form sei hier nur für ein Beispiel gezeigt (wobei beide Aussagen Tautologien sind).

modal-logisch: $N(Fx \vee \neg Fx) \Rightarrow M(Fx \vee \neg Fx)$

rein quantoren-logisch: $\Lambda x(Fx \vee \neg Fx) \Rightarrow Vx(Fx \vee \neg Fx)$

2 – 2 QUANTOREN- UND PRÄDIKATEN-LOGIK

2-2-0 Einführung

2-2-0-1 FORMULIERUNGEN

Ich habe bisher im Wesentlichen *4* Stufen in der Quantoren-Logik unterschieden:

Alle, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*.

Es bestehen aber zwischen den Formen von „alle" und „einige" *Äquivalenzen*, so dass man insgesamt auf 8 Unterscheidungen kommt:

Dabei bestehen folgende analytische Äquivalenzen (in normaler Sprache und formal):

alle	nicht einige nicht	Λ	$\Leftrightarrow$	$\neg V \neg$
alle nicht	nicht einige	$\Lambda\neg$	$\Leftrightarrow$	$\neg V$
nicht alle	einige nicht	$\neg\Lambda$	$\Leftrightarrow$	$V\neg$
nicht alle nicht	einige	$\neg\Lambda\neg$	$\Leftrightarrow$	V

Dabei gilt es verschiedene Negationen zu unterscheiden:

kontradiktorische Verneinung	$\neg\Lambda$
konträre Verneinung	$\Lambda\neg$
doppelte, subalterne Verneinung	$\neg\Lambda\neg$

Entsprechendes gilt für einige.

Wichtig ist hier, den Unterschied zur Aussagen-Logik zu sehen: *Aussagen-logisch* gibt es im strengen Sinn nur *eine* Verneinung, die *kontradiktorische*. Allerdings entspricht aussagen-logisch $\neg(X \rightarrow Y)$ quantoren-logisch $\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$ (vgl. dazu vor allem 1-4-0-5).

	Position	kontradiktorisch	konträr	subaltern
Aussagen-Logik	$X \rightarrow Y$	$\neg(X \rightarrow Y)$		
Quantoren-Logik	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$\neg\Lambda(X \rightarrow Y)$	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$\neg\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$

Ich habe schon grundsätzlich dargelegt, dass man die Quantoren-Logik (bzw. die Prädikaten-Logik) als eine *Erweiterung* der Aussagen-Logik verstehen kann. Insofern gilt:

- alle Gesetze der Aussagen-Logik gelten auch in der Quantoren-Logik
- es gibt *spezifische* Gesetze der Quantoren-Logik, die in der Aussagen-Logik nicht darstellbar sind (dies sind genau die, die den Partikulär- oder Existenz-Quantor verwenden)

Anbei ein Beispiel für die Darstellung eines Gesetzes in aussagen-logischer und quantoren-logischer Form:

z. B. aussagen-logisch: $X \wedge Y \Rightarrow Y$

quantoren-logisch: $\Lambda x(Fx \wedge Gx) \Rightarrow \Lambda x(Gx)$

bzw. vereinfacht $\Lambda(X \wedge Y) \Rightarrow \Lambda(Y)$

prädikaten-logisch: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \wedge Gx_n) \Rightarrow (Gx_1 \wedge \ldots \wedge Gx_n)$

2-2-0-2 DARSTELLUNGSFORMEN

Wie beschrieben (in 1-2-0-4) geht es hier im Grunde um eine *Klassen-Logik*, die man aber in verschiedener Weise darstellen kann:

Das soll am Beispiel des quantoren-logischen Gesetzes „alle“ ⇒ „einige“ (verstanden als „mindestens einige“ – inklusiv) erläutert werden:

- Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$
- Prädikaten-Logik: $Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$
- Mengen-Logik: $F \subset G \Rightarrow F \sqcap G$

$F \sqcap G$ kann man auch übersetzen mit „F schneidet G“: Das entspricht „einige F sind G“.

$F \subset G \Rightarrow F \sqcap G$ wäre also zu deuten: wenn F Teilmenge von G ist, dann schneidet F auch G.

Für „F schneidet G“ verwende ich das Zeichen ⊓, also $F \sqcap G$. Dies darf nicht verwechselt werden mit $F \cap G$ für „die Schnitt-Menge $F \cap G$“. $F \sqcap G$ ist eine *Relation*, $F \cap G$ ist eine *Menge*. Es ist bezeichnend, dass es für die Relation kein eingebürgertes Zeichen gibt. Denn genau wie sich in der Aussagen-Logik kein *Relator* findet, der „einige F sind G“ ausdrückt, so auch nicht in der Mengenlehre (die entsprechend der Aussagen-Logik 2-wertig ist).

2-2-0-3 LOGISCHES QUADRAT

Die wichtigsten analytischen klassen-logischen Relationen behandelt das sogenannte *logische Quadrat*, das in einer *aussagen-logischen* Form schon eingeführt wurde.

- in normaler Sprache

$$
\begin{array}{ccc}
\text{alle} & ^{+}|^{+} & \text{alle}\neg \\
\Downarrow & ^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\
\text{einige} & ^{+}\vee^{+} & \text{einige}\neg
\end{array}
$$

Das Zeichen $^{+}{>}{<}^{+}$ in der Mitte bezieht sich auf *beide* Diagonalen:

1. alle $^{+}{>}{<}^{+}$ einige¬ 2. alle¬ $^{+}{>}{<}^{+}$ einige

Zur Erinnerung die Wahrheitsverläufe der oben genannten *Junktoren* bzw. *Relatoren*:

X Y	∧	∨	><	|	→	↔
+ +	+	+	–	–	+	+
+ –	–	+	+	+	–	–
– +	–	+	+	+	+	–
– –	–	–	–	+	+	+

• einfache Relationen

Einfache Relationen sind solche mit *einer* Prädikat-Variablen wie $\Lambda x(Fx)$ im Gegensatz zu *komplexen* Relationen mit *zwei oder mehr* Prädikat-Variablen wie $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$.

Darstellung in Quantoren-Logik

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda x(Fx) & ^{+}|^{+} & \Lambda x\neg(Fx) \\
\Downarrow & ^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\
\mathrm{V}x(Fx) & ^{+}\vee^{+} & \mathrm{V}x\neg(Fx)
\end{array}$$

Anmerkung zur Schreibweise. Man kann $\Lambda x\neg(Fx)$ oder $\Lambda x(\neg Fx)$ schreiben.

Darstellung in Individuen-Logik (Prädikaten-Logik)

$$\begin{array}{ccc}
Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n & ^{+}|^{+} & \neg Fx_1 \wedge \ldots \wedge \neg Fx_n \\
\Downarrow & ^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\
Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n & ^{+}\vee^{+} & \neg Fx_1 \vee \ldots \vee \neg Fx_n
\end{array}$$

• Komplexe Relationen

Komplexe Relationen enthalten *mindestens zwei* Prädikat-Variablen (‚F' und ‚G'). Ich bringe hier nur *eine* Realisation des logischen Quadrats, später werden Variationen vorgestellt.

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) & ^{+}|^{+} & \Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \\
\Downarrow & ^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\
\mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx) & ^{+}\vee^{+} & \mathrm{V}x\neg(Fx \rightarrow Gx)
\end{array}$$

2-2-0-4 GESETZE

Im Folgenden eine Übersicht über wichtige *Gesetze* der Quantoren-Logik. Im späteren Text werden weitere Gesetze vorgestellt und vor allem problematische Gesetze diskutiert.

• einfache Relationen

Äquivalenzen

$$\begin{array}{lcl}
\Lambda x(Fx) & \Leftrightarrow & \neg\mathrm{V}x\neg(Fx) \\
\Lambda x\neg(Fx) & \Leftrightarrow & \neg\mathrm{V}x(Fx) \\
\neg\Lambda x(Fx) & \Leftrightarrow & \mathrm{V}x\neg(Fx) \\
\neg\Lambda x\neg(Fx) & \Leftrightarrow & \mathrm{V}x(Fx)
\end{array}$$

Schlüsse (die aus den Äquivalenzen folgen, eine Auswahl)

$\Lambda x(Fx) \Rightarrow \neg Vx\neg(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow \neg Vx(Fx)$
$\neg\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$

Schlüsse (die nicht aus den Äquivalenzen folgen)

$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$
$\neg\Lambda x(Fx) \Leftarrow \neg Vx(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx) \Leftarrow \neg Vx\neg(Fx)$

• komplexe Relationen

Äquivalenzen

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg Vx(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg Vx\neg(Fx \wedge \neg Gx)$
$\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow Vx\neg(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow Vx\neg(Fx \wedge \neg Gx)$

Schlüsse (die aus den Äquivalenzen folgen, eine Auswahl)

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$
$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \neg Vx(Fx \rightarrow Gx)$
$\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$

Schlüsse (die nicht aus den Äquivalenzen folgen)

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$
$\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftarrow \neg Vx(Fx \rightarrow Gx)$
$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \Leftarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$

Durch Verwendung einer spezifischen *Individuen-Konstante* x_i sind zusätzlich z. B. folgende Schlüsse möglich:

$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Fx_i$
$\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow \neg Fx_i$
$Fx_i \Rightarrow Vx(Fx)$
$\neg Fx_i \Rightarrow Vx\neg(Fx)$

Prädikaten-logisch ergibt sich:

$Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_i$
$\neg Fx_1 \wedge \ldots \wedge \neg Fx_n \Rightarrow \neg Fx_i$
$Fx_i \Rightarrow Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$
$\neg Fx_i \Rightarrow \neg Fx_1 \vee \ldots \vee \neg Fx_n$

Beispiel für $Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_i$: Wenn gilt, x_1 ist Mensch und x_2 ist ein Mensch und ... und x_n ist ein Mensch, dann ist auch x_i (ein beliebiges bestimmtes x) ein Mensch.

2-2-0-5 WAHRHEITS-TAFELN

In der *Aussagen-Logik* kann man die Gültigkeit einer Relation durch die *Wahrheitstafeln* problemlos überprüfen. Dabei ergibt sich die Gültigkeit der Gesamt-Relation aus der Gültigkeit der Einzel-Relationen (bzw. Einzelfaktoren). In der *Quantoren-Logik* ist das schwieriger. Man kann nicht einfach aus den Wahrheitstafeln der Aussagen-Logik Wahrheitstafeln für die Quantoren-Logik ableiten. Dennoch gibt es verschiedene Möglichkeiten. Ausführlich, für Spezialisten, gehe ich darauf erst im *Exkurs* zu diesem Kapitel 2 ein. Hier erfolgt eine Kurzfassung. Dabei konzentriere ich mich auf eine *semi-analytische* Relation, weil deren Wahrheitstafel interessanter ist. Auf die Wahrheitstafeln *synthetischer* quantoren-logischer Relationen bin ich in 1-2-1-4 eingegangen.

Als Beispiel nehme ich den *semi-analytischen* Schluss $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$. Ich bringe nachfolgend die wichtigsten Wahrheitstafeln (analog zur *Aussagen-Logik*), wobei ich zur Übersichtlichkeit darauf verzichtet habe, + durch Λ bzw. V und – durch $\neg\Lambda$ bzw. $\neg V$ darzustellen (zur Erläuterung 1-2-1-4).

• *normale* Wahrheitstafel:

$Vx(Fx)$	$\longrightarrow$	$\Lambda x(Fx)$
+	+	+
+	−	−
+	−	−
−	+	−

Die Einsetzung der Wahrheitswerte für $Vx(Fx)$ und $\Lambda x(Fx)$ erklärt sich wie folgt: bei 2 Variablen entspricht $Vx(Fx)$ prädikaten-logisch $Fx_1 \vee Fx_2$ und aussagen-logisch $X \vee Y$; $\Lambda x(Fx)$ entspricht prädikaten-logisch $Fx_1 \wedge Fx_2$ und aussagen-logisch $X \wedge Y$.

Um zu prüfen, ob ein Ausdruck $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$ tautologisch, kontradiktorisch oder semi-analytisch ist, genügt es normalerweise, nur die ersten *zwei* Glieder zu prüfen.

• *konjunktive* Wahrheitstafel (2. und 3. Zeile sind gleich)

	$[Vx(Fx)$	$\wedge$	$\Lambda x(Fx)]$	$\Rightarrow$	$[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$
1.	+	+	+	+	+
2.	+	−	−	+	−
3.	+	−	−	+	−
4.	−	−	−	+	+

Dazu folgende Einzel-Relationen, welche alle *Tautologien* sind

1. $[Vx(Fx) \wedge \Lambda x(Fx)] \Rightarrow [Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$
2. $[Vx(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Fx)] \Rightarrow \neg[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$
3. $[Vx(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Fx)] \Rightarrow \neg[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$
4. $[\neg Vx(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Fx)] \Rightarrow [Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$

• *Implikative* Wahrheitstafel (mit implikativen Relationen)

Imp	$Vx(Fx)$	$\longrightarrow$	$\Lambda x(Fx)$		
1.	+	±	+	$Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$	(+ − − +)
2.	+	±	−	$Vx(Fx) \longrightarrow \neg\Lambda x(Fx)$	(− + + +)
3.	+	±	−	$Vx(Fx) \longrightarrow \neg\Lambda x(Fx)$	(− + + +)
4.	−	+	−	$\neg Vx(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx)$	(+ + + +)

Erläuterung und sprachliche Formulierung der Zeilen der implikativen Wahrheitstafel:
1. Zeile: zentrale, definierende Zeile
2./3. Zeile: sind (in dieser vereinfachten Darstellung) gleich
4. Zeile: nur hier liegt ein strenger Schluss vor, und zwar weil ¬Vx(Fx) ⇒ ¬Λx(Fx) die *Kontraposition* des *strengen* Schlusses Λx(Fx) ⇒ Vx(Fx) ist.

1. Zeile: Wenn Vx(Fx), dann folgt *möglicherweise*, dass Λx(Fx)
2. Zeile: Wenn Vx(Fx), dann folgt *möglicherweise*, dass ¬Λx(Fx)
3. Zeile: Wenn Vx(Fx), dann folgt *möglicherweise*, dass ¬Λx(Fx)
4. Zeile: Wenn ¬Vx(Fx), dann folgt *notwendig*, dass ¬Vx(Fx

• Komplexe Relationen

Wir haben bisher nur *einfache* Relationen der Form Vx(Fx) ⟶ Λx(Fx) behandelt, weil sich hier die Wahrheitstafeln übersichtlicher darstellen lassen. Was ist aber mit *komplexen* Relationen der Form Vx(Fx → Gx) ⟶ Λx(Fx → Gx)? Insofern der Ausdruck in der Klammer gleich ist (z. B. Fx → Gx), es also nur um die Verhältnisse zwischen den *Quantoren* geht, gelten im Wesentlichen die oben gemachten Aussagen.

Schwieriger ist es, wenn der Ausdruck in der Klammer (und ggf. zusätzlich die Quantoren) unterschiedlich sind, also z. B.: Λx(Fx → Gx) ⟶ Vx(Fx ∧ Gx). Hier hat es wenig Sinn, eine *direkte quantoren-logische* Wahrheitstafel aufzustellen, weil die Struktur in der Klammer eine Rolle spielt. Sondern man muss eine *prädikaten-logische* Analyse vornehmen. Für n = 2 ergibt sich: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2)$.

Dabei verwende ich erstmals die übersichtlichere Wahrheitswertetafel in *Tabellenform*.

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\longrightarrow$	Fx_1	$\wedge$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\wedge$	Gx_2
1	+	+	+	**+**	+	+	+	**+**	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	**–**	+	–	–	**+**	+	+	+	+	+	–	–
3	+	+	+	**+**	–	+	+	**+**	+	+	+	+	–	–	+
4	+	+	+	**+**	–	+	–	**+**	+	+	+	+	–	–	–
5	+	–	–	**–**	+	+	+	**+**	+	–	–	+	+	+	+
6	+	–	–	**–**	+	–	–	**+**	+	–	–	–	+	–	–
7	+	–	–	**–**	–	+	+	**+**	+	–	–	–	–	–	+
8	+	–	–	**–**	–	+	–	**+**	+	–	–	–	–	–	–
9	–	+	+	**+**	+	+	+	**+**	–	–	+	+	+	+	+
10	–	+	+	**–**	+	–	–	**+**	–	–	+	–	+	–	–
11	–	+	+	**+**	–	+	+	**–**	–	–	+	–	–	–	+
12	–	+	+	**+**	–	+	–	**–**	–	–	+	–	–	–	–
13	–	+	–	**+**	+	+	+	**+**	–	–	–	+	+	+	+
14	–	+	–	**–**	+	–	–	**+**	–	–	–	–	+	–	–
15	–	+	–	**+**	–	+	+	**–**	–	–	–	–	–	–	+
16	–	+	–	+	–	+	–	**–**	–	–	–	–	–	–	–

Bei Λx(Fx → Gx) ⟶ Vx(Fx ∧ Gx handelt es sich also um eine *semi-analytische* Relation. Denn unter dem Zentral-Relator ⟶ kommen + und – vor. Um hier *generell* von einer semi-analytischen Relation zu sprechen, reicht die Prüfung für n = 2.

Fazit: auch wenn es nicht so einfach ist wie in der Aussagen-Logik, man kann vor allem *einfache* quantoren-logische Relationen sehr wohl mittels *Wahrheitstafeln* überprüfen bzw. beweisen. Am sichersten sind dabei *prädikaten-logischen* Wahrheitstafeln.

2-2-1 Implikation

2-2-1-1 TAUTOLOGIE
Auch hier sei wieder unterschieden zwischen
- allgemeinen *aussagen-logischen* Gesetzen, die auch quantoren-logisch gelten
- speziellen *quantoren-logischen* Gesetzen (die aussagen-logisch nicht gelten)
- speziellen *prädikaten-logischen* Gesetzen (die quantoren-logisch nicht gelten)

Dazu folgendes aussagen-logisches Beispiel: *Modus ponens* bzw. analog: $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$

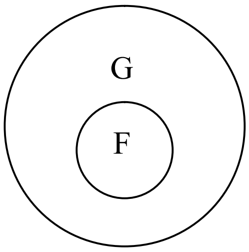
- Aussagen-logisches Gesetz in quantoren-logischer bzw. prädikaten-logischer Form
  $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) \Rightarrow \Lambda x(Gx)$
  Vereinfacht: $\Lambda(X \rightarrow Y) \wedge \Lambda(X) \Rightarrow \Lambda(Y)$
  $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \wedge (Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n) \Rightarrow (Gx_1 \wedge \ldots \wedge Gx_n)$
- Speziell quantoren-logisches Gesetz
  $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Vx(Fx) \Rightarrow Vx(Gx)$
  Vereinfacht: $\Lambda(X \rightarrow Y) \wedge V(X) \Rightarrow V(Y)$
  $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \wedge (Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n) \Rightarrow (Gx_1 \vee \ldots \vee Gx_n)$
- Speziell prädikaten-logisches Gesetz
  $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx_i \Rightarrow Gx_i$
  $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \wedge Fx_i \Rightarrow Gx_i$

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Vx(Fx) \Rightarrow Vx(Gx)$ ist aussagen-logisch nicht darzustellen, weil es für den Partikulär-Quantor V kein Äquivalent in der Aussagen-Logik gibt.

Die Formalisierung $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx_i \Rightarrow Gx_i$ könnte annehmen lassen, dieses Gesetz lasse sich doch rein quantoren-logisch darstellen. Aber in der eigentlichen Quantoren-Logik kommen keine Individuen-*Konstanten* wie x_i vor, sondern nur Individuen-*Variablen* wie x, y, die durch Quantoren gebunden werden. Dasselbe gilt für $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \neg Gx_i \Rightarrow \neg Fx_i$.

Ein wichtiges und unmittelbar einleuchtendes *Gesetz der (traditionellen) Klassen-Logik* ist: „Wenn alle F auch G sind, dann sind einige G auch F". Dieses will ich hier analysieren.

Die folgende Grafik veranschaulicht das Gesetz.



Formal: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Gx \rightarrow Fx)$ bzw. $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \leftarrow Gx)$.
Ich verwende hier aber nur den Pfeil für *semi-analytische* Implikation. Denn bei der Normal-Implikation bzw. der normalen Quantoren-Logik gilt dieses Gesetz *nicht tautologisch*.

Zum Beweis per Wahrheitstafel wird die Relation zunächst in *Prädikaten-Logik* übersetzt.

$(Fx_1 \rightarrow Gx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow (Fx_1 \leftarrow Gx_1 \vee \ldots \vee Fx_n \leftarrow Gx_n)$.

Nun habe ich schon erläutert: um den *logischen Status* (tautologisch, semi-analytisch oder kontradiktorisch) einer Relation zu prüfen, genügt es normalerweise, von n = 2 auszugehen.

D. h.: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1 \wedge Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \leftarrow Gx_1 \vee Fx_2 \leftarrow Gx_2)$.

Das kann man vereinfacht quasi *aussagen-logisch* schreiben:

$(X_1 \rightarrow Y_1 \wedge X_2 \rightarrow Y_2) \longrightarrow (X_1 \leftarrow Y_1 \vee X_2 \leftarrow Y_2)$.

Ich spreche von *quasi* aussagen-logisch, weil die Indizes im Grunde *prädikaten-logisch* sind.

Dafür stelle ich nun eine Wahrheitstafel auf. Dabei verwende ich wieder die Wahrheitswerte-tafel in *Tabellenform*, welche für mehrere Variablen übersichtlicher ist.

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \leftarrow Gx)$$

	X_1	→	Y_1	∧	X_2	→	Y_2	⟶	X_1	←	Y_1	∨	X_2	←	Y_2
1	+	+	+	+	+	+	+	**+**	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	–	+	–	–	**+**	+	+	+	+	+	+	–
3	+	+	+	+	–	+	+	**+**	+	+	+	+	–	–	+
4	+	+	+	+	–	+	–	**+**	+	+	+	+	–	+	–
5	+	–	–	–	+	+	+	**+**	+	+	–	+	+	+	+
6	+	–	–	–	+	–	–	**+**	+	+	–	+	+	+	–
7	+	–	–	–	–	+	+	**+**	+	+	–	+	–	–	+
8	+	–	–	–	–	+	–	**+**	+	+	–	+	–	+	–
9	–	+	+	+	+	+	+	**+**	–	–	+	+	+	+	+
10	–	+	+	–	+	–	–	**+**	–	–	+	+	+	+	–
11	–	+	+	+	–	+	+	**–**	–	–	+	–	–	–	+
12	–	+	+	+	–	+	–	**+**	–	–	+	+	–	+	–
13	–	+	–	+	+	+	+	**+**	–	+	–	+	+	+	+
14	–	+	–	–	+	–	–	**+**	–	+	–	+	+	+	–
15	–	+	–	+	–	+	+	**+**	–	+	–	+	–	–	+
16	–	+	–	+	–	+	–	**+**	–	+	–	+	–	+	–

Die Tafel ist zwar nur in *einer* Welt (bzw. *einer*, der 11. Zeile) ungültig, aber das reicht dafür, dass dieses Gesetz nicht generell, nicht tautologisch gilt, sondern *nur semi-analytisch* ist.

Man könnte allerdings einwenden, dass man „einige G sind F" meistens mit $Vx(Gx \wedge Fx)$ formalisiert und nicht mit $Vx(Gx \rightarrow Fx)$. Man sollte den Schluss daher nicht so schreiben:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Gx \rightarrow Fx)$ (Hypothese)

Sondern:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Gx \wedge Fx)$ (Hypothese)

Aber auch dies ist kein strenges Gesetz. Um das zu beweisen, verwenden wir zunächst das *Vertauschungsgesetz*: $Vx(Fx \wedge Gx) \Leftrightarrow Vx(Gx \wedge Fx)$

Es genügt also zu zeigen, dass folgende Relation kein strenges Gesetz ist:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ (Hypothese)

Es gilt nur *semi-analytisch*: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$

Diesen Beweis werde ich gleich in 2-2-1-3 ausführlich demonstrieren. Bleibt festzuhalten: Das gut bewährte, klassische Gesetz „wenn alle F auch G sind, dann sind einige G auch F" ist bei den üblichen Formalisierungen der Quantoren-Logik nicht gültig.

2-2-1-2 KONTRADIKTION

Hier sei daran erinnert, dass die Implikation nur kontradiktorisch ist, wenn von einer Tautologie auf eine Kontradiktion geschlossen wird: also Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion. Dazu nur zwei Beispiele:

- aussagen-logisches Gesetz in quantoren-logischer Form

$\Lambda x(Fx \,^{+}\!\vee^{+} \neg Fx) \not\Rightarrow \Lambda x(Fx \,^{-}\!\wedge^{-} \neg Fx)$

- quantoren-logisches Gesetz

$\Lambda x(Fx \,^{+}\!\vee^{+} \neg Fx) \not\Rightarrow Vx(Fx \,^{-}\!\wedge^{-} \neg Fx)$

2-2-1-3 SEMI-ANALYTISCH

Als wesentliche Gesetze der traditionellen Quantoren-Logik bzw. Klassen-Logik gelten:

Alle $\Rightarrow$ einige und alle$\neg$ $\Rightarrow$ einige$\neg$

In der Formalisierung $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$ gilt dieses Gesetz bei der Verwendung der Implikation. Wie in 1-2-3-4 beschrieben, findet man aber am häufigsten in der logischen bzw. wissenschaftstheoretischen Literatur folgende Formalisierungen:

Alle F sind G:	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
Einige F sind G:	$Vx(Fx \wedge Gx)$
Alle F sind nicht G:	$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
Einige F sind nicht G:	$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$

Bei diesen Formalisierungen ist der Schluss von „alle" auf „einige" aber *nur semi-analytisch*, nicht tautologisch. Ebenso der Schluss von „alle nicht" auf „einige nicht". Es gilt hier also: Alle $\neg\Rightarrow$ einige bzw. alle $\longrightarrow$ einige (und entsprechend), konkret bedeutet das:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$$
$$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge \neg Gx)$$

Das kann man zeigen, indem man die *Klassen-Relationen* („quantoren-logischen" Formeln) in *Individuen-Relationen* („prädikaten-logische" Formeln) übersetzt, für die sich Wahrheitstafeln angeben lassen. Noch eleganter soll das später im *quantitativen* Modell gezeigt werden.

Für $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ schreibt man prädikaten-logisch:

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow$$
$$(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$$

Zwar kann man (praktisch) die Wahrheitstafeln nicht für *alle* n angeben, aber es genügt ja zu zeigen, dass jeweils in *einem* Fall die Folge $\Phi \Rightarrow \Psi$ nicht erfüllt ist, dann bedeutet das bereits $\Phi \longrightarrow \Psi$, also einen nur *semi-analytischen* Schluss.

Da eine *Implikation* $Fx_i \rightarrow Gx_i$ in der *letzten Zeile* der Wahrheitstafel immer positiv (+) ist, muss auch die *Konjunktion* solcher Implikationen in der *letzten Zeile* der Wahrheitstafel positiv sein. Andererseits ist eine *Konjunktion* $Fx_i \wedge Gx_i$ in der *letzten Zeile* der Wahrheitstafel immer negativ (–). Somit muss eine *Disjunktion* dieser Konjunktionen in der *letzten Zeile* der Wahrheitstafel negativ sein. Die Implikation $X \rightarrow Y$ ist ja aber so definiert, dass sie negativ ist, wenn das Vorderglied positiv und das Nachglied negativ ist. D. h. dass die Wahrheitstafel für die Gesamtformel (mindestens) in der *letzten Zeile* negativ sein muss.

Entsprechend ließe sich $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge \neg Gx)$ beweisen.

Ich bringe als Veranschaulichung unten wieder die Wahrheitstabelle für n = 2, also für

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2)$$

Theoretisch ließen sich auch andere Formalisierungen denken, z. B.

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \wedge$$
$$(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2).$$

Aber ich halte die nicht für realistisch.

Ich übersetze die *prädikaten-logische* Formalisierung wieder in eine vereinfachte quasi *aussagen-logische* Formalisierung:

d. h. anstelle von $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2)$

nun $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2) \longrightarrow (X_1 \wedge Y_1) \vee (X_2 \wedge Y_2)$.

Es zeigt sich auch hier:

$(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2) \longrightarrow (X_1 \wedge Y_1) \vee (X_2 \wedge Y_2)$ und damit:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ ist *nicht tautologisch*.

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \quad \longrightarrow \quad Vx(Fx \wedge Gx)$$

	X_1	$\rightarrow$	Y_1	$\wedge$	X_2	$\rightarrow$	Y_2	$\longrightarrow$	X_1	$\wedge$	Y_1	$\vee$	X_2	$\wedge$	Y_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	–	+	–	–	+	+	+	+	+	+	–	–
3	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+
4	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+	+	–	–	–
5	+	–	–	–	+	+	+	+	+	–	–	+	+	+	+
6	+	–	–	–	+	–	–	+	+	–	–	–	+	–	–
7	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–	–	–	–	+
8	+	–	–	–	–	+	–	+	+	–	–	–	–	–	–
9	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+	+	+	+	+
10	–	+	+	–	+	–	–	+	–	–	+	–	+	–	–
11	–	+	+	+	–	+	+	–	–	–	+	–	–	–	+
12	–	+	+	+	–	+	–	–	–	–	+	–	–	–	–
13	–	+	–	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	+
14	–	+	–	–	+	–	–	+	–	–	–	–	+	–	–
15	–	+	–	+	–	+	+	–	–	–	–	–	–	–	+
16	–	+	–	+	–	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Dies bestätigt noch einmal, dass der Schluss von „alle“ auf „einige“ in der Formulierung $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ nicht tautologisch ist, entsprechend der Schluss von „alle nicht“ auf „einige nicht“. Da die Gesetze „alle $\Rightarrow$ einige“ und „alle$\neg$ $\Rightarrow$ einige$\neg$„ aber erstens allgemein anerkannt und zweitens sehr wesentlich für die Bedeutung von „alle“ und „einige“ sind, muss man die oben genannte formale Interpretation von *All-Sätzen* und *Partikulär-Sätzen* als sehr problematisch einstufen (dazu später weitere Argumente).

Man kann allerdings $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ in einen *strengen* Schluss überführen. Dazu muss man folgende *Zusatzhypothese* einführen: $\Lambda x(Fx)$. Im Ganzen:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$$

In dieser Form ist der Schluss zwar tautologisch. Das werde ich im quantitativen Punkt 2-5 beweisen. Aber die Einführung von $\Lambda x(Fx)$ ist durchaus problematisch.

Angenommen folgendes Beispiel:
„Für alle x gilt: Wenn sie Menschen sind, sind sie sterblich, impliziert logisch: Für (mindestens) einige x gilt: sie sind Menschen und sie sind sterblich“. Die Zusatzhypothese lautet dann: „Alle x sind Menschen“ – und das ist sehr unrealistisch.

Eine viel elegantere Lösung erlaubt die *Positiv-Implikation*, wie ich später zeigen möchte.

2-2-1-4 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Replikation* gilt im Wesentlichen das für die Implikation gesagte, daher soll hier auf eine gesonderte Darstellung verzichtet werden.

Die wichtigsten quantoren-logischen *Äquivalenzen* sind die Umformungen von Relationen mit dem *All-Quantor* Λ in solche mit dem *Partikulär-Quantor* V. Allerdings kann man anstatt von Äquivalenzen auch von *Definitionen* ausgehen, was aber logisch kaum einen Unterschied macht, beide gelten notwendig: z. B.: $\Lambda(X) =_{df} \neg V \neg(X)$.

Alle	nicht einige nicht	$\Lambda(X)$	$\Leftrightarrow$	$\neg V \neg(X)$
Alle nicht	nicht einige	$\Lambda\neg(X)$	$\Leftrightarrow$	$\neg V(X)$
Nicht alle	einige nicht	$\neg\Lambda(X)$	$\Leftrightarrow$	$V\neg(X)$
Nicht alle nicht	einige	$\neg\Lambda\neg(X)$	$\Leftrightarrow$	$V(X)$

Das ist hier jeweils die Darstellung in der *verkürzten* Form, voll ausgeschrieben lautete die obige Äquivalenz z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg V \neg(Fx \rightarrow Gx)$

2-2-1-5 SYLLOGISMUS

Mit *Syllogismus* bezeichnet man traditionell eine Form von *Quantoren-Logik*, die mit 3Variablen (M, S und P) operiert – und nicht mit 2, wie hier bisher dargestellt. Der Syllogismus geht auf Aristoteles zurück. Man unterscheidet 4 Figuren mit insgesamt ca. 20 gültigen Schlüssen (die genaue Anzahl ist umstritten: 15, 18, 19 oder 24).

Der Syllogismus arbeitet auch mit den vier genannten *Urteilen* (entsprechend Relationen), er benennt sie mit den Buchstaben a, e, i, o

a: alle	z. B.: S a P	alle S sind P
e: alle nicht	z. B.: S e P	alle S sind nicht P
i: einige	z. B.: S i P	einige S sind P
o: einige nicht	z. B.: S o P	einige S sind nicht P

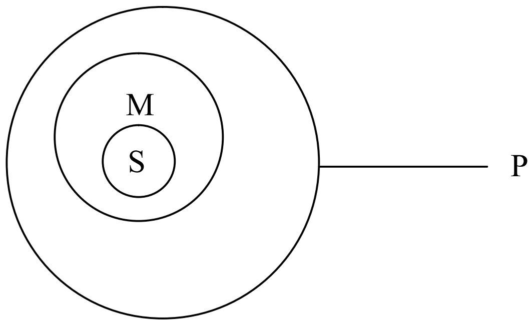
S = Subjekt, P = Prädikat, M = Mittelbegriff

Ein bekannter Syllogismus ist: $(S\ a\ M) \wedge (M\ a\ P) \Rightarrow (S\ a\ P)$ (bzw. zuerst M a P)
Quantoren-logisch z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Gx \rightarrow Hx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Hx)$

Aber man schreibt einen Syllogismus normalerweise anders, vertikal:

S a M	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
<u>M a P</u>	$\underline{\Lambda x(Gx \rightarrow Hx)}$
S a P	$\Lambda x(Fx \rightarrow Hx)$

Diesen Syllogismus veranschaulicht das folgende Diagramm:



Manche Syllogismen lassen sich mit der *herkömmlichen Implikation* nicht darstellen, sondern nur mit der *Positiv-Implikation*. Im Grunde gibt es hier dieselben Probleme, die ich für die Quantoren-Logik beschreibe.

Der Bereich der Syllogismen ist sehr umfangreich, ich kann hier nicht ausführlich darauf eingehen. An späterer Stelle, vor allem bei der quantitativen Logik, wird das Thema noch genauer behandelt.

2-2-2 Positiv-Implikation

2-2-2-1 TAUTOLOGIE

Zum großen Teil gelten die gleichen Schlüsse wie bei der normalen Implikation, z. B.:

$\Lambda x(Fx *\rightarrow Gx) \wedge Fx_i *\Rightarrow Gx_i$

$\Lambda x(Fx *\rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) * \Rightarrow \Lambda x(Gx)$

Allerdings gibt es auch Unterschiede:

• „Wenn alle F auch G sind, dann sind mindestens einige G auch F“
Wir hatten gesehen, dieses wichtige Gesetz gilt nicht bei Verwendung der *Normal-Implikation*, aber bei Verwendung der *Positiv-Implikation*: $\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx) *\!\Rightarrow Vx(Fx \leftarrow\!* Gx)$

In der folgenden Tabelle ist noch einmal der Schluss (in vereinfachter prädikaten-logischer Formalisierung) mit der *normalen Implikation* angegeben. Dieser ist nur in Zeile 11 ungültig (−). Es genügt somit zu zeigen, dass bei der *Positiv-Implikation* in dieser Zeile ein + steht (denn wenn die Implikation ein + hat, hat die Positiv-Implikation kein −, sondern auch ein + oder u. U. ein □, was aber einen strengen Schluss nicht verhindert.

	X_1	$\rightarrow$	Y_1	$\wedge$	X_2	$\rightarrow$	Y_2	$\longrightarrow$	X_1	$\leftarrow$	Y_1	$\vee$	X_2	$\leftarrow$	Y_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	−	+	−	−	+	+	+	+	+	+	+	−
3	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+
4	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−
5	+	−	−	−	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+
6	+	−	−	−	+	−	−	+	+	+	−	+	+	+	−
7	+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	−	+	−	−	+
8	+	−	−	−	−	+	−	+	+	+	−	+	−	+	−
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+	+
10	−	+	+	−	+	−	−	+	−	−	+	+	+	+	−
11	−	+	+	+	−	+	+	−	−	−	+	−	−	−	+
12	−	+	+	+	−	+	−	+	−	−	+	+	−	+	−
13	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+
14	−	+	−	−	+	−	−	+	−	+	−	+	+	+	−
15	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−	+	−	−	+
16	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−

Wenn man die *verkürzte* Wahrheitstafel der Positiv-Implikation verwendet, ist die Sachlage eindeutig. Denn man kann (u. a.) die Zeilen 9 – 16 streichen, weil dort von *negativem* X_1 geschlossen wird, und solche Schlüsse sind nicht relevant. Da der Zentral-Relator eben nur in der 11. Zeile ungültig ist, tritt dieser Fall also (in den Zeilen 1 – 8) gar nicht auf.

Schwieriger wird es, wenn man mit der *vollständigen* Wahrheitstafel operiert. Hier ergibt sich z. B. das Problem, wie deutet man?

$\Phi \wedge \Psi$ $\Phi \wedge \Psi$
□ □ □ □ − □

Nur im zweiten Fall erhält man einen strengen Schluss $\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx) *\!\Rightarrow Vx(Fx \leftarrow\!* Gx)$, weil dann nämlich in der 11. Zeile anstatt dem – ein „unschädliches“ □ steht.

Ein Problem besteht darin, dass das Zeichen □ („undefiniert“) primär nur für die *Positiv-Implikation* bestimmt ist, für andere Relatoren wie $\wedge$ müssten noch valide Deutungen ausgearbeitet werden.

Man kann aber auch deswegen hier auf eine genauere Analyse verzichten, weil sich der Beweis im *quantitativen* Modell einfach und elegant führen lässt.

• „Wenn *alle* F auch G sind, dann sind *mindestens einige* F auch G“
Wir hatten gesehen, dieses wichtige Gesetz gilt in der üblichen Formalisierung nicht bei Verwendung der *Normal-Implikation*: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \neg\!\Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$

Aber es gilt bei Verwendung der *Positiv-Implikation*: Λx(Fx *→ Gx) *⇒ Vx(Fx ∧ Gx).
In der folgenden Tabelle ist zunächst noch einmal die Relation unter Verwendung der *normalen Implikation* angegeben (in vereinfachter Formalisierung):

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$$

	X_1	→	Y_1	∧	X_2	→	Y_2	⟶	X_1	∧	Y_1	∨	X_2	∧	Y_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	−	+	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−
3	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+
4	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	−	−
5	+	−	−	−	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+
6	+	−	−	−	+	−	−	+	+	−	−	−	+	−	−
7	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	+
8	+	−	−	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−	−	−
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+	+
10	−	+	+	−	+	−	−	+	−	−	+	−	+	−	−
11	−	+	+	+	−	+	+	−	−	−	+	−	−	−	+
12	−	+	+	+	−	+	−	−	−	−	+	−	−	−	−
13	−	+	−	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+
14	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	−	−	+	−	−
15	−	+	−	+	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	+
16	−	+	−	+	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−

Wie man sieht: Der (partielle) Schluss ist in den Zeilen 11, 12, 15 und 16 ungültig (−). Es genügt somit zu zeigen, dass bei der Positiv-Implikation in diesen Zeilen ein + oder ein □ steht, dann ist Λx(Fx *→ Gx) *⇒ Vx(Fx ∧ Gx) als *strenger* Schluss gesichert.

Wenn man wieder die *verkürzte* Wahrheitstafel der Positiv-Implikation verwendet, ist die Sachlage eindeutig. Denn man kann (u. a.) die Zeilen 9 bis 16 streichen, weil dort von negativem X_1 geschlossen wird, und solche Schlüsse sind unbestimmt, also nicht relevant. Alle ungültigen Felder treten aber erst in den Zeilen ab 9 auf, eben 11, 12, 15 und 16.

2-2-2-2 KONTRADIKTION

Wie in 2-1-2-2 ausgeführt: Bei der Kontradiktion gilt für die *Positiv-Implikation* Anderes als für die normale Implikation. Sie ist nicht nur kontradiktorisch, wenn das Vorderglied tautologisch und das Nachglied kontradiktorisch ist. Sondern überhaupt, wenn das Nachglied die Negation des Vorderglieds bedeutet, also: Position *⇏ Negation.

Dabei ist zu bedenken: genauso wie gilt, eine Positiv-Implikation ist tautologisch, wenn unter dem Zentral-Relator außer + nur □ (undefiniert) steht, so gilt: die Positiv-Implikation ist kontradiktorisch, wenn unter dem Zentral-Relator außer – nur □ steht.

Beispiele für Kontradiktionen sind:

Λx(Fx *→ Gx) *⇏ ¬Λx(Fx *→ Gx)

Vx(Fx *→ Gx) *⇏ ¬Vx(Fx *→ Gx)

Diese Kontradiktionen gelten auch, wenn als Teil-Relationen die *normale* Implikation fungiert, also z. B.:

Λx(Fx → Gx) *⇏ ¬Λx(Fx → Gx)

2-2-2-3 SEMI-ANALYTISCH

Ein typischer semi-analytischer quantoren-logischer Schluss ist der von „einige“ auf „alle“, also z. B.: „Wenn *einige* Menschen Philosophen sind, dann sind *alle* Menschen Philosophen“. Das ist zwar nicht kontradiktorisch, aber auch nicht streng folgerichtig.

$$Vx(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) \quad {*}\!\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx)$$

Andere semi-analytische Schlüsse sind:

$$Vx(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) \quad {*}\!\!\longrightarrow \neg\Lambda x(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx)$$

$$Vx(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) \quad {*}\!\!\longrightarrow Vx\neg(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx)$$

Diese oben genannten semi-analytischen Schlüsse sind übrigens mit der normalen Implikation ebenfalls semi-analytisch gültig.

2-2-2-4 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Positiv-Äquivalenz* gelten quantoren-logisch überwiegend die Äquivalenzen der normalen Äquivalenz, etwa die klassischen Umformungen der Quantoren, hier in ausführlicher Schreibweise mit Individuenvariable x:

Alle	nicht einige nicht	$\Lambda x(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg Vx\neg(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx)$
Alle nicht	nicht einige	$\Lambda\neg(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg V(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx)$
Nicht alle	einige nicht	$\neg\Lambda(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow V\neg(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx)$
Nicht alle nicht	einige	$\neg\Lambda\neg(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow V(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx)$

Die Replikation weist keine Besonderheiten auf, weshalb hier nicht gesondert auf sie einzugehen ist.

2-2-2-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Folgende Beziehungen bestehen zwischen Implikation und Positiv-Implikation (ich verwende dabei als Zentral-Relator die Implikation, weil nämlich nur hier die *Kontraposition* gilt.)

- $\Lambda x(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

Kontraposition: $\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx)$
(Man könnte allerdings vertreten, dass sogar die Äquivalenz gilt. Aber dies erforderte komplizierte Erläuterungen, auf die ich hier verzichten möchte.)

- $Vx(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$

Kontraposition: $\neg Vx(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \neg Vx(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx)$

Den Beweis für diese Gesetze werde ich im *quantitativen* Bereich bringen, denn quantitativ ist dieser Beweis viel leichter und eleganter zu führen.

Natürlich ist die Positiv-Implikation auch geeignet, Schlüsse des *Syllogismus* darzustellen, sogar viel geeigneter als die normale Implikation, mit der sich nicht alle Syllogismen darstellen lassen.

2-2-3 Systematik

Ich komme zurück auf die 5 *Modelle* quantoren-logischer Relationen, die in 1-2-3 und 1-5-3 bereits vorgestellt wurden. Und zwar geht es dabei um *komplexe* Relationen, in denen jeweils *zwei* Prädikate bzw. Eigenschaften F und G vorkommen. Es ist nun zu prüfen, inwieweit die anerkannten Gesetzmäßigkeiten des *logischen Quadrats* gelten.

Allerdings werden die Aussagen hier nicht alle im Einzelnen durch *Wahrheitstafeln* bewiesen. Das erforderte, die *quantoren-logischen* Relationen zunächst in *prädikaten-logische* Relationen umzuformen und für die dann umfangreiche und komplizierte Wahrheitstafeln aufzustellen. Zwar wurden alle Relationen durch solche Wahrheitstafeln geprüft, aber diese Tafeln sollen im Text nur in Einzelfällen aufgeführt werden. Ohnehin ist die Beweisführung im Rahmen der *quantitativen Logik* leichter und verständlicher.

Zunächst sei zur Erinnerung noch einmal das logische Quadrat dargestellt:

alle	$^{+}\vert^{+}$	alle¬
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
einige	$^{+}\vee^{+}$	einige¬

2-2-3-1 MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$^{+}\vert^{+}$	$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$^{+}\vee^{+}$	$Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$

Bei diesem Modell gelten *alle* analytischen Relationen des logischen Quadrats. Denn in der Klammer steht immer dieselbe Ausdruck $(Fx \rightarrow Gx)$. Nur die Quantoren sind unterschiedlich, und genau zwischen diesen unterschiedlichen Quantoren (einschließlich der Negationen) gelten eben die Beziehungen des logischen Quadrats.

2-2-3-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$		$\Lambda x\ (Fx \rightarrow \neg Gx)$
$\Downarrow$	$^{+}\vee^{+}$	$\Downarrow$
$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$^{+}\vee^{+}$	$Vx\ (Fx \rightarrow \neg Gx)$

Wie man sieht, weichen bei diesem Modell mehrere Beziehungen vom logischen Quadrat ab. So besteht in der Diagonalen keine *Kontravalenz* = kontradiktorischer Gegensatz, ($^{+}{>}{<}^{+}$), sondern nur die *Disjunktion* = subkonträrer Gegensatz ($^{+}\vee^{+}$).

Und auch zwischen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ und $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ besteht keine Exklusion, sondern allenfalls die *Disjunktion*. Allerdings gibt es hier zwei Interpretationen zu unterscheiden:
$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)\ ^{+}\vee^{-}\ \Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ und $\Lambda x[(Fx \rightarrow Gx)\ ^{+}\vee^{+}\ (Fx \rightarrow \neg Gx)]$

• $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \, {}^{+}\!\vee^{-} \, \Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$

Zunächst zum ersten Modell: Wenn es auch erstaunen mag, in diesem Fall besteht zwischen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ und $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ gar keine *tautologische* Beziehung (wenn man einmal von dem fragwürdigen *Tautologator* absieht), sondern nur eine *semi-analytische* Beziehung, z. B. mit ${}^{+}\!\vee^{-}$. Und da im logischen Quadrat nur *tautologische* Beziehungen eingetragen werden, würde an dieser Stelle also gar nichts eingetragen.

Zum Beweis dieser These verwende ich wieder die *Prädikaten-Logik*. Ich stelle wieder $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ der Einfachheit halber nur mit *zwei* x dar: x_1 und x_2 anstatt mit n x. Das reicht wie gesagt um festzustellen, ob diese Struktur auch mit n x tautologisch, kontradiktorisch oder semi-analytisch ist, z. B. bei Verwendung des *Disjunktors* $\vee$:

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \, {}^{+}\!\vee^{-} \, (Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2)$$

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\vee$	Fx_1	$\rightarrow$	$\neg Gx_1$	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	$\neg Gx_2$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	+	−	−
2	+	+	+	−	+	−	−	−	+	−	−	−	+	+	+
3	+	+	+	+	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	−
4	+	+	+	+	−	+	−	+	+	−	−	−	−	+	+
5	+	−	−	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	−	−
6	+	−	−	−	+	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	−
8	+	−	−	−	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	−	−	+	−	−
10	−	+	+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	+	+	+
11	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	−
12	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+
13	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	+	−	+	−	−
14	−	+	−	−	+	−	−	+	−	+	+	+	+	+	+
15	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	−
16	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	+

Ich stelle diese Struktur zusätzlich mit einer *modifizierten Wahrheitstafel* dar. Es werden dabei nicht die Wahrheitswerte aller einzelnen Variablen wie Fx_1 und Gx_1 aufgeführt, sondern nur die der komplexeren Relationen wie $(Fx_1 \rightarrow Gx_1)$. Auch wird die Wahrheitstafel nicht vertikal, sondern *horizontal* dargestellt; außerdem wird der Relator, hier z. B. das $\wedge$, in der 3. Zeile geschrieben, dann kommt in der 4. Zeile der Zentral-Relator $\vee$ und in der 5. Zeile wider der Relator $\wedge$, der in der normalen Wahrheitstafel zwischen $Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1$ und $Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2$ steht. Dadurch wird eine bessere Übersichtlichkeit und Platzersparnis erreicht.

$Fx_1 \rightarrow Gx_1$	+ + + + − − − − + + + + + + + +
$Fx_2 \rightarrow Gx_2$	+ − + + + − + + + − + + + − + +
$\wedge$	+ − + + − − − − + − + + + − + +
${}^{+}\!\vee^{-}$	+ − + + − + + + + + + + + + + +
$\wedge$	− − − − − + + + − + + + − + + +
$Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1$	− − − − + + + + + + + + + + + +
$Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2$	− + + + − + + + − + + + − + + +

Zur Erläuterung: In der quantoren-logischen bzw. prädikaten-logischen Wahrheitstafel kommen *sämtliche* Kombinationen von $\Lambda x(Fx \to Gx)$ und $\Lambda x(Fx \to \neg Gx)$ vor, also + +, + –, – +, – –. Wenn $^+\vee^+$ gelten sollte, dann dürfte die Kombination – – nicht vorkommen, wenn $^+|^+$ gelten sollte, dürfte die Kombination + + nicht vorkommen, wenn $\Rightarrow$ gelten sollte, dürfte die Kombination + – nicht vorkommen usw.

Es ist somit nur eine *semi-analytische* Beziehung möglich, etwa mit $^+\vee^-$ oder $\longrightarrow$, also z. B.: $\Lambda x(Fx \to Gx)\ {}^+\vee^-\ \Lambda x(Fx \to \neg Gx)$.

• $\Lambda x[(Fx \to Gx)\ {}^+\vee^+\ (Fx \to \neg Gx)]$
Hier lautet die prädikaten-logische Umsetzung für n = 2:
$[(Fx_1 \to Gx_1\ {}^+\vee^+\ Fx_1 \to \neg Gx_1)]\ {}^+\wedge^+\ [(Fx_2 \to Gx_2\ {}^+\vee^+\ Fx_2 \to \neg Gx_2)]$

	Fx_1	$\to$	Gx_1	$\vee$	Fx_1	$\to$	$\neg Gx_1$	$^+\wedge^+$	Fx_2	$\to$	Gx_2	$\vee$	Fx_2	$\to$	$\neg Gx_2$
1	+	+	+	+	+	–	–	**+**	+	+	+	+	+	–	–
2	+	+	+	+	+	–	–	**+**	+	–	–	+	+	+	+
3	+	+	+	+	+	–	–	**+**	–	+	+	+	–	+	–
4	+	+	+	+	+	–	–	**+**	–	+	–	+	–	+	+
5	+	–	–	+	+	+	+	**+**	+	+	+	+	+	–	–
6	+	–	–	+	+	+	+	**+**	+	–	–	+	+	+	+
7	+	–	–	+	+	+	+	**+**	–	+	+	+	–	+	–
8	+	–	–	+	+	+	+	**+**	–	+	–	+	–	+	+
9	–	+	+	+	–	+	–	**+**	+	+	+	+	+	–	–
10	–	+	+	+	–	+	–	**+**	+	–	–	+	+	+	+
11	–	+	+	+	–	+	–	**+**	–	+	+	+	–	+	–
12	–	+	+	+	–	+	–	**+**	–	+	–	+	–	+	+
13	–	+	–	+	–	+	+	**+**	+	+	+	+	+	–	–
14	–	+	–	+	–	+	+	**+**	+	–	–	+	+	+	+
15	–	+	–	+	–	+	+	**+**	–	+	+	+	–	+	–
16	–	+	–	+	–	+	+	**+**	–	+	–	+	–	+	+

Dieses Modell entspricht der *aussagen-logischen* Struktur, es ist auch eine *Tautologie*:

$(X \to Y)\ {}^+\vee^+\ (X \to \neg Y)$
+ + +   **+**   + – – +
+ – –   **+**   + + + –
– + +   **+**   – + – +
– + –   **+**   – + + –

Dennoch halte ich das *erste* Modell $\Lambda x(Fx \to Gx)\ {}^+\vee^-\ \Lambda x(Fx \to \neg Gx)$ für richtig oder jedenfalls überlegen.

Erstens ist es nicht erforderlich, dass eine *quantoren-logische* Relation mit einer einfacheren *aussagen-logischen* Relation in der Wahrheitstafel übereinstimmt. Zweitens erhält man im zweiten Modell prädikaten-logisch als zentralen Relator die *Konjunktion* anstatt der *Disjunktion*, was doch auf eine fragwürdige Formalisierung hinweist. Drittens entspricht das erste Modell besser der *quantitativen* Struktur, wie später gezeigt werden soll.

2-2-3-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda x(Fx \wedge Gx) & ^{+}|^{+} & \Lambda x(Fx \wedge \neg Gx) \\
\Downarrow & ^{+}|^{+} & \Downarrow \\
Vx(Fx \wedge Gx) & & Vx(Fx \wedge \neg Gx)
\end{array}$$

Hier stimmen 3 analytische Relationen mit dem logischen Quadrat überein, d. h. aber auch 3 nicht. In den beiden Diagonalen besteht kein *kontradiktorischer* Gegensatz ($^{+}{>}{<}^{+}$), sondern nur ein konträrer ($^{+}|^{+}$). Zwischen $Vx(Fx \wedge Gx)$ und $Vx\ (Fx \wedge\neg Gx)$ lässt sich keinerlei *tautologische* Relation angeben.

2-2-3-4 MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

Das ist wie gesagt das verbreitetste Modell, in der Logik wie in der *Wissenschaftstheorie*.

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) & & \Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \\
 & ^{+}{>}{<}^{+} & \\
Vx(Fx \wedge Gx) & & Vx(Fx \wedge\neg Gx)
\end{array}$$

Bei diesem am weitesten verbreitetsten Modell stimmen nur die 2 Diagonal-Beziehungen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)\ ^{+}{>}{<}^{+}\ Vx(Fx \wedge\neg Gx)$ und $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)\ ^{+}{>}{<}^{+}\ Vx(Fx \wedge Gx)$ mit dem logischen Quadrat überein. Und bei den anderen Relationen besteht gar keine *tautologische* Verbindung. Es ist erstaunlich, dass dieser Diskrepanz nicht mehr Aufmerksamkeit geschenkt wird, denn sie stellt die Brauchbarkeit dieses Modells doch sehr in Frage.

Zu den *Kontravalenzen* und *Äquivalenzen* von $\rightarrow$ und $\wedge$:

- $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)\ ^{+}{>}{<}^{+}\ Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
  $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
  $\neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)\ ^{+}{>}{<}^{+}\ Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
- $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)\ ^{+}{>}{<}^{+}\ Vx(Fx \wedge Gx)$
  $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \Leftrightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow \neg Gx) \Leftrightarrow \neg Vx(Fx \wedge Gx)$
  $\neg Vx(Fx \wedge Gx)\ ^{+}{>}{<}^{+}\ Vx(Fx \wedge Gx)$

2-2-3-5 MODELL 5: (NEGIERTE) POSITIV-IMPLIKATION

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda x(Fx \ {*}{\rightarrow}\ Gx) & ^{+}|^{+} & \Lambda x\neg(Fx \ {*}{\rightarrow}\ Gx) \\
\Downarrow & ^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\
Vx(Fx \ {*}{\rightarrow}\ Gx) & ^{+}\vee^{+} & Vx\neg(Fx \ {*}{\rightarrow}\ Gx)
\end{array}$$

Dieses Modell erfüllt *alle* Bedingungen des *logischen Quadrats*. Und dieses Modell zeigt noch einmal besonders klar: Es geht bei All- und Partikulär-Ausagen nicht um unterschiedliche logische Strukturen, sondern nur um *unterschiedliche Quantität* derselben Struktur *→.

Die völlige Übereinstimmung mit dem logischen Quadrat gilt sonst allein noch für das Modell 1, das sich nur durch Verwendung der *Normal-Implikation* unterscheidet. Wie ich aber früher gezeigt habe, führt die normale Implikation zu verschiedenen Problemen. So spricht sehr vieles für dieses Modell mit der Positiv-Implikation, ihr einziger Nachteil ist, dass sie nicht *alle* logischen Welten abdeckt.

2-2-4 Inklusiv / Exklusiv

2-2-4-1 ÜBERSICHT: INKLUSIVE QUANTOREN-LOGIK

Bisher habe ich die *primären* Beziehungen der inklusiven Quantoren-Logik dargestellt. Im folgenden Diagramm stelle ich *ausführlicher* alle 8 Formen von „alle“ und „einige“ dar, die Formen von „alle“ räumlich innerhalb des logischen Quadrats.

¬einige¬	⇔	alle	$^{+}\vert^{+}$	alle¬	⇔	¬einige
		⇓	$^{+}{>}{<}^{+}$	⇓		
einige	⇔	¬alle¬	$^{+}\vee^{+}$	¬alle	⇔	einige¬

2-2-4-2 EXKLUSIVES LOGISCHES QUADRAT

Bei der exklusiven Logik schließt das „einige“ im Sinne von „*genau* einige“ das „alle“ aus. Für „genau einige“ schreibe ich wie gesagt ∃. Man kann ∃ den ‘*exklusiven Partikulär-Quantor’* nennen. Das umgekehrte ∃ steht bei mir also nicht für „Existenz“, sondern für „exklusiv“.

Es sei daran erinnert, dass sich die exklusive Quantoren-Logik nur in der Definition des „einige“ unterscheidet, nicht in der Definition von „alle“.

alle	$^{+}\vert^{+}$	alle¬
$^{+}\vert^{+}$	$^{+}\vert^{+}$	$^{+}\vert^{+}$
genau einige	⇔	genau einige¬

Dieses *exklusive* logische Quadrat weicht also deutlich vom *inklusiven* logischen Quadrat ab. Es ist durch die *Exklusion* wesentlich bestimmt.

Für *einfache* Relationen formuliert, ergibt sich:

$\Lambda x(Fx)$	$^{+}\vert^{+}$	$\Lambda x\neg(Fx)$
$^{+}\vert^{+}$	$^{+}\vert^{+}$	$^{+}\vert^{+}$
$\exists x(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$\exists x\neg(Fx)$

2-2-4-3 EXKLUSIVE GESETZE

Hier ergeben sich andere Äquivalenzen als in der inklusiven Quantoren-Logik:

$\exists \Leftrightarrow \exists\neg$ also (mit Individuen-Variablen) $\exists x(Fx) \Leftrightarrow \exists x\neg(Fx)$

$$\exists x(Fx) \Leftrightarrow [\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x\neg(Fx)] \Leftrightarrow [Vx\neg(Fx) \wedge Vx(Fx)]$$

$$\neg\exists x(Fx) \Leftrightarrow [\Lambda x(Fx) \vee \Lambda x\neg(Fx)] \Leftrightarrow [\neg Vx\neg(Fx) \vee \neg Vx(Fx)]$$

Äquivalenzen in Bezug auf den All-Quantor:

$$\exists x(Fx) \Leftrightarrow [\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x\neg(Fx)] \Leftrightarrow \neg[\Lambda x(Fx) \vee \Lambda x\neg(Fx)]$$
$$\neg\exists x(Fx) \Leftrightarrow \neg[\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x\neg(Fx)] \Leftrightarrow [\Lambda x(Fx) \vee \Lambda x\neg(Fx)]$$

Folgen in Bezug auf den All-Quantor:

$\exists x(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx)$
$\exists x(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx)$
$\Lambda x(Fx) \Rightarrow \neg\exists x(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow \neg\exists x(Fx)$

Auf die genauen Beziehungen zum inklusiven *Partikulär-Quantor* V gehe ich in 2-2-4-5 ein.

2-2-4-4 EXKLUSIVE PRÄDIKATEN-LOGIK

Das exklusive „einige“ entspricht dem exklusiven „oder“: X >< Y (Kontravalenz).

So kann man für $\exists x(Fx)$ schreiben:

$$\exists x(Fx) \Leftrightarrow Fx_1 >< Fx_2 >< \dots >< Fx_n$$

Allerdings ist diese Formel zu erklären.

F >< G steht für einen *kontradiktorischen Gegensatz*. D. h., dass eigentlich ein *Drittes* ausgeschlossen ist. So gesehen wäre die obige Formel unsinnig und es ließe sich keine Wahrheitstafel aufstellen.

Man kann >< aber auch als einen nicht nur *2-stelligen*, sondern *mehr-stelligen* Relator interpretieren. Dann gilt für obige Formel:

- Sie ist *gültig* (wahr), wenn es mindesten *ein* Glied positiv und mindestens *ein* Glied negativ ist, z. B. (bei n = 3) $Fx_1 \wedge \neg Fx_2 \wedge Fx_3$ oder $\neg Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \neg Fx_3$ o. ä.
- Sie ist *ungültig* (falsch), wenn *alle* Glieder der Kontravalenz positiv oder *alle* Glieder negativ sind, z. B. (bei n = 3): $Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge Fx_3$ oder $\neg Fx_1 \wedge \neg Fx_2 \wedge \neg Fx_3$.

Allgemein bedeutet das:

$\exists x(Fx) \Leftrightarrow (Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n) \quad \wedge \quad (\neg Fx_1 \vee \ldots \vee \neg Fx_n)$
$\neg\exists x(Fx) \Leftrightarrow (Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n) \vee (\neg Fx_1 \wedge \ldots \wedge \neg Fx_n)$

Man kann aber quantoren-logische Formeln einfacher aussagen-logisch prüfen, weil es wie schon früher beschrieben folgende Entsprechungen gibt: Λ: $\wedge$, V: $\vee$, $\exists$: |

Allerdings darf man das wie schon gesagt nicht so verstehen, als ob sich die Quantoren-Logik vollständig aussagen-logisch erfassen ließe.

2-2-4-5 INKLUSIVE UND EXKLUSIVE QUANTOREN-LOGIK

Fasst man das *inklusive* „einige“ und das *exklusive* „einige“ in einer Wahrheitstafel zusammen, ergibt sich:

genau einige	$\Leftrightarrow$	genau einige¬
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
einige	$^{+}\vee^{+}$	einige¬

Übersetzt in logische Formeln:

$\exists x(Fx) \Leftrightarrow \exists x\neg(Fx)$
$\exists x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$
$\exists x(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$
$\exists x\neg(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$
$\exists x\neg(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$

Weitere Äquivalenzen sind:
$\exists x(Fx) \Leftrightarrow Vx(Fx) \wedge Vx\neg(Fx)$
$\neg\exists x(Fx) \Leftrightarrow \neg[Vx(Fx) \wedge Vx\neg(Fx)] \Leftrightarrow \neg Vx(Fx) \vee \neg Vx\neg(Fx)$

Für *einfache* Relationen ergibt sich:

$\exists x(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$\exists x\neg(Fx)$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$Vx(Fx)$	$^{+}\vee^{+}$	$Vx\neg(Fx)$

Eine noch umfangreichere Übersicht bietet das folgende Diagramm:

	¬genau einige	⇔	¬genau einige¬	
	⇑		⇑	
¬einige¬ ⇔	alle	$^{+}\vert^{+}$	alle¬	⇔ ¬einige
⇓	⇓	$^{+}{><}^{+}$	⇓	⇓
einige ⇔	¬alle¬	$^{+}\vee^{+}$	¬alle	⇔ einige¬
	⇑		⇑	
	genau einige	⇔	genau einige¬	

2-2-5 Erweiterungen

2-2-5-1 SECHS-WERTIGE LOGIK

Die *6-wertige* Logik wurde – in ihrer *synthetischen* Form – in 2-1-5-1 vorgestellt. Als zusätzliche Kategorie wurde dabei „die meisten" eingeführt. Hier geht es jetzt um die *analytischen* Beziehungen.

Die 6-wertige Logik umfasst folgende Stufen bzw. Gegensätze:

Alle – alle nicht / die meisten – die meisten nicht / einige – einige nicht.

Ich möchte hier nur kurz auf die wichtigsten analytischen Relationen eingehen.

Es gilt bei *inklusiver* Interpretation:

alle ⇒ die meisten ⇒ einige

alle¬ ⇒ die meisten¬ ⇒ einige¬

Bzw. als *Kontraposition*, in negierter Form:

¬einige ⇒ ¬die meisten ⇒ ¬alle

¬einige¬ ⇒ ¬die meisten¬ ⇒ ¬alle¬

Bei inklusiver Interpretation gilt also: *mindestens* einige (vielleicht die meisten, vielleicht alle), *mindestens* die meisten (vielleicht alle).

Bei *exklusiver* Interpretation heißt es dagegen: *genau einige*, *genau die meisten*. So gilt:

Genau einige ⇔ genau einige nicht

Z. B.: Genau einige Philosophen sind weise ⇔ genau einige Philosophen sind nicht weise

Genau die meisten ⇔ genau die wenigsten nicht

Z. B.: Genau die meisten Lehrer sind fleißig ⇔ genau die wenigsten Lehrer sind nicht fleißig.

Bei der exklusiven Logik ergeben sich allerdings nur 5 Unterscheidungen, man kommt also zu einer *5-wertigen* Logik:

alle / genau die meisten / genau einige (nicht) / genau die wenigsten / alle nicht.

Zwar sind „genau die meisten F sind G“ und „genau die wenigsten F sind nicht G“ äquivalent, aber anders als bei „einige“ / “einige nicht“ geht es hier um *unterschiedliche* Größen, daher kommt man *exklusiv* insgesamt zu 5 und nicht zu 6 unterschiedlichen Größen. Im *quantitativen* Modell wird das noch genauer erläutert werden.

Außer zwischen den äquivalenten Ausdrücken herrscht *exklusiv* überall der *konträre* Gegensatz, also $\Phi\ {}^{+}|^{+}\ \Psi$ bzw. $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$. Z. B. gilt für „alle“:

alle $\Rightarrow$ ¬die genau meisten $\wedge$ ¬genau einige $\wedge$ ¬genau die wenigsten $\wedge$ ¬alle nicht

2-2-5-2 DIMENSIONEN

Verschiedene Dimensionen wie *Raum* und *Zeit* können entsprechend strukturiert werden:
In der 4-wertigen (inklusiven) *Raum-Logik* gilt:

überall $\Rightarrow$ mancherorts

In der 6-wertigen Raum-Logik gilt:

überall $\Rightarrow$ meistenorts $\Rightarrow$ mancherorts

In der 4-wertigen (inklusiven) *Zeit-Logik* gilt:

immer $\Rightarrow$ manchmal

In der 6-wertigen Zeit-Logik gilt:

immer $\Rightarrow$ meistens $\Rightarrow$ manchmal

Für die Negationen gilt Entsprechendes.

2-2-5-3 INKLUSIVE MODAL-LOGIK

Hier gilt in der 4-wertigen Logik, entsprechend dem *logischen Quadrat* der Quantoren-Logik:

$$\begin{array}{ccc}
\text{notwendig} & {}^{+}|^{+} & \text{notwendig}\neg \\
\Downarrow & {}^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\
\text{möglich} & {}^{+}\vee^{+} & \text{möglich}\neg
\end{array}$$

Z. B.: Notwendig(Φ) ${}^{+}{>}{<}^{+}$ Möglich($\neg\Phi$) bzw. Notwendig(Φ) $\Leftrightarrow$ ¬Möglich($\neg\Phi$).
Es ist beliebig, ob man z. B. ¬Möglich($\neg\Phi$) oder ¬Möglich¬(Φ) schreibt.
Entsprechend der Quantoren-Logik gelten folgende *Äquivalenzen* in der Modal-Logik:

Notwendig	$\Leftrightarrow$	¬Möglich¬	$N \Leftrightarrow \neg M\neg$
Notwendig¬	$\Leftrightarrow$	¬Möglich	$N\neg \Leftrightarrow \neg M$
¬Notwendig	$\Leftrightarrow$	Möglich¬	$\neg N \Leftrightarrow M\neg$
¬Notwendig¬	$\Leftrightarrow$	Möglich	$\neg N\neg \Leftrightarrow M$

Also z. B.: Notwendig ¬(Φ) $\Leftrightarrow$ ¬Möglich (Φ) bzw. $N\neg(\Phi) \Leftrightarrow \neg M(\Phi)$

Sprachlich gibt es folgende Umformungen:

Nicht notwendig ⇔ *unnotwendig*
Nicht möglich ⇔ *unmöglich*

In einer *6-wertigen* Logik ergibt sich:
notwendig ⇒ wahrscheinlich ⇒ möglich
¬möglich ⇒ ¬wahrscheinlich ⇒ ¬notwendig
unmöglich ⇒ unwahrscheinlich ⇒ unnotwendig

Die Frage ist, wie in diesem Zusammenhang „*tatsächlich*“ (wahr) bzw. „*nicht tatsächlich*“ (falsch) einzuordnen sind.
notwendig ⇒ tatsächlich ⇒ möglich
¬möglich ⇒ ¬tatsächlich ⇒ ¬notwendig
„Tatsächlich“ liegt allerdings auf einer *anderen Ebene*, keiner logischen, sondern einer *realen* (synthetischen) Ebene. Von daher sind diese Ketten-Schlüsse nicht unproblematisch

2-2-5-4 EXKLUSIVE MODAL-LOGIK
Auch hier lassen sich die Beziehungen am besten im logischen Quadrat darstellen:
N = Notwendig, M = Möglich

N	+|+	N¬
+|+	+|+	+|+
genau M	⇔	genau M¬

Z. B.: Genau M(Φ) ⇔ Genau M¬(Φ)
„Es ist genau möglich, dass Φ“, ist äquivalent: „Es ist genau möglich, dass nicht Φ“.
Für „genau möglich“ kann man schreiben: $M^{\exists}$ (unter Bezug auf den *exklusiven* Partikulär-Quantor ∃ für „genau einige“).
Im Verhältnis zur *inklusiven* Modal-Logik gilt:
Genau möglich ⇔ möglich und möglich nicht
$M^{\exists} \Leftrightarrow M \wedge M\neg$ bzw. $M^{\exists}\neg \Leftrightarrow M \wedge M\neg$
Z. B. Wenn Φ *genau* möglich ist, dann und nur dann gilt: Es ist möglich, dass Φ, und es ist möglich, dass nicht Φ.
Besonders interessant ist „genau möglich“ bzw. die Konjunktion von „möglich“ und „möglich nicht“ aus folgendem Grund: Dies ist die beste und präziseste Definition von „*kontingent*“, und *Kontingenz* („Zufälligkeit“) spielt eine große Rolle in der Philosophie:
kontingent ⇔ möglich ∧ möglich¬

2-2-5-5 INTENSIONALE LOGIK
Die *intensionale* Quantoren-Logik wendet (wie in 1-2-5-5 beschrieben) die Quantoren nicht auf Objekte bzw. *Individuen* an (alle x ...), sondern auf Eigenschaften bzw. *Größeneinheiten* (alle Einheiten ...).
Z. B.: Wenn Sokrates *alle* Weisheits-Einheiten besitzt (*vollständig* weise ist), dann besitzt er auch – mindestens – *einige* Weisheits-Einheiten (ist auch mindestens *partiell* weise).

Im Folgenden werden nur ausgewählte intensionale (analytische) Relationen dargestellt, weitere sind direkt aus der *extensionalen* Quantoren-Logik abzuleiten.

• Herkömmliche *inklusive* 4-wertige Quantoren-Logik:
Äquivalenzen:

vollständig ⇔ ¬partiell¬
¬vollständig ⇔ partiell¬
vollständig¬ ⇔ ¬partiell
¬vollständig¬ ⇔ partiell
Beispiel: „Sokrates ist vollständig weise ⇔ Sokrates ist nicht partiell nicht weise".
Anders gesagt: Sokrates ist nicht etwas dumm.

Folgen:
Vollständig ⇒ partiell bzw. vollständig¬ ⇒ partiell¬
¬partiell ⇒ ¬vollständig bzw. ¬partiell¬ ⇒ ¬vollständig¬

• Erweiterte *inklusive* 6-wertige Quantoren-Logik
Vollständig ⇒ überwiegend ⇒ partiell
Vollständig¬ ⇒ überwiegend¬ ⇒ partiell¬
Anstatt „überwiegend" kann man auch „überdurchschnittlich" o. ä. einsetzen.
Beispiel: „Er ist vollständig zufrieden ⇒ Er ist (mindestens) überwiegend zufrieden ⇒ Er ist (mindestens) partiell zufrieden".

• Einfache *exklusive* 3-wertige Logik
Genau partiell ⇔ genau partiell¬
Beispiel: „Wenn Peter partiell klug ist, dann ist er auch partiell nicht klug und umgekehrt".
Genau partiell ⇔ partiell ∧ partiell¬

• Erweiterte *exklusive* 5-wertige Logik
Hier geht es um die Beziehungen zwischen vollständig – genau überdurchschnittlich – genau partiell (nicht) – genau unterdurchschnittlich – vollständig nicht. Zwischen allen diesen Eigenschaftsausprägungen besteht der *konträre Gegensatz*

2 –3 QUANTITATIVE LOGIK

2-3-0 Einführung

Die *quantitative* Logik wurde in 1-3 eingeführt. Sie unterscheidet nicht nur zwischen 2 Werten wie die *Aussagen-Logik* oder (meistens) 4 Werten wie die *Quantoren-Logik*, sondern sie unterscheidet *unendlich viele* Werte. Man kann die *absolute Quantität* q angeben, wesentlich für die Logik ist aber die *relative Quantität* p, die allerdings auf der absoluten Quantität fußt. In diesem Kapitel über Analytik geht es um *analytisch-quantitative* Beziehungen, und zwar vor allem um logische *Schlüsse*. Ich konzentriere mich in dieser Einführung auf *semi-analytische Schlüsse*, an denen sich die logischen Strukturen am besten darstellen lassen.

Die Ausführungen in 2-3-0 sind recht kompliziert und enthalten auch noch ungeklärte Punkte bzw. Diskussionen, sie sind in erster Linie für Spezialisten gedacht, andere Leser mögen sie ggf. übergehen (als Basis dient 1-3-3-5).

Wir können logische Schlüsse nach der *Anzahl der Quantifizierungen* unterscheiden.
Bei einem einfachen (partiellen) Schluss $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ kann man unterscheiden:
- 1-fache Quantifizierung: $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = r/n$
- 2-fache Quantifizierung: $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n$

Diese verschiedenen Quantifizierungen werde ich jetzt besprechen

2-3-0-1 EIN-FACHE QUANTIFIZIERUNG

Bei der *1-fachen* Quantifizierung spreche ich auch von einem *Gesamt-Ausdruck* oder einer *ganzheitlichen Formel*. Dies sei hier an einem *semi-analytischen* Schluss erläutert, nämlich:

$$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$$

Zur Angabe der relativen Quantität p schreibt man: $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = r/n$.

Hier wird also nur dem *Gesamt-Ausdruck* $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y)$ *ein* quantitativer Wert, nämlich r/n zugewiesen.

Man könnte in diesem Fall auch die inneren *Klammern* weglassen, weil $\rightarrow$ stärker bindet als $\longrightarrow$, d. h. $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = r/n$. Aber mit Klammern ist es normalerweise übersichtlicher.

Als Beispiel nehmen wir: $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = 4/10$.

Das kann man z. B. folgendermaßen *interpretieren*:

„$p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y)$“ ist in 4 von 10 Fällen gültig.

Mit 40% Wahrscheinlichkeit impliziert „$X \rightarrow Y$“ semi-analytisch „Y“.

Die *qualitative* Wahrheitstafel des Schlusses lautet folgendermaßen:

	(X	→	Y)	⟶	Y
a	+	+	+	+	+
b	+	–	–	+	–
c	–	+	+	+	+
d	–	+	–	–	–

Um eine *quantitative Formel* dieses Schlusses zu konstruieren, folgt man einfach der Wahrheitstafel. Unter dem *Zentral-Relator* $\longrightarrow$ steht der Wahrheitsverlauf: + + + –.
Daraus bildet man eine Formel, wie es bei synthetischen Relationen beschrieben wurde.

Zur Berechnung von p dividiert man die Anzahl der *Fälle* in den *gültigen Welten* (wo + unter dem Zentral-Relator $\longrightarrow$ steht) durch die Anzahl der Fälle in *allen Welten*. D. h. der Nenner ist (bei 2 Variablen) immer: a + b + c + d.

Wie man sieht, mit + belegt sind a, b und c. So ergibt sich als Formel:

$$p((X \to Y) \longrightarrow Y) = \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$$

Der Wahrheitsverlauf + + + – entspricht der Definition der *Disjunktion* $X \lor Y$: + + + –
Somit kann man sagen: $p((X \to Y) \longrightarrow Y) = p(X \lor Y)$

Davon ist unberührt: „$(X \to Y) \longrightarrow Y$“ ist eine *semi-analytische* Relation und „$X \lor Y$“ ist eine *synthetische* Relation.

Dies zeigt auch nochmals, dass man den Schluss $p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 4/10$ *nicht* folgendermaßen interpretieren darf: „Wenn $X \to Y$ gültig ist, dann ist mit 40% Wahrscheinlichkeit auch Y gültig“. Denn wie bekannt, ist die Implikation ja so definiert, dass sie auch gilt, wenn das Vorderglied (hier $X \to Y$) ungültig ist. Allerdings muss man sich immer die konkrete Wahrheitstafel ansehen. Denn bei einem semi-analytischen (oder analytischen) *Schluss* hat die Wahrheitsfolge unter dem Relator $\longrightarrow$ normalerweise einen anderen Verlauf als die synthetische *Implikation*, bei $X \to Y \longrightarrow Y$ eben den Wahrheitsverlauf der synthetischen *Disjunktion*: + + + –.

Im konkreten Fall sieht man in der Wahrheitstafel bzw. in der Formel, dass auch b mit in die Rechnung eingeht, b ist aber die Anzahl der Fälle, in denen $X \to Y$ und auch Y *falsch* sind. Z. B. $p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 10/10 = 1$ könnte auch wahr sein, wenn $X \to Y$ und Y in keinem Fall gültig sind, nämlich wenn b = 10 (somit: a + c + d = 0).

• Wahrheitstafel

Die Frage ist, ob wir eine *Wahrheitstafel* für $p((X \to Y) \longrightarrow Y) = r/n$ aufstellen können.
Zunächst bietet es sich an, der *qualitativen* Wahrheitstafel von $(X \to Y) \longrightarrow Y$ zu folgen.
Ich habe sie oben dargestellt, man kann sie aber auch in folgender Form schreiben, welche die *konjunktive* Deutung verdeutlicht:

	$X \to Y$	Y	$(X \to Y) \longrightarrow Y$
1.	+	+	+
2.	–	–	+
3.	+	+	+
4.	+	–	–

Die 1. Zeile der Wahrheitstafel ist dann zu lesen:
$(X \to Y) \land Y \Rightarrow (X \to Y) \longrightarrow Y$, die anderen Zeilen entsprechend (wie früher erläutert).

Um eine vergleichbare *quantitative* Wahrheitstafel für $p((X \to Y) \longrightarrow Y) = m/n$ aufzustellen, müssen wir für $p(X \to Y)$ und $p(Y)$ *gesonderte* quantitative Werte angeben. Zwar sind die nicht vorgegeben, wir kennen nur den Gesamtwert $p((X \to Y) \longrightarrow Y) = m/n$, aber wir können den Prämissen Werte zuweisen, also z. B. $p(X \to Y) = r/n$ und $p(Y) = s/n$. (Dadurch ergibt sich aber indirekt eine *3-fache*, nicht mehr eine *1-fache* Quantifizierung.)

Es ergäbe sich folgende Tafel:

	p(X → Y) = r/n	p(Y) = s/n	p((X → Y) ⟶ Y) = m/n
1.	+	+	+
2.	–	–	+
3.	+	+	+
4.	+	–	–

Die 1. Zeile der Wahrheitstafel (in der es *keine Negationen* gibt) ist zu lesen:
p(X → Y) = r/n ∧ p(Y) = s/n ⟶ p((X → Y) ⟶ Y) = m/n, die anderen Zeilen entsprechend. Diese Wahrheitstafel ist allerdings inadäquat, pointiert gesagt, sie ist falsch. Denn in der Wahrheitstafel müssen sich für alle Zeilen strenge Schlüsse ergeben, doch die erste Zeile p(X → Y) = r/n ∧ p(Y) = s/n ⟶ p((X → Y) ⟶ Y) = m/n ist nur ein *semi-analytischer* Schluss, daher darf man bei der 1. Zeile als Zentral-Relator nur den *semi-analytischen* Implikator ⟶ nehmen, nicht den *analytischen* Implikator ⇒. Und dasselbe gilt für Zeile 2, 3 und 4. Es ist sofort offensichtlich, dass wir für diesen Schluss mit den 3 *numerischen Variablen* r/n, s/n und m/n nicht *allgemein* angeben können, ob er gültig ist oder nicht.

Die Probleme beginnen aber schon viel früher. Ich habe in 1-3-3-5 gezeigt, dass sich keine adäquate Wahrheitstafel für p(X → Y) = r/n angeben lässt. Das betrifft entsprechend die Relation p((X → Y) ⟶ Y) = m/n. Auch wenn wir andere Wahrheitsverteilungen wählen, z. B. für p(X → Y) = r/n den (neutralen) Verlauf + + – –, es ändert sich nichts daran: Wir können keine Tafel der Form aufstellen, dass wenn p(X → Y) = r/n und p(Y) = s/n wahr (oder falsch) sind, dass dann p((X → Y) ⟶ Y) = m/n wahr (oder falsch) ist.

Ich will die Argumentation von 1-3-3-5 nicht noch einmal wiederholen, sondern fragen, welche Möglichkeiten es sonst gibt.

• Zähler und Nenner

Man könnte die Wahrheit von p((X → Y) ⟶ Y) = r/n bzw. $\dfrac{a+b+c}{a+b+c+d}$ = r/n durch Bezug auf *Zähler* und *Nenner* angeben.

Der Schluss p((X → Y) ⟶ Y) = r/n bzw. $\dfrac{a+b+c}{a+b+c+d}$ = r/n ist *wahr*, wenn (a + b + c = r) ∧ (a + b + c + d = n), in allen anderen Fällen ist er *falsch*.
Davon ausgehend könnte man eine Art Wahrheitstafel aufstellen:

	a + b + c = r	a + b + c + d = n	$\dfrac{a+b+c}{a+b+c+d}$ = r/n
1.	+	+	+
2.	+	–	–
3.	–	+	–
4.	–	–	–

Es ergäbe sich hier also eine *Konjunktion*. Die 1. Zeile der Tafel lautete:

(a + b + c = r) ∧ (a + b + c + d = n) ⇒ $\dfrac{a+b+c}{a+b+c+d}$ = r/n

(In der 4. Zeile wäre es allerdings *möglich*, dass sich ein Wert ergibt, der r/n entspricht.) Die obige Aufstellung ist zwar korrekt, aber nicht wirklich das, was man unter einer „Wahrheitstafel" versteht. Denn hier wird der Wert der Gesamtrelation einfach als Funktion von *Zähler* und *Nenner* dargestellt. Bei einer echten Wahrheitstafel wird aber der Wert der Gesamtrelation als Funktion der Werte beider *Komponenten* bestimmt, im Beispiel p(X → Y) und p(Y).

2-3-0-2 BERECHNUNG BEI EIN-FACHER QUANTIFIZIERUNG

Es gibt aber noch eine andere Methode, den Wert von semi-analytischen Schlüssen analog der konjunktiven Wahrheitstafel festzustellen, ohne dass wirklich eine Wahrheitstafel aufgestellt wird, nämlich durch *Berechnung* der Konklusion.

Gehen wir zurück zu dem Beispiel $p((X \to Y) \longrightarrow Y) = m/n$

Dabei ist zu bedenken: Auch wenn wir für diesen quantitativen Schluss keine Wahrheitstafel aufstellen können, können wir (der *qualitativen*, wahrheitswert-funktionalen Wahrheitstafel folgend) einen neuen *quantitativ-funktionalen* Schluss formulieren, bei dem gilt:

– die Prämisse X → Y wird zur neuen *quantitativen* Prämisse $p(X \to Y) = r/n$

– die Konklusion Y wird ebenfalls zu einer neuen quantitativen Prämisse $p(Y) = s/n$

– der alte Gesamtschluss $p((X \to Y) \longrightarrow Y) = m/n$ wird zur neuen Konklusion

Es ergibt sich: $p(X \to Y) = r/n \ \wedge\ p(Y) = s/n \ \longrightarrow\ p((X \to Y) \longrightarrow Y) = m/n$

Setzen wir dafür Formeln ein:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = r/n \ \wedge\ \frac{a+c}{a+b+c+d} = s/n \ \longrightarrow\ \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = m/n$$

Nun können wir aber m/n durch r/n und s/n definieren.

Machen wir uns klar, dass gilt: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = r/n \ \Leftrightarrow\ \frac{b}{a+b+c+d} = 1 - r/n$

Weiterhin gilt: $\frac{a+c}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} = \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$

Wir können jetzt schreiben:

$$p(X \to Y) = r/n \ \wedge\ p(Y) = s/n \ \Rightarrow\ p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 1 - r/n + s/n$$

Man kann hier von einer *kombinierten Formel* sprechen. Bei der kombinierten Formel berechnet man also den Wert der *Gesamtformel*, indem man von den Werten der *Einzelkomponenten* ausgeht. Beispielsweise berechnet man den Wert von $p((X \to Y) \longrightarrow Y)$, indem man von den Werten der Komponenten p(X → Y) und p(Y) ausgeht. Dies ist anders als bei einer Wahrheitstafel, da würde nur entschieden, die Gesamtformel ist wahr oder falsch, hier wird ihr ein *quantitativer Wert* zugewiesen. So gelingt es, den *partiellen* Schluss in einen *echten* Schluss umwandeln, also:

$p(X \to Y) = r/n \ \wedge\ p(Y) = s/n \ \longrightarrow\ p((X \to Y) \longrightarrow Y) = m/n$ in:

$p(X \to Y) = r/n \ \wedge\ p(Y) = s/n \ \Rightarrow\ p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 1 - r/n + s/n$

Um die Gültigkeit dieses Schlusses nachzuweisen, muss man *Rechen-Methoden* verwenden, man kann nicht einfach vergleichen, welche Symbole in der Wahrheitstafel gegenüber stehen. Andererseits, es lässt sich bei diesem Schluss gar keine *Wahrheitstafel* aufstellen (wie oben erläutert). Darum stellt sich die Frage: Darf man überhaupt den logischen *Implikator* ⇒ verwenden, wenn sich der Schluss nicht mittels *Wahrheitstafel* darstellen lässt? Ich meine ja, denn dieser *quantitative* Schluss lässt sich letztlich doch als *logischer* Schluss verstehen, in dem fundamentalen Sinn, dass die Information der Konklusion in der Information der Prämisse(n) bereits enthalten ist, wie in 2-1-1-1 gezeigt wurde.

1) Berechnung von $p((X \to Y) \longrightarrow Y)$
Bei diesem Beispiel bieten sich zwei *Berechnungsmethoden* an: Ich fasse die erste, oben eingeführte Methode noch einmal zusammen und bringe ergänzend eine zweite.

Erste Methode zur Berechnung von $p((X \to Y) \longrightarrow Y)$:

$p((X \to Y) \longrightarrow Y) = p(Y) + p(\neg(X \to Y))$. Somit:

$p((X \to Y) \longrightarrow Y) = s/n + (1 - r/n)$

Denn wenn $p(X \to Y) = r/n$, dann gilt: $p(\neg(X \to Y)) = 1 - r/n$. Bzw. umgekehrt:
Somit gilt auch die Äquivalenz: $p(X \to Y) = r/n \Leftrightarrow p(\neg(X \to Y)) = 1 - r/n$.
Allerdings ist zu berücksichtigen, dass nicht jede Kombination von $p(X \to Y)$ und $p(X)$ möglich ist, $p(Y)$ kann nicht größer sein als $p(X \to Y)$. Das wird im nächsten Punkt erklärt.
Die Berechnung in Formeln:

$$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \frac{a+c}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d}$$

So ergibt sich als strenger Schluss:
$[p(X \to Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n] \Rightarrow [p((X \to Y) \longrightarrow Y) = s/n + (1 - r/n)]$

Zweite Methode zur Berechnung von $p((X \to Y) \longrightarrow Y)$:

$p(X \to Y) - p(Y) = p(X \nabla Y)$. Somit: $p(X \nabla Y) = \dfrac{d}{a+b+c+d}$

Dann gilt: $p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 1 - (p(X \to Y) - p(Y)) = 1 - p(X \nabla Y)$

$$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} - \frac{d}{a+b+c+d}$$

Daher ergibt sich wiederum als Schluss:
$[p(X \to Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n] \Rightarrow [p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 1 - (r/n - s/n)]$

• Beispiel
Die Berechnung sei an einem Beispiel verdeutlicht:

$p(X \to Y)$	$\wedge$	$p(Y)$	$\Rightarrow$	$p((X \to Y) \longrightarrow Y)$
$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a+c}{a+b+c+d}$		$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$
7/10		5/10		8/10

$p(X \to Y)$: sei 7/10 (wobei das ein realer, empirischer Wert ist, kein gekürzter)
Also: $a + c + d = 7$. $a + b + c + d = 10$. $b = 10 - 7 = 3$

p(Y): wenn wir p $(X \rightarrow Y) = 7/10$ vorgeben, dann kann p(Y) Werte von 0/10 bis 7/10 annehmen. Denn aus $a + c + d = 7$ wissen wir ja nicht, wie groß $a + c$ (der Zähler von p(Y)) und wie groß d ist. Hier sind alle Verteilungen von $a + c = 0$ bis $a + c = 7$ möglich.
Wählen wir als Beispiel: $a + c = 5$ ($d = 2$), somit $p(Y) = 5/10$.

$p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y)$: dieser Wert ergibt sich als Funktion der beiden anderen Formeln.
Im Beispiel berechnet man: $a + c = 5$, $b = 3$, also: $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = 8/10$

Als Ergebnis: $p(X \rightarrow Y) = 7/10 \wedge p(Y) = 5/10 \Rightarrow p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = 8/10$

Nach den o. g. zwei *Berechnungsmethoden* ergibt sich:
$5/10 + 3/10 = 8/10$ bzw. $10/10 - 2/10 = 8/10$

Bringen wir für n = 3 eine *systematische Übersicht* (die Begründung lässt sich aus den o. g. Ausführungen ableiten; um den Text nicht auszudehnen, wird sie hier nicht dargelegt).

$p(X \rightarrow Y)$ $\wedge$	$p(Y)$ $\Rightarrow$	$p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y)$
3/3	3/3	3/3
	2/3	2/3
	1/3	1/3
	0/3	0/3
2/3	2/3	3/3
	1/3	2/3
	0/3	1/3
1/3	1/3	3/3
	0/3	2/3
0/3	0/3	3/3

2) Semi-analytische Schlüsse allgemein
Das Ergebnis der Berechnung von $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y)$ ist kein Zufalls-Ergebnis. Bei *semi-analytischen* Relationen lässt sich gesetzmäßig der Wert der Konklusion als Funktion der Werte der Prämissen berechnen. Dies ist anders als bei *synthetischen* Relationen, bei denen, wie aufgezeigt, eine solche Rechnung nicht möglich ist, denn es gelingt nicht $p(X \rightarrow Y)$ aus p(X) und p(Y) abzuleiten: ein sehr wichtiger Unterschied.

Nur zwei Beispiele für die Berechnung semi-analytischer Schlüsse:

- $p((X \vee Y) \longrightarrow Y) = m/n$.

Aus der *Wahrheitstafel* ergibt sich: $[(X \vee Y) \longrightarrow Y] \Leftrightarrow [X \rightarrow Y]$ Daraus folgt:
$p((X \vee Y) \longrightarrow Y) = m/n \Leftrightarrow p(X \rightarrow Y) = m/n$ Oder kurz: $p((X \vee Y) \longrightarrow Y) = p(X \rightarrow Y)$
1. Zeile einer Wahrheitstafel wäre: $p(X \vee Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = m/n$

$$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = r/n \wedge \frac{a+c}{a+b+c+d} = s/n \longrightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = m/n$$

$$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \text{r/n} \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{a+b+c+d} = 1 - \text{r/n}$$

$$\frac{a+c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+c+d}{a+b+c+d}$$

p(X ∨ Y) = r/n ∧ p(Y) = s/n ⇒ p(X → Y) = p((X ∨ Y) ⟶ Y) = (1 – r/n) + s/n = (s + n – r)/n

Aus einem *semi-analytischen* Schluss wird also ein *streng analytischer*, echter Schluss.

- p((X → Y) → (X ↔ Y)) = m/n.

Laut Wahrheitstafel gilt: [(X → Y) → (X ↔ Y)] ⇔ [X ← Y] Daraus folgt:
p((X → Y) → (X ↔ Y)) = p(X ← Y)
1. Zeile der Wahrheitstafel wäre: p(X → Y) = r/n ∧ p(X ↔ Y) = s/n ⟶ p(X ← Y) = m/n

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \text{r/n} \;\wedge\; \frac{a+d}{a+b+c+d} = \text{s/n} \;\longrightarrow\; \frac{a+b+d}{a+b+c+d} = \text{m/n}$$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \text{r/n} \;\Leftrightarrow\; \frac{b}{a+b+c+d} = 1 - \text{r/n}$$

$$\frac{a+d}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} = \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$$

p(X → Y) = r/n ∧ p(X ↔ Y) = s/n ⇒ p(X ← Y) = p((X → Y) → (X ↔ Y)) = (1 – r/n) + s/n

3) Strenge Schlüsse
Betrachten wir jetzt *strenge Schlüsse* und fragen nach deren Wahrheitstafel bzw. Berechnung.
Z. B. den Schluss X ⇒ X ∨ Y.
Die *1. Zeile* (also eine rein positive Zeile) einer konjunktiven Wahrheitstafel lautete:
[X ∧ (X ∨ Y)] ⇒ [X ⇒ X ∨ Y]
Wir könnten X ⇒ X ∨ Y (entsprechend dem obigen Vorgehen) durch X T Y ersetzen (‚T' steht für den Tautologator), aber dies ist überflüssig, weil jede Tautologie denselben Wahrheitsverlauf besitzt, bei 2 Variablen + + + +.
Quantifizieren wir diesen Schluss zu p(X ⇒ X ∨ Y) = m/n, so erhalten wir:

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} = \text{r/n} \;\wedge\; \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \text{s/n} \;\longrightarrow\; \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = \text{m/n}$$

Um die Konklusion zu berechen, genügt es, von *einer* Prämisse auszugehen.

Z. B.: p(X) = r/n, somit p(¬X) = 1 – r/n. In Formeln erhalten wir dann:

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} = \text{r/n} \;\wedge\; \frac{c+d}{a+b+c+d} = 1 - \text{r/n} \;\Rightarrow\; \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = \text{r/n} + (1 - \text{r/n}) = 1$$

Dies ist natürlich keine Überraschung, denn $\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$ gilt eben notwendig, gleichgültig, von welchen Prämissen man das herleitet.

Daher brauchen wir die anderen Zeilen der Wahrheitstafel auch nicht zu analysieren.

Fazit: Zwar können wir auch bei dem *strengen* Schluss wie p(X ⇒ X ∨ Y) = m/n keine adäquate *Wahrheitstafel* aufstellen, aber eine *Berechnung* des Wertes des Schlusses aus den Werten der Komponenten, hier p(X) und p(X ∨ Y) ist möglich.

Dies bedeutet natürlich nicht, dass wir bei dem *Schluss selbst* aus dem Wert der Prämisse den Wert der Konklusion sicher ableiten können, also aus p(X) = r/n den Wert p(X ∨ Y) = s/n.

Aus $\dfrac{a+b}{a+b+c+d}$ = r/n folgt nicht sicher der Wert $\dfrac{a+b+c}{a+b+c+d}$ = s/n

Welche Schlussmöglichkeiten hier dennoch gegeben sind, wird uns im nächsten Punkt beschäftigen.

2-3-0-3 ZWEI-FACHE QUANTIFIZIERUNG

Wir werden hier zunächst 2 Schlüsse unterscheiden:

1) *semi-analytischer* Schluss: z. B. p(X → Y) = r/n ⟶ p(Y) = s/n.
2) *strenger* Schluss: z. B. p(X → Y) = r/n ⇒ p(Y) ≤ r/n

1) *Semi-analytischer Schluss*

Es geht also um einen Schluss wie: p(X → Y) = r/n ⟶ p(Y) = s/n.

In normaler Sprache lautet die primäre *Bedeutung* dieses Schlusses:
„Wenn die Wahrscheinlichkeit p(X → Y) den Wert r/n besitzt, dann besitzt die Wahrscheinlichkeit p(Y) den Wert s/n“. (Auf eine mengen-theoretische Interpretation verzichte ich hier.)
Ich habe diesen Schluss als *semi-analytisch* gekennzeichnet, denn es ist nicht allgemein zu bestimmen, ob er streng gültig ist; erst durch Einsatz von *konkreten* Werten für die Variablen r/n und s/n können wir das – aber auch nur partiell bzw. bedingt – entscheiden.

Fragen wir dennoch genauer nach den *Wahrheitsbedingungen* und damit nach der *Wahrheitstafel* dieses Schlusses, so ergeben sich vor allem zwei Möglichkeiten:

• konjunktive Deutung

Hier wird aus der Konjunktion der Glieder p(X → Y) = r/n und p(Y) = s/n auf die Wahrheit oder Falschheit der *Gesamt-Relation* p(X → Y) = r/n ⟶ p(Y) = s/n geschlossen. D. h. für die 1., *positive* Zeile: [p(X → Y) = r/n ∧ p(Y) = s/n] ⇒ [p(X → Y) = r/n ⟶ p(Y) = s/n]

Greifen wir zunächst zurück auf die *qualitative* Form dieses Schlusses und zeigen seine Wahrheitstafel bzw. die Einzel-Schlüsse, die den *Zeilen* der Wahrheitstafel entsprechen.

	(X → Y)	∧ Y	⇒ (X → Y) ⟶ Y	
1.	+	+ + +	+	(X → Y) ∧ Y ⇒ (X → Y) ⟶ Y
2.	−	− − +	+	¬(X → Y) ∧ ¬Y ⇒ (X → Y) ⟶ Y
3.	+	+ + +	+	(X → Y) ∧ Y ⇒ (X → Y) ⟶ Y
4.	+	− − +	−	(X → Y) ∧ ¬Y ⇒ ¬[(X → Y) ⟶ Y]

Wie übersetzt man eine solche *qualitative* Wahrheitstafel in eine *quantitative* Wahrheitstafel ? (vgl. hierzu 1-3-3-5)

Erstens stellt sich dabei die Frage, ob wir die *qualitativen*, aussagen-logischen *Wahrheitsverläufe* (also z. B. für X → Y den Verlauf + − + +) in die *quantitative* Wahrheitstafel übernehmen; ich tat das in einer früheren Fassung des Textes, habe aber inzwischen meine Auffassung geändert. Der Grund ist folgender:

Die *qualitativen* Ausdrücke (X → Y) und Y stehen in einem genau bestimmten logischen *Abhängigkeitsverhältnis*, was die Wahrheitstafel widerspiegelt (siehe oben).

Zwar stehen die *quantitativen* Ausdrücke $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und $p(Y) = s/n$ ebenfalls in einem logischen Abhängigkeitsverhältnis (zumal eben das Y in X → Y enthalten ist). Vor allem zeigt sich dies in der Ungleichung $p(X \rightarrow Y) \geq p(Y)$; das erläutere ich im nächsten Punkt.

Aber außer diesem Größen-Verhältnis besteht *Unabhängigkeit*. Innerhalb des definierten Wertebereichs von $0 \leq p \leq 1$ können $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und p(Y) alle denkbaren Werte annehmen. D. h. wenn ich $p(X \rightarrow Y)$ kenne, weiß ich keinesfalls *genau*, wie groß p(Y) ist (und umgekehrt).

Daher darf man den Wahrheitsverlauf aus der *qualitativen* Wahrheitstafel *nicht* übernehmen, sondern muss die Werte wie *unabhängige synthetische* Werte behandeln (Stichpunkt: *systematische* Wahrheitstafel).

Als *konjunktive* Wahrheitstafel ergibt sich dann:

$[p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge$	$p(Y) = s/n]$	$\Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	−	+

Zweitens stellt sich die Frage, wie man das + und das − übersetzt. Hier bietet sich an:

Für $p(X \rightarrow Y)$: bei +: r/n bei −: $\neg(r/n)$ bzw. $\neq r/n$

Für p(Y): bei +: s/n, bei −: $\neg(s/n)$ bzw. $\neq s/n$.

Setzen wir die *quantitativen* Werte in die Wahrheitstafel ein, erhalten wir:

$[p(X \rightarrow Y) \wedge$	$p(Y)]$	$\Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
r/n	s/n	+
r/n	$\neq$ s/n	−
$\neq$ r/n	s/n	+
$\neq$ r/n	$\neq$ s/n	+

Als einzelne Zeilen ergeben sich:

1. $[p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n] \Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
2. $[p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge p(Y) \neq s/n] \Rightarrow \neg[p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
3. $[p(X \rightarrow Y) \neq r/n \wedge p(Y) = s/n] \Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
4. $[p(X \rightarrow Y) \neq r/n \wedge p(Y) \neq s/n] \Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$

(Wenn wir die Wahrheitstafel analog der qualitativen Wahrheitstafel konstruiert hätten, ergäben sich ebenfalls nur strenge Schlüsse.)

Hier stoßen wir also wieder auf das vor allem schon aus 1-3-3-5 bekannte Problem: Wir können zwar *logisch* eine korrekte Wahrheitstafel und korrekte Schlüsse aufstellen. Aber wenn wir diese *quantitativen* Schlüsse *mathematisch* analysieren, scheinen sie uns sinnlos. Denn die *Variablen* wie r/n sind weitgehend *unbestimmt* (noch unbestimmter sind aber die *negativen* Werte wie $\neq$ r/n, dieser Wert schließt eben nur sich selbst, also nur *einen* Wert aus).

Aber auch bei einem *konkreten* Beispiel ergibt sich kein wesentlich anderes Resultat, z. B. für $p(X \to Y) = 7/10 \longrightarrow p(Y) = 5/10$. Die konjunktive Deutung lautet hier:

$$[p(X \to Y) = 7/10 \wedge p(Y) = 5/10] \Rightarrow [p(X \to Y) = 7/10 \longrightarrow p(Y) = 5/10]$$

Da wir es jetzt mit Konstanten wie 7/10 zu tun haben, wirkt diese 1. Zeile der Wahrheitstafel wohl mathematisch sinnvoll. Aber bei den weiteren Zeilen der Wahrheitstafel benötigen wir wieder die *Negationen*, und diese *negativen* Bestimmungen $\neq 5/10$ oder $\neq 7/10$ sind zu unkonkret für eine sinnvolle mathematisch-numerische Deutung. Dies gilt auch, wenn man einschränkt: Die Negation z. B. $\neq 7/10$ bezieht sich nur auf den *Zähler* (also Negationen sind 1/10, 2/10 usw.), der Nenner n = 10 wird nicht negiert; außerdem sind grundsätzlich alle Werte $p < 0$ und $p > 1$ ausgeschlossen.

• Implikative Deutung

Hier wird (wie beschrieben) nur das *Nachglied* (bzw. der Schluss-Satz) – im Beispiel Y – in Relation zum *Vorderglied* (bzw. zur Prämisse) $X \to Y$ in der Wahrheitstafel dargestellt. Konkret: Hier wird also von $X \to Y$ auf Y geschlossen (einschließlich der Variationen durch die Negationen). Die Frage ist: Lässt sich bei einer *implikativen* Deutung eine gehaltvolle Wahrheitstafel aufstellen? Die Wahrheitstafel müsste wie folgt aussehen; dabei wähle ich für die Prämisse $p(X \to Y) = r/n$ aus o. g. Gründen den neutralen Wahrheitsverlauf + + – –.

Imp.	$p(X \to Y)$	$\longrightarrow$	$p(Y)$
1.	r/n	±	s/n
2.	r/n	±	$\neq$ s/n
3.	$\neq$ r/n	±	s/n
4.	$\neq$ r/n	±	$\neq$ s/n

Ich habe das Problem in ausführlichen Analysen geprüft, letztlich ergibt sich aber auch hier keine adäquate Wahrheitstafel. Bei einer *implikativen* Wahrheitstafel ist zu fordern, dass sie nicht *nur* ± (für „möglicherweise + bzw. möglicherweise –") aufweist, sondern wenigstens *ein* + (oder ein –). Denn ausschließlich ± spricht für *logische Unabhängigkeit*. Im Beispiel erhält man aber 4mal ±, es sei denn, man wählt ganz bestimmte, „günstige" Werte.

2) *strenger Schluss*: $p(X \to Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$

Hier handelt sich um einen strengen Schluss. Deutlicher wird das, wenn man die Formeln verwendet.

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \leq r/n$$

Dies ist unmittelbar evident und mathematisch plausibel. Betrachtet man nur den Zähler, dann gilt: a + c ist Teil (Teilsumme) von a + c + d. Der Teil kann aber nicht größer als das Ganze sein.

Man kann den Schluss auch *umgekehrt* schreiben: $p(Y) = s/n \Rightarrow p(X \to Y) \geq s/n$.

Für die *Negationen* gilt, am Beispiel von p(Y):

$\neg[p(Y) \geq s/n]$ ist definiert als $p(Y) < s/n$, $\neg[p(Y) \leq s/n]$ ist definiert als $p(Y) > s/n$.

Eine ganz andere Möglichkeit ist, mit einer *Gleichung* und mit der *Addition* zu arbeiten: Dazu führen wir den Faktor $p(\Phi) = m/n$ ein. Es soll gelten: $p(Y) + p(\Phi) = p(X \to Y)$.

Bzw. $s/n + m/n = r/n$.

Zurück zur ursprünglichen Form: $p(X \to Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$

Bei *konjunktiver* Deutung ergäbe sich als *1. Zeile* einer *Wahrheitstafel*:

$$[p(X \to Y) = r/n \wedge p(Y) \leq r/n] \Rightarrow [p(X \to Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n]$$

Eine *vollständige*, adäquate Wahrheitstafel aufzustellen, ist aber m. E. nicht möglich.

Der Grund ist, wir können nicht die Wahrheitsverläufe für $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und $p(Y) \leq r/n$ aufstellen. Denn es gibt für den Schluss $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$ kein direktes Vorbild in der Aussagen-Logik, auf dessen Wahrheitstafel man sich beziehen könnte (einmal davon abgesehen, dass dies sehr problematisch wäre).

Wir dürfen aber $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und $p(Y) \leq r/n$ aber auch nicht einfach wie *unabhängige* Relationen behandeln und, wie bei einer *synthetischen* Relation, für $p(X \rightarrow Y) = r/n$ den Verlauf + + − − und für $p(Y) \leq r/n$ den Verlauf + − + − ansetzen, weil diese Werte logisch und mathematisch vollkommen voneinander *abhängig* sind. (Man könnte zwar eine passende Wahrheitstafel konstruieren, aber das wäre doch willkürlich).

Aber da $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$ eine *Tautologie* ist, wäre eine Wahrheitstafel auch nicht sehr aufschlussreich, denn es wären auch alle Zeilen der Wahrheitstafel automatisch tautologisch. Bei Verwendung der normalen Implikation gilt eben: Ein Schluss auf eine Tautologie ist immer ebenfalls eine Tautologie: $\Phi \Rightarrow$ Tautologie. Somit muss in der Wahrheitstafel unter dem zentralen Relator $\Rightarrow$ 4mal + stehen: + + + +.

Man könnte hier wiederum fragen, ob man dem *logischen (analytischen)* Implikator $\Rightarrow$ überhaupt bei einem Schluss verwenden darf, für den sich keine (sinnvolle) Wahrheitstafel aufstellen lässt, ob man vielleicht stattdessen einen Implikator für einen *nur mathematischen* Schluss benötigt. Aber ein Schluss wie $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$ gehorcht ebenfalls der fundamentalen Definition des logischen Schlusses, nachdem die *Information der Konklusion* eine *Teilmenge der Information der Prämisse* ist − das werde ich gleich in 2-3-0-4 zeigen.

Auch eine *implikative* Wahrheitstafel von $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$ stieße auf dieselben Probleme. Daher habe ich darauf verzicht, sie darzustellen.

Fassen wir noch einmal zusammen, welche Quantifzierungen von Schlüssen vorgenommen wurde. Wir haben zuerst die *Gesamtformel* von $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ berechnet, dann die *Einzelkomponenten* und wollen jetzt beides in einer *Kombinations-Formel* integrieren, systematisch:

- Gesamtformel: $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$
- Einzelkomponenten-Formel: $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n$
- Kombinierte Formel: $[p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n] \longrightarrow [p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n]$

2-3-0-4 WAS IST EIN QUANTITATIVER SCHLUSS ?

Wir haben gesehen, dass man als Inbegriff eines logischen Schlusses verstehen kann: Die *Information der Konklusion ist in der Information der Prämisse bereits enthalten*, ist also eine *Teilmenge* der Konklusions-Information. Wie man traditionell sagt: Der Schluss (geht) vom Allgemeinen auf das Besondere. Die Frage ist: Wie sieht das bei einem *quantitativen* Schluss aus? Geht es da auch ausschließlich um diesen Zusammenhang der *Informations-Übertragung*? Oder spielt bei einem quantitativen Schluss zusätzlich ein *mathematisches*, *numerisches* Moment eine Rolle? Zur Beantwortung der Frage möchte ich 2 Arten von Schlüssen unterscheiden, man könnte sie *quantifizierte* vs. *quantitative* Schlüsse nennen.

- quantifizierte Schlüsse

Ein Beispiel ist: $p(X) = r/n \wedge p(Y) = s/n \Rightarrow p(Y) = s/n$

Dies ist zwar formal ein quantitativer Schluss, aber besser spräche man vielleicht von einem *quantifizierten S*chluss, denn dieser Schluss hat genau *dieselbe Informations-Struktur* wie der folgende *qualitative* Schluss: $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Die Quantität spielt hier keine Rolle für den Schluss, sie ist sekundär.

- quantitative Schlüsse

Als erstes Beispiel folgender Schluss mit einer Ungleichung : $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$

In Formeln: $\dfrac{a}{a+b+c+d}$ = r/n $\Rightarrow$ $\dfrac{a+c}{a+b+c+d}$ $\geq$ r/n

Man könnte zunächst meinen, dass hier wirklich die Information *numerisch* ist, zumal es auch kein einfaches qualitatives Vorbild gibt. Und zumal wir die Information des Schlusses analog auch in einer mathematischen *Gleichung* bzw. *Ungleichung* ausdrücken können.

$$\frac{a}{a+b+c+d} \leq \frac{a+c}{a+b+c+d}$$

Setzen wir aber z. B. folgende konkrete Werte ein:

$p(X \wedge Y) = 2/5 \;\Rightarrow\; p(Y) \geq 2/5$ (es gilt die Grundbedingung $p \leq 1$).

Für $p(Y) \geq 2/5$ können wir dann vereinfacht schreiben : $p(Y) = 2/5 \vee 3/5 \vee 4/5 \vee 5/5$

Genauer: $p(Y) = 2/5 \;\vee\; p(Y) = 3/5 \;\vee\; p(Y) = 4/5 \;\vee\; p(Y) = 5/5$

Also: $p(X \wedge Y) = 2/5 \;\Rightarrow\; p(Y) = 2/5 \vee 3/5 \vee 4/5 \vee 5/5$

So gesehen hat der quantitative Schluss (annähernd) die Struktur des *qualitativen* Schlusses:

$X \wedge Y \Rightarrow\; Y \vee V \vee W \vee Z$

Die Ungleichung wurde also *aussagen-logisch* durch eine *Disjunktion* ausgedrückt. Zwar ist bei diesem Schluss die Quantität nicht sekundär, dennoch geht sie nicht unmittelbar ein in die Logik des Schlusses. Wir brauchen *kein zusätzliches mathematisches Moment*, um den Schluss zu begründen. Sondern es gilt *Gesamt-Information*: $p(X \wedge Y) = r/n$, *Teil-Information*: $p(Y) \geq r/n$, und die Teil-Information ist in der Gesamt-Information bereits enthalten. Wenn man diese Beziehung hier auch durch eine *mathematische Un-/Gleichung* direkt ausdrücken kann, der logische Ansatz des „Informationsflusses" ist eigenständig, und er ist ausreichend.

Als zweites Beispiel $p(X) = 1 \wedge p(Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(Y) > 0$.

Diesen *quantitativen* Schluss kann man leicht auf einen *quantoren-logischen* Schluss zurückführen: $\Lambda(X) \wedge \Lambda(Y) \Rightarrow V(X)$, sprachlich z. B.: „Wenn alle X wahr sind und alle Y wahr sind, dann sind auch einige Y wahr". Gerade der Schluss von „*alle*" auf „*einige*" demonstriert besonders deutlich das Prinzip „vom Allgemeinen zum Besonderen".

Das *Ganze* ist „alle", der *Teil* ist „einige"; der All-Satz (Λ bzw. $p = 1$) beinhaltet die Gesamt-Information. Man könnte denken: $p > 0$ enthält mehr Information als $p = 1$, weil $p > 0$ (trotz der Einschränkung $p \leq 1$) doch einen viel größeren Zahlenbereich abdeckt als $p = 1$, das nur genau *einen* Wert umfasst. Aber dies ist ein Irrtum: Je weniger Möglichkeiten eine Relation oder Variable umfasst, desto höher der *Informationsgehalt*. Somit besitzt $p > 0$ wesentlich *weniger* Informationsgehalt als $p = 1$, ist in $p = 1$ bereits enthalten: $p = 1 \Rightarrow p > 0$. (Auch hier könnte man letztlich $p > 0$ quasi auf eine aussagen-logische Disjunktion zurückführen.)

Ein drittes Beispiel: $p(X \to Y) = 7/10 \;\wedge\; p(Y) = 5/10 \;\Rightarrow\; p(X \to Y \longrightarrow Y) = 8/10$

Wie in 2-3-0-2 gezeigt, lässt sich dieser Schluss *berechnen* nach der allgemeinen Gleichung:

$p(X \to Y) = r/n \;\wedge\; p(Y) = s/n \;\Rightarrow\; p(X \to Y \longrightarrow Y) \;=\; 1 - r/n + s/n$.

Als Formel (mit den Beispielwerten) ergibt sich hier:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 7/10 \;\wedge\; \frac{a+c}{a+b+c+d} = 5/10 \;\Rightarrow\; \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 8/10$$

Als *Gesamt-Information* aus den beiden Prämissen ergibt sich: a + c = 5, b = 3, d = 2. Als *Teil-Information* ist ableitbar: a + b + c = 8, a + b + c + d = 10, also die Werte der Konklusion.

Machen wir die Gegenprobe: Welche Informationen enthält die Konklusion?

$a + b + c = 8$, $d = 2$. Wir können aber nicht ableiten: $a + c = 5$ und $b = 3$.

Zwar müssen wir, um die Wahrheit dieses Schlusses zu *berechnen*, *mathematische Operationen* wie *Addition* und *Subtraktion* verwenden. Aber der Schluss selbst enthält keinen besonderen mathematischen Faktor, sondern er beinhaltet nur das *logische Prinzip*, dass die Teil-Information in der Gesamt-Information enthalten ist, man somit von der Gesamt-Information sicher auf die Teil-Information schließen kann. Somit ist $\Rightarrow$ in allen 3 Fällen berechtigt.

2-3-0-5 PROBLEME QUANTITATIVER SCHLÜSSE

Warum gibt es Probleme bei der Aufstellung von *quantitativen* Schlüssen und insbesondere ihrer Wahrheitstafeln, Probleme, die bei *qualitativen* Schlüssen bzw. Wahrheitstafeln nicht entstehen? Wir haben schon einige Punkte angesprochen und fassen sie abschließend noch einmal systematisch zusammen:

• Numerische Variablen

Beim *qualitativen* Schluss wie z. B. $X \Rightarrow X \vee Y$ haben wir es mit *Konstanten* zu tun, er steht für $p(X) = 1 \Rightarrow p(X \vee Y) = 1$. Bei *quantitativen* Schlüssen arbeitet man mit *numerischen Variablen* wie z. B. bei $p(X) = r/n \longrightarrow p(X \vee Y) = s/n$. Wir müssen hier das Zeichen $\longrightarrow$ für *semi-analytische* Implikation verwenden, denn ob der Schluss *streng* gültig ist oder nicht, hängt davon ab, welche *konkreten* Werte man für die Variablen einsetzt; bei manchen Werten ist er gültig, bei anderen nicht.

Streng gültig wird der Schluss z. B. in der Form: $p(X) = 1 \Rightarrow p(X \vee Y) = 1$. Allerdings gibt es dennoch *generell* strenge quantitative Schlüsse wie $p(X) = r/n \Rightarrow p(X \vee Y) \geq r/n$; hier wird jedoch der Wert von $X \vee Y$ durch eine *Ungleichung* bestimmt, es geht damit um ein *Intervall von Werten*.

• Probleme der Negation

Ein wichtigeres, zentrales Problem ist die *Negation*. Während die Negation von X, nämlich $\neg X$, genau bestimmt ist (quantitativ $p = 0$), bleibt die Negation einer *numerischen Variable* $p(X) \neq r/n$ völlig unbestimmt (abgesehen von den Einschränkungen $0 \leq r/n \leq 1$). Aber auch wenn man ein konkretes Beispiel nimmt, z. B. $p(X) \neq 3/5$, ist der Wert unbestimmt. Hält man sich an die genannten Bedingungen, so sind immerhin folgende Werte möglich: 0/5, 1/5, 2/5, 4/5, 5/5. Auch die Negation von $p(X) \leq r/n$, nämlich $p(X) > r/n$ (und entsprechend) führt nicht zu eindeutigen Werten. Das Problem entsteht vor allem, wenn die Negationen in der Prämisse bzw. den Prämissen vorkommen.

Das hindert zunächst noch nicht, einen (positiven, nicht negierten) strengen numerischen Schluss aufzustellen, z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$. Sowie man aber die *Wahrheitsbedingungen* angeben will bzw. eine *Wahrheitstafel* aufstellen will, benötigt man die *Negationen*, und dann beginnen die Probleme. Allerdings werden wir sehen, bei der *quantitativen Aussagen-Logik*, wo eine Negation genau zu *einem bestimmten* Wert führt ($p \neq 1 \Leftrightarrow p = 0$), lassen sich adäquate Wahrheitstafeln aufstellen.

• Implikation

Auch die besondere *Definition der Implikation* $\Phi \rightarrow \Psi$ ist hier zu nennen. Es wurde schon mehrfach, auch im Bereich der *qualitativen* Aussagen-Logik, darauf hingewiesen, dass die Deutung der Implikation prinzipiell *problematisch* ist, weil die nämlich auch als gültig angesehen wird, wenn das Vorderglied Φ ungültig ist bzw. wenn beide Glieder Φ, Ψ ungültig sind. Das widerspricht der *normalsprachlichen* Auffassung eines *Wenn-dann-Satzes*.

Nun hat diese Deutung der Implikation wie beschrieben auch Vorteile, und so mag man sie im *qualitativen* Bereich durchaus verwenden. Im *quantitativen* Bereich ist die normale Impli-

kation aber (bei negativem Vorderglied) normalerweise unangebracht, unsinnig oder gar falsch. Machen wir den direkten Vergleich:
1. qualitativer Schluss: $(X \to Y) \wedge Y \Rightarrow (X \to Y) \longrightarrow Y$
2. quantitativer Schluss : $p(X \to Y) = 7/10 \wedge p(Y) = 5/10 \Rightarrow p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 8/10$

Frage nach der Gültigkeit des Schlusses bei negativen Prämissen:
1. qualitativer Schluss: $\neg(X \to Y) \wedge \neg Y \Rightarrow (X \to Y) \longrightarrow Y$
   der qualitative Schluss ist *gültig*, wenn $X \to Y$ und Y negiert sind
2. quantitativer Schluss: $p(X \to Y) \neq 7/10 \wedge p(Y) \neq 5/10 \longrightarrow p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 8/10$
   der quantitative Schluss ist völlig *unbestimmt* bei negativen Prämissen, man kann ihn allenfalls als *partiell* kennzeichnen, die Konklusion kann wahr sein oder falsch.

Nach der Definition der Implikation müsste der quantitative Schluss aber auch gültig sein, wenn die *Prämissen falsch* sind, d. h. es müsste (als Tautologie) gelten:

$$p(X \to Y) \neq 7/10 \wedge p(Y) \neq 5/10 \Rightarrow p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 8/10 \text{ (ungültig)}$$

Hier kommt es gewissermaßen zu einer *Diskrepanz zwischen Logik und Mathematik*: Was sich *mathematisch*, quasi inhaltlich als falsch erweist, kann dennoch der rein mechanischen *logischen* Festlegung der Wahrheitswerte entsprechen. Dann man muss aber einfach konstatieren: Gültige quantitative Schlüsse gelten nicht mehr (automatisch), wenn man sie *negiert* (Ausnahme: Schlüsse der *quantitativen Aussagen-Logik*, wo nur Werte p = 1 oder p = 0 vorkommen.). Die Definition der Implikation darf also nicht ohne weiteres auf quantitative Schlüsse angewandt werden. Vielleicht kann man sich das so ähnlich erklären, wie das eine *Division durch 0* in der Mathematik verboten ist.

• Kontradiktion
Ein weiteres Problem der Implikation ist die *Kontradiktion*. Eine *Implikation*, analytisch ein *Schluss*, ist wie gesagt nur kontradiktorisch (logisch falsch), wenn die Prämisse wahr ist und die Konklusion falsch. Hier müssen wir drei Fälle unterschieden, am Beispiel von:

$p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$, in Formeln:

1) $$\frac{a}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \geq r/n.$$

Eindeutig ein *strenger Schluss* mit $\Rightarrow$.

2) $$\frac{a}{a+b+c+d} = r/n \longrightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = r/n$$

Dieses Ergebnis ist möglich, aber nicht notwendig. Daher nur ein *partieller Schluss* mit $\longrightarrow$.

3) $$\frac{a}{a+b+c+d} = r/n \quad ??? \quad \frac{a+c}{a+b+c+d} < r/n$$

Aber welchen Implikations-Relator soll man hier einsetzen? Offensichtlich liegt ein *Widerspruch* vor, denn der zweite Bruch kann nicht kleiner sein als der erste. Auch der *partielle Implikator* $\longrightarrow$ verbietet sich daher. (An früherer Stelle habe ich einmal diskutiert, ob man einen *negierten partiellen Implikator*, also $\neg\longrightarrow$ einsetzen kann, dies aber letztlich verworfen.) Eigentlich müsste man erwarten, dass der kontradiktorische Implikator $\not\Rightarrow$ verwendet wird, aber der wäre (auf Grund der extremen Definition der *kontradiktorischen Implikation*) nur einzusetzen, wenn der Prämissen-Bruch eine Tautologie und der Konklusions-Bruch selbst eine Kontradiktion wäre, beides ist aber nicht der Fall. Anscheinend ist aber die negative logische Folge $\Rightarrow\neg$ gegeben.

Überprüfen wir das an einem konkreten Beispiel:

Gilt $\frac{a}{a+b+c+d} = 3/5 \;\Rightarrow\neg\; \frac{a+c}{a+b+c+d} < 3/5$?

Da $\neg\, p < r/n \;\Leftrightarrow\; p \geq r/n$ kann man auch schreiben:

$$\frac{a}{a+b+c+d} = 3/5 \;\Rightarrow\; \frac{a+c}{a+b+c+d} \geq 3/5$$

Hier liegt wirklich ein *gültiger* Schluss vor.

• Wahrheitstafel

Das Hauptproblem bei quantitativen Schlüssen sind wie beschrieben die *Wahrheitsbedingungen* bzw. die *Wahrheitstafel* – für die man nämlich Negationen benötigt.

Bei quantitativen Schlüssen (Relationen) lassen sich nur eingeschränkt Wahrheitstafeln verwenden bzw. gelten nicht alle logischen Gesetze: So gilt in der qualitativen Aussagen-Logik nicht nur $\Phi \wedge \Psi \;\Rightarrow\; \Phi \longrightarrow \Psi$, sondern auch $\neg\Phi \wedge \neg\Psi \;\Rightarrow\; \Phi \longrightarrow \Psi$. Quantitativ gilt aber $p(\Phi) = r/n \;\wedge\; p(\Psi) \longrightarrow p(\Phi \longrightarrow \Psi) = m/n$. Und selbst wenn bei konkreten Werte der strenge Schluss $p(X \to Y) = 7/10 \;\wedge\; p(Y) = 5/10 \;\Rightarrow\; p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 8/10$, gilt, dann gilt die Konklusion nicht bei negativen Prämissen $p(X \to Y) \neq 7/10 \;\wedge\; p(Y) \neq 5/10$.

Also: Die Wahrheitstafel funktioniert hier nicht, oder allgemeiner: Der *wahrheitswertfunktionale* Ansatz funktioniert nur eingeschränkt bei quantitativen Sätzen bzw. Schlüssen. Die große und wichtige Ausnahme sind die Schlüsse der *quantitativen Aussagen-Logik*, bei der nur mit den Werten p = 1 und p = 0 gearbeitet wird; diese bietet dieselben Möglichkeiten wie die qualitative Aussagen-Logik, wie in Punkt 2-4 gezeigt werden wird.

Generell kann man allerdings auch in Frage stellen, ob man bei einem *quantitativen Schluss* überhaupt eine *Wahrheitstafel* benötigt. Das zweiwertige + und – der Wahrheitstafel ist hier eigentlich in einer *quantitativen Funktion* aufgelöst. Man fragt hier nicht: Wenn Φ gültig ist, ist dann auch Ψ gültig? Sondern: Wenn Φ den Wert r/n hat, welchen Wert hat dann Ψ? Zwar kann man dennoch bei jedem konkreten Wert wiederum fragen: Hat p(Φ) den Wert r/n oder nicht? Doch dies ist wenig sinnvoll, führte zu einem infiniten Regress. Die *Berechnung* des Wertes der Konklusion ist letztlich eine *Weiterentwicklung der Wahrheitstafel* der Aussagen-Logik. Man darf dies aber nicht mit einer *Quantifizierung der Wahrheit* verwechseln, diesem Thema widmen wir uns später.

• Positiv-Implikation

Man kann die Implikation im generellen *quantitativen* Bereich normalerweise nur mit einer gewissen Berechtigung verwenden, wenn man konsequent und vollständig auf eine konditionale *Wenn-dann-Deutung* verzichtet und $\Phi \to \Psi$ ausschließlich im Sinne der äquivalenten Relation $\neg(\Phi \wedge \neg\Psi)$ deutet. Nur, das entspricht nicht der üblichen oder wenigstens überwiegenden und wesentlichsten Deutung der Implikation.

Von daher dürfte es ggf. sinnvoller sein, bei quantitativen Schlüssen die *Positiv-Implikation* $\Phi \;{*}{\to}\; \Psi$ zu verwenden. Diese ist ja nur definiert, wenn das Vorderglied bzw. der Vordersatz *gültig* (+) ist, somit treten die Probleme eines negativen Vordergliedes gar nicht auf.

D. h. für unser Beispiel: $p(X \to Y) = 7/10 \;\wedge\; p(Y) = 5/10 \;\Rightarrow\; p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 8/10$. Die Relation ist nur definiert, wenn gilt: $p(X \to Y) = 7/10$ und $p(Y) = 5/10$. Damit fällt die problematische Möglichkeit, dass beide Prämissen falsch sind, als *nicht definiert* weg. Also besser mit der *Positiv-Implikation*:

$$p(X \to Y) = 7/10 \ \wedge \ p(Y) = 5/10 \ \ {*}\!\Rightarrow \ p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 8/10.$$

Außerdem ist die *Kontradiktion* bei der Positiv-Implikation viel unproblematischer:
So hat man keine Schwierigkeiten, im obigen Fall den kontradiktorischen Implikator einzusetzen, z. B.: $p(X \wedge Y) = r/n \ \ {*}\!\not\Rightarrow \ p(Y) < r/n$

Dennoch habe ich darauf verzichtet, nun immer die *Implikation* $\to$ durch die *Positiv-Implikation* $*\!\to$ zu ersetzen, solange die problematischen Fälle nicht zur Sprache kommen.

Fazit: Die Wahrheitstafel ist bei *quantitativen* – semi-analytischen oder analytischen – *Schlüssen* nur partiell verwendbar; dasselbe gilt *generell* für semi-analytische / analytische Relationen. Allerdings gibt es bei bestimmten Schlüssen die Möglichkeit, den *Wert der Konklusion* aus den Prämissen zu *berechnen*. Fassen wir die unübersichtliche Situation noch einmal zusammen, unter Einbeziehung synthetischer Relationen (mit Beispielen):

1) *synthetische* Relationen
- 1fache Quantität: $p(X \to Y) = r/n$. Keine Wahrheitstafel und keine Berechnung möglich.
- 2fache Quantität: $p(X) = r/n \to p(Y) = s/n$. Wahrheitstafel möglich, mathematisch sinnlos.

2) semi-analytische Relationen
- 1fache Quantität: $p((X \to Y) \longrightarrow Y) = m/n$. Wahrheitstafel geht nicht, aber Berechnung.
- 2fache Quantität: $p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n$. Wahrheitstafel bedingt möglich.

(Das Entsprechende gilt für streng analytische Relationen bzw. Schlüsse.)

2-3-1 Implikation

2-3-1-1 DEFINITION

Ich werde im Folgenden wieder verschiedene implikative Beziehungen untersuchen: primär die *Implikation*, aber auch *Replikation* und *Äquivalenz*. Es geht hier – im analytischen Kapitel – um *semi-analytische*, *tautologische* und *kontradiktorische* Relationen.

2-3-1-2 SEMI-ANALYTISCHE RELATIONEN

Ich nehme bei den *semi-analytischen* Relationen zur besseren Vergleichbarkeit immer eine Relation zwischen $X \to Y$ und $X \vee Y$, also: $R(X \to Y, X \vee Y)$.

- Implikation

	X	→	Y	⟶	X	∨	Y
a	+	+	+	+	+	+	+
b	+	–	–	+	+	+	–
b	–	+	+	+	–	+	+
d	–	+	–	–	–	–	–

Hier ergibt sich als *Gesamtformel*: $p(X \to Y \longrightarrow X \vee Y) = p(X \vee Y) = \dfrac{a+b+c}{a+b+c+d}$

- Replikation

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \longleftarrow & X & \vee & Y \\ + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & - & - & + & + & - \\ - & + & + & + & - & + & + \\ - & + & - & + & - & - & - \end{array}$$

$$p(X \rightarrow Y \longleftarrow X \vee Y) = p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d}$$

• Äquivalenz

$$\begin{array}{ccccccc} X & \rightarrow & Y & \longleftrightarrow & X & \vee & Y \\ + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & - & - & + & + & - \\ - & + & + & + & - & + & + \\ - & + & - & - & - & - & - \end{array}$$

$$p(X \rightarrow Y \longleftrightarrow X \vee Y) = p(Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d}$$

2-3-1-3 TAUTOLOGIE

Ich habe oben einen *semi-analytischen* Schluss genauer untersucht. Zum Vergleich sei jetzt ein echter, *tautologischer* Schluss herangezogen: $X \wedge Y \Rightarrow Y$

Die Wahrheitstafel lautet:

$$\begin{array}{ccccc} X & \wedge & Y & \Rightarrow & Y \\ + & + & + & + & + \\ + & - & - & + & - \\ - & - & + & + & + \\ - & - & - & + & - \end{array}$$

Die Formel für die gesamte Relation lautet:

$$p(X \wedge Y \Rightarrow Y) = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$$

Dies zeigt, dass gelten muss: $p(X \wedge Y \Rightarrow Y) = 1$

Und für jede Tautologie (mit 2 Variablen) gilt: $p(\text{Tautologie}) = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$

Die Formeln für die beiden Teil-Relationen sind:

$$p(X \wedge Y) = \frac{a}{a+b+c+d} \qquad p(Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d}$$

Es ist aber belanglos, welche Werte man hier einsetzt. Denn *jeder Schluss auf eine Tautologie ist eine Tautologie*: Beliebige Relation $\Rightarrow$ Tautologie.

Auch wenn man solche Werte einsetzt, dass p(X $\wedge$ Y) und p(Y) eine *Kontradiktion* bilden, ja sogar dann ist der Schluss tautologisch (vgl. 2-3-1-4).

2-3-1-4 KONTRADIKTION

Jetzt zur kontradiktorischen Implikation, z. B. $(X\ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X\ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$.
Die (vereinfachte) Wahrheitstafel lautet:

$(X\ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X\ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$

+	–	–
+	–	–
+	–	–
+	–	–

Daraus ergibt sich folgende Formel:

$$p((X\ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X\ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)) = \frac{0}{a+b+c+d} = 0$$

Man könnte auch vertreten, hier wäre gar keine Formel aufzustellen, im Zähler dürfte eigentlich gar nichts stehen.

Jeder Schluss von einer Kontradiktion ist bei Einsatz der *Normal-Implikation* tautologisch:
Kontradiktion $\Rightarrow$ beliebige Relation.

2-3-1-5 DREI VARIABLEN

Ich gehe hier von 3 Variablen X, Y, Z aus.

Zunächst eine *semi-analytische* Implikation: $X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z$.

• Für $X \vee Y \vee Z$ kann man auch schreiben: $\vee$(X, Y, Z), also den Relator $\vee$ *vorgestellt*.
In der Wahrheitstafel unten verwende ich zur besseren Übersicht auch die folgende Schreibweise (X, Y, Z)$\vee$, also den Relator $\vee$ *nachgestellt*.

	(X	Y	Z)	$\vee$	$\longrightarrow$	$\wedge$	(X	Y	Z)
a_1	+	+	+	+	+	+	+	+	+
a_2	+	+	–	+	–	–	+	+	–
b_1	+	–	+	+	–	–	+	–	+
b_2	+	–	–	+	–	–	+	–	–
c_1	–	+	+	+	–	–	–	+	+
c_2	–	+	–	+	–	–	–	+	–
d_1	–	–	+	+	–	–	–	–	+
d_2	–	–	–	–	+	–	–	–	–

Die semi-analytische Relation $X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z$ ist *analytisch äquivalent* der synthetischen *Äquivalenz* $X \leftrightarrow Y \leftrightarrow Z$; die ist eben nur gültig, wenn entweder *alle* Variablen, X, Y, Z gültig sind (1. Zeile) oder *alle* ungültig sind (letzte Zeile).

$$(X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \leftrightarrow Y \leftrightarrow Z)$$

Als quantitative *Gesamtformel* ergibt sich:

$$p(X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z) = \frac{a_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Und zwar gilt für die einzelnen Relationen:

$$p(X \vee Y \vee Z) = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

$$p(X \wedge Y \wedge Z) = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Dreht man die eben genannte *semi-analytische* Relation um, so erhält man eine *streng analytische* Relation, eine Tautologie: $X \wedge Y \wedge Z \Rightarrow X \vee Y \vee Z$
Die Gesamtformel hierfür lautet:

$$p(X \wedge Y \wedge Z \Rightarrow X \vee Y \vee Z) = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Somit gilt: $p(X \wedge Y \wedge Z \Rightarrow X \vee Y \vee Z) = 1$
Und wie entsprechend bei den Tautologien mit 2 Variablen angemerkt: alle Tautologien mit 3 Variablen haben dieselbe Formel, und alle Tautologien haben den Wert $p = 1$.

2-3-2 Positiv-Implikation

Bei der Positiv-Implikation beschränke ich mich auf die *implikative* Betrachtung, d. h. bei einem Schluss Φ $*\!\Rightarrow$ Ψ untersuche ich nur den Aspekt, inwieweit Ψ aus Φ folgt.
Ich gebe dabei immer die *qualitative* Struktur an, die *quantitative* Struktur und die *mathematische* Formel. Allerdings ist die qualitative Struktur nicht mit der quantitativen genau identisch, die qualitative Struktur gibt nur die Basis; genau entsprechende qualitative und quantitative Schlüsse werden im nächsten Punkt über *quantitative Aussagen-Logik* behandelt, in der nämlich nur mit Werten von $p = 1$ und $p = 0$ gearbeitet wird.
Bei den unten gezeigten Schlüssen kommt als *synthetischer* Schluss immer die Positiv-Implikation $X *\!\rightarrow Y$ vor. Als *analytischen* Zentral-Relator kann man normalerweise sowohl $\Rightarrow$ oder $*\!\Rightarrow$ verwenden. Ein Kriterium ist, ob die *Kontraposition* gilt, also:

$(\Phi \Rightarrow \Psi) \Leftrightarrow (\neg\Psi \Rightarrow \neg\Phi)$

Denn bei der *normalen Implikation* gilt die Kontraposition, bei der *Positiv-Implikation* aber nicht. Ursprünglich ist die Kontraposition zwar nur auf die qualitative Aussagen-Logik bezogen, aber man kann sie auch in der quantitativen Logik verwenden. Und zwar benötigt man dabei vor allem folgende (allerdings nicht unproblematische) *Negationen*:

Position	Negation
$p(\Phi) \leq r/n$	$\neg[p(\Phi) \leq r/n] \Leftrightarrow p(\Phi) > r/n$
$p(\Phi) \geq r/n$	$\neg[p(\Phi) \geq r/n] \Leftrightarrow p(\Phi) < r/n$
$p(\Phi) = r/n$	$\neg[p(\Phi) = r/n] \Leftrightarrow p(\Phi) \neq r/n$

2-3-2-1 MODUS PONENS

- qualitative Basis: $(X *\!\rightarrow Y) \wedge X \;*\!\Rightarrow\; Y$
- quantitativ: $p(X *\!\rightarrow Y) = r/n \wedge p(X) = 1 \;*\!\Rightarrow\; p(Y) = r/n$
- Bruch: $\frac{a}{a+b} = \frac{r}{n} \wedge \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \;*\!\Rightarrow\; \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$

Erläuterung:

- erster Bruch (bzw. erste Prämisse): daraus ergibt sich: a = r, a + b = n.
- zweiter Bruch: aus dem ergibt sich: a + b > 0, c + d = 0
- abgeleiteter dritter Bruch (bzw. Konklusion): im Zähler steht noch a, im Nenner noch a + b, somit wie im ersten Bruch: p = r/n (wobei auch möglich ist, dass r = 0)

Voraussetzung für einen solchen Schluss ist, dass p(X) = 1 (jedenfalls, wenn die genauen Werte von a, b, c und d nicht bekannt sind).

2-3-2-2 SCHLUSS VON POSITIV-IMPLIKATION AUF IMPLIKATION

□ qualitative Basis: $(X \ast\!\!\rightarrow Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$

□ quantitativ: $p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(X \rightarrow Y) \geq r/n$

□ Bruch : $\frac{a}{a+b} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} \geq \frac{r}{n}$

In dem Ausnahmefall, dass b = 0, ist sowohl $p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 1$ wie $p(X \rightarrow Y) = 1$.
Es handelt sich hier um den deterministischen Fall (Voraussetzung a > 0).
Wenn dagegen b > 0, sind haben beide Brüche einen Wert p < 1.

Man kann auch folgende Formel verwenden:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{s}{m}$$

Dabei gilt: s ≥ r, m ≥ n. Es ergeben sich also folgende Lösungen für den zweiten Bruch:

$$s/m = \frac{r}{n}, \frac{r+1}{n+1}, \frac{r+2}{n+2}, \ldots$$

Erläuterung an einem *Zahlenbeispiel*:

- erster Bruch: $\frac{a}{a+b} = \frac{4}{5}$ Also a = 4, b = 1
- Zweiter Bruch: hier gilt: $\frac{4+c+d}{4+1+c+d} = \frac{s}{m}$ s ≥ 4, m ≥ 5

Konkret ergeben sich folgende mögliche Werte:

c + d	$\frac{4+c+d}{4+1+c+d}$	dezimal
0	4/5	0,8
1	5/6	0,83
2	6/7	0,86
3	7/8	0,88
4	8/9	0,89
.		
.		
100	104/105	0,99

Es zeigt sich: Der Wert des ersten Bruches p = 4/5 bleibt immer *kleiner* als der Wert des zweiten Bruches: 4/5, 5/6, 6/7 usw. Und der erste Bruch nähert sich zwar p = 1 beliebig an, er bleibt aber $p < 1$ (1 ist der Grenzwert).

In jedem Fall kann man hier keinen *sicheren* Wert angeben, sondern nur die *Ungleichung*:

$$p(X \ast\!\!\to Y) = 4/5 \;\Rightarrow\; p(X \to Y) \geq 4/5.$$

Anders gesagt: es ist kein *strenger* Schluss auf *einen* bestimmten Wert möglich, sondern nur auf ein *Intervall* von Werten.

Man kann den *normalen* Implikator ⇒ verwenden, weil die Kontraposition gilt:

$\neg[p(X \to Y) \geq 4/5] \;\Rightarrow\; \neg[p(X \ast\!\!\to Y) = 4/5]$ bzw. anders geschrieben:

$p(X \to Y) < 4/5] \;\Rightarrow\; p(X \ast\!\!\to Y) \neq 4/5$

Zwar ist es korrekt, dass 4/5 ausgeschlossen ist. Aber ≠ 4/5 könnte ja z. B. auch für 5/5 stehen, was aber falsch wäre. Überhaupt könnte (wenn man es nicht einschränkt) ≠ 4/5 prinzipiell für *jeden möglichen Zahlenwert* (z. B.17/1023) außer eben 4/5 stehen, was zu absurden Ergebnissen führen würde. Viel unproblematischer wäre es, wenn man anstelle von ≠ 4/5 den Wert < 4/5 verwenden würde; nur lässt sich schwer begründen, warum die Negation von 4/5 unbedingt < 4/5 sein sollte. Hier zeigen sich also erhebliche Probleme der quantitativen Verwendung der Kontraposition.

Gibt man in dem Beispiel nur *einen* möglichen Wert an, z. B. 6/7 anstatt ≥ 4/5, so ist der Schluss nur noch *semi-analytisch*, z. B.:

$$p(X \ast\!\!\to Y) = 4/5 \;\longrightarrow\; p(X \to Y) = 6/7$$

Hier gilt in keinem Fall die Kontraposition, denn aus „$p(X \to Y) \neq 6/7$" folgt ja nicht „$p(X \ast\!\!\to Y) \neq 4/5$", weil „$p(X \to Y) \neq 6/7$" ja nur eine mögliche Lösung (Folge) darstellt.

Wie aber die Analyse der *Wahrheitstafel* gezeigt hat, muss man bei quantitativ-statistischen Implikationen immer mit *paradoxen Werten* rechnen. Auch wenn die Kontraposition gilt, mag man die *Positiv-Implikation* vorziehen, denn bei ihrer Verwendung ist man in jedem Fall auf der sicheren Seite.

2-3-2-3 SCHLUSS VON IMPLIKATION AUF POSITIV-IMPLIKATION

- qualitative Basis: $(X \to Y) \ast\!\!\longrightarrow (X \ast\!\!\to Y)$
- quantitativ: $p(X \to Y) = r/n \;\ast\!\!\Rightarrow\; p(X \ast\!\!\to Y) \leq r/n$

- Bruch: $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \;\ast\!\!\Rightarrow\; \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{s}{m}$

$s \leq r, m \leq n$

Also gilt: $s = r, r-1, r-2, \ldots, r-r$. Und: $m = n, n-1, n-2, \ldots, (n-n)+1$

$n - n = 0$ ist ausgeschlossen, weil eine Division durch 0 „verboten" ist.

Hier liegt wieder der Fall vor, dass die *qualitative* Basis nur ein *partieller* Schluss ist, in der *quantitativen* Form aber ein *vollständiger* Schluss vorliegt (allerdings mit mehreren möglichen Lösungen).

Das erläutere ich an einem Beispiel:

$$r = 4, n = 5 \quad p(X \to Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{4}{5} \quad \text{Folglich } b = 1$$

Dann gibt es folgende Möglichkeiten für $p(X \ast\!\!\to Y)$:

a	c + d	$\frac{a}{a+b}$	dezimal
4	0	4/5	0,8
3	1	3/4	0,75
2	2	2/3	0,67
1	3	1/2	0,5
0	4	0/1	0

Ausgeschlossen ist eben nur: p(X *→ Y) = 5/5 = 1.

2-3-2-4 SCHLUSS VON POSITIV-IMPLIKATION AUF KONJUNKTION

 qualitative Basis: X → Y) *⟶ (X ∧ Y)
 quantitativ: p(X *→ Y) = r/n *⇒ p(X ∧ Y) ≤ r/n

 Bruch: $\frac{a}{a+b} = \frac{r}{n}$ *⇒ $\frac{a}{a+b+c+d} \leq \frac{r}{n}$

c + d = 0 ⇒ p(X *→ Y) = p(X ∧ Y)

Hier liegt ein Sonderfall vor, weil der Zähler gleich ist (a), nur der Nenner der beiden Brüche ist verschieden. Für den gilt: a + b ≤ a + b + c + d

2-3-2-5 ÄQUIVALENZ

 qualitative Basis: (X *→ Y) ⇔ ¬(X *→ ¬Y)
 quantitativ: p(X *→ Y) = r/n ⇔ p(X *→ ¬Y) = 1 – r/n

 Bruch : $\frac{a}{a+b} = \frac{r}{n}$ ⇔ $\frac{b}{a+b} = 1 - \frac{r}{n}$

Voraussetzung: a + b > 0. Oder: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$

(Dies wird noch genau diskutiert werden: Existenz-Modell vs. Nicht-Existenz-Modell)

2-3-3 Systematik

In diesem Punkt „Systematik“ behandle ich nur – strenge und partielle – *Schlüsse*. Dabei verwende ich überwiegend die *normale Implikation*. Allerdings wäre (als Zentral-Relator) auch die *Positiv-Implikation* einzusetzen, dies wäre sogar unproblematischer; auf die Problematik der normalen Implikation, gerade im quantitativen Bereich habe ich schon hingewiesen.

Die generelle Form einer *streng analytischen* Relation ist: p(Φ) = r/n ⇒ p(Ψ) = s/n
Bzw. werden im Allgemeinen *Ungleichungen* statt Gleichungen verwendet:

$p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n$ bzw. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n$ u. a.

Die generelle Form einer *partiell analytischen* Relation ist: $p(\Phi) = r/n \longrightarrow p(\Psi) = s/n$
Dabei gilt wie schon ausgeführt:

$n = 1, 2, ...$ $r = 0, 1, ... , n$ $s = 0, 1, ... , n.$

Somit: p/maximum = n/n = 1, p/minimum = 0/n = 0. Also $0 \leq p \leq 1$.

Ich unterscheide im Folgenden:

- qualitativ und quantitativ strenger Schluss
- qualitativ partieller, quantitativ strenger Schluss
- quantitativ partieller Schluss

2-3-3-1 QUALITATIV UND QUANTITATIV STRENGER SCHLUSS

Damit ist gemeint: Die *qualitative*, aussagen-logische *Basis* ist ein *strenger* Schluss, und auch der *quantitative* Schluss ist *streng* analytisch. Allerdings ergibt sich in der quantitativen Form keine eindeutige Lösung. Sondern man kann ein nur *Lösungs-Intervall* (bzw. eine *Ungleichung*) oder eine Disjunktion angeben.

Z. B.: $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) = r/n \vee (r+1)/n \vee (r+2)/n \vee \dots \vee n/n$

Man könnte natürlich bezweifeln, ob man hier zu Recht von einem *strengen* Schluss sprechen kann, aber in der Aussagen-Logik gilt ja entsprechend: $\Phi \Rightarrow \Psi_1 \vee \Psi_2 \vee ... \vee \Psi_n$ auch als strenger Schluss.

Beispiel: Abtrennungsregel (*Simplifikationsregel*)

□ qualitativ: $X \wedge Y \Rightarrow Y$

□ quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$

□ Bruch: (1) $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \Rightarrow \dfrac{a+c}{a+b+c+d} \geq \dfrac{r}{n}$

Kurz-Erläuterung: Wenn c = 0 haben beide Brüche den gleichen Wert. Wenn c > 0, hat der zweite Bruch einen höheren Wert.

Aus der Formel ergibt sich zwar, dass auch der zweite Bruch n als Nenner hat. Um dies aber *explizit* zu machen, könnte man schreiben:

(2) $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \Rightarrow \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{n}$ $s \geq r$

Es wäre auch folgende vereinfachte Form möglich, also eine *Gleichung* anstatt einer Implikation:

(3) $\dfrac{a}{a+b+c+d} \leq \dfrac{a+c}{a+b+c+d}$

Ich verwende aber im folgenden Text normalerweise die erste Darstellung.

Bei der Ungleichung ergeben sich folgende $(n - r + 1)$ Lösungen:

$s = r, r + 1, \dots, n$

Also: $p(Y) = r/n, (r + 1)/n, ... , n/n$

Wählt man einen *bestimmten* Wert für p(Y), dann kann man nur einen semi-analytischen Schluss angeben, z. B.: $p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = (r+2)/n$

Zur Veranschaulichung ein Beispiel mit Zahlen:

$r = 5, n = 8$

$p(X \wedge Y) = 5/8 \Rightarrow p(Y) \geq 5/8$
Also: $p(Y) = 5/8, 6/8, 7/8, 8/8$. Bzw.: $p(Y) = 5/8 \vee 6/8 \vee 7/8 \vee 8/8$

Eine ganz andere Situation ergibt sich natürlich, wenn a, b, c und d *bekannt* sind.

z. B.: $p(X \wedge Y) = \frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} = \frac{100}{100+50+20+200} = \frac{100}{370}$

Dann lässt sich für den Wert p(Y) nicht nur ein Intervall angeben, sondern der Wert lässt sich *genau* ausrechnen, nämlich:

$$p(Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{s}{n} = \frac{100+20}{100+50+20+200} = \frac{120}{370}$$

Eindeutiger Schluss

Unter bestimmten Bedingungen kann man auch zu einem *eindeutigen* Schluss – mit genau *einem* Ergebnis – kommen, ohne konkrete Zahlen einzusetzen. Die nachfolgend vorgestellten Schlüsse führen, im Gegensatz zum oben vorgestellten Schluss, zu einem *sicheren* Ergebnis (nicht nur zu einer Disjunktion von Lösungen).

• *Beispiel: Modus ponens*

- qualitativ: $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$
- quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge p(X) = 1 \Rightarrow p(Y) = r/n$
- Bruch: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \wedge \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$

Erläuterung:
Aus dem ersten Bruch ergibt sich: $a + c + d = r$
Aus dem zweiten Bruch ergibt sich: $c + d = 0$
Also ergibt sich für den abgeleiteten dritten Bruch ebenfalls der Wert $p = r/n$.
Der Schluss gilt aber nur streng, wenn $p(X) = 1$.

• *Beispiel: Negation*

- qualitativ: $(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg\neg(X \rightarrow Y)$
- quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p\neg(X \rightarrow Y) = 1 - r/n$
- Bruch: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{b}{a+b+c+d} = 1 - \frac{r}{n}$

Im Grunde ist hier nicht nur eine Implikation, sondern eine *Äquivalenz* gegeben.

$p(X \rightarrow Y) = r/n \Leftrightarrow p\neg(X \rightarrow Y) = 1 - r/n$

Allgemein: $p(\Phi) = r/n \Leftrightarrow p(\neg\Phi) = 1 - r/n$

• Beispiel: Abtrennungsregel mit 3 Variablen

- qualitativ: $X \wedge Y \wedge Z \Rightarrow X \vee Y \vee Z$
- quantitativ: $p(X \wedge Y \wedge Z) = r/n \Rightarrow p(X \vee Y \vee Z) \geq r/n$
- Bruch: $\frac{a_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = \frac{r}{n} \Rightarrow$

$$\frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} \geq \frac{r}{n}$$

2-3-3-2 QUALITATIV PARTIELLER, QUANTITATIV STRENGER SCHLUSS

Dies muss erläutert werden. Es gibt Schlüsse, die in ihrer *qualitativen* aussagen-logischen Form (also mit implizitem p = 1 oder p = 0) nur *partiell* gültig sind, in der quantitativen Form aber *vollständig*, z. B.: $(X \vee Y) \longrightarrow Y$.

$(X$	$\vee$	$Y)$	$\longrightarrow$	Y
+	+	+	+	+
+	+	–	–	–
–	+	+	+	+
–	–	–	+	–

Ein solcher Schluss hat – quantifiziert – die Struktur: p = r/n $\Rightarrow$ p $\leq$ r/n. Es handelt sich also um einen vollständigen Schluss (auch wenn es eben keine eindeutige Lösung gibt).
Zur Erklärung: $(X \vee Y) \longrightarrow Y$ ist die *Umkehrung* des strengen Schlusses: $Y \Rightarrow (X \vee Y)$.
Somit $p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$ die Umkehrung von $p(Y) = r/n \Rightarrow p(X \vee Y) \geq r/n$.

Eine Merkregel ist:

qualitativ *strenger* Schluss: quantitativ $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n$
qualitativ *partieller* Schluss: quantitativ $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n$

Es gibt allerdings auch andere Strukturen (vgl. unten).

• Beispiel: *Disjunktive Abschwächung*: $(X \vee Y) \longrightarrow Y$ (vgl. oben)

 qualitativ: $(X \vee Y) \longrightarrow Y$
 quantitativ: $p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$

 Bruch: $$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \leq \frac{r}{n}$$

Für q(Y) = s ergibt sich: s = r, r – 1, ..., r – r
Für p(Y) = s/n ergibt sich: $\frac{r}{n}, \frac{r-1}{n}, ..., \frac{r-r}{n}$

Ein numerisches Beispiel: r = 4, n = 6
$p(X \vee Y) = 4/6 \Rightarrow p(Y) \leq 4/6$
Es gilt: p(Y) = 4/6, 3/6, 2/6, 1/6, 0/6

• Beispiel: *Implikation impliziert Replikation* : $(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \leftarrow Y)$: + + – +

 qualitativ: $(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \leftarrow Y)$
 quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(X \leftarrow Y) \geq (n - r)/n$

 Bruch: $$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+b+d}{a+b+c+d} \geq \frac{n-r}{n}$$

Für $q(X \leftarrow Y)$ = s ergibt sich: n – r, n – r + 1, ... , n – r + r

Für p(X ←Y) = s/n ergibt sich: $\dfrac{n-r}{n}, \dfrac{n-r+1}{n}, ..., \dfrac{n-r+r}{n}$

Ein Zahlen-Beispiel: r = 7, n = 10

Gesucht ist der Wert: p(X ← Y) = s/n

p(X → Y) = 7/10 ⇒ p(X ← Y) ≥ (10 – 7)/10.

D. h. p(X ← Y) ≥ 3/10.

Dann ergibt p(X ←Y) = 3/10, 4/10, 5/10, 6/10, 7/10, 8/10, 9/10, 10/10.

Zur Erklärung:

Wenn p(X → Y) = 7/10, dann ergibt sich aus obiger Formel: b = 3.

Denn b = n – r.

a + c + d = 7. Danach ist es möglich, dass a + d = 0, nämlich wenn c = 7.

Somit ergibt sich für a + b + d ≥ 3. (Denn der Wert für b steht ja fest.)

Wenn aber c = 0, dann ist a + b + d = 10.

Die Relationen X → Y und X ← Y und entsprechend die Brüche

$\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d}$ und $\dfrac{a+b+d}{a+b+c+d}$ sind aber *gleich strukturiert*. Daher gilt gleichermaßen:

p(X → Y) = r/n ⇒ p(X ← Y) ≥ (n – r)/n

p(X ← Y) = r/n ⇒ p(X → Y) ≥ (n – r)/n

Eine Variante dieser Formel (nur mit ≤ statt mit ≥) findet sich z. B. im folgenden Fall:
p(X ∧ Y) = r/n ⇒ p(X ∧ ¬Y) ≤ (n – r)/n (vgl. 2-3-5).

2-3-3-3 QUANTITATIV PARTIELLER SCHLUSS

Bei einer semi-analytischen Implikation liegt wie erläutert nur eine *partielle logische Folge,* ein partieller Schluss vor, zur Symbolisierung verwende ich den *langen* Pfeil ⟶.

• *Qualitative Basis: strenger Schluss*

Ich greife hier zurück auf den oben genannten Schluss (Abtrennungsregel):

p(X ∧ Y) = r/n ⇒ p(Y) = ≥ r/n

Seine qualitative Struktur (Basis) ist ein *vollständiger* Schluss, nämlich:

X ∧ Y ⇒ Y

Als quantitatives Beispiel hatte ich angegeben:

p(X ∧ Y) = 5/8 ⇒ p(Y) = ≥ 5/8

Es gibt also folgende Lösungen der Gleichung:

p = 5/8, p = 6/8, p = 7/8, p = 8/8

Angenommen, man gibt folgenden Schluss an:

p(X ∧ Y) = 5/8 ⟶ p(Y) = 7/8

Man könnte dafür auch allgemein schreiben: p(X ∧ Y) = r/n ⟶ p(Y) = r/n + 2/n

Herkömmlicherweise würde man sagen: Das ist ein *Fehlschluss*. Aber dies wäre inadäquat, denn p = 7/8 ist ja eine *mögliche* Lösung. Man sollte daher von einem ‘partiellen Schluss’ sprechen. Ich werde im 4. Kapitel zeigen, wie man solche Schlüsse quantitativ bestimmen kann.

• *Qualitative Basis: Partieller Schluss*
Ich greife hier zurück auf den oben genannten Schluss:

$p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$

Seine qualitative Struktur (Basis) ist ein *partieller* Schluss, nämlich:

$X \vee Y \longrightarrow Y$

Als quantitatives Beispiel hatte ich angegeben

$p(X \vee Y) = 4/6 \Rightarrow p(Y) \leq 4/6$

Es gilt: p(Y) = 4/6, 3/6, 2/6, 1/6, 0/6
Angenommen ich nehme den Schluss:

$p(X \vee Y) = 4/6 \longrightarrow p(Y) = 2/6$

Auch hier liegt ein *partieller* Schluss vor. Denn 2/6 ist nur eine *mögliche* Lösung, aber keine *sichere* Lösung.

2-3-3-4 ÜBERSICHT

Ich habe bisher 4 *Ungleichungen* zur Berechnung von p(Ψ) aus p(Φ) entwickelt (es muss noch geprüft werden, ob damit alle Möglichkeiten erfasst werden).

1. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n$
2. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n$
3. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq (n - r)/n$
4. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq (n - r)/n$

Zusammenfassend gebe ich einige Beispiele für diese Ungleichungen.

1. <u>$p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n$</u>

Schlüsse, die aussagen-logisch, qualitativ, nur *semi-analytisch* sind, aber *Umkehrungen* von vollständigen Schlüssen darstellen. Hier gilt: Die gültigen Welten der Konklusion (z. B. a und c) sind eine Teilmenge der gültigen Welten der Prämisse (z. B. a, b und c).

- $X \vee Y \longrightarrow Y$ (Umkehrschluss: $X \vee Y \Leftarrow Y$)

$p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n \qquad \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \leq r/n$

- $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ (Umkehrschluss: $X \vee Y \Leftarrow X \wedge Y$)

$p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n \qquad \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d} \leq r/n$

2. <u>$p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n$</u>

Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *streng* analytisch sind. Die gültigen Welten der Prämisse sind eine Teilmenge der gültigen Welten der Konklusion.

- $Y \Rightarrow X \vee Y$

$p(Y) = r/n \Rightarrow p(X \vee Y) \geq r/n \qquad \frac{a+c}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \geq r/n$

- $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$

$p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(X \vee Y) \geq r/n \qquad \frac{a}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \geq r/n$

3. $\underline{p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq (n-r)/n}$
Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *partiell analytisch* sind. Dabei schneiden sich die Mengen der gültigen Welten von Prämisse und Konklusion.

- $(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \leftarrow Y)$

$p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(X \leftarrow Y) \geq (n-r)/n$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+b+d}{a+b+c+d} \geq \frac{n-r}{n}$$

- $(X \rightarrow Y) \longrightarrow (\neg Y)$

$p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(\neg Y) \geq (n-r)/n$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{b+d}{a+b+c+d} \geq \frac{n-r}{n}$$

4. $\underline{p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq (n-r)/n}$
Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *partiell analytisch* sind. Dabei sind Prämisse und Konklusion in keiner Welt gemeinsam gültig.

- $(X \wedge Y) \longrightarrow (X \nabla Y)$

$p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(X \nabla Y) \leq (n-r)/n$

$$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{d}{a+b+c+d} \leq \frac{n-r}{n}$$

Neben den *Ungleichungen* (bzw. Schlüssen mit Ungleichungen) kann man auch *Gleichungen* verwenden:
- bei Negationen
- bei Schlüssen mit 2 oder mehr Prämissen

Ich bringe hier eine Reihe von Gleichungen, ohne Anspruch auf Vollständigkeit:
1. *Negation*
$p(\Phi) = r/n \Leftrightarrow p(\Psi) = 1 - r/n$
$p(\Phi) = 1 - p(\Psi)$ bzw. $p(\Psi) = 1 - p(\Phi)$ bzw. $p(\Phi) + p(\Psi) = 1$

Beispiel beliebig, etwa: $p(X \rightarrow Y) = r/n \Leftrightarrow p(\neg(X \rightarrow Y)) = 1 - r/n$.

2. *Addition*
$p(\Phi_1) + p(\Phi_2) = p(\Psi)$
Beispiel: $p(X \wedge Y) + p(X \nabla Y) = p(X \leftrightarrow Y)$

$$\frac{a}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

Allgemein: $p(\Phi_1) + p(\Phi_2) + ... + p(\Phi_n) = p(\Psi)$

Beispiel: $p(X \wedge Y) + p(X -\!\!< Y) + p(X \nabla Y) = p(X \rightarrow Y)$

$$\frac{a}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+c+d}{a+b+c+d}$$

3. Subtraktion

$p(\Phi_1) - p(\Phi_2) = p(\Psi)$

Beispiel: $p(X >\!\!< Y) - p(X -\!\!< Y) = p(X >\!\!- Y)$

$$\frac{b+c}{a+b+c+d} - \frac{c}{a+b+c+d} = \frac{b}{a+b+c+d}$$

Allgemein: $p(\Phi_1) - p(\Phi_2) - ... - p(\Phi_n) = p(\Psi)$

Beispiel: $p(X \vee Y) - (p(X -\!\!< Y) - p(X >\!\!- Y) = p(X \wedge Y)$

$$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} - \frac{c}{a+b+c+d} - \frac{b}{a+b+c+d} = \frac{a}{a+b+c+d}$$

4. *Kombiniert*

Problematisch wird es, wenn sich die Wahrheitstafeln *überlappen*. Hier ist auch zu berücksichtigen, ob sich die Verbindung z. B. auf eine Konjunktion oder Disjunktion bezieht (vgl. 1-3-3-3 und 1-3-4-2).

Beispiel: $p(X \rightarrow Y) + p(X \leftarrow Y) - 1 = p(X \leftrightarrow Y)$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} + \frac{a+b+d}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

Dieses Beispiel bezieht sich auf die *Konjunktion*: $(X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y) \Leftrightarrow (X \leftrightarrow Y)$

Beispiel : $p(X >\!\!< Y) + p(X |Y) = p(X |Y)$

$$\frac{b+c}{a+b+c+d} + \frac{b+c+d}{a+b+c+d} = \frac{2b+2c+d}{a+b+c+d}$$

Wenn man sich auf die Disjunktion $(X >\!\!< Y) \vee (X | Y) \Leftrightarrow (X|Y)$ bezieht, muss man die *doppelten Variablen bzw. Buchstaben streichen*, um das richtige Ergebnis zu bekommen.
Streicht man das doppelte ‚b' und ‚c', so ergibt sich das erwünschte Ergebnis:

$$\frac{b+c+d}{a+b+c+d}$$

2-2-3-5 PSEUDO-SCHLÜSSE

Ich habe verschiedene Strukturen zur Berechnung von Schlüssen „p(Ψ) folgt aus p(Φ)" vorgestellt:

$p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n$
$p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n$
$p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq (n-r)/n$
$p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq (n-r)/n$
$p(\Phi) = r/n \Leftrightarrow p(\neg\Phi) = 1 - r/n$

Ob damit *alle* möglichen Schluss-Typen (mit zwei Variablen) erfasst sind, muss noch weiter untersucht werden. In manchen Fällen ist aber *gar kein Schluss* möglich, weil die Relationen *vollständig unabhängig* voneinander sind. Man kann von *Pseudoschlüssen* sprechen.

Wir müssen also genau unterscheiden:

- strenger Schluss $\Rightarrow$
- partieller Schluss $\longrightarrow$
- kontradiktorische Implikation $\not\Rightarrow$
- kein Schluss/Pseudoschluss $\dashrightarrow$

Im Folgenden sollen zwei komplexere Relationen daraufhin untersucht werden, welcher Schluss bei ihnen vorkommt, vor allem, ob dabei Pseudoschlüsse vorkommen.

• Prüfung: $p(X \wedge Y) = r/n$ und $p(X \wedge \neg Y) = s/n$

Ich habe schon darauf hingewiesen, dass laut den Wahrheitstafeln zwischen den Konjunktionen $X \wedge Y$ und $X \wedge \neg Y$ eine *Abhängigkeit* besteht. Das soll jetzt auch im *quantitativen* Bereich belegt werden. Es gilt:

$$p(X \wedge Y) = \frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \qquad p(X \wedge \neg Y) = \frac{b}{a+b+c+d} = \frac{s}{n}$$

Man könnte zunächst vermuten, dass die beiden Relationen voneinander *unabhängig* sind, weil *im Zähler keine gleichen Variablen* vorkommen. Dies wäre aber ein Irrtum.

Stellen wir uns die Frage, inwieweit von $p(X \wedge Y)$ auf $p(X \wedge \neg Y)$ zu schließen ist. Und verdeutlichen wir uns das am Beispiel n = 3.

$\frac{a}{a+b+c+d}$	a	b + c + d	b	c + d	$\frac{b}{a+b+c+d}$
3/3	3	0	0	0	0/3
2/3	2	1	1	0	1/3
			0	1	0/3
1/3	1	2	2	0	2/3
			1	1	1/3
			0	2	0/3
0/3	0	3	3	0	3/3
			2	1	2/3
			1	2	1/3
			0	3	0/3

Die 2. Zeile z. B. ist folgendermaßen zu lesen:

Aus $\frac{a}{a+b+c+d} = 2/3$ folgt: a = 2 und b + c +d = 1.

Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

erstens b = 1, c + d = 0: dann $\frac{b}{a+b+c+d} = 1/3$

zweitens b = 0, c + d = 1: dann $\frac{b}{a+b+c+d} = 0/3$

Es bestehen also Abhängigkeiten zwischen $p(X \wedge Y)$ und $p(X \wedge \neg Y)$.

Somit sind Schlüsse von $p(X \wedge Y)$ auf $p(X \wedge \neg Y)$ möglich, z. T. als *strenge* Schlüsse, z. T. nur als *partielle* Schlüsse. Z. B.:

$p(X \wedge Y) = 3/3 \;\Rightarrow\; p(X \wedge \neg Y) = 0/3$

$p(X \wedge Y) = 2/3 \;\longrightarrow\; p(X \wedge \neg Y) = 1/3$ (es könnte eben auch 0/3 sein)

Als *allgemeines Gesetz* kann man formulieren:

$p(X \wedge Y) = r/n \;\Rightarrow\; p(X \wedge \neg Y) \leq (n - r)/n$

Übrigens sind gleichermaßen Schlüsse von $p(X \wedge \neg Y)$ auf $p(X \wedge Y)$ möglich.
(Natürlich hängen die Schlüsse auch davon ab, welche Werte vorgegeben sind.)

Allerdings sind strenge Schlüsse nur möglich auf $p(X \wedge \neg Y) = 0/3 = 0$.

$p(X \wedge \neg Y) = 0$ entspricht $\neg(X \wedge \neg Y)$. Und es gilt: $\neg(X \wedge \neg Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y)$

Man könnte entgegnen, dass $X \rightarrow Y$ eine *andere* Relation ist, die hier nicht verwendet werden darf. Dass strenge Abhängigkeit daher nicht besteht, weil man die *Negation* einer Relation nicht berücksichtigen darf. Aber erstens kann man für eine erweiterte Abhängigkeit die Negation doch miteinbeziehen. Zweitens gilt es folgenden Unterschied zu sehen: Wenn $p(X \wedge Y) = 2/3$, dann kann $p(X \wedge \neg Y)$ nur 2 von 4 möglichen Werten einnehmen, darin zeigt sich die Abhängigkeit. Wenn dagegen $p(X \wedge Y) = 0/3$, dann kann $p(X \wedge \neg Y)$ 4 von 4 möglichen Werten einnehmen. In diesem speziellen Fall besteht daher keine Abhängigkeit, man könnte von einem *Pseudoschluss* (oder *unechtem Schluss*) sprechen und ihn mit $\dashrightarrow$ formalisieren.

D. h. man muss (im quantitativen Ansatz) innerhalb einer Relation ggf. verschiedene Möglichkeiten unterscheiden, so beim:

Schluss von $p(X \wedge Y) = r/n$ auf $p(X \wedge \neg Y) = s/n$

streng:	z. B. $p(X \wedge Y) = 3/3 \;\Rightarrow\; p(X \wedge \neg Y) = 0/3$
partiell:	z. B. $p(X \wedge Y) = 2/3 \;\longrightarrow\; p(X \wedge \neg Y) = 1/3$
kontradiktorisch:	z. B. $p(X \wedge Y) = 2/3 \; {*}\nRightarrow\; p(X \wedge \neg Y) = 3/3$
unecht:	z. B. $p(X \wedge Y) = 0/3 \;\dashrightarrow\; p(X \wedge \neg Y) = 3/3$

Der *kontradiktorische* „Schluss" kommt natürlich in der Tabelle oben nicht vor, weil er eben ausgeschlossen ist. Bei ihm muss aus bekannten Gründen die *Positiv-Implikation* verwendet werden, bei den anderen Schlüssen ist das nicht zwingend, allerdings unproblematischer.

Pseudoschlüsse kann man auch als *semi-analytische* Schlüsse kennzeichnen, weil sie ebenfalls zwischen Tautologien und Kontradiktionen stehen. Und ich will das normalerweise auch tun, um eine zusätzliche Formalisierung zu vermeiden. Wenn man allerdings $p = 0$ ausschließt, weil man $p(\Phi) > 0$ als eine andere Relation ansieht als $p(\Phi) = 0$, dann sind nur semi-analytische Schlüsse im engeren Sinn von $p(X \wedge Y) = r/n$ auf $p(X \wedge \neg Y) = s/n$ möglich.

Abhängigkeit und *Unabhängigkeit* sind auch in Bezug auf den *Relator* zu bestimmen. Im obigen Fall ist das zwar belanglos, denn der Schluss von $p(X \wedge Y) = r/n$ auf $p(X \wedge \neg Y) = s/n$ entspricht dem von $p(X \wedge \neg Y) = r/n$ auf $p(X \wedge Y) = s/n$. Dagegen besteht ein Unterschied zwischen $p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(X \vee Y) = s/n$ und $p(X \wedge Y) = r/n \longleftarrow p(X \vee Y) = s/n$. Letztlich definiert die *Äquivalenz* Abhängigkeit und Unabhängigkeit.

• $p(X \rfloor Y) = r/n$ und $p(X \lfloor Y)$

Nun soll geprüft werden, ob zwischen $p(X \rfloor Y)$ und $p(X \lfloor Y)$ eine *Abhängigkeit* besteht.

$$p(X \rfloor Y) = \frac{a+b}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \qquad\qquad p(X \lfloor Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{s}{n}$$

Die Frage lautet genau: Lässt sich von p(X ⌋ Y) auf p(X ⌊ Y) schließen? Liegt ein Pseudoschluss vor? Zur besseren Vergleichbarkeit mit dem obigen Fall gehen wir wieder von n = 3 aus.

$\frac{a+b}{a+b+c+d}$	a + b	c + d	a + c	b + d	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$
3/3	3	0	3	0	3/3
			2	1	2/3
			1	2	1/3
			0	3	0/3
2/3	2	1	3	0	3/3
			2	1	2/3
			1	2	1/3
			0	3	0/3
1/3	1	2	3	0	3/3
			2	1	2/3
			1	0	1/3
			0	3	0/3
0/3	0	3	3	0	3/3
			2	1	2/3
			1	2	1/3
			0	3	0/3

Wie man sieht: anders als beim Schluss von p(X ∧ Y) auf p(X ∧ ¬Y), ist hier bei *jedem* vorgegebenen Wert von p(X ⌋ Y) *jeder* Wert von p(X ⌊ Y) möglich. Es gibt also keinen echten Schluss von p(X ⌋ Y) auf p(X ⌊ Y), sondern nur *Pseudoschlüsse* (die man allerdings auch zu den semi-analytische Schlüssen zählen kann).

Zwar kann man scheinbar strenge Schlüsse aufstellen wie:

$$p(X \rfloor Y) = 0/3 \;\Rightarrow\; p(X \lfloor Y) = 3/3 \vee 2/3 \vee 1/3 \vee 0/3$$

Dass hier das Zeichen für den strengen Schluss ⇒ verwendet wird, darf jedoch nicht irritieren. Wenn auf die Disjunktion *aller* möglichen Werte geschlossen wird, muss ⇒ gelten. Das sagt keinesfalls, dass p(X ⌊ Y) aus p(X ⌋ Y) abzuleiten ist. Wenn man weiß, welchen Wert p(X ⌊ Y) besitzt, hat man damit noch keine Information über den Wert von p(X ⌋ Y).

Umgekehrt, als Replikation, gibt es auch nur Pseudoschlüsse von p(X ⌊ Y) auf p(X ⌋ Y) Das überrascht nicht, wenn man bedenkt: p(X ⌋ Y) = p(X) und p(X ⌊ Y) = p(Y). Zwischen p(X) und p(Y) kann nur ein *synthetisches* Verhältnis bestehen, entsprechend werden in der Wahrheitstafel alle möglichen Kombinationen von X und Y aufgeführt. Somit besteht quasi zwischen p(X ⌋ Y) auf p(X ⌊ Y) auch ein synthetisches Verhältnis, damit kein analytische Abhängigkeit. Man könnte einwenden, dass doch eine *analytische Abhängigkeit* zwischen

$p(X \rfloor Y) = \dfrac{a+b}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n}$ und $p(X \lfloor Y) = \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{n}$ besteht, bzw. dass

$\dfrac{a+b}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \;\rightarrow\; \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{n}$ nicht *synthetisch* sein kann, weil (rechts und links

vom Relator →) die *gleichen Variablen* vorkommen und der *Nenner sogar völlig gleich* ist. Völlige (analytische) Unabhängigkeit bestände z. B. zwischen den Brüchen

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} \quad \text{und} \quad \frac{e+f}{e+f+g+h}$$

Einerseits scheint das zu stimmen: $p(X \rfloor Y)$ auf $p(X \lfloor Y)$ befinden sich im selben System, gewissermaßen im selben Universum, weshalb der Nenner als Erfassung aller Gegenstände dieses Universums gleich sein muss. Es ist nicht möglich, dass z. B. $p(X \rfloor Y) = 4/10$, dagegen $p(X \lfloor Y) = 9/20$; allerdings könnte man $p(X \rfloor Y) = 4/10$ natürlich in 8/20 umformulieren, wodurch beide wieder zum selben System gehörten.

Vor allem ist aber zu bedenken: Die Variablen a, b, c und d erfassen *alle* Fälle in allen möglichen Welten. Es ist also (innerhalb eines Universums) gar nicht anders möglich, als dass in beiden Brüchen die gleichen Variablen auftreten. Z. B. ist ‚a' die Anzahl der Fälle in der Welt, in der $p(X \rfloor Y)$ und $p(X \lfloor Y)$ beide gültig sind usw. Es handelt sich um eine Meta-Ebene, auf der $p(X \rfloor Y)$ und $p(X \lfloor Y)$ zusammengefasst werden. Für die anderen Variablen b, c und d gilt Entsprechendes.

Im Kapitel 4 über die *Meta-Logik analytischer Relationen* werde ich allerdings zeigen, dass auch Pseudoschlüsse unterschiedlich bewertet werden können, indem man ihnen unterschiedliche *theoretische Wahrscheinlichkeiten* zuweist.

2-3-4 Inklusiv / Exklusiv

2-3-4-1 GANZHEITS-FORMEL

Ich stelle für die oder-Relatoren *Disjunktion* ($\vee$), *Kontravalenz* (><) und *Exklusion* (|) die ganzheitliche Berechnung vor, jeweils am Beispiel der Verknüpfung von $X \wedge Y$ und $X \leftrightarrow Y$, wobei sich *semi-analytische* Relationen ergeben.

- Disjunktion (inklusives „oder")

$$(X \wedge Y)\ {}^{+}\!\vee^{-}\ (X \leftrightarrow Y) : + - - +$$

$$p((X \wedge Y)\ {}^{+}\!\vee^{-}\ (X \leftrightarrow Y)) = \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

- Kontravalenz (exklusives „oder")

$$(X \wedge Y)\ {}^{+}\!>\!<^{-}\ (X \leftrightarrow Y) : - - - +$$

$$p((X \wedge Y)\ {}^{+}\!>\!<^{-}\ (X \leftrightarrow Y)) = \frac{d}{a+b+c+d}$$

- Exklusion

$$(X \wedge Y)\ {}^{+}|^{-}\ (X \leftrightarrow Y) : - + + +$$

$$p((X \wedge Y)\ {}^{+}|^{-}\ (X \leftrightarrow Y)) = \frac{b+c+d}{a+b+c+d}$$

2-3-4-2 NEGATION

Ich beschränke mich hier auf die *Disjunktion*. Für $X \vee Y$ kann man verschiedene *Negationen* angeben, z. B.:

$$\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow X \nabla Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$$

Dann gilt:

$p(X \vee Y) = r/n \Leftrightarrow p(\neg(X \vee Y)) = 1 - r/n$

Anders gesagt: $p(X \vee Y) + p(\neg(X \vee Y)) = 1$

$$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Leftrightarrow \frac{d}{a+b+c+d} = 1 - \frac{r}{n}$$

2-3-4-3 DISJUNKTION UND KONTRAVALENZ

□ qualitativ: $X >< Y \Rightarrow X \vee Y$ $(-++-) \Rightarrow (+++-)$

□ quantitativ: $p(X >< Y) = r/n \Rightarrow p(X \vee Y) \geq r/n$

□ Formel: $\frac{b+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \geq \frac{r}{n}$

2-3-4-4 EXKLUSION UND KONTRAVALENZ

□ qualitativ: $X >< Y \Rightarrow X \mid Y$ $(-++-) \Rightarrow (-+++)$

□ quantitativ: $p(X >< Y) = r/n \Rightarrow p(X \mid Y) \geq r/n$

□ Formel: $\frac{b+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{b+c+d}{a+b+c+d} \geq \frac{r}{n}$

2-3-4-5 DISJUNKTION UND EXKLUSION

□ qualitativ: $X \vee Y \longrightarrow X \mid Y$ $(+++-) \longrightarrow (-+++)$

□ quantitativ: $p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(X \mid Y) \geq (n-r)/n$

□ Formel: $\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{b+c+d}{a+b+c+d} \geq \frac{n-r}{n}$

Es gilt aber auch das Umgekehrte:

□ qualitativ: $X \mid Y \longrightarrow X \vee Y$ $(-+++) \longrightarrow (+++-)$

□ quantitativ: $p(X \mid Y) = r/n \Rightarrow p(X \vee Y) \geq (n-r)/n$

□ Formel: $\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \geq \frac{n-r}{n}$

2-3-5 Erweiterungen

Zur Übersichtlichkeit soll nachfolgend quasi der *Steckbrief* eines Schlusses dargestellt werden: und zwar von der *Abtrennungsregel* $X \wedge Y \Rightarrow Y$.

2-3-5-1 STRENGER SCHLUSS

□ qualitativ: $X \wedge Y \Rightarrow Y$

 quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$

 Formel: $$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \geq \frac{r}{n}$$

Beispiel:
 quantitativ: $p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow p(Y) \geq 3/5$

 Formel: $$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \geq \frac{3}{5}$$

2-3-5-2 UMKEHRUNG
Als quantitativen *Umkehr-Schluss* bezeichne ich einen Schluss mit Ungleichungen, bei dem die Glieder vertauscht werden.
 quantitativ: $p(Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n$

 Formel: $$\frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d} \leq \frac{r}{n}$$

Der Umkehr-Schluss ist äquivalent dem Ausgangs-Schluss:
$[p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) = \geq r/n] \Leftrightarrow [p(Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n]$

2-3-5-3 KONTRAPOSITION
Der *Umkehr-Schluss* darf nicht mit der *Kontraposition* verwechselt werden. Die Kontraposition lautet:
 qualitativ: $\neg(X \wedge Y) \Leftarrow \neg Y$
 quantitativ: $p(X \wedge Y) < r/n \Leftarrow p(Y) = < r/n$

 Formel: $$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{r}{n} \Leftarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} < \frac{r}{n}$$

Die direkte Verneinung von $p(\Phi) = r/n$ ist allerdings $p(\Phi) \neq r/n$. Konkret: Die direkte Verneinung von $p(X \wedge Y) = r/n$ ist $p(X \wedge Y) \neq r/n$. Doch hierbei ist der Schluss nicht zwingend, es könnte auch gelten: $p(X \wedge Y) > r/n$, und das wäre falsch. Nur wenn man hier wie folgt bestimmt: $p(\Phi) \neq r/n$ ist äquivalent $p(\Phi) < r/n$, erhält man einen strengen Schluss.
$p(X \wedge Y) < r/n \Leftarrow p(Y) < r/n$
Auch die Kontraposition (in dieser Form) ist *äquivalent* dem Ausgangs-Schluss:
$[p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) = \geq r/n] \Leftrightarrow [p(X \wedge Y) < r/n \Leftarrow p(Y) < r/n]$

2-3-5-4 SEMI-ANALYTISCHE SCHLÜSSE
Wenn gilt $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$, dann gibt es folgende *semi-analytische* Schlüsse:

$p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = r/n$
$p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = (r+1)/n$
……………………………………..
$p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = n/n$

Wir hatten als Beispiel gewählt: $p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow p(Y) = \geq 3/5$.

Dann ergeben sich als semi-analytische Schlüsse:

$p(X \wedge Y) = 3/5 \longrightarrow p(Y) = 3/5$

$p(X \wedge Y) = 3/5 \longrightarrow p(Y) = 4/5$

$p(X \wedge Y) = 3/5 \longrightarrow p(Y) = 5/5$

Diese Schlüsse sind alle *möglich*, aber *nicht notwendig*.

2-3-5-5 KONTRADIKTIONEN

Ich habe erläutert (in 2-1-1-2), dass eine aussagen-logische Implikation nur in dem einen Fall *kontradiktorisch* ist, dass von einer Tautologie auf eine Kontradiktion geschlossen wird.

Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion

Das hieße in der quantitativen Form:

$p(\text{Tautologie}) = 1 \not\Rightarrow p(\text{Kontradiktion}) = 0$

Denn es gilt immer: $p(\text{Tautologie}) = 1$ und $p(\text{Kontradiktion}) = 0$.

Dieser Kontradiktionsbegriff ist intuitiv schwer nachvollziehbar, und gerade bei der *quantitativen* Implikation wirkt er problematisch. Ich habe daher zunächst versucht, hier eine andere Definition von Kontradiktion vorzunehmen. Aber man muss den oben bestimmten Kontradiktionsbegriff auch bei der *quantitativen* Implikation beibehalten, wenn man sich nicht besondere Systemprobleme einhandeln will (bei der *Positiv-Implikation* ist die Situation dagegen unproblematisch, vgl. 2-1-2-2)

Man könnte zuerst vermuten: Wenn gilt $(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$, dann sind alle Schlüsse kontradiktorisch, bei denen gilt: $p(Y) < r/n$. Aber hier handelt es sich eben nicht um kontradiktorische Implikationen. So gesehen können bei diesem Beispiel gar keine Kontradiktionen auftreten, weil der Vordersatz $p(X \wedge Y) = r/n$ nicht tautologisch und der Nachsatz $p(Y) \geq r/n$ nicht kontradiktorisch ist.

Wie kann man aber sonst Schlüsse der Form: wenn $p(X \wedge Y) = r/n$, dann $p(Y) < r/n$ darstellen? Jedenfalls sind es *analytisch falsche* (also nicht nur synthetisch falsche) Relationen. Ich möchte 3 Möglichkeiten diskutieren (vgl. auch 2-1-1-2):

• negativer analytischer Schluss $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$

Bei dem Beispiel $p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow p(Y) \geq 3/5$ bedeutet das:

$p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow \neg[p(Y) = 2/5]$

$p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow \neg[p(Y) = 1/5]$

$p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow \neg[p(Y) = 0/5]$

Es gilt dann jeweils die Kontraposition, also z. B.:

$\neg[p(X \wedge Y) = 3/5] \Leftarrow p(Y) = 2/5$

Bei Verwendung der *Positiv-Implikation* könnte man hier eine kontradiktorische Implikation verwenden. Denn es gilt: $(\Phi \ {*}{\Rightarrow} \neg\Psi) \Leftrightarrow (\Phi \not\Rightarrow \Psi)$.

Daher wäre auch gültig: $p(X \wedge Y) = 3/5 \ {*}{\not\Rightarrow} \ p(Y) = 2/5$.

• negativer semi-analytischer Schluss $\Phi \longrightarrow \neg\Psi$

Man könnte argumentieren: aus $p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow \neg[p(Y) = 2/5]$ folgt: $p(Y) \neq 2/5$.

Es gält also: $\neg[p(Y) = 2/5] \Leftrightarrow p(Y) \neq 2/5$.

Wenn aber $p(Y) \neq 2/5$, dann kann $p(Y)$ jeden möglichen anderen Wert besitzen, z. B. auch 1/5. $p(Y) = 1/5$ ist aber durch $p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow p(Y) \geq 3/5$ genauso ausgeschlossen wie $p(Y) = 2/5$.

Somit kann man folgern: Es ist kein *strenger*, sondern nur ein *partieller* (semi-analytischer) Schluss der Form $p(X \wedge Y) = 3/5 \longrightarrow \neg[p(Y) = 2/5]$ erlaubt.

Die Verhältnisse sind hier allerdings sehr kompliziert. Zur Klärung lässt sich folgende Relation aufstellen:

$$p(Y) \neq 2/5 \Leftrightarrow p(Y) = 0/5 \vee p(Y) = 1/5 \vee p(Y) = 3/5 \vee p(Y) = 4/5 \vee p(Y) = 5/5$$

(man setzt hier voraus: $n = 5$, $r \leq 5$)

$$p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow \neg[p(Y) = 2/5] \Leftrightarrow$$

$$p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow p(Y) = 0/5 \vee p(Y) = 1/5 \vee p(Y) = 3/5 \vee p(Y) = 4/5 \vee p(Y) = 5/5$$

Auf Grund der Regeln der Disjunktion wäre dieser Schluss aber analytisch wahr. Denn die Konjunktion $X \wedge Y$ ist nur in der 1. Zeile der Wahrheitstafel wahr, somit kann der Schluss auch nur in der 1. Zeile falsch sein; aber da die Disjunktion auch wahre Glieder enthält, ist sie in der 1. Zeile unmöglich falsch, also ist der Schluss wahr.

Es wäre allerdings absurd, dass $p(Y) = 2/5$ ausgeschlossen ist, z. B. $p(Y) = 1/5$ aber möglich. Man könnte also besser direkt festlegen:

$$p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow \neg[p(Y) = 0/5] \wedge \neg[p(Y) = 1/5] \wedge \neg[p(Y) = 0/5]$$

Oder man formuliert:

$$p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow p(Y) = 0/5 \vee p(Y) = 1/5 \vee p(Y) = 2/5 \vee \ldots \vee p(Y) = 5/5$$

Hier ist der Schluss ohnehin wahr, weil der Nachsatz eine Tautologie ist.
Diese Verhältnisse sollen hier aber nicht weiter untersucht werden.

• andere Möglichkeiten

$$\neg[p(X \wedge Y) = 3/5 \longrightarrow p(Y) = 2/5]$$

Hier erhält man aber auch nur einen semi-analytischen Schluss, die Lösung bringt keine Vorteile.

$$p(X \wedge Y) = 3/5 \;\neg\!\!\longrightarrow p(Y) = 2/5$$

Dies bedeutet (wie in 2-1-1-2 beschrieben): $p(Y) = 2/5$ folgt nicht semi-analytisch, also nicht möglicherweise, aus $p(X \wedge Y) = 3/5$. Doch bei diesem Ansatz bleibt der genaue logische Status des Schlusses vage.

Abschließend hierzu: Ich halte trotz der hier gebrachten Einwände den *negativen analytischen Schluss* für die korrekte Lösung.

$$p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow \neg[p(Y) < r/n]$$

im Beispiel: $p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow \neg[p(Y) < 3/5]$

als konkreten Fall: $p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow \neg[p(Y) = 2/5]$

Und es zeigt sich mal wieder, dass die *normale Implikation* zu vielen Problemen führt, die bei Verwendung der *Positiv-Implikation* gar nicht erst auftreten.

2 – 4 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

2-4-0 Einführung

2-4-0-1 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK
Ich darf noch einmal daran erinnern: *Quantitative Aussagen-Logik* (bzw. quantifizierte Aussagen-Logik) bedeutet, man arbeitet nur mit den Werten p = 1 und p = 0. Denn diese Werte sind *implizit* in aussagen-logischen Relationen enthalten. Durch die Quantifizierung kann man aussagen-logische Relationen präziser darstellen und besser prüfen.

Zur Wiederholung die Quantifizierung aussagen-logischer *synthetischer* Relationen, am Beispiel der *Implikation* bzw. ihrer *Negation*:

1. positiv: $X \rightarrow Y$ $\quad$ $p(X \rightarrow Y) = 1$ $\quad$ $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$

2. negativ: $\neg(X \rightarrow Y)$ $\quad$ $p(X \rightarrow Y) = 0$ $\quad$ $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$

2-4-0-2 GANZHEITLICHE FORMEL
Ich habe in 2-3-01 beschrieben, wie man eine *ganzheitliche Formel* aus der Wahrheitstafel entwickelt.

Nehmen wir als Beispiel wieder den semi-analytischen Schluss: $X \rightarrow Y \longrightarrow Y$.
Der Wahrheitsverlauf + + + – entspricht der Definition der *Disjunktion*: $X \vee Y$.

• *Position*
Quantitativ schreibt man für $X \rightarrow Y \longrightarrow Y$:

$p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = 1$. Als Formel: $\dfrac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1$

• *Negation*
$\neg(X \rightarrow Y \longrightarrow Y)$ hat den umgekehrten Wahrheitsverlauf, also unter dem Negationszeichen steht – – – +. Das entspricht der *synthetischen* Relation $X \nabla Y$.
Quantitativ schreibt man für $\neg(X \rightarrow Y \longrightarrow Y)$:
$p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = 0$. Als Formel : $\dfrac{a+b+c}{a+b+c+d} = 0$

2-4-0-3 KOMBINIERTE FORMEL

Normalerweise berechnet man aber den Wert von p((X → Y) ⟶ Y), indem man von den Werten der beiden *Einzelkomponenten* p(X → Y) und p(Y) ausgeht. Und zwar gilt entsprechend den Wahrheitstafeln:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} \qquad p(Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d}$$

Bei der *quantifizierten Aussagen-Logik* kommen aber nur die Werte p = 1 und p = 0 (bei Negation) vor. Wir müssen hier also für alle Relationen p = 1 einsetzen.

p(X → Y)	p(Y)	p(X → Y ⟶ Y)
$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$	$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$
1	1	1

- p(X → Y) = 1: daraus folgt: b = 0
- p(Y) = 1: daraus folgt zusätzlich d = 0
- p(X → Y ⟶ Y)

  Für p(X → Y ⟶ Y) ergibt sich dann: $\frac{a+c}{a+c} = 1$

Man kann konstatieren:

$$p(X \rightarrow Y) = 1 \;\wedge\; p(Y) = 1 \;\Rightarrow\; p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = 1$$

2-4-0-4 QUANTITATIVE WAHRHEITS-TAFEL

Um *alle* Möglichkeiten darzustellen, kann man (wie erläutert) eine *quantitative* Wahrheitstafel verwenden. Dabei greifen wir zur besseren Verständlichkeit zunächst auf die normale, *qualitative* Wahrheitstafel zurück, am Beispiel der Relation: (X → Y) ⟶ Y

Wir knüpfen hier an folgender Form der Wahrheitstafel an (wobei nur die wichtigsten Wahrheitsverläufe angegeben sind):

	(X → Y)	Y	(X → Y) ⟶ Y
2.	+	+	+
2.	−	−	+
3.	+	+	+
4.	+	−	−

Die primäre – nämlich *konjunktive* – Deutung der Wahrheitstafel verdeutlicht die aus der obigen Form abgeleitete *konjunktive Wahrheitstafel,* mit den entsprechenden Relationen.

	(X → Y)	∧ Y	⇒ (X → Y) ⟶ Y	
1.	+	+	+	(X → Y) ∧ Y ⇒ (X → Y) ⟶ Y
2.	−	−	+	¬(X → Y) ∧ ¬Y ⇒ (X → Y) ⟶ Y
3.	+	+	+	(X → Y) ∧ Y ⇒ (X → Y) ⟶ Y
4.	+	−	−	(X → Y) ∧ ¬Y ⇒ ¬((X → Y) ⟶ Y)

Konjunktive Wahrheitstafel bedeutet: Prämisse und Konklusion werden als *Konjunktion* gefasst, aus der auf die Gesamtrelation geschlossen wird (vgl. 2-1-0-5).

Kommen wir nun zur Wahrheitstafel der *quantitativen Aussagen-Logik*. Hier gilt:
Wo + in der qualitativen Wahrheitstafel steht, wird 1 eingesetzt, wo – steht, wird 0 eingesetzt. Das sind *konkrete Zahlenwerte*, nicht nur Symbole für + und –.

Man kann die Wahrheitstafel in verschiedener Weise schreiben, ich wähle hier zunächst die *reale* Wahrheitstafel, d. h. die quantitative Wahrheitstafel wird entsprechend obiger qualitativer, aussagen-logischer Wahrheitstafel konstruiert.

Dann wird die *systematische* Wahrheitstafel verwendet, bei der *alle möglichen* Wahrheits-Kombinationen der Prämissen aufgeführt werden, also: + +, + –, – +, – –. Die reale Wahrheitstafel ist aber wichtiger.

Beide, die reale und die systematische Wahrheitstafel, stelle ich als *konjunktive* Wahrheitstafel dar.

• *Reale (konjunktive) Wahrheitstafel*

	$p(X \to Y)$	$\wedge$	$p(Y)$	$\Rightarrow$	$p(X \to Y) \longrightarrow Y$
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a+c}{a+b+c+d}$		$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$
1)	1		1		1
2)	0		0		1
3)	1		1		1
4)	1		0		0

Den 1) Fall haben wir in 2-4-0-3 geprüft:

$$p(X \to Y) = 1 \ \wedge \ p(Y) = 1 \ \Rightarrow \ p(X \to Y \longrightarrow Y) = 1$$

Der 2) Fall besagt:

$$p(X \to Y) = 0 \ \wedge \ p(Y) = 0 \ \Rightarrow \ p(X \to Y \longrightarrow Y) = 1$$

Aus $p(X \to Y) = 0$ ergibt sich: $a + c + d = 0$, somit ist auch $p(Y) = a + c = 0$.
Da $a + b + c + d > 0$, muss also $b > 0$ sein. Somit auch $a + b + c > 0$.
Es resultiert: $p(X \to Y \longrightarrow Y) = b/b = 1$. Korrekt.

Der 3) Fall entspricht dem 1) Fall.

Der 4) Fall besagt:

$$p(X \to Y) = 1 \ \wedge \ p(Y) = 0 \ \Rightarrow \ p(X \to Y \longrightarrow Y) = 0$$

Aus $p(X \to Y) = 1$ ergibt sich: $b = 0$, $a + c + d > 0$.
Aus $p(Y) = 0$ ergibt sich: $a + c = 0$. Somit $a + b + c = 0$, $d > 0$.
Daraus folgt für $p(X \to Y \longrightarrow Y) = 0$, denn sein Zähler ist: $a + b + c = 0$. Korrekt.

Allerdings kann man diese Fälle auch leichter berechnen, nach der in 2-3-0-3 genannten Formel: $p(\neg(X \to Y)) + p(Y) = p((X \to Y) \longrightarrow Y)$.

Dabei muss man berücksichtigen, dass gilt: $p(\neg(X \to Y)) = 1 - p(X \to Y)$.

Bei der quantitativen Aussagen-Logik bedeutet das: $p(\neg(X \to Y)) = 1 \Leftrightarrow p(X \to Y) = 0$. Somit ergibt sich:

1) Fall: $0 + 1 = 1$
2) Fall: $1 + 0 = 1$
3) Fall: $0 + 1 = 1$
4) Fall: $0 + 0 = 0$

• *Systematische Wahrheitstafel*

Man kann auch eine Wahrheitstafel aufstellen, in der *alle* Kombinationen vorkommen, in einer systematischen Ordnung (entsprechend einer synthetischen Wahrheitstafel).
Denn die Kombination $p(X \to Y) = 0 \;\wedge\; p(Y) = 1$ kommt in der obigen *realen* Wahrheitstafel oben nicht vor.

	$p(X \to Y)$	$\wedge$	$p(Y)$	$\Rightarrow$	$p(X \to Y) \longrightarrow Y$
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a+c}{a+b+c+d}$		$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$
1)	1		1		1
2)	1		0		0
3)	0		1		Kontra
4)	0		0		1

Wir brauchen hier nur die Kombination zu besprechen, die in der *systematischen* Wahrheitstafel an 3) Stelle steht, weil nur die neu ist. Danach gilt:

Aus $p(X \to Y) = 0$ folgt: $a + c + d = 0,\ b > 0$
Aus $p(Y) = 1$ folgt: $a + c > 0,\ b + d = 0$

Es besteht also eine (mehrfache) *Kontradiktion* zwischen den beiden Prämissen, z. B. gilt sowohl $a + c = 0$ als auch $a + c > 0$.

Nun lässt sich aus einer Kontradiktion (mittels der normalen Implikation) *alles* logisch ableiten. Wir können daher zwei (gegensätzliche) Folgerungen ziehen:

$p(X \to Y) = 0 \;^{-}\!\wedge^{-}\; p(Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \to Y \longrightarrow Y) = 1$
$p(X \to Y) = 0 \;^{-}\!\wedge^{-}\; p(Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \to Y \longrightarrow Y) = 0$

Man versteht jetzt auch, warum in der *realen* Wahrheitstafel diese Kombination gar nicht auftritt: nämlich weil sie *kontradiktorische* Prämissen enthält und somit kein eindeutiges Ergebnis abzuleiten ist.

Hier zeigt sich: Es gibt einen wesentlichen Unterschied zwischen der allgemeinen *quantitativen Logik* und der *quantitativen Aussagen-Logik*. Bei der allgemeinen Quantitäts-Logik gilt die Wahrheitstafel nur in eng begrenztem Ausmaß, bei der quantitativen Aussagen-Logik gilt die quantitative Wahrheitstafel dagegen perfekt, und sie entspricht genau der Wahrheitstafel der qualitativen Aussagen-Logik.

2-4-0-5 IMPLIKATIVE FORMEL

Es ist noch eine weitere Wahrheitstafel möglich, allerdings nur bei implikativen Beziehungen: die (schon in 2-1-0-5 eingeführte) *implikative Wahrheitstafel*. Gehen wir noch einmal vom Beispiel $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ aus, mit der Wahrheitstafel in der üblichsten Form:

	X	→	Y	⟶	Y
1.	+	+	+	+	+
2.	+	−	−	+	−
3.	−	+	+	+	+
4.	−	+	−	−	−

Als *implikative Wahrheitstafel* war hier eingeführt worden:

Imp	X	→	Y	⟶	Y
1.	+	+	+	±	+
2.	+	−	−	+	−
3.	−	+	+	±	+
4.	−	+	−	±	−

Quantitativ ergibt sich folgende Struktur:

$$p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$$

Das soll nun in einer quantitativen Wahrheitstafel darstellgestellt werden. Diese implikative Wahrheitstafel ist allerdings ganz anders zu interpretieren als die normale bzw. konjunktive Wahrheitstafel.

Die *normale* Wahrheitstafel für $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y)$ informiert z. B. (siehe oben):
Wenn $p(X \rightarrow Y) = 1$ und $p(Y) = 1$, dann ist auch $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = 1$.

Die *implikative* Wahrheitstafel für $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y)$ informiert dagegen z. B.:
Wenn $p(X \rightarrow Y) = 1$ (oder 0), ist $p(Y) = 1$ (oder 0).
Und zwar kann dies gelten:

- *notwendig* (+): $\Phi \Rightarrow \Psi$
- *unmöglich* (−) $\neg(\Phi \Rightarrow \Psi)$ oder indirekt auch $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$
- *möglich* (±) $\Phi \longrightarrow \Psi$

Wir können auch bei der implikativen Wahrheitstafel wieder eine *reale* und eine *systematische* Variante unterscheiden.

Ich bringe hier nur die *reale* Wahrheitstafel, analog zur aussagen-logischen Tafel:

	$p(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	$p(Y)$
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a+c}{a+b+c+d}$
1)	1	±	1
2)	0	+	0
3)	1	±	1
4)	1	±	0

1) Fall:
$p(X \rightarrow Y) = 1$ bedeutet: $a + c + d > 0$, $b = 0$
$p(Y) = 1$, wenn $a + c > 0$ und $b + d = 0$.
$p(Y) = 1$ ist also mit $p(X \rightarrow Y) = 1$ *verträglich*, folgt aber *nicht notwendig* daraus. Denn es könnte auch gelten: $a + c = 0$, $d > 0$. (Dies ist nicht verwunderlich, denn es ist eben nur ein semi-analytischer Schluss).

2) Fall
Dies ist der einzige notwendige Fall: Denn $p(X \rightarrow Y) = 0$ bedeutet: $a + c + d = 0$, $b > 0$.
Somit muss auch $a + c = 0$ sein und damit $p(Y) = 0$.

3) Fall
Der ist gleich dem 1) Fall.

4) Fall
Hier gilt Entsprechendes zum 1) Fall: $p(Y) = 0$ ist also mit $p(X \rightarrow Y) = 1$ verträglich, folgt aber nicht notwendig daraus.
In der *realen* Tafel kommt nicht vor, dass $p(X \rightarrow Y) = 0$ und $p(Y) = 1$. Wie schon in 2-4-0-4 besprochen, ist dieser Fall unmöglich. Denn $p(X \rightarrow Y) = 0$ bedeutet: $a + c + d = 0$, $b > 0$. Somit muss $p(Y) = 1$ falsch sein.

Diese Resultate der Wahrheitstafel überraschen nicht, denn es gilt:
- semi-analytischer Schluss: $p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$
- aber strenger Schluss : $p(X \rightarrow Y) = 0 \Rightarrow p(Y) = 0$
- und *Kontraposition*: $p(X \rightarrow Y) = 1 \Leftarrow p(Y) = 1$

Ergänzung: Man kann bei der implikativen Analyse auch noch berücksichtigen, ob die Gesamt-Relation den Wert 1 oder 0 hat (Stichwort: verstärkte implikative Wahrheitstafel).

2-4-1 Implikation

2-4-1-1 DEFINITION
Ich werde hier keine streng allgemeine Darstellung vornehmen, sondern nur Beispiele geben; und zwar nehme ich bei den semi-analytischen Relationen zur besseren Vergleichbarkeit immer $R(X \rightarrow Y, X \vee Y)$.

Die Formeln werden hier nicht im Einzelnen erläutert, das wurde im Punkt 2-3-1 vollzogen; jetzt geht es nur um die speziellen Fällе, dass $p = 1$ (oder $p = 0$).

	$X \rightarrow Y$	$\longrightarrow$	$X \vee Y$
a	+ + +	+	+ + +
b	+ – –	+	+ + –
b	– + +	+	– + +
d	– + –	–	– – –

$$p(X \rightarrow Y \longrightarrow X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow p(X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1$$

2-4-1-2 REPLIKATION

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \rightarrow & Y & \longleftarrow & X & \vee & Y \\
+ & + & + & + & + & + & + \\
+ & - & - & - & + & + & - \\
- & + & + & + & - & + & + \\
- & + & - & + & - & - & -
\end{array}$$

$$p(X \rightarrow Y \longleftarrow X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow p(X \rightarrow Y) = 1 \Leftrightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

2-4-1-3 ÄQUIVALENZ

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \rightarrow & Y & \longleftrightarrow & X & \vee & Y \\
+ & + & + & + & + & + & + \\
+ & - & - & - & + & + & - \\
- & + & + & + & - & + & + \\
- & + & - & - & - & - & -
\end{array}$$

$$p(X \rightarrow Y \longleftrightarrow X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow p(Y) = 1 \Leftrightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

2-4-1-4 TAUTOLOGIE UND KONTRADIKTION

• tautologische Implikation: $\Rightarrow$

Die *tautologische* Implikation bedeutet einen besonderen Fall, denn wie (in 2-3-0-4 bzw. 2-3-1-4) bereits erläutert, besitzt sie grundsätzlich den Wert p = 1.

Z. B. $X \wedge Y \Rightarrow Y$:

$$p(X \wedge Y \Rightarrow Y) = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

Und das gilt generell für jede Tautologie, jede Tautologie hat den Wert p = 1.

• kontradiktorische Implikation: $\not\Rightarrow$

Jetzt zur *kontradiktorischen* Implikation, z. B. $(X \ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$.
Sie hat grundsätzlich den Wert p = 0. Es ergibt sich folgende Formel:

$$p((X \ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)) = \frac{0}{a+b+c+d} = 0$$

Hier gilt entsprechend: Jede Kontradiktion hat den Wert p = 0.

2-4-1-5 DREI VARIABLEN

Ich gehe nun von 3 Variablen X, Y, Z aus.

Zunächst eine *semi-analytische* Implikation:

$$X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z$$

Als *Gesamtformel* gilt:

• Positiv: p(X ∨ Y ∨ Z ⟶ X ∧ Y ∧ Z) = 1 ⇔ $\frac{a_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$

• Negativ: p(X ∨ Y ∨ Z ⟶ X ∧ Y ∧ Z) = 0 ⇔ $\frac{a_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 0$

Jetzt eine *strenge* Implikation, als *kombinierte Formel*:
Wir nehmen den obigen semi-analytischen Schluss als Konklusion und seine Komponenten als Prämissen:
• aussagen-logische Struktur
(X ∨ Y ∨ Z) ∧ (X ∧ Y ∧ Z) ⇒ (X ∨ Y ∨ Z ⟶ X ∧ Y ∧ Z)
• quantitativ
[p(X ∨ Y ∨ Z) = 1 ∧ p(X ∧ Y ∧ Z) = 1] ⇒ [p(X ∨ Y ∨ Z ⟶ X ∧ Y ∧ Z) = 1]

• Formel :

$$\frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1 \ \wedge \ \frac{a_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$$

Begründung: Aus der ersten und zweiten Bruch ergibt sich: nur $a_1 > 0$, alle anderen Variablen haben den Wert 0. Somit ergibt sich für den dritten Bruch: $\frac{a_1}{a_1} = 1$

Ich habe bewusst ein Beispiel genommen, bei dem die Beziehungen zwischen den Brüchen leicht zu erkennen sind, andere Brüche sind natürlich komplizierter.

Ein *anderer Fall*: (X → Y) ∧ (Z → X) ⇒ (Z → Y).
In quantifizierter Form lautet der Schluss:
p(X → Y) = 1 ∧ p(Z → X) = 1 ⇒ p(Z → Y) = 1

Dann ergeben sich folgende Formeln:

(1) p(X → Y) = 1 $\frac{a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$

(2) p(Z → X) = 1 $\frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$

(3) p(Z → Y) = 1 $\frac{a_1 + a_2 + b_2 + c_1 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$

Begründung:
(1) Aus p(X → Y) = 1 ergibt sich: $b_1 + b_2 = 0$

(2) Aus p(Z → X) = 1 ergibt sich: $c_1 + d_1 = 0$

Somit ergibt sich für (3): $p(Z \rightarrow Y) = \frac{a_1 + a_2 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + c_2 + d_2} = 1$

2-4-2 Positiv-Implikation

2-4-2-1 ZWEI MODELLE DER POSITIV-IMPLIKATION

Diese Problematik ist schon mehrfach angesprochen worden, aber erst hier kann sie systematisch analysiert werden. Die Analyse in 2-4-2-1 ist allerdings primär für *Experten* gedacht.

Wie wir gesehen haben, gilt für den *Nenner* der *normalen* Implikation wie für alle anderen Relatoren: a + b + c + d > 0. Das erklärt sich dadurch, dass damit *alle möglichen* 4 Welten (bei 2 Variablen) angeführt sind, und in wenigstens einer Welt muss ein Wert > 0 bestehen. Anders gesagt: $a > 0 \vee b > 0 \vee c < 0 \vee d > 0$.

Man kann darüber diskutieren, ob das eine rein *logische* oder auch *ontologische* Voraussetzung ist, aber ich sehe es als rein logische Voraussetzung. Sie entspricht nämlich dem logischen Gesetz, der Tautologie: $(X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$. Außerdem ist *mathematisch* verboten, dass der *Nenner* 0 beträgt, also durch 0 geteilt wird.

Die Frage ist nun, ob bei der Positiv-Implikation ein ähnliches Gesetz gilt. Betrachten wir die wichtigste Positiv-Implikation: $X \ast\!\!\rightarrow Y$.

Ihr entspricht die Formel $\frac{a}{a+b}$, also mit den Nenner a + b.

Gilt hier ein entsprechendes Gesetz: a + b > 0? Offensichtlich kann man das nicht rein logisch folgern, denn es könnten ja gelten a + b = 0, wenn andererseits gilt: c + d > 0. Andererseits könnte man von der Definition der Positiv-Implikation und dem Sprachverständnis doch fordern, dass a > 0 oder b > 0.

Betrachten wir folgende Möglichkeiten bzw. Beispiele:

Erstens, $p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 1$ Formel : $\frac{a}{a+b} = 1$

Beispiel: „Alle Philosophen sind weise", als Formel (q = *absolute* Anzahl):

$$\frac{q(weisePhilosophen)}{q(weisePhilosophen) + q(nicht - weisePhilosophen)} = 1$$

q(Philosophen) = a + b: ist die Anzahl *aller* Philosophen,
q(weise Philosophen) = a: ist die Anzahl der weisen Philosophen (entsprechend b).

Nun ist dieser Fall unproblematisch: denn aus $\frac{a}{a+b} = 1$ folgt zwar b = 0, aber auch a > 0.

Somit a + b > 0.

Zweitens, $p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 0$ Formel : $\frac{a}{a+b} = 0$

Beispiel: „Alle Philosophen sind nicht weise", bzw.: „Kein Philosoph ist weise".
In der normalen Sprache verstehen wir eine solche Aussage so, dass es zwar Philosophen *gibt*, aber sie eben nicht weise sind.

Und entsprechend ist auch die Positiv-Implikation definiert. Als All-Satz würde man schreiben: Λx(Philosoph(x) $\ast\!\!\rightarrow$ nicht-weise(x)). Und dieser Satz ist nur für die Fälle definiert, in denen der Vordersatz wahr ist, d. h. in denen gilt: a + b > 0, dabei a = 0, b > 0.

Aber geht man nur nach der mathematischen Formel vor, so ist das nicht abzuleiten. Denn aus $\frac{a}{a+b} = 0$ folgt a = 0, aber nicht zwingend b > 0. Es könnte auch gelten: a + b = 0.

Der Satz „Kein Philosoph ist weise“ wäre hier so zu verstehen, dass es gar keinen Philosophen geben muss.
Diese *negierte Positiv-Implikation* p(X *→ Y) = 0 bzw. ¬(X *→ Y) ist das Problem. Und man kann also zwei Interpretationen der *negierten Positiv-Implikation* unterscheiden:

- *Existenz-Interpretation* von p(X *→ Y) = 0
  Hier gilt: p(X *→ ¬Y) = 1 ⇔ p(X *→ Y) = 0
  Entsprechend: $\frac{b}{a+b} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = 0$ Somit: $\frac{a}{a+b} = 0 \Rightarrow b > 0$

- *Nicht-Existenz-Interpretaton* von p(X *→ Y) = 0
  Hier gilt: p(X *→ ¬Y) = 1 ⇒ p(X *→ Y) = 0
  Entsprechend: $\frac{b}{a+b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b} = 0$ Somit: $\frac{a}{a+b} = 0 \;\neg\!\Rightarrow b > 0$

Φ ¬⇒ Ψ ist wie beschrieben folgendermaßen zu deuten: Φ impliziert *nicht* streng Ψ. Man kann dies auch als semi-analytische Implikation schreiben: Φ ⟶ Ψ.
Im *aussagen-logischen* Bereich (bei den Wahrheitstafeln) verwende ich auch als *Zentral-Relator* ausschließlich die *Positiv-Implikation*, weil die normale Implikation für die Zeichen ‚□‘ und ‚?‘ keine Interpretation besitzt. Im *quantitativen* Bereich verwende ich als Zentral-Relator aber vorwiegend die *Normal-Implikation*, weil hier diese Interpretationsfragen nicht auftreten und so die Darstellung übersichtlicher ist. Hier verbirgt sich ein noch nicht vollständig gelöstes Problem, inwieweit die *aussagen-logische* und die *quantitative* Darstellung der Positiv-Implikation bzw. der *Positiv-Logik* vollkommen äquivalent sind.

1) *Erläuterung der Existenz-Interpretation*
Ich greife hier zunächst zurück auf die aussagen-logische, qualitative Wahrheitstafel:

(X	*→	¬	Y)	*⇔	¬	(X	*→	Y)
+	−	−	+	□	−	+	+	+
+	+	+	−	+	+	+	−	−
−	□	−	+	□	□	−	□	+
−	□	+	−	□	□	−	□	−

Die beiden Negationen von X *→Y sind hier also analytisch äquivalent.
Nun gilt aber wie gesagt: p(X *→ ¬Y) $= \frac{b}{a+b}$, p(X *→ Y) $= \frac{a}{a+b}$. So ergibt sich:

$\frac{b}{a+b} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = 0$ (da hier die Kontraposition gilt, kann man ⇔ verwenden)

Aus $\frac{b}{a+b} = 1$ folgt aber b > 0, somit a + b > 0. Also muss gelten: $\frac{a}{a+b} = 0 \Rightarrow a + b > 0$.

Man kann entsprechend von der Äquivalenz ¬(X *→ ¬Y) *⇔ (X *→ Y) ausgehen, hier ergibt sich dasselbe Resultat.

Fazit: Hier werden $\frac{a}{a+b} = 0$ und $\frac{a}{a+b} = 1$ so interpretiert, dass gilt: a + b > 0. Und a + b > 0 ist ja nur die Übersetzung von q(X) > 0. Außerdem gilt: q(X) > 0 ⇔ p(X) > 0. Somit wird bei der Existenz-Interpretation die *Existenz von X* impliziert bzw. vorausgesetzt.

Allerdings bekommt man in diesem Modell Probleme z. B. mit p(X) = 0, wenn gilt a + b = 0, das ist in Relation zu diesem Modell widersprüchlich oder quasi „verboten".

Bewertung: Sowohl vom *Sprachgebrauch* her, vor allem aber von der Wahrheitstafel her bietet sich dieses Modell an, allerdings gibt es Kompatibilitätsprobleme.

2) *Erläuterung der Nicht-Existenz-Interpretation*
Hier muss man für die Negation der Positiv-Implikation, also für ¬(X *→ Y) eine andere Wahrheitstafel zugrunde legen. Dies erfordert, die *Belegungen* der Wahrheitstafel anders zu interpretieren (vgl. unten jeweils die Belegung neben der Wahrheitstafel).

Einen Ausdruck mit Nicht-Existenz-Interpretation kennzeichne ich durch * vor *und hinter* dem Pfeil, also z. B. ¬(X *→*Y). Dagegen schreibe ich z. B. X *→ Y immer nur mit *einem* *, auch wenn es im Rahmen des Nicht-Existenz-Modells verwendet wird, denn X *→ Y selbst wird immer gleich interpretiert, egal ob im Existenz- oder Nicht-Existenz-Ansatz.

Zur besseren Verständlichkeit werde ich die Wahrheitstafel des Existenz-Modells und des Nicht-Existenz-Modells parallel darstellen. Entscheidend ist:

im Existenz-Modell gilt: (X *→ ¬Y) *⇔ ¬(X *→ Y)

im Nicht-Existenz-Modell gilt: (X *→ ¬Y) *←→ ¬(X *→* Y)

Man muss die zugrunde liegenden Wahrheitstafeln des Existenz-Modells also so verändern, dass sich dieses Resultat für das Nicht-Existenz-Modell ergibt.

Existenz-Modell	Belegung
¬(X *→ Y)	¬(Φ *→ Ψ)
− + + +	□ □
+ + − +	
□ − □ +	
□ − □ −	

Nicht-Existenz-Modell	Belegung
¬(X *→ Y)	¬(Φ *→* Ψ)
− + + +	? □
+ + − +	
? − □ +	
? − □ −	

D. h. beim *Existenz-Modell* wird aus der *Negation* von □ (un*definiert*) wiederum □. Beim *Nicht-Existenz-Modell* wird aus der *Negation* von □ (undefiniert) aber ? (*unbestimmt*). Und hier gilt: ? → □ führt zu ? Diese unterschiedliche Belegung hat folgende Konsequenzen:

Existenz-Modell

¬(X *→ Y)	*⇒	(X *→ ¬Y)
− + + +	□	+ − − +
+ + − −	+	+ + + −
□ − □ +	□	− □ − +
□ − □ −	□	− □ + −

Nicht-Existenz-Modell

¬	(X	*→*	Y)	*——→*	(X	*→	¬	Y)
−	+	+	+	□	+	−	−	+
+	+	−	−	+	+	+	+	−
?	−	□	+	?	−	□	−	+
?	−	□	−	?	−	□	+	−

Belegung

Φ	*→*	Ψ
?	?	□

Im Existenz-Modell liegt hier also ein *strenger Schluss* vor (*⇒), im Nicht-Existenz-Modell dagegen nur ein semi-analytischer Schluss (*——→).

Dabei sei daran erinnert, dass bei der Positiv-Implikation gilt: Ein *strenger*, tautologischer Schluss (*⇒) liegt vor, wenn nur + oder + und □ (= undefiniert) unter dem Zentral-Relator vorkommt. Wenn zusätzlich auch noch ? (= unbestimmt) auftritt, liegt nur ein partieller, semi-tautologischer Schluss vor.

Der Rückschluss, die *Replikation*, muss aber in beiden Modellen streng tautologisch sein. Das stellt sich wie folgt dar:

Existenz-Modell

¬	(X	→	Y)	⇐*	(X	*→	¬	Y)
−	+	+	+	□	+	−	−	+
+	+	−	−	+	+	+	+	−
□	−	□	+	□	−	□	−	+
□	−	□	−	□	−	□	+	−

Nicht-Existenz-Modell

¬	(X	*→*	Y)	*⇐*	(X	*→	¬	Y)
−	+	+	+	□	+	−	−	+
+	+	−	−	+	+	+	+	−
?	−	□	+	□	−	□	−	+
?	−	□	−	□	−	□	+	−

Belegung bzw. Belegung

Φ	*→*	Ψ
□	□	?

Φ	*←*	Ψ
?	□	□

Die Verbindung der o. g. Schlüsse führt uns jetzt zu den fundamentalen *Äquivalenzen*, die *definieren*, ob das Existenz-Modell oder das Nicht-Existenz-Model vorliegt.

- Existenz-Modell

(X	*→	¬	Y)	*⇔	¬	(X	*→	Y)
+	−	−	+	□	−	+	+	+
+	+	+	−	+	+	+	−	−
−	□	−	+	□	□	−	□	+
−	□	+	−	□	□	−	□	−

Nicht Existenz-Modell

(X	*→	¬	Y)	*←→*	¬	(X	*→*	Y)
+	−	−	+	□	−	+	+	+
+	+	+	−	+	+	+	−	−
−	□	−	+	?	?	−	□	+
−	□	+	−	?	?	−	□	−

Zur besseren Vergleichbarkeit nur die *primären* Wahrheits-Strukturen:

Existenz-Modell

(X *→ ¬Y)	*⇔	¬(X *→ Y)	strenge Äquivalenz (Tautologie)
−	□	−	
+	+	+	
□	□	□	
□	□	□	

Nicht-Existenz-Modell partielle Äquivalenz

(X *→ ¬Y)	*←→	¬(X *→* Y)
−	□	−
+	+	+
□	?	?
□	?	?

Beim Existenz-Modell liegt eine *tautologische Äquivalenz* vor, weil nur + und □ unter dem Zentral-Relator *⇔ vorkommen; beim Nicht-Existenz-Modell liegt nur eine partiell analytische bzw. *partiell tautologische* Äquivalenz vor, weil auch das Zeichen ‚?' unter dem Zentral-Relator steht.

Eine vollständige Liste der Kombinationen von +, −, □ und ? (und deren Einordnung) liegt noch nicht vor. Aber nach jetzigem Stand kann man sagen: Der wesentliche Unterschied zwischen Existenz-Modell und Nicht-Existenz-Modell liegt wohl nur darin, dass gilt:

Existenz-Modell: ¬□ = □ Nicht-Existenz-Modell: ¬□ = ?

Dabei muss man sagen, dass die Deutung des *Existenz-Modell offensichtlich plausibler* ist. Denn es leuchtet ja mehr ein, dass wenn man eine *undefinierte* Aussage negiert, sie undefiniert bleibt, als dass sie dann *unbestimmt* wird.

Quantitativ bedeutet das für das Nicht-Existenz-Modell:

Hier wird $\frac{a}{a+b}$ so interpretiert, dass gilt:

$$\frac{a}{a+b} = 1 \Rightarrow a + b > 0, \text{ aber } \frac{a}{a+b} = 0 \longrightarrow a + b > 0$$

Entsprechend: p(X *→ Y) = 1 ⇒ p(X) > 0, aber: p(X *→ Y) = 0 ⟶ p(X) > 0

Fazit: bei einem negierten Satz ¬(X *→ Y) ist die *Existenz von X* nicht durch einen strengen Schluss gewährleistet. Geht man *rein mathematisch* vor, ist das Nicht Existenz-Modell nicht zu verwerfen. Denn wenn auch a + b + c + d > 0 korrekt ist, so kann man daraus nicht streng a + b > 0 (oder entsprechend) ableiten. Andererseits darf aber a + b als *Nenner* nicht 0 sein.

2-4-2-2 EXISTENZ-MODELL VERSUS NICHT-EXISTENZ-MODELL

Da dieses Thema einerseits kompliziert, andererseits sehr wichtig ist, analysiere ich es noch einmal in neuer Systematik:

1. Positiver Fall: X *→ Y.

Dieser Fall ist unproblematisch, die Existenz von X wird ausgesagt.

p(X *→ Y) = 1 ⇒ p(X ∧ Y) > 0 ⇒ p(X) > 0 (anstatt ‚p' könnte man auch ‚q' schreiben)

$$\frac{a}{a+b} = 1 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a + b > 0$$

Wichtig: „X existiert" wird durch p(X) > 0 ausgesagt, man benötigt nicht das stärkere p(X) = 1, das zu vielen Einschränkungen führen würde.

2. Negativer Fall: $\neg$(X *$\rightarrow$ Y) bzw. p(X *$\rightarrow$ Y) = 0
In diesem Fall ist die Existenz von X problematisch.

• Existenz-Hypothese
p(X *$\rightarrow$ Y) = 0 $\Rightarrow$ p(X $\wedge$ $\neg$Y) > 0 $\Rightarrow$ p(X) > 0

$$\frac{a}{a+b} = 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow a + b > 0$$

Daraus ergibt sich:
p(X *$\rightarrow$ Y) = 0 $\Leftrightarrow$ p(X *$\rightarrow$ $\neg$Y) = 1

$$\frac{a}{a+b} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 1$$

Anders gesagt: hier besteht eine vollständige Disjunktion zwischen a > 0 und b > 0 (oder entsprechend zwischen a = 0 und b = 0):
a > 0 $\vee$ b > 0 bzw. genauer a > 0 >< b > 0, ein Drittes ist ausgeschlossen.

• Nicht-Existenz-Hypothese
p(X *$\rightarrow$ Y) = 0 $\neg\Rightarrow$ p(X $\wedge$ $\neg$Y) > 0 $\neg\Rightarrow$ p(X) > 0

$$\frac{a}{a+b} = 0 \neg\Rightarrow b > 0 \neg\Rightarrow a + b > 0$$

Es gilt:
p(X *$\rightarrow$ Y) = 0 $\Leftarrow$ p(X *$\rightarrow$ $\neg$Y) = 1. Aber :
p(X *$\rightarrow$ Y) = 0 $\neg\Rightarrow$ p(X *$\rightarrow$ $\neg$Y) = 1 somit: p(X *$\rightarrow$ Y) = 0 $\neg\Leftrightarrow$ p(X *$\rightarrow$ $\neg$Y) = 1

$$\frac{a}{a+b} = 0 \Leftarrow \frac{b}{a+b} = 1 \qquad \text{aber:}$$

$$\frac{a}{a+b} = 0 \neg\Rightarrow \frac{b}{a+b} = 1 \qquad \text{somit:} \quad \frac{a}{a+b} = 0 \neg\Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 1$$

Hier gibt es keine vollständige Disjunktion zwischen a > 0 und b > 0, denn es gibt drei Möglichkeiten: 1. a > 0 (und b = 0), 2. b > 0 (und a = 0), 3. a = 0 und b = 0. Die theoretisch auch denkbare Möglichkeit, dass a > 0 und b > 0 ist in der quantitativen *Aussagen-Logik* ausgeschlossen, sie ist nur in der *statistischen* quantitativen Logik gegeben.

Entscheidung
Für welches Modell soll man sich entscheiden? Das Existenz-Modell oder das Nicht-Existenz-Modell? Diese Frage ist, wie die vorausgegangenen Analysen schon gezeigt haben, nicht leicht zu beantworten.
• Für das *Existenz-Modell* spricht (u. a.):
– es ist von den Wahrheitstafeln her plausibler
– es entspricht mehr unserem Sprachverständnis
• Für das *Nicht-Existenz-Modell* spricht (u. a.):
– es benötigt nicht die zusätzliche Annahme a + b > 0
– es ist besser kompatibel mit der normalen Logik

Ich halte letztlich die Existenz-Interpretation für überlegen. Ihre Wahrheitstafeln sind gut bestätigt, und ihre Übertragung in die Formeln ist unzweifelhaft.

Bei der normalen Implikation bzw. jedem Relator gilt die Voraussetzung a + b + c + d > 0. Auch diese ist nicht rein mathematisch zu erklären (theoretisch könnte a + b + c + d = 0 gelten). Sondern die Ungleichung ergibt sich aus der *logischen Definition*.

Und entsprechend kann man sagen, dass sich die Ungleichung a + b > 0 aus der logischen Definition von p(X *→ Y) ergibt. Außerdem darf man mathematisch nicht durch 0 dividieren.

Ich will aber das Nicht-Existenz-Modell auch nicht verwerfen. Die Lösung könnte sein, dass man *innerhalb* der Positiv-Implikation (bzw. innerhalb der *Positiv-Logik*) die Existenz-Interpretation verwendet, *außerhalb*, d. h. *in Beziehung zur normalen Implikation* bzw. normalen Logik aber die Nicht-Existenz-Implikation. Diese Lösung müsste aber noch im Einzelnen erarbeitet und begründet werden.

Ich werde zunächst beide Modelle parallel behandeln und bei den verschiedenen Schlüssen jeweils das Existenz-Modell und das Nicht-Existenz-Modell vorstellen (insofern sich Unterschiede ergeben). Das verlangt, mit verschiedenen Wahrheitstafeln zu arbeiten.

Es wird sich zeigen, dass hier noch manche Probleme bestehen, die weitere Forschungsarbeit erfordern. Z. B. ist zu klären, ob nicht in vielen Formeln *→ statt → stehen muss, weil die Implikation gar nicht für die Werte □ und ? definiert ist. Vor allem die Abstimmung zwischen der *aussagen-logischen* Form (insbesondere Wahrheitstafeln) und der *quantitativen* Form (logisch-mathematischen Formeln) zeigt noch Diskrepanzen. So werden quantitativ nur 2 Welten berücksichtigt (meist X ∧ Y und X ∧ ¬Y), also entsprechend der *verkürzten Wahrheitstafel* (vgl. 1-1-2-2). Aussagen-logisch verwende ich aber überwiegend eine *vollständige Wahrheitstafel* mit 4 Welten (X ∧ Y, X ∧ ¬Y, ¬X ∧ Y, ¬X ∧ ¬Y), auch wenn dabei nur die „positiven" Welten mit „gültig" (+) oder „ungültig" (–) gekennzeichnet sind; denn aussagenlogisch führen die *verkürzten* Wahrheitstafeln öfters zu Problemen.

2-4-2-3 SCHLUSS VON DER POSITIV-IMPLIKATION AUF DIE IMPLIKATION

□ qualitativ: (X *→ Y) ⇒ (X → Y)

□ quantitativ: p(X *→ Y) = 1 ⇒ p(X → Y) = 1

□ Bruch : $\frac{a}{a+b} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$

Erläuterung: Aus der ersten Bruch-Gleichung ergibt sich: b = 0, a > 0. Damit ergibt sich für den abgeleiteten zweiten Bruch p = 1. Hier stellt sich das Existenz-Problem nicht, wohl aber bei dem *semi-analytischen* Schluss von p(X *→ Y) = 0 auf p(X → Y) = 0.

• Existenz-Modell

Voraussetzung ist hier: $(\frac{a}{a+b} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 1) \Rightarrow b > 0$

Daraus sind u. a. folgende drei Ableitungen möglich:

– semi-analytisch: $\frac{a}{a+b} = 0 \longrightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$ (wenn c + d = 0)

– kontradiktorisch: $\frac{a}{a+b} = 0 \;{*}\!\not\Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ (Widerspruch, weil b > 0)

– tautologisch: $\frac{a}{a+b} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$ (folgt aus b > 0)

Eigentlich gehört dieser Schluss allerdings nicht in die quantitative Aussagen-Logik, weil dort keine Werte p < 1 definiert sind, sondern in die *quantitative Quantoren-Logik*.

• Nicht-Existenz-Modell
Hier gilt: Wenn p(X *→ Y) = 0, kann p(X → Y) beliebige Werte annehmen.
– wenn gilt b = 0 (was ja im Nicht-Existenz-Modell möglich ist), p(X → Y) = 1.
– wenn b > 0 und c + d = 0, dann p(X → Y) = 0
– wenn b > 0 und c + d > 0, dann 0 < p(X → Y) < 1
(aber auch dieser Schluss gehört nicht mehr zur quantitativen Aussagen-Logik)

2-4-2-4 SCHLUSS VON DER IMPLIKATION AUF DIE POSITIV-IMPLIKATION

• Haupttheorie

□ qualitativ: (X → Y) *⟶ (X *→ Y)

□ quantitativ: p(X → Y) = 1 *⟶ p(X *→ Y) = 1

□ Bruch: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ *⟶ $\frac{a}{a+b} = 1$

Begründung: Aus $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ folgt b = 0 und a + c + d > 0.

D. h. es ist möglich, dass a = 0, aber es reicht, dass c +d > 0. Dann wäre p(X *→ Y) = 0
Somit ist nur ein *semi-analytischer* Schluss möglich auf p(X *→ Y) = 1.

• Nebentheorie
Nun könnte man aber für die *Existenz-Theorie* folgenden Einwand erheben:
Wie oben festgestellt: aus $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ folgt b = 0. Da im Existenz-Modell gilt: $\frac{a}{a+b} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 0$, ergibt sich also: b = 0 ⇒ a > 0.
Somit müsste doch ein *strenger Schluss* möglich sein:

p(X → Y) = 1 *⇒ p(X *→ Y) = 1

Dem widerspricht allerdings die aufgestellte Wahrheitstafel:

X	→	Y	*⟶	X	*→	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	–	–	□	+	–	–
–	+	+	?	–	□	+
–	+	–	?	–	□	–

Belegung :
Φ *→ Ψ
+ ? □

Man müsste stattdessen folgende Wahrheitstafel verwenden:

X	→	Y	*⇒	X	*→	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	–	–	□	+	–	–
–	+	+	□	–	□	+
–	+	–	□	–	□	–

Belegung :
Φ *→ Ψ
+ □ □

Hier ergibt sich aber ein sehr problematisches Resultat:

Es gilt: (X *→ Y) *⇒ (X → Y)
Wenn auch gilt: (X → Y) *⇒ X *→ Y
Dann: (X *→ Y) *⇔ (X → Y)

In Formeln ausgedrückt heißt das:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \;\; *\!\Leftrightarrow \;\; \frac{a}{a+b} = 1$$

Dies bedeutete aber, dass die Implikation und die Positiv-Implikation *äquivalent* wären, jedenfalls bei Verwendung der Positiv-Äquivalenz (die normale Äquivalenz kann nicht gelten, da die Kontraposition p(X *→ Y) = 0 ⇒ p(X → Y) = 0 offensichtlich falsch ist).

Wie kann hier eine Lösung aussehen? Dies ist ziemlich kompliziert.
Wir gingen aus von p(X *→ Y) = 0 ⇔ p(X *→ ¬Y) = 1. In Formeln:

$$\frac{a}{a+b} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 0$$

Dann müsste auch gelten: $\frac{b}{a+b} = 0$ ⇔ b = 0 Somit: $\frac{a}{a+b} = 1$ ⇔ b = 0

Nun ergibt sich hier ein Problem, das uns schon ganz am Anfang beschäftigte. Zwei logisch (oder mathematisch) äquivalente Relationen müssen nicht genau die gleiche *Bedeutung* haben; so gilt z. B. (X → Y) ⇔ ¬(X ∧ ¬Y), dennoch besitzen X → Y und ¬(X ∧ ¬Y) nicht die gleiche Bedeutung (vgl. dazu in Kapitel 0: Extension versus Intension).

So ist m. E. auch zwischen $\frac{b}{a+b} = 0$ und b = 0 zu unterscheiden.

b = 0 ist die Angabe einer *absoluten* Quantitität: q(X ∧ ¬Y) = 0

$\frac{b}{a+b} = 0$ ist die Angabe einer relativen Quantität: $\frac{q(X \wedge \neg Y)}{q(X \wedge Y) + q(X \wedge \neg Y)} = 0$

Im Beispiel:
b = 0: „kein Philosoph ist nicht klug"
$\frac{b}{a+b} = 0$: „von allen (klugen und nicht klugen) Philosophen ist keiner nicht klug".

Man könnte unterscheiden (vor allem mit Bezug auf die Sprache):

- b = 0 impliziert nicht notwendig, dass a > 0, dass es also überhaupt Philosophen gibt (es wird ja gar kein Bezug auf a genommen)
- $\frac{b}{a+b} = 0$ impliziert dagegen notwendig, dass a > 0, dass es Philosophen gibt, weil eine Verwendung der Positiv-Implikation X *→ Y nur erfolgt, wenn die Menge X nicht leer ist, wenn p(X) > 0 bzw. a + b > 0.

Somit folgt aus $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ zwar b = 0, aber nicht automatisch a > 0, und somit folgt aus p(X → Y) = 1 auch nicht automatisch p(X *→ Y) = 1.

Ein weiteres Argument:

Wenn $\frac{a}{a+b}=1 \Leftrightarrow$ b = 0, dann muss auch die *Kontraposition* gelten. Aber wie sollte die hier aussehen? Für $\frac{a}{a+b}=1$ würde man $\frac{a}{a+b}=0$ einsetzen, aber was soll man für b = 0 einsetzen? Man kann natürlich nicht b = 1 einsetzen, denn 1 wäre hier eine *absolute* Größe, keine *relative*. Man kann nur b > 0 einsetzen, aber so erhält man keine korrekte Kontraposition. Es besteht eben die Asymmetrie, dass absolut q = 0 relativ p = 0 entspricht, aber relativ keinesfalls p = 1 auch q = 1 entspricht. (Wenn man auch mit dem Wert p < 1 arbeitet, bekommt man die Kontraposition zwar hin, aber dieser Wert ist in der quantitativen Aussagen-Logik gar nicht definiert.)

Auch hier zeigt sich wieder, dass man *absolute* und *relative* Größen nicht generell gleichsetzen kann, also dass man auch nicht $\frac{b}{a+b}=0$ und b = 0 einfach als gleich ansehen darf; vielleicht darf man sie nicht einmal als *äquivalent* ansehen (jedenfalls bei Verwendung der normalen Äquivalenz). Sondern man müsste differenzieren:

Positiv-Implikation: $\frac{a}{a+b}=1$ $*\!\Rightarrow$ b = 0, weil b > 0 $\neg\!\Rightarrow$ $\frac{a}{a+b}=0$.

Normal-Implikation: b = 0 $\Rightarrow \frac{a}{a+b}=1$, weil $\frac{a}{a+b}=0 \Rightarrow$ b > 0.

Es sei aber zugegeben, dass dieser Lösungsansatz etliche Probleme aufwirft, hier besteht noch erheblicher *Klärungsbedarf*. Eventuell wäre es doch besser einfach zu akzeptieren, dass gilt $(X \rightarrow Y)$ $*\!\Rightarrow$ X $*\!\rightarrow$Y, allerdings nur als Positiv-Implikation; man müsste dann jedoch die Belegung der Wahrheitstafel in der o. g. Weise verändern.

2-4-2-5 KONTRAPOSITION

Auf die Kontraposition wurde im vorausgegangenen Punkt schon eingegangen. Die Kontraposition in der *normalen Logik* beinhaltet die *Äquivalenz:*

$(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \leftarrow \neg Y)$.

Dem äquivalent ist die Äquivalenz der *Negationen*: $\neg(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg(\neg X \leftarrow \neg Y)$.

Ursprünglich ist die Kontraposition also für die *synthetische* Implikation $X \rightarrow Y$ definiert. Allerdings gilt generell: $(\Phi \rightarrow \Psi) \Leftrightarrow (\neg\Phi \leftarrow \neg\Psi)$. Die Kontraposition gilt also auch für analytische bzw. semi-analytische Relationen, z. B.:

$[(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y)] \Leftrightarrow [\neg(X \wedge Y) \Leftarrow \neg(X \vee Y)]$

$[(X \vee Y) \longrightarrow (X \vee Y)] \Leftrightarrow [\neg(X \vee Y) \longleftarrow \neg(X \wedge Y)]$

Die Frage ist, inwieweit die Kontraposition auch für die *Positiv-Implikation* gilt, also:

$(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \leftarrow\!* \neg Y)$?

$\neg(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg(\neg X \leftarrow\!* \neg Y)$?

Im Einzelnen beinhaltete das somit vier *Implikationen*:

$(X *\!\rightarrow Y) \Rightarrow (\neg X \leftarrow\!* \neg Y)$

$(X *\!\rightarrow Y) \Leftarrow (\neg X \leftarrow\!* \neg Y)$

$\neg(X *\!\rightarrow Y) \Rightarrow \neg(\neg X \leftarrow\!* \neg Y)$

$\neg(X *\!\rightarrow Y) \Leftarrow \neg(\neg X \leftarrow\!* \neg Y)$

Ich konzentriere die Analyse auf die *Implikationen*, weil die leichter zu untersuchen sind als die Äquivalenzen im Ganzen. Das Ergebnis ist aber unschwer auf die Äquivalenz zu übertragen. Und zwar untersuche ich die 1. und die 3. Implikation (der 2. und 4. Fall verhalten sich entsprechend).

Als *Zentral-Relator* habe ich hier zunächst hypothetisch die normale, analytische Implikation $\Rightarrow$ verwendet, es muss sich herausstellen, ob das berechtigt ist.

• Haupttheorie

Ich untersuche zur Einfachheit zunächst nur die Implikation $(X \rightarrow Y) \Rightarrow (\neg X \leftarrow^{*} \neg Y)$.

□ qualitativ: $(X \,{*}\!\rightarrow Y) \;{*}\!\longrightarrow\; (\neg X \leftarrow\!{*}\; \neg Y)$

□ quantitativ: $p(X \,{*}\!\rightarrow Y) = 1 \;\; {*}\!\longrightarrow\; p(\neg X \leftarrow\!{*}\; \neg Y) = 1$

□ Bruch: $\frac{a}{a+b} = 1 \;\; {*}\!\longrightarrow\; \frac{d}{d+b} = 1$

Begründung: aus $\frac{a}{a+b} = 1$ folgt a > 0 und b = 0. b = 0 ist zwar eine *notwendige* Bedingung für $\frac{d}{d+b} = 1$, aber keine *hinreichende*; dafür müsste auch noch gelten d > 0.

Somit ist nur ein *semi-analytischer* Schluss möglich. Und zwar gilt das gleichermaßen für das *Existenz-Modell* und das *Nicht-Existenz-Modell*. (Aus Gründen, die hier nicht im Einzelnen dargelegt werden können, kommt auch nur der Positiv-Implikator in Frage.)

Jetzt zur Frage, ob die negierte Implikation gilt: $\neg(X \,{*}\!\rightarrow Y) \Rightarrow \neg(\neg X \leftarrow\!{*}\; \neg Y)$?

□ qualitativ: $\neg(X \,{*}\!\rightarrow Y) \;{*}\!\longrightarrow\; \neg(\neg X \leftarrow\!{*}\; \neg Y)$

□ quantitativ: $p(X \,{*}\!\rightarrow Y) = 0 \;\; {*}\!\longrightarrow\; p(\neg X \leftarrow\!{*}\; \neg Y) = 0$

□ Bruch: $\frac{a}{a+b} = 0 \;\; {*}\!\longrightarrow\; \frac{d}{d+b} = 0$

Begründung: aus $\frac{a}{a+b} = 0$ folgt keineswegs zwingend, dass $\frac{d}{d+b} = 0$

Fazit: Bei der Positiv-Implikation gilt die Kontraposition nicht.

• Nebentheorie

Nun könnte man für das *Existenz-Modell* folgenden Einwand erheben:

Wenn man – nach dem Existenz-Modell – davon ausgeht, dass gilt: $\frac{a}{a+b} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 0$,

dann muss man auch annehmen, dass gilt: $\frac{d}{d+b} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{d+b} = 0$.

Nun soll gelten: $\frac{a}{a+b} = 1 \Leftrightarrow b = 0$. Dann müsste auch gelten: $\frac{d}{d+b} = 1 \Leftrightarrow b = 0$

Somit: $\frac{a}{a+b} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{d+b} = 1$

Und das wäre genau die Kontraposition, sogar in vollständiger Form als Äquivalenz:

$p(X \,{*}\!\rightarrow Y) = 1 \;\Leftrightarrow\; p(\neg X \leftarrow\!{*}\; \neg Y) = 1$

Nun zeigt sich aber sofort, dass dies nicht stimmen kann. Denn dann müsste auch gelten:

$p(X \,{*}\!\rightarrow Y) = 0 \;\Leftrightarrow\; p(\neg X \leftarrow\!{*}\; \neg Y) = 0$, in Formeln:

$$\frac{a}{a+b} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d+b} = 0$$

Dies ist aber offensichtlich falsch. Wenn z. B. a = 0, dann folgt daraus keineswegs d = 0 (und umgekehrt).

Allenfalls könnte man eine *Positiv-Äquivalenz* behaupten:

$p(X *\rightarrow Y) = 1 \;\; *\Leftrightarrow \;\; p(\neg X \leftarrow* \neg Y) = 1$

M. E. besteht aber auch diese Positiv-Äquivalenz nicht. Dass soll zum einen die Wahrheitstafel verdeutlichen. Ich gehe dabei von folgender Wahrheitstafel aus:

	$(X *\rightarrow Y)$	$*\leftarrow\rightarrow$	$(\neg X \leftarrow* \neg Y)$
1.	+ + +	?	− + □ − +
2.	+ − −	□	− + − + −
3.	− □ +	□	+ − □ − +
4.	− □ −	?	+ − + + −

$(X *\rightarrow Y)$ ist nur für die ersten beiden Zeilen definiert, in denen X positiv (+) ist.
$(\neg X \leftarrow* \neg Y)$ ist nur für die 2. und 4. Zeile definiert, wo $\neg Y$ positiv (+) ist.
Somit sind beide Relationen gemeinsam nur in der 2. Zeile definiert, hier sind sie aber beide negativ (−), so dass nach den Regeln der Positiv-Implikation nur ein □ unter dem Zentral-Relator stehen kann. Somit ist in keiner der 4 Zeilen in beiden Relationen gleichzeitig ein + unter dem Relator gegeben, dies wäre nach den Regeln der Positiv-Implikation aber Voraussetzung für ein + unter dem Zentral-Relator.

Zum anderen möchte ich auf die Argumentation aus dem letzten Punkt 2-4-2-4 zurückkommen, wo gezeigt wurde, dass eine Äquivalenz $\frac{a}{a+b} = 1 \Leftrightarrow b = 0$ anzuzweifeln ist, mit allen sich daraus ergebenden Folgen.

Abschließend: Gerade dieser Punkt „*Kontraposition* bei der Positiv-Implikation" muss als einer der am wenigsten geklärten im Text angesehen werden, aber alles spricht dafür, dass die Kontraposition bei der Positiv-Implikation *nicht gilt*.

2-4-3 Systematik

Bei Systematik behandele ich verschiedene Formen von *Schlüssen*. Ich nenne wieder jeweils die *qualitative* Form, die *quantitative* Form und die Form als *Bruch*. Dabei ist zu bedenken, dass grundsätzlich gilt:

$a + b + c + d > 0$. Also: $a > 0 \;\vee\; b > 0 \;\vee\; c > 0 \;\vee\; d > 0$

Zur Wiederholung: *Terminologisch* verwende ich folgende Termini *gleichbedeutend* :

- Semi-analytische Implikation
  = partiell analytische Implikation = semi-analytischer Schluss = partieller Schluss = partiell tautologischer Schluss = partielle logische Folge u. ä.
- Analytische Implikation
  = streng analytische Implikation = strenger Schluss = vollständig analytischer Schluss = vollständiger Schluss = tautologischer Schluss = (vollständige) logische Folge u. ä.

(Von Kontradiktionen sehe ich hierbei ab.)

2-4-3-1 ABTRENNUNGSREGEL

Struktur: $p(\Phi) = 1 \;\Rightarrow\; p(\Psi) = 1$ / eine Prämisse

□ qualitativ: $X \wedge Y \;\Rightarrow\; Y$

□ quantitativ: $p(X \wedge Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(Y) = 1$

 Bruch: $\dfrac{a}{a+b+c+d}=1 \;\Rightarrow\; \dfrac{a+c}{a+b+c+d}=1$

Kurz-Erläuterung: Aus dem ersten Bruch ergibt sich:
a > 0, b + c + d = 0. Somit haben also alle Parameter außer a den Wert 0.
Damit ergibt sich für den abgeleiteten zweiten Bruch:

$$\frac{a}{a}=1$$

2-4-3-2 MODUS PONENS

Struktur: p(Φ) = 1 ⇒ p(Ψ) = 1 / zwei Prämissen

- qualitativ: (X → Y) ∧ X ⇒ Y
- quantitativ: p(X → Y) = 1 ∧ p(X) = 1 ⇒ p(Y) = 1

 Bruch: $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d}=1 \;\wedge\; \dfrac{a+b}{a+b+c+d}=1 \;\Rightarrow\; \dfrac{a+c}{a+b+c+d}=1$

Erläuterung:
Aus dem ersten Bruch ergibt sich: b = 0
Aus dem zweiten Bruch ergibt sich: c + d = 0
Also ergibt sich entsprechend wie oben für den abgeleiteten dritten Bruch der Wert p = 1.

Alternatives Modell des Modus ponens

Ich will hier noch einmal auf eine Frage eingehen, die ich schon kurz erläutert habe. Es gäbe auch Gründe, das aussagen-logische X → Y nicht mit p = 1 sondern mit p > 0 zu quantifizieren, was z. B. den Vorteil hätte, dass wie in der Aussagen-Logik der Gegensatz zwischen gültig (p > 0) und ungültig (p = 0) *kontradiktorisch* wäre. Aber es gäbe andererseits untolerierbare Probleme. So wäre der *Modus ponens*, eins der zentralsten logischen Gesetze, nicht gültig:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}>0 \;\wedge\; \frac{a+b}{a+b+c+d}>0 \;\;\neg\!\!\Rightarrow\;\; \frac{a+c}{a+b+c+d}>0$$

Erläuterung: Aus der ersten Prämisse ergibt sich: a + c + d > 0
Aus der zweiten Prämisse ergibt sich: a + b > 0
Daraus folgt aber *nicht zwingend* a + c > 0.
Denn bei a + c + d > 0 kann es ja sein, dass a + c = 0 und nur d > 0.
Und bei a + b > 0 kann es sein, dass a = 0 und nur b > 0.
Somit folgt also $\dfrac{a+c}{a+b+c+d}>0$ nicht zwingend, es könnte auch gelten $\dfrac{a+c}{a+b+c+d}=0$

und stattdessen $\dfrac{b+d}{a+b+c+d}>0$ wahr sein.

Modus ponens mit der Positiv-Implikation

Bei der Positiv-Implikation ergibt sich ein entsprechendes Ergebnis für den Modus ponens. Dabei stellt sich das *Existenz-Problem* nicht. Denn da nur mit dem positiven X *→ Y gearbeitet wird, ist die Existenz von X gewährleistet.

□ qualitativ: $(X \ast\!\rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$
□ quantitativ: $p(X \ast\!\rightarrow Y) = 1 \wedge p(X) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$

□ Bruch : $\frac{a}{a+b} = 1 \wedge \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Erläuterung: Aus den ersten beiden Brüchen ergibt sich (entsprechend wie bei dem Beispiel mit der herkömmlichen Implikation) b + c + d = 0.
Damit ergibt sich für den abgeleiteten Bruch: p = 1. Denn:

$$\frac{a}{a} = 1$$

2-4-3-3 NULLISTISCHE SCHLÜSSE

Bei denen kommt wenigstens *ein* Wert p = 0 vor.

- Struktur: $p(\Phi) = 1 \Rightarrow p(\Psi) = 0$
  □ qualitativ: $X \wedge Y \Rightarrow \neg(X >< Y)$
  □ quantitativ: $p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(X >< Y) = 0$

  □ Bruch: $\frac{a}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{b+d}{a+b+c+d} = 0$

Erläuterung: Aus dem ersten Bruch folgt: b + c + d = 0
Folglich muss der abgeleitete zweite Bruch den Wert 0 haben.

- Struktur: $p(\Phi) = 0 \Rightarrow p(\Psi) = 0$
  □ qualitativ: $\neg Y \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$
  □ quantitativ: $p(Y) = 0 \Rightarrow p(X \wedge Y) = 0$

  □ Bruch: $\frac{a+c}{a+b+c+d} = 0 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d} = 0$

Erläuterung: Wenn a + c = 0, dann gilt natürlich auch a = 0.

2-4-3-4 SEMI-ANALYTISCHE SCHLÜSSE

Bei einer semi-analytischen Implikation liegt wie erläutert nur eine *partielle logische Folge* vor.

Ich beschränke mich hier auf ein Beispiel mit dem Schluss:

$p(\Phi = 1 \longrightarrow p\Psi) = 1$. Und zwar: $p(X \vee Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$

Zunächst stelle ich noch einmal die Wahrheitstafel dar, um zu demonstrieren, dass ein semi-analytischer Schluss vorliegt.

(X	∨	Y)	⟶	Y
+	+	+	+	+
+	+	–	–	–
–	+	+	+	+
–	–	–	+	–

 qualitativ: $(X \vee Y) \longrightarrow Y$
 quantitativ: $p(X \vee Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$

 Bruch: $$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1 \longrightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

Erläuterung:
Aus dem ersten Bruch folgt: a + b + c > 0, d = 0. Was lässt sich daraus für den zweiten Bruch ableiten?
Betrachten wir drei Möglichkeiten:

a + c = 0, b > 0: Hier hat der zweite Bruch den Wert p = 0.
a + c > 0, b = 0: Hier hat der zweite Bruch den Wert p = 1.
a + c > 0, b > 0. Hier hat der zweite Bruch, je nach dem Verhältnis von a + c zu b, beliebige Werte zwischen 0 und 1.

Es hat also den Anschein, als könne man aus dem ersten Bruch jeden möglichen Wert des zweiten Bruchs ableiten (und damit umgekehrt gar nichts). Es wäre kein partiell-analytischer Schluss gegeben, sondern überhaupt kein Schluss (bzw. ein *Pseudoschluss*). Die beiden Brüche wären völlig *unabhängig* voneinander.

Um dieses Ergebnis zu prüfen, setze ich konkrete Zahlen in die Gleichungen ein. Als Beispiel:

$$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \frac{4}{4} \longrightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{4}{4}$$

Jetzt erhalte ich aus der ersten Gleichung: a + b + c = 4, d = 0.

Nun ergeben sich folgende Möglichkeiten:

a + c	b	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$
4	0	4/4
3	1	3/4
2	2	2/4
1	3	1/4
0	4	0/4

In diesem Beispiel gibt es also nicht mehr wie im obigen abstrakten Fall *unendlich viele* Lösungen, sondern nur 5 Lösungen für den zweiten Bruch. Allerdings kann der Bruch auch in diesem konkreten Fall Werte von 0 bis 1 annehmen. Wie aber noch gezeigt wird, haben diese Werte unterschiedliche *theoretische Wahrscheinlichkeiten*. Außerdem ist bei Werten p < 1 die Anzahl der Lösungen prinzipiell geringer. Jedenfalls gilt, dass bei Einsatz konkreter Zahlen ein partieller Schluss der Form $p(X \vee Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$ möglich ist.

2-4-3-5 ANDERE BERECHNUNGSMETHODEN

Ich habe bisher die Schlüsse berechnet, indem ich die *Prämissen analysiert* habe. Gerade bei Schlüssen mit *mehreren* Prämissen ergeben sich aber auch noch andere Methoden. Ich will die wichtigsten Methoden kurz vorstellen, anhand des *Modus ponens*:

$$p(X \rightarrow Y) = 1 \ \wedge p(X) = 1 \ \Rightarrow \ p(Y) = 1$$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \ \wedge \ \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

- Prämissen *getrennt analysieren* (bisherige Methode)

$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ Daraus erhält man: b = 0

$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$ Daraus erhält man: c + d = 0

Aus beiden Brüchen zusammen erhält man: b + c + d = 0
Nun gilt: a + b + c + d > 0. Somit a > 0.

Also gilt für die Konklusion: $\frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{a}{a} = 1$

- Prämissen *gleichsetzen* und einen Ausdruck analysieren

$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{a+b}{a+b+c+d}$ Daraus folgt: a + c + d = a + b. Somit b = c + d.

$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ Daraus erhält man: b = 0

Aus beiden Zeilen zusammen erhält man: b + c + d = 0

Dann weiter wie oben.

- Prämissen *addieren* oder *subtrahieren* und den daraus resultierenden neuen Ausdruck analysieren

Aus $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ und $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$ erhält man durch *Addition*:

$\frac{a+c+d+a+b}{a+b+c+d} = 2$ Daraus: $\frac{2a+b+c+d}{a+b+c+d} = 2$

Man *subtrahiert* davon 1 bzw. $\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$

$$\frac{2a+b+c+d}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = \frac{a}{a+b+c+d} = 1$$

Aus $\frac{a}{a+b+c+d} = 1$ erhält man: b +c + d = 0.

Dann weiter wie oben.

Je nach zu analysierendem Schluss sind nicht immer alle o. g. Verfahren anzuwenden.

2-4-4 Inklusiv / Exklusiv

2-4-4-1 GANZHEITS-FORMEL

Ich stelle für die „oder-Relatoren" *Disjunktion* (∨), *Kontravalenz* (><) und *Exklusion* (|) die ganzheitliche Berechnung vor, jeweils am Beispiel der Verknüpfung von X ∧ Y und X ↔ Y, wobei sich semi-analytische Relationen ergeben.

• Disjunktion (inklusives „oder")

- qualitativ: $[(X \wedge Y)\ {}^{+}\!\vee^{-}\ (X \leftrightarrow Y)] \Leftrightarrow (X \leftrightarrow Y)$ (+ − − +)
- quantitativ: $[p(X \wedge Y) = 1\ {}^{+}\!\vee^{-}\ p(X \leftrightarrow Y) = 1] \Leftrightarrow p(X \leftrightarrow Y) = 1$
- Formel: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = 1\ {}^{+}\!\vee^{-}\ \dfrac{a+d}{a+b+c+d} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{a+d}{a+b+c+d} = 1$

Man kann $p(X \wedge Y) = 1\ {}^{+}\!\vee^{-}\ p(X \leftrightarrow Y) = 1$ auch als $p[(X \wedge Y)\ {}^{+}\!\vee^{-}\ p(X \leftrightarrow Y)] = 1$ schreiben, also als *Gesamtformel*.

Aus $\dfrac{a}{a+b+c+d} = 1$ ergibt sich: $a > 0,\ b + c + d = 0$

Aus $\dfrac{a+d}{a+b+c+d} = 1$ ergibt sich: $a + d > 0,\ b + c = 0$

Aus $(a > 0) \vee (a + d > 0)$ ergibt sich für den *Zähler*: jedenfalls $a + d > 0$
Aus $(b + c + d = 0) \vee (b + c = 0)$ ergibt sich für den *Nenner*: jedenfalls $b + c = 0$
Somit ergibt sich: $\dfrac{a+d}{a+b+c+d} = \dfrac{a+d}{a+d} = 1$

Hier kann das Ergebnis etwas irritieren, weil X ↔ Y sowohl Ergebnis als auch Teil der Gesamtformel ist.

• Kontravalenz (exklusives „oder")

- qualitativ: $[(X \wedge Y)\ {}^{+}\!\!><^{-}\ (X \leftrightarrow Y)] \Leftrightarrow (X \nabla Y)$ (− − − +)
- quantitativ: $[p(X \wedge Y) = 1\ {}^{+}\!\!><^{-}\ p(X \leftrightarrow Y) = 1] \Leftrightarrow p(X \nabla Y) = 1$
- Formel: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = 1\ {}^{+}\!\!><^{-}\ \dfrac{a+d}{a+b+c+d} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{d}{a+b+c+d} = 1$

• Exklusion

- qualitativ: $[(X \wedge Y)\ {}^{+}|^{-}\ (X \leftrightarrow Y)] \Leftrightarrow (X \mid Y)$ (− + + +)
- quantitativ: $[p(X \wedge Y) = 1\ {}^{+}|^{-}\ p(X \leftrightarrow Y) = 1] \Leftrightarrow p(X \mid Y) = 1$
- Formel: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = 1\ {}^{+}|^{-}\ \dfrac{a+d}{a+b+c+d} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

2-4-4-2 NEGATION
Ich beschränke mich hier auf die *Disjunktion*. Für $X \vee Y$ kann man verschiedene *Negationen* angeben, z. B.:

$\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow X \nabla Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \to Y) \Leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$

Dann gilt:

- qualitativ: $(X \vee Y) \Leftrightarrow \neg\neg(X \vee Y)$
- quantitativ: $p(X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow p(\neg(X \vee Y)) = 0$
- Formel: $\dfrac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{d}{a+b+c+d} = 0$

Alternativen: $p(X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow p(X \nabla Y) = 0$

2-4-4-3 DISJUNKTION UND KONTRAVALENZ

- qualitativ: $X >< Y \Rightarrow X \vee Y$ $(-++-) \Rightarrow (+++-)$
- quantitativ: $p(X >< Y) = 1 \Rightarrow p(X \vee Y) = 1$
- Formel: $\dfrac{b+c}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \dfrac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1$

2-4-4-4 EXKLUSION UND KONTRAVALENZ

- qualitativ: $X >< Y \Rightarrow X \mid Y$ $(-++-) \Rightarrow (-+++)$
- quantitativ: $p(X >< Y) = 1 \Rightarrow p(X \mid Y) = 1$
- Formel: $\dfrac{b+c}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \dfrac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

2-4-4-5 DISJUNKTION UND EXKLUSION

Hier gilt zunächst nur ein *semi-analytischer* Schluss:

- qualitativ: $X \vee Y \longrightarrow X \mid Y$ $(+++-) \longrightarrow (-+++)$
- quantitativ: $p(X \vee Y) = 1 \longrightarrow p(X \mid Y) = 1$
- Formel: $\dfrac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1 \longrightarrow \dfrac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

Das Umgekehrte gilt auch, also $X \mid Y \longrightarrow X \vee Y$ usw.
Ein strenger Schluss ist aber möglich bei:

- qualitativ: $\neg(X \vee Y) \Rightarrow X \mid Y$ $(---+) \Rightarrow (-+++)$
- quantitativ: $p(X \vee Y) = 0 \Rightarrow p(X \mid Y) = 1$
- Formel: $\dfrac{a+b+c}{a+b+c+d} = 0 \Rightarrow \dfrac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

Erläuterung: $a + b + c = 0 \Rightarrow b > 0$. Es ergibt sich also $b/b = 1$.
Hier gilt entsprechend die *Kontraposition*, also $\neg(X \mid Y) \Rightarrow X \vee Y$ usw.
Außerdem gilt: $(X \vee Y) \;{}^{+}\!\vee^{+}\; (X \mid Y)$

Ich habe hier auf Begründungen der Schlüsse weitgehend verzichtet, die müsste der Leser nach den vorausgegangenen Ausführungen selbst vollziehen können.

2-4-5 Erweiterungen

Ich habe verschiedene Strukturen von *quantitativen aussagen-logischen* Schlüssen vorgestellt:
$p(\Phi) = 1 \Rightarrow p(\Psi) = 1$
$p(\Phi) = 1 \Rightarrow p(\Psi) = 0$
$p(\Phi) = 0 \Rightarrow p(\Psi) = 1$
$p(\Phi) = 0 \Rightarrow p(\Psi) = 0$
Eine vollständige Erfassung aller möglichen Strukturen steht hier noch aus.

Auf einen Punkt muss aber hingewiesen werden: In manchen Fällen ist gar kein Schluss bzw. nur ein *Pseudoschluss* möglich, weil die Relationen vollständig *unabhängig* voneinander sind, z. B. beim „Schluss“ von X ⌋ Y (entsprechend X) auf X ⌊ Y (entsprechend Y).

Auf quantitative Pseudoschlüsse bin ich schon in 2-2-3-5 eingegangen, aber hier geht es speziell um Pseudoschlüsse der *quantitativen Aussagen-Logik*.

$$p(X \rfloor Y) = \frac{a+b}{a+b+c+d} \qquad p(X \lfloor Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d}$$

Wenn $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$, was folgt daraus für $\frac{a+c}{a+b+c+d}$?

- $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$ $\qquad \frac{a+c}{a+b+c+d}$

a + b > 0, c + d = 0
1) Möglichkeit: p = 1
a > 0 (b = 0)
2) Möglichkeit: p = 0
a = 0 (b > 0)

- $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 0$ $\qquad \frac{a+c}{a+b+c+d}$

a + b = 0, c + d > 0
1) Möglichkeit: p = 1
c > 0 (d = 0)
2) Möglichkeit: p = 0
c = 0 (d > 0)

Man sieht: Wenn p(X ⌋ Y) = 1, kann p(X ⌊ Y) entweder 1 oder 0 sein. Wenn p(X ⌋ Y) = 0, kann p(X ⌊ Y) ebenfalls 1 oder 0 sein. Genau das bedeutet aber, dass p(X ⌊ Y) und p(X ⌋ Y) voneinander *unabhängig* sind. Und das verwundert nicht, denn sie entsprechen den *synthetischem* X bzw. Y.

Dagegen gilt für: $p(X \wedge Y)$ und $p(X -\!\!< Y)$ bzw. $p(X \wedge \neg Y)$:

$$p(X \wedge Y) = \frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \quad \text{und } p(X \wedge \neg Y) = \frac{b}{a+b+c+d} = \frac{s}{n}$$

$p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(X \wedge \neg Y) = 0$

Aber: $p(X \wedge Y) = 0 \longrightarrow p(X \wedge \neg Y) = 0$

Und: $p(X \wedge Y) = 0 \longrightarrow p(X \wedge \neg Y) = 1$

D. h. aus $p(X \wedge Y) = 1$ ist ein strenger Schluss auf $p(X \wedge \neg Y)$ abzuleiten, aus $p(X \wedge Y) = 0$ aber nicht.

Steckbrief eines Schlusses
Zur Übersichtlichkeit soll im Folgenden quasi der *Steckbrief* eines Schlusses dargestellt werden. Und zwar von der *Abtrennungsregel*: $X \wedge Y \Rightarrow Y$.

2-4-5-1 STRENGER SCHLUSS

□ qualitativ: $X \wedge Y \Rightarrow Y$
□ quantitativ: $p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$

□ Formel: $$\frac{a}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

Beispiel:
□ quantitativ: $p(X \wedge Y) = 5/5 \Rightarrow p(Y) = 5/5$

□ Formel: $$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{5}{5} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{5}{5}$$

2-4-5-2 UMKEHRUNG

Als quantitativen *Umkehr-Schluss* bezeichne ich in der deterministischen Aussagen-Logik einen Schluss mit doppelter Verneinung:
□ quantitativ: $p(\neg(X \wedge Y)) = 0 \Rightarrow p(\neg Y)) = 0$

□ Formel: $$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 0 \Rightarrow \frac{b+d}{a+b+c+d} = 0$$

Der Umkehr-Schluss ist äquivalent dem Ausgangs-Schluss:
$[p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1] \Leftrightarrow [p(\neg(X \wedge Y)) = 0 \Rightarrow p(\neg(X \wedge Y)) = 0]$

2-4-5-3 KONTRAPOSITION

Der *Umkehr-Schluss* darf nicht mit der *Kontraposition* verwechselt werden. Die Kontraposition lautet:
□ qualitativ: $\neg(X \wedge Y) \Leftarrow \neg Y$
□ quantitative: $p(X \wedge Y) = 0 \Leftarrow p(Y) = 0$

□ Formel: $$\frac{a}{a+b+c+d} = 0 \Leftarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 0$$

Auch die Kontraposition ist *äquivalent* dem Ausgangs-Schluss:
$[p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1] \Leftrightarrow [p(X \wedge Y) = 0 \Leftarrow p(Y) = 0]$

2-4-5-4 SEMI-ANALYTISCHE SCHLÜSSE

Wenn gilt: $p(X \wedge Y) = 1$, dann ergibt sich ein strenger Schluss für $p(Y)$, nämlich $p(Y) = 1$. Wenn aber $p(X \wedge Y) = 0$, dann gibt es nur folgende *semi-analytische* Schlüsse:

$$p(X \wedge Y) = 0 \longrightarrow p(Y) = 0$$
$$p(X \wedge Y) = 0 \longrightarrow p(Y) = 1$$

Man kann allerdings fragen, ob das noch Schlüsse zu nennen sind, denn wenn $p(X \wedge Y) = 0$ ist eben gar nichts Sicheres über $p(Y)$ abzuleiten.

2-4-5-5 KONTRADIKTIONEN

Wir wissen, dass eine aussagen-logische Implikation nur in dem Fall kontradiktorisch ist, dass von einer Tautologie auf eine Kontradiktion geschlossen wird.

$$\text{Tautologie} \not\Rightarrow \text{Kontradiktion}$$

Das hieße in der *quantitativen* Form:

$$p(\text{Tautologie}) = 1 \not\Rightarrow p(\text{Kontradiktion}) = 0$$

Denn wie erläutert, gilt immer $p(\text{Tautologie}) = 1$ und $p(\text{Kontradiktion}) = 0$.

Bei diesem Beispiel der *Abtrennungs-Regel* ist somit im Grunde gar keine Kontradiktion zu konstruieren, denn weder $p(X \wedge Y) = 1$ noch $p(X \wedge Y) = 0$ ist kontradiktorisch. Man könnte allenfalls z. B. angeben $p(X \wedge Y) = 1{,}5$, dies wäre jedoch in dem gegebenen Bezugsrahmen $0 \leq p \leq 1$ unmöglich, und solche irregulären Fälle lasse ich hier außer acht.

Stattdessen arbeitet man mit der *negativen Implikation* $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$.

Wenn gilt $p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$,
dann gilt $p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow \neg[p(Y) = 0]$. Und umgekehrt.

Anders sehen die Verhältnisse allerdings bei der *Positiv-Implikation* aus.
Hier kann man allgemein sagen:

Wenn $p(\Phi) = 1 \;{*}{\Rightarrow}\; p(\Psi) = 1$, dann: $p(\Phi) = 1 \;{*}{\not\Rightarrow}\; p(\Psi) = 0$

Wenn $p(\Phi) = 1 \;{*}{\Rightarrow}\; p(\Psi) = 0$, dann: $p(\Phi) = 1 \;{*}{\not\Rightarrow}\; p(\Psi) = 1$

Wenn $p(\Phi) = 0 \;{*}{\Rightarrow}\; p(\Psi) = 1$, dann: $p(\Phi) = 0 \;{*}{\not\Rightarrow}\; p(\Psi) = 0$

Wenn $p(\Phi) = 0 \;{*}{\Rightarrow}\; p(\Psi) = 0$, dann: $p(\Phi) = 0 \;{*}{\not\Rightarrow}\; p(\Psi) = 1$

2 – 5 QUANTITATIVE QUANTOREN-LOGIK

2-5-0 Einführung

2-5-0-1 FORMULIERUNGEN
Hier sollen zunächst die quantoren-logischen Grundstrukturen dargestellt werden. Ich werde zur besseren Veranschaulichung neben die *quantitative* Form auch die normale *quantoren-logische* Form stellen.

Im Einzelnen geht es um 8 Möglichkeiten: Dabei bestehen folgende analytische Äquivalenzen (in normaler Sprache und formal):

- Alle ⇔ nicht einige nicht
  $\Lambda \Leftrightarrow \neg V \neg$
  $p(X) = 1 \Leftrightarrow p(\neg X) = 0$
- Alle nicht ⇔ nicht einige
  $\Lambda\neg \Leftrightarrow \neg V$
  $p(X) = 0 \Leftrightarrow p(\neg X) = 1$
- Nicht alle ⇔ einige nicht
  $\neg\Lambda \Leftrightarrow V\neg$
  $p(X) < 1 \Leftrightarrow p(\neg X) > 0$
- Nicht alle nicht ⇔ einige
  $\neg\Lambda\neg \Leftrightarrow V$
  $p(\neg X) < 1 \Leftrightarrow p(X) > 0$

Negationen
Es gilt, verschiedene *Negationen* zu unterscheiden:

kontradiktorische Verneinung	$\neg\Lambda$	$p < 1$
konträre Verneinung	$\Lambda\neg$	$p = 0$
doppelte Verneinung	$\neg\Lambda\neg$	$p > 0$

Die doppelte Verneinung ist allerdings keine echte Verneinung, denn: $\Lambda \Rightarrow \neg\Lambda\neg$.

Es stehen sich also folgende Größen *kontradiktorisch* gegenüber:
Λ: $p = 1$ >< $\neg\Lambda$: $p < 1$
$\Lambda\neg$: $p = 0$ >< $\neg\Lambda\neg$: $p > 0$

Entsprechendes gilt für „einige“.

Wichtig ist hier, den Unterschied zur *Aussagen-Logik* zu sehen: aussagen-logisch gibt es (im strengen Sinn) nur *eine* Verneinung.

	Position	Negation 1	Negation 2
Aussagen-Logik	$X \rightarrow Y$	$\neg(X \rightarrow Y)$	
Quantoren-Logik	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$\neg\Lambda(X \rightarrow Y)$
Quantitativ	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$p(X \rightarrow Y) < 1$

Dabei gilt aber, wie schon in 1-5-0-5 erläutert: Innerhalb der – quantitativen – *Aussagen-Logik* ist $p(X \rightarrow Y) = 0$ *kontradiktorische* Negation von $p(X \rightarrow Y) = 1$. Innerhalb der – quantitativen – *Quantoren-Logik* ist aber $p(X \rightarrow Y) = 0$ *konträre* Negation von $p(X \rightarrow Y) = 1$, denn die kontradiktorische Negation ist hier $p(X \rightarrow Y) < 1$.

2-5-0-2 QUANTOREN-LOGIK GEGEN AUSAGEN-LOGIK

Ich habe schon grundsätzlich dargelegt, dass man die Quantoren-Logik als eine *Erweiterung* der Aussagen-Logik verstehen kann. Insofern gilt:

- alle Gesetze der Aussagen-Logik gelten auch in der Quantoren-Logik
- es gibt spezifische Gesetze der Quantoren-Logik, die in der Aussagen-Logik nicht darstellbar sind (dies sind genau die, welche den Partikulär- oder Existenz-Quantor verwenden)

Anbei ein Beispiel für die Darstellung eines Gesetzes in aussagen-logischer und quantoren-logischer Form:

z. B. aussagen-logisch: $X \wedge Y \Rightarrow Y$
quantoren-logisch: $\Lambda x(Fx \wedge Gx) \Rightarrow \Lambda x(Gx)$
quantoren-logisch quantifiziert: $p(Fx \wedge Gx) = 1 \Rightarrow p(Gx) = 1$

2-5-0-3 LOGISCHES QUADRAT

Die wichtigsten analytischen *klassen-logischen* Relationen behandelt das sogenannte *logische Quadrat*, das in einer normalen quantoren-logischen Form schon eingeführt wurde.

alle $p = 1$	$^{+}|^{+}$	alle$\neg$ $p = 0$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
einige $p > 0$	$^{+}\vee^{+}$	einige$\neg$ $p < 1$

Das Zeichen $^{+}{>}{<}^{+}$ in der Mitte bezieht sich auf *beide* Diagonalen:

1. alle $^{+}{>}{<}^{+}$ einige$\neg$ 2. alle$\neg$ $^{+}{>}{<}^{+}$ einige

Zur Erinnerung die *Wahrheitsverläufe* der oben genannten Junktoren bzw. Relatoren:

X	Y	$\wedge$	$\vee$	$><$	$|$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
+	+	+	+	–	–	+	+
+	–	–	+	+	+	–	–
–	+	–	+	+	+	+	–
–	–	–	–	–	+	+	+

2-5-0-4 EINFACHE RELATIONEN

Einfache Relationen sind solche mit *einer* Prädikat-Variablen wie Λx(Fx) im Gegensatz zu *komplexen* Relationen mit zwei oder mehr Prädikat-Variablen wie Λx(Fx → Gx). Man kann sie quantitativ mit *Individuenvariable* x und *Prädikatvariable* F schreiben, z. B. p(Fx) = 1. Übersichtlicher ist aber, sie nur mit der *neutralen* Variable X zu schreiben: p(X) = 1.

Die logischen Verbindungen zwischen den Quantoren lassen sich für einfache Sätze bzw. Relationen unproblematisch im logischen Quadrat darstellen (aus Platzgründen wird das „Quadrat" oft nur als *Rechteck* dargestellt, so auch bei mir).

Darstellung Quantoren-Logik

$$\begin{array}{ccc} p(X) = 1 & {}^{+}|^{+} & p(X) = 0 \\ \Downarrow & {}^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\ p(X) > 0 & {}^{+}\vee^{+} & p(X) < 1 \end{array}$$

Anstelle p(X) = 0 könnte man auch p(¬X) = 1 schreiben u. ä., das würde der quantorenlogischen Grundform Λ¬(X) mehr entsprechen. In der quantitativen Form ist aber die obige Darstellung am übersichtlichsten.

Durch Verwendung einer spezifischen *Individuen-Konstante* x_i sind z.B. folgende Schlüsse möglich: p(Fx) = 1 ⇒ Fx_i. Das ist folgendermaßen zu deuten: „Wenn alle x die Eigenschaft F haben, dann hat auch ein beliebiges x die Eigenschaft F". Ähnlich z. B. Fx_i ⇒ p(Fx) > 0. Man könnte auch $p(Fx_i) = 1$ statt Fx_i schreiben, dies wäre aber zu interpretieren (1-4-5-3).

Außerdem sind von Bedeutung:
analytische Relationen zwischen *relativen* Häufigkeiten (p) und *absoluten* Häufigkeiten (q):

- p(X) = 1 ⇒ q(X) > 0 oder : p(X) = 1 ⇒ q(X) ≥ 1
  Wenn alle Objekte X sind, dann gibt es mehr als 0 Objekte (bzw. mindestens 1 Objekt), die X sind. Die 1 hat bei p natürlich eine ganz andere Bedeutung als bei q, bei p steht sie für 100%, bei q für genau *ein* Objekt. Zur Unterscheidung könnte man bei p immer *dezimal* 1,00 bzw. 0,00 schreiben, was aber eher unübersichtlich sein dürfte.
  Es gilt auch die Kontraposition: q(X) = 0 ⇒ p(X) < 1.
- p(X) > 0 ⇒ q(X) > 0 oder : p(X) > 0 ⇒ q(X) ≥ 1
  Kontraposition: q(X) = 0 ⇒ p(X) = 0
- p(X) = 0 ⇒ q(X) = 0
  Kontraposition: q(X) > 0 ⇒ p(X) > 0. Dies ist korrekt, wenn allerdings p z. B. nur 1/1000000 beträgt (also q = 1), kann man auch sagen: p ≈ 0.
- p(X) < 1
  Aus p(X) < 1 lässt sich nichts über q(X) ableiten. q(X) kann 0 sein, 1 oder beliebig groß. Es muss nur gewährleistet sein, dass q(X) < [q(X) + q(¬X)].

Ich habe mich oben auf die logische *Implikation* ⇒ beschränkt. Es gilt aber verstärkt die logische *Äquivalenz*: p(X) > 0 ⇔ q(X) > 0. In Formeln:

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} > 0 \Leftrightarrow a+b > 0.$$

2-5-0-5 WAHRHEITS-TAFELN

In der Aussagen-Logik kann die Gültigkeit einer Relation durch die *Wahrheitstafeln* überprüfen. Dabei ergibt sich die Gültigkeit der Gesamt-Relation aus der Gültigkeit der Einzel-Relationen bzw. Einzelfaktoren.

In der Quantoren-Logik ist das schwieriger. Es gibt verschiedene Möglichkeiten (siehe genauer in 2-2-0-5).

• *Strenger (analytischer) Schluss*

Als Beispiel wähle ich wieder Λx(Fx) ⇒ Vx(Fx). Für den Schluss Λx(Fx) ⇒ Vx(Fx) ging ich zunächst von folgendem Modell einer *systematischen* Wahrheitstafel aus:

Λx(Fx)	[⇒]	Vx(Fx)
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	+	−

Ich verwendete dann – analog zur Aussagen-Logik – folgende *reale* Wahrheitstafel:

Λx(Fx)	⇒	Vx(Fx)
+	+	+
−	+	+
−	+	+
−	+	−

Es geht nun darum, das + und das − unter den Quantoren präzise zu bestimmen.

In der quantitativen Quantoren-Logik stehen + und − in der Wahrheitstafel nämlich nicht wie bei der Aussagen-Logik einfach für „ja“ (bzw. $p = 1$) und „nein“ (bzw. $p = 0$), sondern sie müssen folgendermaßen gedeutet werden:

Λx(Fx)	Vx(Fx)
+: $p = 1$	+: $p > 0$
−: $p < 1$	−: $p = 0$

Somit ergibt sich folgende quantitativ-quantoren-logische (normale) Wahrheitstafel:

$p(X) = 1$	⇒	$p(X) > 0$
$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$		$\frac{a+b}{a+b+c+d} > 0$
+ ($p = 1$)	+	+ ($p > 0$)
− ($p < 1$)	+	+ ($p > 0$)
− ($p < 1$)	+	+ ($p > 0$)
− ($p < 1$)	+	− ($p = 0$)

Daraus ergeben sich folgende Einzel-Relationen bei einer *konjunktiven* Interpretation:

$[p(X) = 1 \wedge p(X) > 0] \;\Rightarrow\; [p(X) = 1 \;\Rightarrow\; p(X) > 0]$
$[p(X) < 1 \wedge p(X) > 0] \;\Rightarrow\; [p(X) = 1 \;\Rightarrow\; p(X) > 0]$
$[p(X) < 1 \wedge p(X) > 0] \;\Rightarrow\; [p(X) = 1 \;\Rightarrow\; p(X) > 0]$
$[p(X) < 1 \wedge p(X) = 0] \;\Rightarrow\; [p(X) = 1 \;\Rightarrow\; p(X) > 0]$

Diese Relationen müssen alle *Tautologien* sein, weil $p(X) = 1 \;\Rightarrow\; p(X) > 0$ ja eine Tautologie ist und jeder Schluss auf eine Tautologie seinerseits eine Tautologie ist (bei der normalen Implikation): $\Phi \Rightarrow$ Tautologie.

Nun zur *implikativen* (realen) Wahrheitstafel: Sie gibt an: wenn die Prämisse den Wert $p = 1$ (oder $p < 1$) hat, folgt dann daraus notwendig (+), möglicherweise (±) oder unmöglich (–), dass der Schluss-Satz den Wert $p > 0$ (oder $p = 0$) hat.

$p(X) = 1$	$\Rightarrow$	$p(X) > 0$	
$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$		$\frac{a+b}{a+b+c+d} > 0$	
+ (p = 1)	+	+ (p > 0)	$p(X) = 1 \;\Rightarrow\; p(X) > 0$
− (p < 1)	±	+ (p > 0)	$p(X) < 1 \longrightarrow p(X) > 0$
− (p < 1)	±	+ (p > 0)	$p(X) < 1 \longrightarrow p(X) > 0$
− (p < 1)	±	− (p = 0)	$p(X) < 1 \longrightarrow p(X) = 0$

Interpretation:

1. Zeile: Aus $p(X) = 1$ folgt notwendig $p(X) > 0$.
2. Zeile: Aus $p(X) < 1$ folgt möglicherweise $p(X) > 0$
3. Zeile: ist gleich der 2. Zeile
4. Zeile: Aus $p(X) < 1$ folgt möglicherweise $p(X) = 0$

Das „möglicherweise“ in der 3./4. Zeile entspricht der Tatsache, dass aus $p(X) < 1$ nichts Sicheres darüber folgt, ob $p(X) > 0$ oder $p(X) = 0$ gilt.

• Semi-analytischer Schluss

Hier wähle ich als Beispiel $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$. Zunächst die *normale*, *reale* Tafel:

$Vx(Fx)$	$\longrightarrow$	$\Lambda x(Fx)$
$\frac{a+b}{a+b+c+d} > 0$		$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$
+ (p > 0)	+	+ (p = 1)
+ (p > 0)	−	− (p < 1)
+ (p > 0)	−	− (p < 1)
− (p = 0)	+	− (p < 1)

Jetzt die *implikative*, reale Tafel:

$p(X) > 0$	$\longrightarrow$	$p(X) = 1$	
$\dfrac{a+b}{a+b+c+d} > 0$		$\dfrac{a+b}{a+b+c+d} = 1$	
$+ \ (p > 0)$	$\pm$	$+ \ (p = 1)$	$p(X) > 0 \longrightarrow p(X) = 1$
$+ \ (p > 0)$	$\pm$	$- \ (p < 1)$	$p(X) > 0 \longrightarrow p(X) < 1$
$+ \ (p > 0)$	$\pm$	$- \ (p < 1)$	$p(X) > 0 \longrightarrow p(X) < 1$
$- \ (p = 0)$	$+$	$- \ (p < 1)$	$p(X) = 0 \Rightarrow p(X) < 1$

2-5-1 Implikation

2-5-1-1 TAUTOLOGIE

Typische *quantitative quantoren-logische* Schlüsse sind solche, bei denen die Werte $p < 1$ und $p < 0$ vorkommen. Denn Schlüsse nur mit $p = 1$ oder $p = 0$ können bereits in der *quantitativen Aussagen-Logik* dargestellt werden. Ich wähle hier nur spezifisch quantoren-logische (quantitative) Schlüsse, mit folgenden Strukturen:

• $p < 1 \Rightarrow p < 1$ • $p < 1 \Rightarrow p > 0$ • $p > 0 \Rightarrow p > 0$
• $p = 1 \Rightarrow p > 0$ • $p = 0 \Rightarrow p < 1$

Andere Strukturen wie $p = 0 \Rightarrow p > 0$ oder $p = 1 \Rightarrow p < 1$ entsprechend.

• $p < 1 \Rightarrow p < 1$

Eine Prämisse: Beispiel: $\neg\Lambda x(Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \wedge Gx)$

□ quantoren-logisch: $\neg\Lambda(Y) \Rightarrow \neg\Lambda(X \wedge Y)$

□ quantitativ: $p(Y) < 1 \Rightarrow p(X \wedge Y) < 1$

□ Bruch: $\dfrac{a+c}{a+b+c+d} < 1 \Rightarrow \dfrac{a}{a+b+c+d} < 1$

Kurz-Erläuterung: Aus dem ersten Bruch ergibt sich: $b + d > 0$. Damit muss aber auch der abgeleitete Bruch den Wert $p < 1$ haben.

• $p > 0 \Rightarrow p > 0$

Zwei Prämissen. Beispiel analog Modus ponens: $Vx(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Gx)$

□ quantoren-logisch: $V(X \rightarrow Y) \wedge \Lambda(X) \Rightarrow V(Y)$

□ quantitativ: $p(X \rightarrow Y) > 0 \wedge p(X) = 1 \Rightarrow p(Y) > 0$

□ Bruch: $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0 \wedge \dfrac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \dfrac{a+c}{a+b+c+d} > 0$

Erläuterung:
Aus dem ersten Bruch ergibt sich: a + c + d > 0.
Aus dem zweiten Bruch ergibt sich: c + d = 0
Somit ergibt sich aus beiden Brüchen zusammen: a > 0.
Also ergibt sich für den abgeleiteten dritten Bruch der Wert p > 0.

Eine Prämisse. Beispiel: $\mathrm{V}x(Gx) \Rightarrow \mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx))$
 quantoren-logisch: $\mathrm{V}(Y) \Rightarrow \mathrm{V}(X \rightarrow Y)$
 quantitativ: $p(Y) > 0 \Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0$

 Bruch: $$\frac{a+c}{a+b+c+d} > 0 \Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$$

Erläuterung: Der Schluss ist unmittelbar einleuchtend.

• $p < 1 \Rightarrow p > 0$
Eine Prämisse. Beispiel: $\neg\Lambda x(Gx) \Rightarrow \mathrm{V}x(Fx \leftarrow Gx)$
 quantoren-logisch: $\neg\Lambda(Y) \Rightarrow \mathrm{V}(X \leftarrow Y)$
 quantitativ: $p(Y) < 1 \Rightarrow p(X \leftarrow Y) > 0$

 Bruch: $$\frac{a+c}{a+b+c+d} < 1 \Rightarrow \frac{a+b+d}{a+b+c+d} > 0$$

Erläuterung: Aus dem ersten Bruch folgt: b + d > 0
Folglich muss der abgeleitete zweite Bruch den Wert p > 0 haben.

• $p = 1 \Rightarrow p > 0$
Zwei Prämissen.
Beispiel analog Modus ponens: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \mathrm{V}x(Fx) \Rightarrow \mathrm{V}x(Gx)$
 quantoren-logisch: $\Lambda(X \rightarrow Y) \wedge \mathrm{V}(X) \Rightarrow \mathrm{V}(Y)$
 quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = 1 \wedge p(X) > 0 \Rightarrow p(Y) > 0$

 Bruch: $$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \wedge \frac{a+b}{a+b+c+d} > 0 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} > 0$$

Erläuterung:
Aus dem ersten Bruch ergibt sich: a + c + d > 0, b = 0.
Aus dem zweiten Bruch ergibt sich u. a.: a + b > 0
Somit ergibt sich aus beiden Brüchen zusammen: a > 0.
Also ergibt sich für den abgeleiteten dritten Bruch der Wert p > 0.

Eine Prämisse. Beispiel: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx)$
 quantoren-logisch: $\Lambda(X \rightarrow Y) \Rightarrow \mathrm{V}(X \rightarrow Y)$
 quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = 1 \Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0$

 Bruch: $$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$$

Eine Erläuterung dürfte sich erübrigen.

• $p = 0 \;\Rightarrow\; p < 1$

Eine Prämisse. Beispiel: $\Lambda x\neg(Fx \to Gx) \;\Rightarrow V x\neg(Fx \to Gx)$

□ quantoren-logisch: $\Lambda\neg(X \to Y) \Rightarrow V\neg(X \to Y)$

□ quantitativ: $p(X \to Y) = 0 \;\Rightarrow\; p(X \to Y) < 1$

□ Bruch: $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$

Erläuterung erübrigt sich.

2-5-1-2 KONTRADIKTION

Hier sei daran erinnert, dass die Implikation nur kontradiktorisch ist, wenn von einer Tautologie auf eine Kontradiktion geschlossen wird: also Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion

• Beispiel für klassische quantoren-logische Kontradiktion

quantoren-logisch: $\Lambda x(Fx \;{}^{+}\!\vee^{+} \neg Fx) \;\not\Rightarrow\; Vx(Fx \;{}^{-}\!\wedge^{-} \neg Fx)$

quantitativ: $p(X \;{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) = 1 \;\not\Rightarrow\; p(Y \;{}^{-}\!\wedge^{-} \neg Y) > 0$.

Ein Quantor ändert bei einer einzelnen Relation nichts daran, ob sie synthetisch, semi-analytisch oder analytisch, und zwar tautologisch bzw. kontradiktorisch ist.

Andererseits wurde schon darauf hingewiesen, dass es *logisch falsche Folgen* gibt, die sich aber bei Verwendung der normalen Implikation nicht als kontradiktorisch auffassen lassen.

Hier verwendet man i. allg. am besten: $\Rightarrow \neg$

• Beispiel für die negative, tautologische Implikation

$p(X) = 1 \;\Rightarrow \neg[p(X) < 1]$. Nun gilt aber laut quantoren-logischer Definition:

$\neg[p(X) < 1] \Leftrightarrow p(X) = 1$. Somit gilt also auch die *Äquivalenz*.

2-5-1-3 SEMI-ANALYTISCH

Z. B.: $p(X \to Y) = 1 \;\longrightarrow\; p(X \wedge Y) > 0$

Als wesentliche Gesetze der traditionellen Quantoren-Logik gelten:

alle $\Rightarrow$ einige und alle$\neg$ $\Rightarrow$ einige$\neg$

In der Formalisierung $\Lambda x(Fx \to Gx) \;\Rightarrow Vx(Fx \to Gx)$ gilt dieses Gesetz bei der Verwendung der Implikation. Wie beschrieben, findet man aber am häufigsten in der logischen bzw. wissenschaftstheoretischen Literatur folgende Formalisierungen:

sprachlich	quantoren-logisch	quantitativ
Alle F sind G:	$\Lambda x(Fx \to Gx)$	$p(X \to Y) = 1$
Einige F sind G:	$Vx(Fx \wedge Gx)$	$p(X \wedge Y) > 0$
Alle F sind nicht G:	$\Lambda x(Fx \to \neg Gx)$	$p(X \to \neg Y) = 1$
Einige F sind nicht G:	$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$	$p(X \wedge \neg Y) > 0$

Bei diesen Formalisierungen ist der Schluss von „alle“ auf „einige“ aber *nur semi-analytisch*, nicht streng analytisch. Es gilt also:

„alle $\neg\!\Rightarrow$ einige“ bzw. „alle $\longrightarrow$ einige“ (und entsprechend), konkret bedeutet das:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ bzw.

$p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \longrightarrow \frac{a}{a+b+c+d} > 0$$

Begründung: Aus dem ersten Bruch ergibt sich: a + c + d > 0. Daraus folgt aber nicht notwendig, dass a > 0. Es kann auch gelten a = 0, es reicht, dass c + d > 0.

Entsprechend ließe sich beweisen:
$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge \neg Gx)$ bzw.
$p(X \rightarrow \neg Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge \neg Y) > 0$

Da die Gesetze „alle $\Rightarrow$ einige“ und „alle¬ $\Rightarrow$ einige¬„ aber wesentlich für die Bedeutung von *alle* und *einige* sind, muss man die oben genannte Interpretation von *All-Sätzen* und *Partikulär-Sätzen* als sehr problematisch einstufen, wie auch schon an früherer Stelle aufgezeigt wurde.

2-5-1-4 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Replikation* gilt im Wesentlichen das für die Implikation gesagte, daher soll hier auf eine gesonderte Darstellung verzichtet werden.

Die wichtigsten quantoren-logischen *Äquivalenzen* sind die *Umformungen* von Relationen mit dem *All-Quantor* in solche mit dem *Partikulär-Quantor*. Allerdings kann man anstatt von Äquivalenzen auch von *Definitionen* ausgehen, was aber logisch kaum einen Unterschied macht, beide gelten *notwendig*, allerdings die einen *formal*, die anderen *material*.

Ich wähle hier die übliche und die vereinfachte Darstellung, also p(Fx) und p(X):

- Alle $\Leftrightarrow$ nicht einige nicht
$\Lambda \Leftrightarrow \neg V \neg$
$p(X) = 1 \Leftrightarrow p(\neg X) = 0$
$p(Fx) = 1 \Leftrightarrow p(\neg Fx) = 0$

- Alle nicht $\Leftrightarrow$ nicht einige
$\Lambda \neg \Leftrightarrow \neg V$
$p(X) = 0 \Leftrightarrow p(\neg X) = 1$
$p(Fx) = 0 \Leftrightarrow p(\neg Fx) = 1$

- Nicht alle $\Leftrightarrow$ einige nicht
$\neg \Lambda \Leftrightarrow V \neg$
$p(X) < 1 \Leftrightarrow p(\neg X) > 0$
$p(Fx) < 1 \Leftrightarrow p(\neg Fx) > 0$

- Nicht alle nicht $\Leftrightarrow$ einige
$\neg \Lambda \neg \Leftrightarrow V$
$p(\neg X) < 1 \Leftrightarrow p(X) > 0$
$p(\neg Fx) <1 \Leftrightarrow p(Fx) > 0$

2-5-1-5 SYLLOGISMUS

Mit *Syllogismus* bezeichnet man traditionell eine *Quantoren-Logik*, die mit 3 Variablen (M, S und P) operiert – und nicht mit 2, wie bisher dargestellt.

Der Syllogismus arbeitet auch mit den vier genannten Sätzen bzw. Relationen – bei ihm heißen sie *Urteile*. Er benennt sie mit den Buchstaben a, e, i, o:

a:	z. B.: S a P:	alle S sind P
e:	z. B.: S e P	alle S sind nicht P
i:	z. B.: S i P	einige S sind P
o:	z. B.: S o P	einige S sind nicht P

Ein Syllogismus ist z. B.:

- syllogistisch: M a P $\wedge$ S a M $\Rightarrow$ S a P
- quantoren-logisch: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Hx \rightarrow Fx) \Rightarrow \Lambda x(Hx \rightarrow Gx)$
- quantitativ: $p(Fx \rightarrow Gx) = 1 \wedge p(Hx \rightarrow Fx) = 1 \Rightarrow p(Hx \rightarrow Gx) = 1$.

Ich analysiere im Folgenden einen Schluss mit syllogistischer Form, der *nicht* als gültiger Syllogismus gilt, doch bei Verwendung der (normalen) Implikation folgerichtig ist:

- syllogistisch: M i P $\wedge$ S a M $\longrightarrow$ S i P (kein strenger Schluss)
- quantoren-logisch: $Vx(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Hx \rightarrow Fx) \Rightarrow Vx(Hx \rightarrow Gx)$
- quantitativ: $p(Fx \rightarrow Gx) > 0 \wedge p(Hx \rightarrow Fx) = 1 \Rightarrow p(Hx \rightarrow Gx) > 0$.

Schreiben wir vereinfacht für Fx: X, für Gx: Y, für Hx: Z.
Dann ergibt sich: $V(X \rightarrow Y) \wedge \Lambda(Z \rightarrow X) \Rightarrow V(Z \rightarrow Y)$.

In *quantifizierter* Form lautet der Schluss:

$$p(X \rightarrow Y) > 0 \quad \wedge \quad p(Z \rightarrow X) = 1 \Rightarrow p(Z \rightarrow Y) > 0$$

So ergeben sich folgende Formeln (vgl. zur Konstruktion der Formeln 1-3-1-5):

(1) $p(X \rightarrow Y) > 0$ $$\frac{a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} > 0$$

(2) $p(Z \rightarrow X) = 1$ $$\frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$$

(3) $p(Z \rightarrow Y) > 0$ $$\frac{a_1 + a_2 + b_2 + c_1 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} > 0$$

Begründung:

(1) Aus $p(X \rightarrow Y) = 1$ ergibt sich: $a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2 > 0$

(2) Aus $p(Z \rightarrow X) = 1$ ergibt sich: $c_1 + d_1 = 0$

Aus (1) und (2) ergibt sich: $a_1 + a_2 + c_2 + d_2 > 0$

Dies bedeutet für die Konklusion (3) $p(Z \rightarrow Y)$:

Sie muss > 0 sein, denn sie enthält im Zähler alle oben aufgeführten 4 Elemente: $a_1 + a_2 + c_2 + d_2$, zusätzlich noch b_2 (c_1 kann man streichen, weil es den Wert 0 hat). Also:

$$\frac{a_1 + a_2 + b_2 \ + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} > 0$$

Wenn man im Nenner c_1 und d_1 streicht, weil beide den Wert 0 haben, ergibt sich:

$$\frac{a_1 + a_2 + b_2 \ + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_2 + d_2} > 0$$

Es könnte dabei theoretisch sein, dass z. B. nur $a_1 > 0$ und alle anderen Parameter = 0 sind, aber man kann aus den Formeln eben nicht die Werte für *alle* Variablen abzuleiten, sie bleiben diesbezüglich *unbestimmt*.

Man beachte den Unterschied: Wenn gilt z. B. a + b = 4, kann natürlich nur a = 4 oder nur b = 4 sein (bzw. eine andere Aufteilung vorliegen); wenn a + b = 0, ist a = 0 *und* b = 0.

2-5-2 Positiv-Implikation

2-5-2-1 TAUTOLOGIE

Zum großen Teil gelten die gleichen Schlüsse wie bei der *normalen Implikation*.

Z. B.: der Modus ponens

Λx(Fx *→ Gx) ∧ Λx(Fx) *⇒ Λx(Gx)

p(Fx *→ Gx) = 1 ∧ p(Fx) = 1 *⇒ p(Gx) = 1

$$\frac{a}{a+b} = 1 \ \wedge \ \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \ \ {*}\Rightarrow \ \ \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

Allerdings gibt es auch Unterschiede. So gilt bei der *Positiv-Implikation* das Gesetz:

Λx(Fx *→ Gx) *⇒ Vx(Fx ←* Gx)

p(Fx *→ Gx) = 1 *⇒ p(Fx ←* Gx) > 0

$$\frac{a}{a+b} = 1 \ \ {*}\Rightarrow \ \ \frac{a}{a+c} > 0$$

Dies gilt nicht bei der *Normal-Implikation*, hier ist nur ein *partieller Schluss* möglich:

p(Fx → Gx) = 1 ⟶ p(Fx ← Gx) > 0

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \ \longrightarrow \ \frac{a+b+d}{a+b+c+d} > 0$$

Aus dem ersten Bruch ergibt sich: a + c + d > 0, b = 0.

Es wäre also möglich, dass a + d = 0 und nur c > 0. In diesem Fall wäre der zweite Bruch, wäre p(Fx ← Gx) = 0. Allerdings, wenn a + d > 0 und c = 0, dann p(Fx ← Gx) = 1.

Dennoch sind p(Fx → Gx) und p(Fx ← Gx) nicht voneinander unabhängig, vor allem können sie nicht beide den Wert p = 0 haben.

2-5-2-2 KONTRADIKTION

Wie in 2-1-2-2 ausgeführt wurde, gilt bei der Kontradiktion für die *Positiv-Implikation* anderes als für die *normale Implikation:* sie ist nicht nur kontradiktorisch, wenn das Vorderglied tautologisch und das Nachglied kontradiktorisch ist. Sondern überhaupt, wenn das Nachglied die Negation des Vorderglieds bedeutet, also: Position $*\not\Rightarrow$ Negation.

Dabei ist zu bedenken: Genauso wie gilt, eine Positiv-Implikation ist *tautologisch*, wenn unter dem Zentral-Relator außer + nur □ (undefiniert) steht, so gilt: Die Positiv-Implikation ist *kontradiktorisch*, wenn unter dem Zentral-Relator außer – nur □ steht.

Beispiele für Kontradiktionen sind (in quantoren-logischer und quantitativer Form):

$$\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx) \;\; *\!\not\Rightarrow \neg\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)$$
$$p(Fx *\!\rightarrow Gx) = 1 \;\; *\!\not\Rightarrow p(Fx *\!\rightarrow Gx) < 1$$

$$Vx(Fx *\!\rightarrow Gx) \;\; *\!\not\Rightarrow \neg Vx(Fx *\!\rightarrow Gx)$$
$$p(Fx *\!\rightarrow Gx) > 0 \;\; *\!\not\Rightarrow \;\; p(Fx *\!\rightarrow Gx) = 0$$

Diese Kontradiktionen gelten auch, wenn als Teil-Relationen die *normale Implikation* fungiert, also z. B.:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \;\; *\!\not\Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$$
$$p(Fx \rightarrow Gx) = 1 \;\; *\!\not\Rightarrow \;\; p(Fx \rightarrow Gx) < 1$$

2-5-2-3 SEMI-ANALYTISCH

Ein typischer semi-analytischer quantoren-logischer Schluss ist der von „einige“ auf „alle“, also z. B.: „Wenn *einige* Menschen Philosophen sind, dann sind *alle* Menschen Philosophen“. Das ist zwar nicht kontradiktorisch, aber auch nicht streng folgerichtig.

$$Vx(Fx *\!\rightarrow Gx) \;\; *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)$$
$$p(Fx *\!\rightarrow Gx) > 0 \;\; *\!\longrightarrow \;\; p(Fx *\!\rightarrow Gx) = 1$$

$$\frac{a}{a+b} > 0 \;\; *\!\longrightarrow \;\; \frac{a}{a+b} = 1$$ b kann 0 sein, muss aber nicht 0 sein.

Andere semi-analytische Schlüsse sind:

$$Vx(Fx *\!\rightarrow Gx) \;\; *\!\longrightarrow \neg\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)$$
$$p(Fx *\!\rightarrow Gx) > 0 \;\; *\!\longrightarrow p(Fx *\!\rightarrow Gx) < 1$$

$$Vx(Fx *\!\rightarrow Gx) \;\; *\!\longrightarrow Vx\neg(Fx *\!\rightarrow Gx)$$
$$p(Fx *\!\rightarrow Gx) > 0 \;\; *\!\longrightarrow p(Fx *\!\rightarrow Gx) < 1$$

Diese oben genannten *semi-analytischen* Schlüsse sind übrigens mit der normalen Implikation ebenfalls semi-analytisch gültig.

2-5-2-4 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Positiv-Äquivalenz* gelten quantoren-logisch überwiegend die Äquivalenzen der normalen Äquivalenz, etwa die klassischen Umformungen der Quantoren, hier in ausführlicher Schreibweise mit *Individuenvariable* ‚x’:

Alle	nicht einige nicht	$\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow \neg Vx\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
		$p(Fx *\!\!\rightarrow Gx) = 1$	$\Leftrightarrow \neg(p(Fx *\!\!\rightarrow Gx)) < 1$
Alle nicht	nicht einige	$\Lambda\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow \neg V(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
		$p(Fx *\!\!\rightarrow Gx) = 0$	$\Leftrightarrow \neg(p(Fx *\!\!\rightarrow Gx)) > 0$
Nicht alle	einige nicht	$\neg\Lambda(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow V\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
		$\neg(p(Fx *\!\!\rightarrow Gx) = 1$	$\Leftrightarrow p(Fx *\!\!\rightarrow Gx) < 1$
Nicht alle Nicht	einige	$\neg\Lambda\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow V(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
		$\neg(p(Fx *\!\!\rightarrow Gx)) = 0$	$\Leftrightarrow p(Fx *\!\!\rightarrow Gx) > 0$

In der Hauptversion der Positiv-Implikation (*Existenz-Ansatz*) gilt:

$$(X *\!\!\rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg(X *\!\!\rightarrow \neg Y)$$

Umgesetzt in Quantoren-Logik:

$$\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg Vx(Fx *\!\!\rightarrow \neg Gx)$$

Umgesetzt in quantitative Logik:

$$p(Fx *\!\!\rightarrow Gx) = 1 \Leftrightarrow \neg(p(Fx *\!\!\rightarrow \neg Gx) > 0$$

Zur Erläuterung:

Es gilt: $\frac{a}{a+b} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 0$ Dann gilt auch: $\frac{a}{a+b} = 1 \Leftrightarrow \neg(\frac{b}{a+b} > 0)$

Wenn man dies berücksichtigt, kann man die obigen Äquivalenzen auch anders formulieren.

Die *Positiv-Replikation* $\leftarrow\!*$ weist keine Besonderheiten auf, weshalb hier nicht gesondert auf sie einzugehen ist.

2-5-2-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Folgende Beziehungen bestehen zwischen Implikation und Positiv-Implikation (ich verwende dabei als Zentral-Relator die *normale* Implikation, weil nämlich hier die *Kontraposition* gilt.)

$$\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$$

Kontraposition: $\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$

Man kann allerdings vertreten, dass sogar die *Äquivalenz* gilt:

$$\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$$

Hier kann man auf die quantitative Darstellung verzichten, denn sie wurde bereits bei der Quantifizierung der Aussagen-Logik dargestellt.

$$Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$$

$$p(Fx *\!\!\rightarrow Gx) > 0 \Rightarrow p(Fx \rightarrow Gx) > 0$$

$$\frac{a}{a+b} > 0 \Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$$

Kontraposition:

$$\neg Vx(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \neg Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$$

$$p(Fx \rightarrow Gx) = 0 \Rightarrow p(Fx *\!\!\rightarrow Gx) = 0$$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{a+b} = 0$$

2-5-3 Systematik

Ich komme zurück auf die *5 Modelle* quantoren-logischer Relationen, die bereits mehrfach, zuletzt in 2-2-3 vorgestellt wurden. Es ist hier zu prüfen, inwieweit die anerkannten Gesetzmäßigkeiten des *logischen Quadrats* gelten. Ich verwende hier zur besseren Vergleichbarkeit die Form mit *Individuenvariable*, z. B. p(Fx $\rightarrow$ Gx) = 1 und nicht die vereinfachte Form wie p(X $\rightarrow$ Y) = 1. Zunächst sei noch einmal das *logische Quadrat* dargestellt.

alle p = 1	$^{+}\vert^{+}$	alle$\neg$ p = 0
$\Downarrow$	$^{+}{><}^{+}$	$\Downarrow$
einige p > 0	$^{+}\vee^{+}$	einige$\neg$ p < 1

2-5-3-1 MODELL 1: IMPLIKATION

p(Fx $\rightarrow$ Gx) = 1	$^{+}\vert^{+}$	p(Fx $\rightarrow$ Gx) = 0
$\Downarrow$	$^{+}{><}^{+}$	$\Downarrow$
p(Fx $\rightarrow$ Gx) > 0	$^{+}\vee^{+}$	p(Fx $\rightarrow$ Gx) < 1

Bei diesem Modell gelten *alle* analytischen Relationen des logischen Quadrats. Denn in der Klammer steht immer derselbe Ausdruck (Fx $\rightarrow$ Gx). Nur die *Quantität ist* unterschiedlich, und genau zwischen diesen unterschiedlichen Quantitäten gelten eben die Beziehungen des logischen Quadrats.

2-5-3-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

p(Fx $\rightarrow$ Gx) = 1		p(Fx $\rightarrow$ $\neg$Gx) = 1
$\Downarrow$	$^{+}\vee^{+}$	$\Downarrow$
p(Fx $\rightarrow$ Gx) > 0	$^{+}\vee^{+}$	p(Fx $\rightarrow$ $\neg$Gx) > 0

Wie man sieht, weichen bei diesem Modell mehrere Beziehungen vom *logischen Quadrat* ab. So besteht in der Diagonalen keine Kontravalenz ($^+$><$^+$), sondern nur die Disjunktion ($^+\vee^+$); es besteht also kein *kontradiktorischer*, sondern nur ein *subkonträrer* Gegensatz.

Und wenn es auch erstaunen mag, zwischen p(Fx → Gx) = 1 und p(Fx → ¬Gx) = 1 besteht gar keine *tautologische* Beziehung (wenn man einmal von dem fragwürdigen Tautologator absieht). In der Wahrheitstafel kommen nämlich sämtliche Kombinationen vor, also + +, + –, – +, – –. (vgl. 2-2-3-2). Wenn $^+\vee^+$ gelten sollte, dann dürfte die Kombination – – nicht vorkommen usw. Es ist somit nur eine *semi-analytische* Beziehung möglich, z. B. mit $^+\vee^-$, also [p(Fx → Gx) = 1] $^+\vee^-$ [p(Fx → ¬Gx) = 1]. In das logische Quadrat werden aber nur *tautologische* Beziehungen eingetragen, daher bleibt der Platz leer.

Nun könnte man versucht sein, folgenden Einwand zu formulieren:
In der Aussagen-Logik gilt wie früher erläutert:

$(X \rightarrow Y)\ {}^+\vee^+\ (X \rightarrow \neg Y)$

D. h. laut Definition der Disjunktion , dass folgende Konjunktion ausgeschlossen ist:

$\neg(X \rightarrow Y)\ {}^-\wedge^-\ \neg(X \rightarrow \neg Y) \qquad (- + - -)\ {}^-\wedge^-\ \neg(+ - - -)$

Und in der Tat ist das eine *Kontradiktion*. Das zeigt sich noch deutlicher in den Formeln:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0\ {}^-\wedge^-\ \frac{a+b+d}{a+b+c+d} = 0$$ Das ist ausgeschlossen, weil a + b + c + d > 0.

Nun könnte man fragen, gilt nicht entsprechend:

p(Fx → Gx) = 1 $^+\vee^+$ p(Fx → ¬Gx) = 1 ?

Dazu passt, dass auch eine *Kontradiktion* besteht zwischen

p(Fx → Gx) = 0 $^-\wedge^-$ p(Fx → ¬Gx) = 0.

Aber hier muss eben berücksichtigt werden, dass in der *quantitativen Quantoren-Logik* gilt: ¬(p = 1) ⇔ p < 1. Anstatt 0 ist also < 1 einzusetzen.
So erhält man eine andere Relation, nämlich:

p(Fx → Gx) < 1 $^+\vee^-$ p(Fx → ¬Gx) < 1.

Und wie man leicht erkennen kann: Es gibt keine Kontradiktion zwischen

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{a+b+d}{a+b+c+d} < 1$$

2-5-3-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

p(Fx ∧ Gx) = 1	$^+\vert^+$	p(Fx ∧ ¬Gx) = 1
⇓	$^+\vert^+$	⇓
p(Fx ∧ Gx) > 0		p(Fx ∧ ¬Gx) > 0

Hier stimmen 3 analytische Relationen mit dem logischen Quadrat überein, d. h. aber auch 3 nicht. Zwischen p(Fx ∧ Gx) > 0 und p(Fx ∧¬Gx) > 0 lässt sich wieder keinerlei tautologische Relation angeben.

2-5-3-4 MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION
Das ist wie gesagt das verbreitetste Modell, welches z. B. in der Wissenschaftstheorie überwiegend zu finden ist, so auch bei Karl Popper.

$$\begin{array}{ccc} p(Fx \rightarrow Gx) = 1 & & p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1 \\ & ^{+}\!\!>\!\!<\!\!^{+} & \\ p(Fx \wedge Gx) > 0 & & p(Fx \wedge \neg Gx) > 0 \end{array}$$

Bei diesem, allgemein akzeptierten Modell stimmen nur die 2 Diagonal-Beziehungen mit dem *logischen Quadrat* überein, also:

$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$ $^{+}\!\!>\!\!<\!\!^{+}$ $p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$
$p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1$ $^{+}\!\!>\!\!<\!\!^{+}$ $p(Fx \wedge Gx) > 0$

Und für die anderen Relationen lässt sich sogar gar keine tautologische Verbindung angeben. Es ist erstaunlich, dass der Diskrepanz zum logischen Quadrat nicht mehr Aufmerksamkeit geschenkt wird. Es stellt die Berechtigung dieser quantoren-logischen Formalisierung (natürlich auch in der ursprünglichen, nicht quantifizierten Form) doch sehr in Frage.
Zum Beweis der Kontravalenzen vgl.: 2-2-3-4.

2-5-3-5 MODELL 5: POSITIV-IMPLIKATION

$$\begin{array}{ccc} p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) = 1 & ^{+}|^{+} & p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) = 0 \\ \Downarrow & ^{+}\!\!>\!\!<\!\!^{+} & \Downarrow \\ p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) > 0 & ^{+}\!\vee^{+} & p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) < 1 \end{array}$$

Dieses Modell erfüllt alle Bedingungen des *logischen Quadrats*. Das gilt sonst allein noch für das Modell 1, welches sich nur durch Verwendung der *Normal*-Implikation unterscheidet. Wie ich aber früher gezeigt habe, führt die *normale* Implikation zu verschiedenen Problemen. So spricht sehr vieles für dieses Modell mit der *Positiv*-Implikation, ihr einziger Nachteil ist, dass sie nicht alle logischen Welten abdeckt.

2-5-4 Inklusiv / Exklusiv

2-5-4-1 EXKLUSIVES LOGISCHES QUADRAT
Das übliche, damit *inklusive* logische Quadrat wurde bereits ausführlich dargestellt, daher jetzt zur exklusiven Variante. Bei der exklusiven Logik schließt das „einige“ im Sinne von „genau einige“ das „alle“ aus. Für „genau einige“ schreibe ich wie gesagt ‚∃’. Man kann ∃

den *exklusiven Partikulär-Quantor* nennen. Das umgekehrte ∃ steht bei mir aber nicht (wie bei anderen) für „Existenz“, sondern für „exklusiv“.

Es sei daran erinnert, dass sich die *exklusive* Quantoren-Logik nur in der Definition des „einige“ unterscheidet, nicht in der Definition von „alle“.

alle $p = 1$	+|+	alle¬ $p = 0$
+|+	+|+	+|+
genau einige $0 < p < 1$	⇔	genau einige¬ $0 < p < 1$

In der allgemeinen quantitativen Form zeigt sich so zunächst kein Unterschied zwischen „genau einige“ und „genau einige nicht“. Um den Unterschied herauszustellen, kann man mittels Individuen- und Prädikatzeichen formulieren:

∃x(Fx) bedeutet $0 < p(Fx) < 1$. ∃x¬(Fx) bedeutet $0 < p(\neg Fx) < 1$.

2-5-4-2 EINFACHE RELATIONEN

$p(Fx) = 1$	+|+	$p(Fx) = 0$
+|+	+|+	+|+
$0 < p(Fx) < 1$	⇔	$0 < p(\neg Fx) < 1$

2-5-4-3 EXKLUSIVE GESETZE

Hier ergeben sich andere Beziehungen als bei der *inklusiven* Quantoren-Logik.

Äquivalenzen:

∃ ⇔ ∃¬ also (mit Individuen-Variablen) ∃x(Fx) ⇔ ∃x¬(Fx)

$0 < p(Fx) < 1 \Leftrightarrow 0 < p(\neg Fx) < 1$

Ich beschränke mich in der *quantitativen* Darstellung auf die Relationen mit Fx (und lasse die mit ¬Fx) beiseite.

∃x(Fx) ⇔ [¬Λx (Fx) ∧ ¬Λx¬(Fx)] ⇔ [Vx¬(Fx) ∧ Vx(Fx)]

$[0 < p(Fx) < 1] \Leftrightarrow [p(Fx) < 1 \wedge p(Fx) > 0]$

¬∃x(Fx) ⇔ [Λx(Fx) ∨ Λx¬(Fx)] ⇔ [¬Vx¬(Fx) ∨ ¬Vx(Fx)]

$\neg[0 < p(Fx) < 1] \Leftrightarrow [p(Fx) = 1 \vee p(Fx) = 0]$

Folgen:

$\exists x(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx)$
$[0 < p(Fx) < 1] \Rightarrow [\neg(p(Fx) = 1]$
$[0 < p(Fx) < 1] \Rightarrow [p(Fx) < 1]$

$\exists x(Fx) \Rightarrow \neg Vx\neg(Fx)$
$[0 < p(Fx) < 1] \Rightarrow [\neg(p(Fx) = 0]$
$[0 < p(Fx) < 1] \Rightarrow [p(Fx) > 0]$

2-5-4-4 INKLUSIVES UND EXKLUSIVES QUADRAT

Fasst man das *inklusive* „einige“ und das *exklusive* „einige“ in *einem* logischen Quadrat zusammen, ergibt sich:

genau einige $0 < p(Fx) < 1$	$\Leftrightarrow$	genau einige$\neg$ $0 < p(\neg Fx) < 1$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
einige $p(Fx) > 0$	$^{+}\vee^{+}$	einige$\neg$ $p(Fx) < 1$

Übersetzt man das obige Quadrat in logische Formeln, ergibt sich:

Quantoren-Logik:	*Quantitative Quantoren-Logik*:
$\exists x(Fx) \Leftrightarrow \exists x\neg(Fx)$	$0 < p(Fx) < 1 \Leftrightarrow 0 < p(\neg Fx) < 1$
$\exists x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$	$0 < p(Fx) < 1 \Rightarrow p(Fx) > 0$
$\exists x(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$	$0 < p(Fx) < 1 \Rightarrow p(\neg Fx) > 0$
$\exists x\neg(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$	$0 < p(\neg Fx) < 1 \Rightarrow p(Fx) > 0$
$\exists x\neg(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$	$0 < p(\neg Fx) < 1 \Rightarrow p(\neg Fx) > 0$

(die unterste Zeile des Quadrats lasse ich weg, sie betrifft nur das inklusive „einige“)

Weitere *Äquivalenzen* unter Einbeziehung von $p(\neg F)$ sind:

$\exists x(Fx) \Leftrightarrow Vx(Fx) \wedge Vx\neg(Fx)$
$0 < p(Fx) < 1 \Leftrightarrow p(Fx) > 0 \wedge p(\neg Fx) > 0$

$\neg\exists x(Fx) \Leftrightarrow \neg[Vx(Fx) \wedge Vx\neg(Fx)] \Leftrightarrow \neg Vx(Fx) \vee \neg Vx\neg(Fx$
$\neg[0 < p(Fx) < 1] \Leftrightarrow \neg[p(Fx) > 0 \wedge p(\neg Fx) > 0] \Leftrightarrow [\neg(p(Fx) > 0) \vee \neg(p(\neg Fx) > 0)]$

2-4-5-5 GESAMT-ÜBERSICHT

Inklusive und exklusive Quantoren-Logik:

		¬genau einige	⇔	¬genau einige¬		
		⇑		⇑		
¬einige¬	⇔	alle	$^{+}\vert^{+}$	alle¬	⇔	¬einige
⇓		⇓	$^{+}{>}{<}^{+}$	⇓		⇓
einige	⇔	¬alle¬	$^{+}\vee^{+}$	¬alle	⇔	einige¬
		⇑		⇑		
		genau einige	⇔	genau einige¬		

Quantitative Quantoren-Logik:

		$\neg(0 < p < 1)$	⇔	$\neg(0 < p < 1)$		
		⇑		⇑		
$p \neg < 1$	⇔	$p = 1$	$^{+}\vert^{+}$	$p = 0$	⇔	$p \neg > 0$
⇓		⇓	$^{+}{>}{<}^{+}$	⇓		⇓
$p \neq 0$	⇔	$p > 0$	$^{+}\vee^{+}$	$p < 1$	⇔	$p \neq 1$
		⇑		⇑		
		$0 < p < 1$	⇔	$0 < p < 1$		

Es gelten hier folgende Definitionen:
$p = 1 \Leftrightarrow p \neg < 1$, $p = 0 \Leftrightarrow p \neg > 0$, $p < 1 \Leftrightarrow p \neq 1$, $p > 0 \Leftrightarrow p \neq 0$

2-5-5 Erweiterungen

2-5-5-1 SECHS-WERTIGE LOGIK

Die 6-wertige Logik wurde – in ihrer *synthetischen* Form – in 2-1-5-1 vorgestellt. Hier geht es jetzt um die *analytischen* Beziehungen.

Die 6-wertige Logik umfasst folgende Stufen bzw. Gegensätze:

alle – alle nicht / die meisten – die meisten nicht / einige – einige nicht.

Ich möchte hier nur kurz auf die wichtigsten quantitativen analytischen Relationen eingehen.

• Es gilt bei *inklusiver* Interpretation:

alle $\Rightarrow$ die meisten $\Rightarrow$ einige

$p = 1 \Rightarrow p > 0{,}5 \Rightarrow p > 0$

alle$\neg$ $\Rightarrow$ die meisten$\neg$ $\Rightarrow$ einige$\neg$

$p = 0 \Rightarrow p < 0{,}5 \Rightarrow p < 1$

Bei inklusiver Interpretation gilt also: *mindestens* einige (vielleicht die meisten, vielleicht alle), *mindestens* die meisten (vielleicht alle).

• Bei *exklusiver* Interpretation heißt es dagegen: *genau* einige, *genau* die meisten. So gilt:

genau einige $\Leftrightarrow$ genau einige nicht. Dem entspricht nur *ein* Wert(intervall): $0 < p < 1$.

Bei „genau die meisten" sieht es aber anders aus: denn „genau die meisten" hat einen anderen Wert als „genau die meisten nicht = genau die wenigsten".

So ergeben sich insgesamt 5 Unterscheidungen, man kommt also zu einer *5-wertigen* Logik:

alle	$p = 1$
genau die meisten	$0{,}5 < p < 1$
genau einige (nicht)	$0 < p < 1$
genau die wenigsten	$0 < p < 0{,}5$
alle nicht	$p = 0$

Wenn man verhindern will, dass sich „genau die meisten (nicht)" und „genau einige (nicht)" überschneiden, müsste man „genau einige (nicht)" einschränken auf $p = 0{,}5$.

Außer zwischen den äquivalenten Ausdrücken herrscht überall der *konträre* Gegensatz, also $\Phi \;^{+}|^{+}\; \Psi$ bzw. $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$. Z. B. gilt für „alle":

alle $\Rightarrow \neg$ genau die meisten $\wedge$ $\neg$ genau einige

$\wedge \neg$ genau die wenigsten $\wedge$ $\neg$ (genau) alle nicht

$p = 1 \Rightarrow \neg(0{,}5 < p < 1) \wedge \neg(0 < p < 1) \wedge \neg(0 < p < 0{,}5) \wedge \neg(p = 0)$

2-5-5-2 DIMENSIONEN

Verschiedene Dimensionen wie *Raum* und *Zeit* können entsprechend strukturiert werden:

• Raum

In der 4-wertigen (inklusiven) *Raum-Logik* gilt:

überall $\Rightarrow$ mancherorts

$\Lambda(\text{Raum}) \Rightarrow \mathrm{V}(\text{Raum})$

$p(\text{Raum}) = 1 \Rightarrow p(\text{Raum}) > 0$

In der 6-wertigen Raum-Logik gilt:

überall $\Rightarrow$ meistenorts $\Rightarrow$ mancherorts p(Raum) = 1 $\Rightarrow$ p(Raum) > 0,5 $\Rightarrow$ p(Raum) > 0

• Zeit
In der 4-wertigen (inklusiven) *Zeit-Logik* gilt:

immer $\Rightarrow$ manchmal
Λ(Zeit) $\Rightarrow$ V(Zeit)
p(Zeit) = 1 $\Rightarrow$ p(Zeit) > 0

In der 6-wertigen Zeit-Logik gilt:

immer $\Rightarrow$ meistens $\Rightarrow$ manchmal
p(Zeit) = 1 $\Rightarrow$ p(Zeit) > 0,5 $\Rightarrow$ p(Zeit) > 0

2-5-5-3 INKLUSIVE MODAL-LOGIK

Ich führe hier einen *quantitativen Modal-Operator* (Mod) ein, der Werte zwischen 1 und 0 annehmen kann. Man schreibt p(Modal) oder kurz p(Mod). Er gibt gewissermaßen den *Grad der Notwendigkeit* oder auch den Grad der Unmöglichkeit an. Im (über)nächsten Kapitel wird das noch genauer erläutert werden.

Somit gilt in der 4-wertigen Logik, entsprechend dem logischen Quadrat der Quantoren-Logik:

notwendig p(Mod) = 1	$^{+}\|^{+}$	notwendig¬ p(Mod) = 0
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
möglich p(Mod) > 0	$^{+}\vee^{+}$	möglich¬ p(Mod) < 1

Z. B.: p(Mod:Φ) = 1 $^{+}{>}{<}^{+}$ p(Mod:Φ) < 1

Entsprechend der Quantoren-Logik gelten folgende *Äquivalenzen* in der Modal-Logik:

Notwendig $\Leftrightarrow$ ¬Möglich¬
Notwendig¬ $\Leftrightarrow$ ¬Möglich
¬Notwendig $\Leftrightarrow$ Möglich¬
¬Notwendig¬ $\Leftrightarrow$ Möglich

Quantitativ stellen sich diese polaren Äquivalenzen nicht dar, weil die Gegenbegriffe Notwendig und Möglich ja durch einen einheitlichen Begriff p(Modal) überschritten werden. Man kann nur durch Einführung von Negation diese Gegensätze wieder darstellen:

z. B.: p(Mod:Φ) = 1 $\Leftrightarrow$ p(Mod:¬Φ) = 0

In einer *6-wertigen* Logik ergibt sich:
notwendig $\Rightarrow$ wahrscheinlich $\Rightarrow$ möglich
p(Modal) = 1 $\Rightarrow$ p(Modal) > 0,5 $\Rightarrow$ p(Modal) > 0

¬möglich ⇒ ¬wahrscheinlich ⇒ ¬notwendig
unmöglich ⇒ unwahrscheinlich ⇒ unnotwendig
$p(\text{Modal}) = 0 \Rightarrow p(\text{Modal}) < 0{,}5 \Rightarrow p(\text{Modal}) < 1$

2-5-5-4 EXKLUSIVE MODAL-LOGIK

Auch hier lassen sich die Beziehungen am besten im *logischen Quadrat* darstellen:
N = Notwendig, M = Möglich. Mit p(Modal) ergibt sich:

N +|+ N¬
$p(\text{Mod}) = 1$ $p(\text{Mod}) = 0$

+|+ +|+ +|+

genau M ⇔ genau M¬
$0 < p(\text{Mod}) < 1$ $0 < p(\text{Mod}) < 1$

Im Verhältnis zur *inklusiven* Modal-Logik gilt:

Genau möglich ⇔ möglich und möglich nicht
$M^{\exists} \Leftrightarrow M \wedge M\neg$
$[0 < p(\text{Mod}) < 1] \Leftrightarrow [p(\text{Mod}) > 0 \wedge p(\text{Mod}) < 1]$

Besonders interessant ist: „genau möglich“ bzw. die Konjunktion von „möglich“ und „möglich nicht“ ist die beste und präziseste Definition von „*kontingent*“, und Kontingenz spielt eine große Rolle in der Philosophie:

kontingent ⇔ möglich ∧ möglich¬ ⇔ $p(\text{Mod}) > 0 \wedge p(\text{Mod}) < 1$

2-5-5-5 INTENSIONALE LOGIK

Die *intensionale* Quantoren-Logik wendet (wie in 1-2-5-5 beschrieben) die Quantoren nicht – extensional – auf *Individuen* an (alle x ...), sondern – intensional – auf *Eigenschaften* bzw. *Größeneinheiten* (alle Einheiten ...).

Z. B.: „Wenn Sokrates *alle* Weisheits-Einheiten besitzt (*vollständig* weise ist), dann besitzt er auch – mindestens – *einige* Weisheits-Einheiten (ist auch mindestens *partiell* weise)“.

Im Folgenden werden nur ausgewählte analytische Relationen dargestellt, weitere sind direkt aus der extensionalen Quantoren-Logik abzuleiten.

Um auszudrücken, dass ein Individuum x_i *vollständig* klug ist, mag man schreiben: „vollständig(klug(x_i))“. Bzw. „$\Lambda(\text{klug}(x_i))$“.

Auch hier kann man *quantifizieren*. Man darf aber z. B. nicht schreiben: $p(\text{klug}) = 1$, denn das hieße: alle Objekte sind klug.

Man schreibe $p(\text{intensional: klug}) = 1$ oder kurz $p(\text{int: klug}) = 1$, für: der Grad der Klugheit beträgt 1. Will man noch ein Individuum x_i angeben, so schreibe man: $p(\text{int: klug}(x_i) = 1$.

Noch einmal zur Übersicht:

Prädikaten-logisch: vollständig(klug(x_i))
Quantoren-logisch: $\Lambda(\text{klug}(x_i))$
Quantitativ: $p(\text{int: klug}(x_i) = 1$

• Herkömmliche inklusive 4-wertige Quantoren-Logik:
Äquivalenzen, z. B.:

Vollständig $\Leftrightarrow$ $\neg$partiell$\neg$
vollständig(klug(x_i)) $\Leftrightarrow$ $\neg$partiell$\neg$(klug(x_i))
Λ(klug(x_i)) $\Leftrightarrow$ $\neg$V($\neg$klug(x_i))
p(int: klug(x_i)) = 1 $\Leftrightarrow$ p(int:$\neg$klug(x_i)) < 1

Folgen:
Vollständig $\Rightarrow$ partiell bzw. vollständig$\neg$ $\Rightarrow$ partiell$\neg$
p(int) = 1 $\Rightarrow$ p(int) > 0 bzw. p(int) = 0 $\Rightarrow$ p(int) < 1

• Erweiterte inklusive 6-wertige Quantoren-Logik
Vollständig $\Rightarrow$ überwiegend $\Rightarrow$ partiell
p(int) = 1 $\Rightarrow$ p(int) > 0,5 $\Rightarrow$ p(int) > 0

Vollständig$\neg$ $\Rightarrow$ überwiegend$\neg$ $\Rightarrow$ partiell$\neg$
p(int) = 0 $\Rightarrow$ p(int) < 0,5 $\Rightarrow$ p(int) < 1

• Einfache exklusive 3-wertige Logik
Genau partiell $\Leftrightarrow$ genau partiell$\neg$ (somit zählt das nur als *eine* Größe, neben *vollständig* und *vollständig nicht*)

Beispiel: „Wenn Peter *partiell klug* ist, dann ist er auch *partiell nicht klug* – und umgekehrt“.
Genau partiell $\Leftrightarrow$ partiell $\wedge$ partiell$\neg$
0 < p(int) < 1 $\Leftrightarrow$ p(int) > 0 $\wedge$ p(int) < 1

• Erweiterte exklusive 5-wertige Logik
Hier geht es um die Beziehungen zwischen: vollständig – genau überdurchschnittlich – genau partiell (nicht) – genau unterdurchschnittlich – vollständig nicht.

Die quantitativen Ausprägungen entsprechen den oben genannten. Zwischen allen diesen Eigenschaftsausprägungen besteht der *konträre Gegensatz*

EXKURS: VERSCHIEDENE WAHRHEITSTAFELN

1. Aussagen-logische synthetische Wahrheitstafel
2. Aussagen-logische analytische Wahrheitstafel
3. Quantoren-logische analytische Wahrheitstafel

Der Exkurs behandelt die *Wahrheitstafel*. Diese wurde schon mehrfach thematisiert, genau in jedem Punkt 1-1 bis 1-5 bzw. 2-1 bis 2-5, vor allem in 2-1-0-4 und 2-1-0-5. Jetzt sollen die Aussagen über die Wahrheitstafel aber erweitert und differenziert werden.

Die folgenden Ausführungen sind recht detailliert und speziell, vor allem für Experten gedacht. Andere Leser können sie ggf. überspringen oder selektiv lesen. Man mag fragen, ob es notwendig ist, für ein scheinbar eher einfaches Thema wie die „Wahrheitstafel" so ausführliche und differenzierte Ausführungen zu machen. Aber es wird sich zeigen, dass die Wahrheitstafel bzw. ihre viele verschiedenen Varianten ein äußerst anspruchsvolles Sujet sind. Und da andererseits die Wahrheitstafel m. E. zu den *Essentials* der Logik gehört, lohnt sich der Aufwand doch. Auch in späteren Kapiteln wird die Thematik der Wahrheitstafel immer wieder aufgegriffen werden. Die im Exkurs gemachten Ausführungen stellen sogar nur eine Auswahl dar, ursprünglich wurden hier noch weitere Analysen vorgenommen, die ich aber zugunsten einer Beschränkung des Umfangs wieder herausgenommen habe.

Man kann wie erläutert unterscheiden zwischen *Wahrheitstafeln* für *synthetische* und *analytische* Relationen (kurz *synthetische* bzw. *analytische Wahrheitstafel*). Ich behandele hier erst die synthetische Wahrheitstafel, doch benötigt man für deren Deutung bereits analytische Relationen.

Während die *aussagen-logische* Wahrheitstafel *systematisch* dargestellt wird, werden bei der quantoren-logischen und quantitativen Wahrheitstafel nur ausgesuchte Themen behandelt. Dabei ergeben sich teilweise Wiederholungen mit früheren Darstellungen, was aber angesichts der Kompliziertheit der Thematik durchaus erwünscht ist.

1. AUSSAGEN-LOGISCHE SYNTHETISCHE WAHRHEITSTAFEL

1.1 NORMALE WAHRHEITSTAFEL

Ein Beispiel für die *normale* Wahrheitstafel einer *synthetischen* Relation (Implikation) ist:

X	→	Y
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	+	–

Auch wenn in der Wahrheitstafel Möglichkeiten für *Wahrheit* (+) und *Falschheit* (–) der Relation X → Y angegeben werden, so enthält X → Y doch eine *Wahrheits- bzw. Gültigkeits-Behauptung*. Diese ist eben nur *implizit* bzw. *unmarkiert*.

Dagegen wird die Behauptung „'X → Y' ist ungültig" durch die *Negation* gekennzeichnet, also *explizit* und *markiert*: ¬(X → Y).

„X → Y" kann man somit auch umgekehrt formulieren als: „'X → Y' ist gültig".

Von daher kann man auch sagen, der Satz ‚X → Y' macht die *Aussage* X → Y. Ansonsten würde es nahe liegen, nur zu sagen: wie ein *Wort* eine Sache o. ä. *bezeichnet*, so *bezeichnet* ein *Satz* einen Sachverhalt. Aber da der Satz eben darüber hinaus ausdrückt, dass der Sachverhalt besteht (oder nicht), macht er eine *Aussage*. Allerdings kann man auch eine *Wort*-Bezeichnung so begreifen, dass sie bereits implizit eine Aussage über *Existenz/Nicht-Existenz* beinhaltet, denn man kann nur etwas bezeichnen, das irgendwie existent ist (vgl. 0-4-4).

Die (normale) Wahrheitstafel enthält verschiedene *Deutungsmöglichkeiten* bzw. Schlussmöglichkeiten. Ich verdeutliche das anhand der Wahrheitstafel der beiden synthetischen Relation $X \rightarrow Y$ und $\neg X \rightarrow Y$.

Die wichtigsten Deutungen sind die *konjunktive* und die *implikative* Deutung. Die konjunktive Deutung ist die *zentrale*, die normale Wahrheitstafel enthält implizit bereits die *konjunktive* Deutung. Die implikative Deutung ist bei *Implikationen* bzw. Schlüssen zusätzlich heranzuziehen, in der quantitativen Logik ist sie besonders wichtig.

1.2 KONJUNKTIVE (DEUTUNG DER) WAHRHEITSTAFEL

Bei der *konjunktiven* Deutung wird aus der *Konjunktion* der beiden Einzel-Komponenten X,Y auf die Gesamt-Relation, z. B. $X \rightarrow Y$ geschlossen; dabei stehen die *Konjunktionen* von X und Y für die (vier) *möglichen Welten:* $X \wedge Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$.

1.2.1 Analyse von $X \rightarrow Y$

Die *konjunktive Deutung* oder Interpretation verdeutlicht folgende Form der Wahrheitstafel:

	X	Y	$X \rightarrow Y$
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	−	+	+
4.	−	−	+

Noch deutlicher wird die konjunktive Deutung in der folgenden Darstellung, die man daher auch ‚(vollständige) *konjunktive Wahrheitstafel*' nennen kann (vgl. 1-1-0-3).

	X	$\wedge$	Y	$\Rightarrow$	X	$\rightarrow$	Y
1.	+	+	+	+	+	+	+
2.	+	−	−	+	+	−	−
3.	−	−	+	+	−	+	+
4.	−	−	−	+	−	+	−

Wir können die *Zeilen* der Wahrheitstafel als *Relationen* schreiben.
Nun müssen wir hierfür eine Unterscheidung einführen, die uns noch viel beschäftigen wird:
• *Relations-Modell* • *Variablen-Modell* • *Kombinations-Modell*

• Relations-Modell
Beim Relations-Modell werden, für die *Umwandlung der Zeilen in Relationen*, nur die Werte (+ oder −) unter den *Relatoren* (hier $\wedge$, $\Rightarrow$, $\rightarrow$) berücksichtigt. Die folgende *verkürzte* Variante der Wahrheitstafel verdeutlicht dieses Modell, sie enthält nur die *Relations-Werte*.

	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	$X \rightarrow Y$
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	−	+	+
4.	−	+	+

Dieses Modell entspricht der *Deutung in der Wahrheitstafel*. Letztlich kommt es in der *Wahrheitstafel* nur auf die Wahrheitswerte der *Relationen* an. So zählt z. B. bei $X \wedge Y$ nur der Gesamtwert der Konjunktion (+ oder –), egal ob das – unter dem $\wedge$ durch $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$ oder $\neg X \wedge \neg Y$ bedingt ist.

Die Relations-Werte werden in der obigen Wahrheitstafel klar herausgestellt. Man sieht z. B. in der 3. Zeile auf den ersten Blick: Wenn die *Konjunktion* (Prämisse) $X \wedge Y$ ungültig (–) ist, dafür die *Implikation* (Konklusion) $X \to Y$ gültig (+) ist, dann ist die *Gesamtrelation* gültig (+), gemäß der Definition der Implikation, wonach gilt:
$- \Rightarrow +$.

Die Frage ist, wie man im Relations-Modell die *Zeilen* der Wahrheitstafel als *Relationen* schreibt. Generell wird ein – (Minus-Zeichen) aus der *Wahrheitstafel* bei der *Relation* in den *Negator* $\neg$ übersetzt. Folgendende Darstellung bietet sich konkret an:

	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	$X \to Y$		
1.	+	+	+	$X \wedge Y \Rightarrow X \to Y$	$+--- \Rightarrow +-++$
2.	–	+	–	$\neg(X \wedge Y) \longrightarrow \neg(X \to Y)$	$-+++ \longrightarrow -+--$
3.	–	+	+	$\neg(X \wedge Y) \longrightarrow X \to Y$	$-+++ \longrightarrow +-++$
4.	–	+	+	$\neg(X \wedge Y) \longrightarrow X \to Y$	$-+++ \longrightarrow +-++$

Wie man sieht, sind hier von 4 Relationen 3 keine *strengen* Schlüsse ($\Rightarrow$), sondern nur *semi-analytische* Schlüsse ($\longrightarrow$). Das ist *unerwünscht*, denn hier soll ja *eindeutig* festgelegt werden, in welchen *Welten* $X \to Y$ gültig ist und in welchen ungültig, dafür benötigen wir aber strenge Schlüsse, der Art: Wenn die Welt $X \wedge Y$ realisiert ist, dann ist $X \to Y$ gültig.

Nun könnte man einwenden: Es kommt nicht auf den *gesamten Wahrheitsverlauf* einer Relation an, sondern nur auf die *zentrale Zeile*. Das sei an einem Beispiel erläutert, für die Relation der 3. Zeile (gleich der 4. Zeile). Die Wahrheitstafel für diese Relation lautet:

	$\neg$	$(X \wedge Y)$	$\longrightarrow$	$X \to Y$
1.	–	+	+	+
2.	+	–	–	–
3.	+	–	+	+
4.	+	–	+	+

Wir schließen bei diesem Schluss von der Prämisse $\neg(X \to Y)$ auf die Konklusion $X \to Y$. Entscheidend sind daher die (identischen) Zeilen 3 und 4. Denn das $\neg$ in $\neg(X \to Y)$ muss ein + unter sich haben, die Negation muss bejaht sein. In diesen Fällen soll $X \to Y$ gültig sein (ein + aufweisen), und das ist auch gegeben. Dem entspricht ein + unter dem Haupt-Relator $\longrightarrow$. Nur in der 2. Zeile ist die Gesamt-Relation ungültig (ein – unter dem $\longrightarrow$). Aber hier wird eben auch von $\neg(X \to Y)$ auf ein *negiertes* $X \to Y$ geschlossen, und es scheint plausibel, dass dann die Gesamt-Relation ungültig ist.

Es stellt sich also die Frage: Muss eine *Relation*, die einer *Zeile der Wahrheitstafel* entspricht, überhaupt ein *strenger* Schluss sein? Reicht nicht ein *semi-analytischer* Schluss aus, der aber in seinen *zentralen* Zeilen gültig ist? Eine endgültige Klärung steht hier noch aus, aber nach meiner heutigen Auffassung dürfen wir bei der *konjunktiven* Deutung einer Relation nicht auf die Forderung verzichten: *alle* Relationen, die den Zeilen der Wahrheitstafeln entsprechen, müssen *strenge* Schlüsse, *Tautologien* sein (wir werden sehen, dass dies bei der implikativen Deutung anders ist). Das führt uns zum *Variablen-Modell*.

• Variablen-Modell

Das Variablen-Modell zeigt für die konjunktive Deutung von X → Y folgende (verkürzte) Wahrheitstafel mit folgenden Relationen:

	X	∧	Y	⇒	X → Y			
1.	+	+	+	+	+	X ∧ Y ⇒ X → Y	+ − − −	⇒ + − + +
2.	+	−	+	+	−	X ∧ ¬Y ⇒ X → ¬Y	− + − −	⇒ − + + +
3.	−	+	+	−	+	¬X ∧ Y ⇒ ¬X → Y	− − + −	⇒ + + + −
4.	−	−	+	−	−	¬X ∧ ¬Y ⇒ ¬X → ¬Y	− − − +	⇒ + + − +

Hier werden jetzt bei X ∧ Y die Wahrheitswerte der *Variablen* X und Y genannt, aber nicht die der Konjunktion ∧. Das hat folgenden Grund: Um die einzelnen *Zeilen* der Wahrheitstafel als Relationen zu schreiben, gelten hier nur die Einzel-Werte von X und Y als relevant, nicht der Gesamt-Wert der Konjunktion X ∧ Y. Entsprechend verfährt man bei X → Y.

Ein Vorteil ist, dass bei diesem Modell alle Relationen *echte* Schlüsse, also *Tautologien* sind. Ein Problem ist aber: Wir wollen die Wahrheitsbedingungen von X → Y angeben, in Abhängigkeit von X und von Y. Wir wollen aber gar nicht Aussagen machen über X → ¬ Y, ¬X → Y und ¬X → ¬Y, denn das sind ganz andere Relationen. Aus diesem Grund lehnen wir auch das *Variablen-Modell* ab, und das führt uns zum *kombinierten Modell.*

• kombiniertes Modell

Hier ergeben sich folgende Wahrheitstafel bzw. folgende Relationen für eine konjunktive Deutung von X → Y:

	X	∧	Y	⇒	X → Y			
1.	+	+	+		+	X ∧ Y ⇒ X → Y	+ − − −	⇒ + − + +
2.	+	−	+		−	X ∧ ¬Y ⇒ ¬(X → Y)	− + − −	⇒ − + − −
3.	−	+	+		+	¬X ∧ Y ⇒ X → Y	− − + −	⇒ + − + +
4.	−	−	+		+	¬X ∧ ¬Y ⇒ X → Y	− − − +	⇒ + − + +

Zur Erläuterung der Umsetzung von der Wahrheitstafel in die Relation als Beispiel die 2. Zeile (übrigens gilt in der 2. Zeile sogar ⇔):

X ∧ Y ⇒ X → Y   entspricht:
\+ − − + −   X ∧ ¬Y ⇒ ¬(X → Y)

Es wird also aus den *Konjunktionen* X ∧ Y, X ∧ ¬Y, ¬X ∧ Y und ¬X ∧ ¬Y auf die Gesamt-Relation X → Y geschlossen, entsprechend der obigen Wahrheitstafel. Und zwar handelt es sich um *strenge* Schlüsse (⇒), damit um Tautologien.

X ∧ Y wird hier also gemäß dem *Variablen-Modell* behandelt, X → Y gemäß dem *Relations-Modell.* Das mag unsystematisch wirken, aber die Vorteile sprechen dennoch für das *Kombinations-Modell.*

Es wären allerdings auch noch andere Formen eines Kombinations-Modells denkbar, vor allem eine *vollständige* Kombination: Hier werden in der *gleichen* Relation sowohl die Variablen-Werte und der Relations-Wert berücksichtigt. Kehren wir noch einmal zurück zum Beispiel der 2. Zeile. Die Prämisse wird dort folgendermaßen übersetzt (die Konklusion lassen wir erst einmal beiseite):

X ∧ Y   entspricht:
\+ − −   ¬(X ∧ ¬Y)

Nun muss man sich jedoch klarmachen: Die *Negation* von $X \wedge Y$, also $\neg(X \wedge Y)$ kann stehen für $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$ oder $\neg X \wedge \neg Y$, es ist gewissermaßen eine *Zusammenfassung* dieser Relationen. Formal: $\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$. Wenn man nun z. B. $X \wedge \neg Y$ *zusätzlich verneint* und als $\neg(X \wedge \neg Y)$ schreibt, dann ist es unzulässigerweise *doppelt negiert*. Man schreibt eben entweder $\neg(X \wedge Y)$ oder $X \wedge \neg Y$ (u. ä.). Außerdem zeigt sich: Wenn man $\neg(X \wedge \neg Y)$ als Prämisse einsetzt, dann erhält man in keinem Fall einen *echten* Schluss, egal wie man die Implikations-Konklusion formuliert, als $X \rightarrow \neg X$, als $\neg(X \rightarrow \neg Y)$ oder als $\neg(X \rightarrow Y)$. Daher verwerfe ich auch diese Lösung.

Kehren wir zurück zu dem ursprünglichen, bevorzugten *Kombinations-Modell*.
Sprachlich kann man seine Zeilen folgendermaßen fassen:

1. Zeile: wenn X gültig (+) ist und Y gültig (+) ist, dann ist $X \rightarrow Y$ gültig (+).
2. Zeile: wenn X gültig (+) ist und Y ungültig (–) ist, dann ist $X \rightarrow Y$ ungültig (–).
3. Zeile: wenn X ungültig (–) ist und Y gültig (+) ist, dann ist $X \rightarrow Y$ gültig (+).
4. Zeile: wenn X ungültig (–) ist und Y ungültig (–) ist, dann ist $X \rightarrow Y$ gültig (+).

Allerdings macht die Konjunktion – als *symmetrische* Relation – nicht deutlich, dass die *Reihenfolge* von X und Y wesentlich ist. Dies kann man verdeutlichen, wenn man einsetzt: X = *Vorder-Satz*, Y = *Nach-Satz*, $X \rightarrow Y$ = *Gesamt-Satz*, also *meta-sprachlich*, in Bezug auf *Sätze* formuliert. Dann ergibt sich:

1. Zeile: wenn der Vorder-Satz gültig (+) ist und der Nachsatz gültig (+) ist,
   dann ist der Gesamt-Satz gültig (+).
2. Zeile: wenn der Vorder-Satz gültig (+) ist und der Nachsatz ungültig (–) ist,
   dann ist der Gesamt-Satz ungültig (–).
3. Zeile: wenn der Vorder-Satz X ungültig (–) ist und der Nachsatz gültig (+) ist,
   dann ist der Gesamt-Satz gültig $X \rightarrow Y$ gültig (+).
4. Zeile: wenn der Vorder-Satz ungültig (–) ist und der Nachsatz ungültig (–) ist,
   dann ist der Gesamt-Satz gültig $X \rightarrow Y$ gültig (+).

Natürlich kann man für diese 4 Relationen wiederum eigene *Wahrheitstafeln* aufstellen, was aber nicht erforderlich ist. Ebenso kann man die *konjunktive Deutung* weiter *fortsetzen*. So würde z. B. die Tautologie $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$ gedeutet als:

$$[(X \wedge Y) \wedge (X \rightarrow Y)] \Rightarrow [X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y]$$

Die konjunktive Deutung einer *Tautologie* ist aber nicht besonders sinnvoll, wie (bei Behandlung der analytischen Wahrheitstafel) noch gezeigt werden wird.

Fassen wir die schwierige Thematik (veranschaulicht an der 2. Zeile) noch einmal zusammen:

Zunächst zur *Prämisse* $X \wedge \neg Y$: In der *Wahrheitstafel* zählt zwar letztlich nur der Wahrheitsverlauf unter den *Relatoren*, also z. B. unter $\wedge$: + – – –. Diese drei – (minus bzw. „negativ“) gehen aber nicht direkt in die *Zeilen* der konjunktiven Deutung ein. Schriebe man in der 2. Zeile mit *Negation* $\neg(X \wedge \neg Y)$ oder auch $\neg(X \wedge Y)$, käme man nicht zu einem *strengen* Schluss. Die Wahrheitstafel für $X \wedge \neg Y$ hat den Verlauf: – + – –; d. h. sie besitzt in der *1. Zeile* den Wert –. Und genau das wird in der Wahrheitstafel von $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$ durch das – unter dem $\wedge$ (in der 2. Zeile) ausgedrückt, das – braucht bzw. darf also nicht zusätzlich eingeführt werden.

Jetzt zur *Konklusion* $X \rightarrow Y$ bzw. in der 2. Zeile $\neg(X \rightarrow Y)$: Hier wird bei der konjunktiven Deutung nur der Wahrheitsverlauf unter dem $\rightarrow$ berücksichtigt: + – + +, und zwar einschließlich der *Negation*. Das mag zunächst irritieren. Man könnte ja fordern, in der 2. Zeile muss (analog zur Prämisse) z. B. $X \rightarrow \neg Y$ stehen, anstatt $\neg(X \rightarrow Y)$. Es erklärt sich aber wie folgt: Man betrachte die ursprüngliche Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$, es geht hier nur um die Relation

$X \rightarrow Y$ bzw. deren Negation $\neg(X \rightarrow Y)$, es geht somit nicht um ganz andere Relationen wie $X \rightarrow \neg Y$, $\neg X \rightarrow Y$ oder $\neg X \rightarrow \neg Y$ (diese spielen später bei der implikativen Deutung eine Rolle). Es wird nur die Abhängigkeit der Relation $X \rightarrow Y$ von X und Y dargestellt, und genau das leistet explizit die *konjunktive* Deutung bzw. Wahrheitstafel in der obigen Form.

Der konjunktiven Deutung entspricht folgende *konjunktive Definition* der Relationen $X \rightarrow Y$ bzw. $\neg(X \rightarrow Y)$:

$X \rightarrow Y \Leftrightarrow_{df} (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$ bzw.:

$X \rightarrow Y \Leftrightarrow_{df} \neg(X \wedge \neg Y)$

Hier wird $X \rightarrow Y$ definiert durch *Disjunktion* der Konjunktionen, die $X \rightarrow Y$ analytisch implizieren. Bzw. wird $X \rightarrow Y$ definiert durch die *Negation der Konjunktion*, die im *kontradiktorischen* Gegensatz zu $X \rightarrow Y$ steht.

Jetzt zur Definition von $\neg(X \rightarrow Y)$:

$\neg(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow_{df} \neg(X \wedge Y) \wedge \neg(\neg X \wedge Y) \wedge \neg (\neg X \wedge \neg Y)$ bzw.:

$\neg(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow_{df} (X \wedge \neg Y)$

Hier wird $\neg(X \rightarrow Y)$ definiert durch *Konjunktion* der *negierten* Konjunktionen, die $X \rightarrow Y$ analytisch implizieren. Bzw. wird $\neg(X \rightarrow Y)$ definiert durch die Konjunktion, die im *kontradiktorischen* Gegensatz zu $X \rightarrow Y$ steht.

1.2.2 Analyse von $\neg X \rightarrow Y$

Als zweites Beispiel sei neben $X \rightarrow Y$ auch $\neg X \rightarrow Y$ angeführt (vgl. 1-1-1-3):

	$\neg X \rightarrow Y$
1.	− + + +
2.	− + + −
3.	+ − + +
4.	+ − − −

Die Frage ist, wie hier, bei einem *negierten Ausdruck* ($\neg X$), die konjunktiven Relationen zu formulieren sind. Das Problem ist dabei die *Negation*. Man könnte sich zwei Modelle für die *1. Zeile* vorstellen:

Erstes Modell:	$\neg\neg X \wedge Y \Rightarrow \neg X \rightarrow Y$	+ − − − ⇒ + + + −
Zweites Modell:	$\neg X \wedge Y \Rightarrow \neg X \rightarrow Y$	− − + − ⇒ + + + −

Wie man sieht, ergibt sich bei beiden Modellen ein *strenger* Schluss.

Beim *zweiten* Modell wäre eine mögliche Argumentation z. B.: Da die Implikation ja lautet „wenn nicht X, dann Y“, muss in der 1. Zeile „nicht X“ stehen.

Korrekt ist allerdings nur ein Modell, das *erste*: Dabei kann man die *doppelte Negation* aufheben, d. h. für $\neg\neg X \wedge Y \Rightarrow \neg X \rightarrow Y$ kann man $X \wedge Y \Rightarrow \neg X \rightarrow Y$ einsetzen. Und zwar erklärt sich das folgendermaßen: In der 1. und 2. Zeile der Wahrheitstafel hat das *Negationszeichen* $\neg$ ein −, somit ist das *Negationszeichen negiert* und damit aufgehoben. In der 3. und 4. Zeile ist das Negationszeichen *bejaht* (+) und gilt daher als gesetzt.

Somit ergeben sich bei dem *ersten* Modell folgende Relationen der Wahrheitstafel:

1. $\neg\neg X \wedge Y \Rightarrow \neg X \rightarrow Y$	+ − − − ⇒ + + + −	
2. $\neg\neg X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg X \rightarrow Y$	− + − − ⇒ + + + −	
3. $\neg X \wedge Y \Rightarrow \neg X \rightarrow Y$	− − + − ⇒ + + + −	
4. $\neg X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg(\neg X \rightarrow Y)$	− − − + ⇒ − − − +	(hier gilt auch ⇔)

Dagegen sind beim *zweiten* Modell bei zwei Relationen keine strengen Schlüsse gegeben, wie hier nicht auszuführen ist, was beweist, dass dieses Modell nicht korrekt ist.

1.3 IMPLIKATIVE (DEUTUNG DER) WAHRHEITSTAFEL

Diese bietet sich nur bei *implikativen* Beziehungen wie $X \rightarrow Y$ an, ist dort aber von besonderer Bedeutung. Hier wird von dem *Vorderglied* (z. B. X) auf das *Nachglied* (z. B. Y) gefolgert. Es handelt sich allerdings bei den Relationen (entsprechend den Zeilen der Wahrheitstafel) nicht um *Schlüsse*, sondern um *synthetische Folgerungs-Relationen*, eben Implikationen. Dies ist ein Unterschied zur *konjunktiven Deutung*, bei der auch bei synthetischen Relationen die Zeilen der Wahrheitstafel durch echte *Schlüsse* dargestellt werden.

Generell entsprechen den Zeilen der Wahrheitstafel folgende Relationen:

	$X \rightarrow Y$		
1.	+ + +	$X \rightarrow Y$	
2.	+ − −	$X \rightarrow \neg Y$	oder $\neg(X \rightarrow \neg Y)$
3.	− + +	$\neg X \rightarrow Y$	
4.	− + −	$\neg X \rightarrow \neg Y$	

Die Alternativen in der 2. Zeile werden wir unten diskutieren.

Dieser implikativen Darstellung entspricht folgende Bestimmung/Definition der Implikation:

$$(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow_{df} \neg(X \rightarrow \neg Y) \vee \neg(\neg X \rightarrow Y) \vee \neg(\neg X \rightarrow \neg Y)$$
$$\neg(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow_{df} (X \rightarrow \neg Y) \wedge (\neg X \rightarrow Y) \wedge (\neg X \rightarrow \neg Y)$$

Das erklärt sich folgendermaßen:

$\neg(X \rightarrow \neg Y) \Rightarrow X \rightarrow Y$	+ − − − $\Rightarrow$ + − + +
$\neg(\neg X \rightarrow Y) \Rightarrow X \rightarrow Y$	− − − + $\Rightarrow$ + − + +
$\neg(\neg X \rightarrow \neg Y) \Rightarrow X \rightarrow Y$	− − + − $\Rightarrow$ + − + +

Alle diese negativen Implikationen implizieren logisch $X \rightarrow Y$. Die *Disjunktion* dieser Implikationen ist dann *logisch äquivalent* mit $X \rightarrow Y$. Das Entsprechende gilt für $\neg(X \rightarrow Y)$.

Aus der implikativen Deutung der Wahrheitstafel kann man eine *implikative Wahrheitstafel* herleiten. Kennzeichnend (allerdings nicht notwendig) für die implikative Wahrheitstafel ist, dass sie nicht nur mit den zwei Werten *gültig* (+) und *ungültig* (−) arbeitet, sondern auch mit dem Wert *möglich*, den ich mit ± schreibe. „Möglich" kann man auch übersetzen mit *möglicherweise gültig* (oder *möglicherweise ungültig*). Denn wenn man einen Satz $X \rightarrow Y$ hat, dann kann sich z. B. auch die Deutung ergeben: „wenn X, dann ist Y möglich", genauer: „wenn X gültig ist, dann ist Y möglicherweise gültig".

Wir müssen nun zwei Varianten unterscheiden. Dabei greifen wir zurück auf die Unterscheidung zwischen *Variablen-Modell*, *Relations-Modell* und *Kombinations-Modell*. Ein reines Relations-Modell ist hier aber nicht brauchbar und wird nicht weiter diskutiert.

• Variablen-Modell

Beim Variablen-Modell werden wie beschrieben nur die Werte in der Wahrheitstafel unter den *Variablen* berücksichtig. So ergibt sich ein *systematischer* Ansatz. Das bedeutet: Wir betrachten alle *möglichen* Varianten der Implikation $X \rightarrow Y$, zuerst $X \rightarrow Y$, dann $X \rightarrow \neg Y$, $\neg X \rightarrow Y$, $\neg X \rightarrow \neg Y$. Da beim Variablen-Modell die Werte unter dem *Relator* (für die Formulierung der Relationen) irrelevant sind, spielen Formen wie $\neg(X \rightarrow Y)$ keine Rolle. Man kann daher $X \rightarrow Y$ einfach übersetzen: „Wenn X gültig ist, dann ist auch Y gültig". Da über die Gültigkeit dieser Relationen keine weitere Auskunft gegeben wird, könnte man es für angemessen halten, hier immer ein ± für „möglich“ zu setzen. Daher ergibt sich folgende systematische *implikative Wahrheitstafel* (zum Vergleich rechts die *normale Wahrheitstafel*):

Imp	$X \to Y$		$X \to Y$
1.	+ ± +	$X \to Y$	+ + +
2.	+ ± −	$X \to \neg Y$	+ − −
3.	− ± +	$\neg X \to Y$	− + +
4.	− ± −	$\neg X \to \neg Y$	− + −

Die 1. Zeile der implikativen Tafel ist dann zu lesen als: ’Wenn X wahr ist, dann ist es *möglich*, dass Y wahr ist’. Bei einer *implikativen Wahrheitstafel* schreibe ich vorne ein *‚Imp’*.

Diese Wahrheitstafel ist aber völlig unbefriedigend und wird daher verworfen. Zwar ist richtig, von einer *analytischen* Betrachtung aus sind X und Y vollkommen *unabhängig*, daher sind (analytisch) *alle* Implikationen zwischen X und Y *möglich*. Aber es geht hier ja um die *synthetische* Relation $X \to Y$, deren Wahrheitsbedingungen sollen aufgezeigt bzw. festgelegt werden, und es macht daher keinen Sinn, die Relation in allen 4 Welten als „möglicherweise wahr“ zu bestimmen. Jedenfalls in der 1. Zeile ist doch eine gültige Relation gemeint und gewollt: „Wenn X wahr ist, dann ist es wahr (nicht nur möglich), dass Y wahr ist“.

• Kombinations-Modell
Beim Kombinations-Modell werden die Werte unter den *Variablen*, aber auch der Wert unter dem *Relator* berücksichtigt. Es sind allerdings verschiedene Arten von Kombinations-Modellen möglich. In diesem Fall geht es darum, dass bei *einer* Relation $X \to Y$ beide Werte zur Formulierung von Relationen herangezogen werden. Man kann von einem *realen* Ansatz sprechen, weil eben die Werte der Wahrheitstafel vollständig in Relationen übersetzt werden.

Die (reale) implikative Wahrheitstafel ist:

	$X \to Y$		
1.	+ + +	$X \to Y$	(+ − + +)
2.	+ − −	$\neg(X \to \neg Y)$	(+ − − −)
3.	− ± +	$\neg X \to Y$	(+ + + −)
4.	− ± −	$\neg X \to \neg Y$	(+ + − +)

Die 1. Zeile besagt (implikativ): wenn X *wahr* ist, dann ist es *wahr*, dass Y *wahr* ist.
Die 2. Zeile besagt (implikativ): wenn X *wahr* ist, dann ist es *falsch*, dass Y *falsch* ist.

Zwar folgt hier in der 1. Zeile +Y auf +X, in der 2. Zeile −Y auf +X, aber in der 1. Zeile steht + unter dem Relator →, in der 2. Zeile steht − unter dem Relator →. Somit drücken die beiden Zeilen letztlich etwas Ähnliches (wenn auch nicht dasselbe) aus, man kann aber nicht behaupten, die beiden Zeilen drückten einen Gegensatz aus.

Diese unterschiedliche Deutung der 2. Zeile als $\neg(X \to \neg Y)$ ist der zentrale Unterschied zum Variablen-Modell (wo in der 2. Zeile $X \to \neg Y$ steht). Durch diesen Unterschied ergibt sich, dass in der Wahrheitstafel des Kombinations-Modells in der 1. und 2. Zeile ein anderer Wert zugeschrieben wird als beim Variablen-Modell.

Anders ist es bei der 3. und 4. Zeile:
Wie man in der normalen Wahrheitstafel von $X \to Y$ sieht, gilt:

3. Zeile: $\neg X \to Y$, aus $\neg X$ folgt Y
4. Zeile: $\neg X \to \neg Y$, aus $\neg X$ folgt $\neg Y$

Zwar ist $(\neg X \rightarrow Y) \wedge (\neg X \rightarrow \neg Y)$ *keine Kontradiktion*, wenn man die *normale Implikation* verwendet (bei der Verwendung der *Positiv-Implikation* $*\rightarrow$ ist diese Konjunktion dagegen kontradiktorisch). Dennoch ist es keine überzeugende Lösung, dass zugleich gelten soll:

3. Zeile: aus $\neg X$ folgt Y/ Wenn X falsch ist, dann ist es wahr, dass Y *wahr* ist

4. Zeile: aus $\neg X$ folgt $\neg Y$ / Wenn X falsch ist, dann ist es wahr, dass Y *falsch* ist

Daher bietet es sich an, in solchen Fällen statt wahr/gültig (+) bzw. falsch/ungültig (–) den Wert ± für *möglich* (bzw. möglicherweise wahr) unter den Relator schreiben. (Man kann sich darüber streiten, ob damit bereits die 2-Wertigkeit der Aussagen-Logik aufgehoben ist.)

Dann ergibt sich:

3. Zeile: „Wenn X falsch ist, dann ist es *möglich* ($\rightarrow$ ±), dass Y *wahr* ist".

4. Zeile: „Wenn X falsch ist, dann ist es *möglich* ($\rightarrow$ ±), dass Y *falsch* ist".

Diese Deutung ähnelt der *Positiv-Implikation*, bei der die 3. und 4. Stelle „nicht definiert" sind.

Sprachlich kann man diese implikative Deutung von $X \rightarrow Y$ folgendermaßen formulieren:

1. Wenn X wahr ist, dann ist es *wahr*, dass Y wahr ist
2. Wenn X wahr ist, dann ist es *falsch*, dass Y falsch ist
3. Wenn X falsch ist, dann ist es *möglich*, dass Y wahr ist
4. Wenn X falsch ist, dann ist es *möglich*, dass Y falsch ist

Ich halte das *Kombinations-Modell* auch hier für überlegen und werde mich daran halten.

1.4 VERSTÄRKTE IMPLIKATIVE (DEUTUNG DER) WAHRHEITSTAFEL

Bei der *konjunktiven* Deutung der Wahrheitstafel erhält man ausschließlich *analytische* Relationen wie $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$. Bei der *implikativen* Deutung sind dagegen wie beschrieben alle vier aufgeführten Relationen der Wahrheitstafel *synthetisch*, nämlich:

$X \rightarrow Y$, $X \rightarrow \neg Y$ bzw. $\neg(X \rightarrow \neg Y)$, $\neg X \rightarrow Y$, $\neg X \rightarrow \neg Y$

Wir haben eben gesehen: Wenn $\neg X$ gilt, also X falsch ist, kann man daraus nichts *Sicheres* über Y folgern, sowohl bei Y wie bei $\neg Y$ steht ein + unter dem Relator (daher schrieben wir in der implikativen Wahrheitstafel ± unter dem Relator).

Aber auch wenn X *wahr* ist, kann man daraus nichts Sicheres über Y folgern. Denn in der 1. Zeile folgt auf +X auch +Y, in der 2. Zeile folgt auf +X dagegen −Y (das sieht man in der obigen Wahrheitstafel); d. h. also, von den 2 Fällen, in denen X gültig ist, ist in 1 Fall auch Y gültig – das entspricht aber der *Zufallserwartung*, wie beim Glücksspiel. Daran ändert auch nichts, dass in der Wahrheitstafel unter dem Relator einmal + (1. Zeile) und einmal − (2. Zeile) steht.

Generell gilt bei *synthetischen* Relationen bzw. Implikationen: Wenn man nur weiß, dass das *Vorderglied* gültig (+) ist, kann man noch nichts über das *Nachglied* aussagen, es kann gültig sein oder ungültig. Das macht eben gerade das Wesen synthetischer Relationen aus. Um zu wissen, was zutrifft bzw. gemeint ist, muss ich den *Wahrheitswert der Gesamt-Relation* kennen.

Erst indem man die Gültigkeit bzw. Ungültigkeit der *Gesamt-Relation*, also hier $X \rightarrow Y$, mit berücksichtigt, kann man aus X auf Y schließen.

Hier sind *zwei* Interpretationen möglich:

Erstens: man geht von X aus und sagt, man braucht zusätzlich den Wert von $X \rightarrow Y$, um sicher auf Y zu schließen: $X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$

Zweitens: man geht von $X \rightarrow Y$ aus und sagt, man braucht zusätzlich den Wert von X, um sicher auf Y zu schließen: $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$

Beide Interpretationen sind *logisch gleichwertig*, ich bevorzuge aber vom Aufbau der Argumentation her die *erste*.

• verstärkte Wahrheitstafel
Ich möchte nun eine erste Wahrheitstafel für $X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$ aufstellen, zum Vergleich die Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$.

	X	∧	(X → Y)	⇒	Y		X → Y
1.	+	+	+ + +	+	+		+ + +
2.	+	−	+ − −	+	−		+ − −
3.	−	−	− + +	+	+		− + +
4.	−	−	− + −	+	−		− + −

Im Vergleich dieser Tafel soll noch einmal der Unterschied zwischen der implikativen Deutung und der *verstärkten* implikativen Deutung klar gemacht werden:

implikative (reale)Deutung: „Wenn X wahr ist, dann ist Y wahr".

Aber dies ist *kein Schluss*, es ist eine Aussage, eine Behauptung, es ist eben die Bedeutung von $X \rightarrow Y$, aber man weiß nicht, ob diese Aussage $X \rightarrow Y$ wahr ist, und daher auch nicht, ob Y wahr ist. Ob $X \rightarrow Y$ wahr ist, kann man ohnehin nicht generell beantworten, sondern es hängt davon ab, welche *empirische Deutung* man den Variablen ‚X' und ‚Y' gibt. (Bei der *einen* Deutung ist $X \rightarrow Y$ wahr, bei einer *anderen* kann $X \rightarrow Y$ falsch sein.)

verstärkte implikative Deutung: „Wenn X wahr ist und $X \rightarrow Y$ wahr ist, dann ist Y wahr".

Dies ist ein logischer *Schluss*. Wie man sieht: Zwar ist auch hier nicht gesichert, dass der Vorder-Satz, die Konjunktion $X \wedge (X \rightarrow Y)$ wahr ist, aber unter dem *Konjunktions-Relator* $\wedge$ steht nur noch *einmal* +, in der 1. Zeile. Und in diesem Fall ist Y auch + (gültig). Somit weiß man hier *mit Sicherheit*: wenn $X \wedge (X \rightarrow Y)$ gültig ist, dann ist auch Y gültig; somit ist das Ziel einer sicheren Ableitung erreicht.

Man liest für $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$ auch öfters die Deutung:

„Wenn X wahr ist, dann ist es wahr, dass Y wahr ist. Nun ist X wahr. Also ist Y wahr".

(Hier weiß man sicher, dass auch Y wahr ist). Aber laut Wahrheitstafel können wir nicht festlegen, dass X wahr ist; es gibt hier immer beide Möglichkeiten. Die Bestätigung von X als *wahr* ist nur in einem außer-logischen, empirischen Kontext möglich.

Kehren wir zurück zur Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$, nehmen jetzt aber auch die 2. Zeile hinzu. Verstärken wir sie durch die Gesamt-Relation, im ersten Fall durch die *bejahte* Gesamt-Relation $X \rightarrow Y$ und im zweiten Fall, durch die *negierte* Gesamt-Relation, entsprechend der Wahrheitstafel:

1. Zeile: $X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$
2. Zeile: $X \wedge \neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$

Mittels dieser *Verstärkung* kann man jetzt eindeutig feststellen:

1. wenn X wahr ist und $X \rightarrow Y$ wahr ist, dann ist auch Y wahr.
   (wenn ich weiß, dass X wahr ist und dass $X \rightarrow Y$ wahr ist, dann weiß ich auch, dass Y wahr ist.)
2. wenn X wahr ist und $X \rightarrow Y$ falsch ist, dann ist auch Y falsch.
   (wenn ich weiß, dass X wahr ist, $X \rightarrow Y$ aber falsch ist, dann weiß ich, dass Y falsch ist.)

Ich spreche hier also von einer *verstärkten* implikativen Deutung. Durch die Verstärkung wird eine *synthetische* Relation in eine *analytische* umgewandelt, $X \rightarrow Y$ in $X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$; insofern haben wir es bereits mit *analytischen* Wahrheitstafeln zu tun.

Bereits zwischen X und X → Y besteht kein *synthetisches* Verhältnis mehr, sondern ein *semi-analytisches*. Daher kommen in der Wahrheitstafel nicht *alle* Kombinationsmöglichkeiten vor, so ist ¬X ∧ ¬(X →Y) nicht vertreten, weil dies *kontradiktorisch* ist; wir haben es also streng genommen nicht mehr mit einer synthetischen Wahrheitstafel zu tun. Daher geht es in diesem Fall um *Schlüsse* (strenge oder semi-analytische), nicht um synthetische Folgerungen wie bei der Implikation X → Y.

Insofern haben die Werte + und − hier auch eine andere Bedeutung als bei den synthetischen Relationen. Wenn z. B. ein + unter X steht, dann bedeutet es: „(angenommen) X ist *empirisch wahr*" (*empirisch wahr* ist logisch gesehen aber *zufällig*); wenn dagegen ein + in jeder Zeile unter dem → bzw. ⇒ steht, dann bedeutet das: „hier liegt ein logischer Schluss vor, er ist *notwendig wahr*, in jeder möglichen Welt".

Wir werden nun verschiedene Wahrheitstafeln bzw. vor allem *Relationen* der verstärkten implikativen Deutung diskutieren. Dazu greifen wir wieder zurück auf die Unterscheidung von *Variablen-Modell* und *Relations-Modell* bzw. *Kombinations-Modell.*

• Variablen-Modell

Das Variablen-Modell nenne ich – wie beschrieben – so, weil hier zur *Aufstellung der Relationen* die Werte unter den *Variablen* entscheidend sind.

Das betrifft in diesem Fall den Ausdruck X → Y. Je nach + und − in der Tafel wird er in den einzelnen Relationen verwendet als: X → Y, X → ¬Y, ¬X → Y, ¬X → ¬Y; dagegen spielt keine Rolle, welches Zeichen unter dem Relator → bzw. unter ∧ steht (ob + oder –).

Imp	X	∧	(X	→	Y)	⇒	Y				
1.	+		+	+	+		+	X ∧ (X → Y) ⇒ Y	+ − − −	⇒	+ − + −
2.	+		+	−	+		−	X ∧ (X → ¬Y) ⇒ ¬Y	− + − −	⇒	− + − +
3.	−		−	+	+		+	¬X ∧ (¬X → Y) ⇒ Y	− − + −	⇒	+ − + −
4.	−		−	−	+		−	¬X ∧ (¬X → ¬Y) ⇒ ¬Y	− − − +	⇒	− + − +

X ∧ (X → Y) ⇒ Y ist ein strenger Schluss, also eine *Tautologie*, nämlich der *Modus ponens*. X ∧ (X → Y) ⇒ Y entspricht der 1. Zeile der Wahrheitstafel, dies ist also die *zentrale* Zeile.

Das Variablen-Modell hat den Vorteil, dass seine Relationen alle *Tautologien* sind. Gegen dieses Modell spricht aber, dass man eigentlich X → Y als *Ganzheit* begreift, die also als ganzes bejaht oder negiert wird; das führt uns zum *Relations-Modell*.

• Relations-Modell

Beim Relations-Modell kommt es – zur Formulierung der Wahrheitstafel-Zeilen in Relationen – auf die Werte der *Relationen* an. Hier ergibt sich folgende Wahrheitstafel mit folgenden Relationen:

Imp	X	∧	(X → Y)	⟶	Y		
1.	+	+	+	+	+	X ∧ (X → Y) ⇒ Y	(+ + + +)
2.	+	−	−	+	−	X ∧ ¬(X → Y) ⇒ ¬Y	(+ + + +)
3.	−	−	+	±	+	¬X ∧ (X → Y) ⟶ Y	(+ + + −)
4.	−	−	+	±	−	¬X ∧ (X → Y) ⟶ ¬Y	(+ + + −)

Es ist nicht ganz klar, ob man hier als Relator den semi-analytischen ⟶ oder besser den streng analytischen ⇒ nehmen soll, ich will das aber nicht weiter diskutieren. Auf die Wahrheitstafeln von semi-analytischen Schlüssen mit ⟶ gehe ich noch gesondert ein.

Hier wird nur die Relation $X \rightarrow Y$ als *ganze* berücksichtigt, als $X \rightarrow Y$ wenn sie *bejaht* ist und als $\neg(X \rightarrow Y)$ wenn sie *verneint* ist. Welche Werte dabei unter X und Y stehen, spielt keine Rolle. Die Werte der isolierten Variablen X und vor allem der Konklusion Y werden allerdings angegeben, denn sie werden zur Aufstellung der Relationen gebraucht.

Sprachlich lauten die Zeilen der Wahrheitstafel:

1. wenn X wahr ist und $X \rightarrow Y$ wahr ist, dann ist es wahr, Y wahr ist
2. wenn X wahr ist und $X \rightarrow Y$ falsch ist, dann ist es wahr, dass Y falsch ist
3. wenn X falsch ist und $X \rightarrow Y$ wahr ist, dann ist es *möglich*, dass Y *wahr* ist
4. wenn X falsch ist und $X \rightarrow Y$ wahr ist, dann ist es *möglich*, dass Y *falsch* ist

(Diese Formulierungen ließen sich auch abkürzen, aber so ist die Aussage präziser.)

Zur Erläuterung des semi-analytischen Schlüsse in der 3. und 4. Zeile:

Es mag verwundern, dass $X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$ *tautologisch* ist, aber nicht alle Einzel-Relationen. Diese gehen jedoch nur jeweils mit *einer* Zeile in die Wahrheitstafel ein; so hat z. B. $\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ in der normalen Tafel ein +, ist aber noch keine Tautologie.

In der 3. Zeile wird von $\neg X \wedge (X \rightarrow Y)$ auf Y geschlossen, in der 4. Zeile vom gleichen $\neg X \wedge (X \rightarrow Y)$ auf $\neg Y$.

Damit können hier *keine strengen Schlüsse* vorliegen, sondern es gilt nur:

$$\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y \text{ bzw. } \neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$$

Somit setzen wir hier wieder ± (für „möglich") in der Wahrheitstafel ein.
Dieses Modell halte ich für das beste (wie später auch die *quantitative Analyse* zeigen wird).

• Strenges Relations-Modell

Es ist allerdings auch ein noch *strikteres* Relations-Modell möglich. Es ist im erst im strengen Sinn ein Relations-Modell, während man das eben dargestellte auch als *Kombinations-Modell* auffassen kann, weil $X \wedge (X \rightarrow Y)$ nicht im *Ganzen* als Relation erfasst wird.

Dagegen wird hier auch für die komplexe Relation $X \wedge (X \rightarrow Y)$ nur *ein* Wert berechnet.

Imp	$X \wedge (X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y		
1.	+	+	+	$X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$	(+ + + +)
2.	−	±	−	$\neg(X \wedge (X \rightarrow Y)) \longrightarrow \neg Y$	(+ + − +)
3.	−	±	+	$\neg(X \wedge (X \rightarrow Y)) \longrightarrow Y$	(+ − + −)
4.	−	±	−	$\neg(X \wedge (X \rightarrow Y)) \longrightarrow \neg Y$	(+ + − +)

Für beide Relations-Modelle bekommen wir auch bei der *verstärkten implikativen* Deutung bei negativer Prämisse keinen strengen logischen Schluss, im ersten Modell erhalten wir also bei $\neg X$ kein eindeutiges Ergebnis für Y. Und falls anstatt $X \rightarrow Y$ die *Negation* $\neg(X \rightarrow Y)$ zu $\neg X$ konjunktiv hinzugefügt würde, erhielte man eine *Kontradiktion* – das ist also auch keine Lösung.

Wir haben es hier also bei der verstärkten Wahrheitstafel von $X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$ wieder mit demselben Problem zu tun wie bei der implikativen Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$. Und das bedeutet, dass wir in diesen Fällen wieder ± für „*möglich*" in die Wahrheitstafel einsetzen. Generell kann man festhalten, dass man in der verstärkten implikativen Wahrheitstafel ein ± unter den Relator setzt, wenn die entsprechende Relation nur *semi-analytisch* ist. (Hier besteht ein Unterschied zu synthetischer Wahrheitstafel, bei der wir alle Zeilen nur als synthetische Relationen schreiben können, unabhängig davon, ob +, − oder ± in der Wahrheitstafel steht.)

Generell gilt für das Relations-Modell folgende Gesetzmäßigkeit: Wenn in einer Wahrheitstafel vorkommt: Prämisse +, Konklusion + und Prämisse +, Konklusion − (bei gleichem Symbol unter dem Relator), dann ergibt sich eine semi-analytische Relation; oder:

Prämisse −, Konklusion + und Prämisse −, Konklusion − (bei gleichem Symbol unter dem Relator), dann ergibt sich ebenfalls eine semi-analytische Relation:

• Alternatives Relations-Modell
Grundsätzlich wäre auch noch eine andere Variante des Relatons-Modells möglich: Hier verlagert man das ± (= möglich) vom *Relator* → auf den *Nach-Satz* Y. Man erhält also ± Y, in der (tautologischen) Bedeutung: $Y \vee \neg Y$. Dann ergibt sich folgende Tafel:

Imp	X	∧	(X → Y)	⇒	Y		
1.	+	+	+	+	+	$X \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y$	(+ + + +)
2.	+	−	−	+	−	$X \wedge \neg(X \to Y) \Rightarrow \neg Y$	(+ + + +)
3.	−	−	+	+	±	$\neg X \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y \vee \neg Y$	(+ + + +)
4.	−	−	+	+	±	$\neg X \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y \vee \neg Y$	(+ + + +)

Hier sind zwar wieder alle Relationen *tautologisch*, aber in Zeile 3 und 4 gibt es den gleichen Schluss auf eine Tautologie, was aber ein *Pseudoschluss* ist: $\neg X \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg Y$.

Man kann die *Ungewissheit* des Schlusses also durch den *Relator* ausdrücken ($\longrightarrow$ mit ± statt ⇒ mit +) oder dadurch, dass man Y zwei mögliche Werte zuweist: + oder −. Letztlich halte ich die erste Variante für sinnvoller, und dann gilt: Geht man von ¬X aus, so ist auch bei der verstärkten implikativen Deutung kein strenger Schluss auf Y möglich.

Das zeigt noch einmal die Berechtigung für die Einführung der *Positiv-Implikation* X *→ Y, die eben nur die Fälle berücksichtigt, in denen X gültig ist.

Die *implikative* Deutung bzw. implikative Wahrheitstafel ist nicht so wesentlich wie die *konjunktive*, daher habe ich sie bisher noch nicht eingebracht und werde sie auch im Weiteren nur ausnahmsweise anführen, schon um den Text nicht noch mehr zu verkomplizieren. Ich gehe auch nicht auf die implikative Wahrheitstafel bei der *Positiv-Implikation* ein; dies ist zwar sehr interessant, aber auch sehr kompliziert und würde daher die ohnehin schon ausführliche Darstellung der Wahrheitstafel noch erheblich verlängern.

1.5 WEITERE MÖGLICHE SCHLÜSSE AUS DER WAHRHEITSTAFEL

• Schluss von X auf $X \to Y$
$X \Rightarrow (X \to Y) \vee \neg(X \to Y)$ (Schluss auf Tautologie = Pseudo-Schluss)
$\neg X \Rightarrow X \to Y$

• Schluss von Y auf $X \to Y$
$Y \Rightarrow X \to Y$
$\neg Y \Rightarrow (X \to Y) \vee \neg(X \to Y)$ (Schluss auf Tautologie = Pseudo-Schluss))

• Schluss von X auf Y (dies geht nur, wenn man $X \to Y$ hinzunimmt, vgl. oben)
$(X \to Y) \wedge X \Rightarrow Y$
$\neg(X \to Y) \wedge X \Rightarrow \neg Y$
$(X \to Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y \vee \neg Y$ (Schluss auf Tautologie = Pseudo-Schluss)

• Schluss von Y auf X (dies geht nur, wenn man $X \to Y$ hinzunimmt)
$(X \leftarrow Y) \wedge Y \Rightarrow X$

$\neg(X \leftarrow Y) \wedge Y \;\Rightarrow\; \neg X$
$(X \leftarrow Y) \wedge \neg Y \;\Rightarrow\; X \vee \neg X$ (Schluss auf Tautologie = Pseudo-Schluss)

• Schluss von $X \rightarrow Y$ auf X, Y
Ein strenger Schluss von $X \rightarrow Y$ auf X, Y, $\neg X$ oder $\neg Y$ ist nicht möglich
Aber es gilt:
$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow X$
$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$

Zusammenfassung
Die primäre Funktion der Wahrheitstafel ist, die *Wahrheitsbedingungen* einer Relation (bzw. eines Relators), eines Satzes oder einer Aussage aufzuzeigen. Dabei ist zu unterscheiden:
• *konjunktive* Wahrheitstafel: sie zeigt die Wahrheitsbedingungen des *Gesamt-Satzes* (z. B. $X \rightarrow Y$) auf, in Abhängigkeit von der *Konjunktion* von Vorder-Satz (X) und Nach-Satz (Y).
• *implikative* Wahrheitstafel: sie zeigt (z. B. bei $X \rightarrow Y$) die Wahrheitsbedingungen des *Nach-Satzes* (Y) auf, in Abhängigkeit vom Vorder-Satz (X).
• *verstärkte implikative* Wahrheitstafel: sie zeigt (bei $X \rightarrow Y$) die Wahrheitsbedingungen des *Nach-Satzes* (Y) auf, in Abhängigkeit von Vorder-Satz (X) und Gesamt-Satz ($X \rightarrow Y$).

Speziell die *synthetische* Wahrheitstafel hat noch folgende *Funktionen*:
Erstens dient die Wahrheitstafel dazu, die *Relatoren zu definieren*.
Zweitens erlaubt sie, für einen realen (empirischen) Sachverhalt die treffende Relation zu finden. Hat man z. B. den Sachverhalt bzw. die Menge von Sachverhalten X: „es regnet“, Y: „die Strasse ist nass“, und untersucht, in welchen Kombinationen (die in der Wahrheitstafel aufgeführt sind) diese Sachverhalte auftreten, wird man z. B. als zutreffende Relation herausfinden: „Es regnet $\rightarrow$ die Strasse ist nass“.

2. AUSSAGEN-LOGISCHE ANALYTISCHE WAHRHEITSTAFEL

Die Wahrheitstafel einer *analytischen* oder *semi-analytischen* Relation nenne ich wie gesagt kurz ‘*analytische Wahrheitstafel*’. Grundsätzlich gilt für die analytische Wahrheitstafel dasselbe wie für die synthetische Wahrheitstafel: man kann unterscheiden zwischen *normaler*, *konjunktiver*, *implikativer* und *verstärkter implikativer* Wahrheitstafel. Im Einzelnen gibt es aber doch viele wesentliche Unterschiede. Ich konzentriere mich hier wieder auf die *Implikation*, die – analytisch – als logischer *Schluss* auftritt, sei es als *strenger* oder als *partieller*.

2.1 NORMALE WAHRHEITSTAFEL

• semi-analytischer Schluss
Als Beispiel die normale Wahrheitstafel von $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$:

(X	→	Y)	⟶	Y
+	+	+	+	+
+	–	–	+	–
–	+	+	+	+
–	+	–	–	–

• strenger Schluss
Als Beispiel die normale Wahrheitstafel von $X \Rightarrow X \vee Y$:

X	$\Rightarrow$	X	$\vee$	Y
+	+	+	+	+
+	+	+	+	−
−	+	−	+	+

Grundsätzlich ist die *analytische* Wahrheitstafel in entsprechender Weise zu interpretieren wie oben aufgezeigt für die *synthetische* Wahrheitstafel. Es sind wieder vor allem 2 Möglichkeiten zu unterscheiden: die *konjunktive* und die *implikative Interpretation* der (normalen) Wahrheitstafel.

2.2 KONJUNKTIVE (DEUTUNG DER) WAHRHEITSTAFEL

Bei einem Schluss $\Phi \longrightarrow \Psi$ (bzw. $\Phi \Rightarrow \Psi$) wird aus der *Konjunktion* von *Prämisse* (Φ) und *Schluss-Satz* (Ψ) auf die *Gesamtrelation* ($\Phi \longrightarrow \Psi$) geschlossen. Generell ist die *konjunktive* Interpretation aber bei jeder beliebigen Relation möglich. Bei $(X \vee Y)\ {}^{+}{><}^{-}\ Y$ wird z. B. aus der Konjunktion von $X \vee Y$ und Y auf $(X \vee Y)\ {}^{+}{><}^{-}\ Y$ geschlossen.

• semi-analytischer Schluss
Die konjunktive Deutung oder Interpretation demonstriert folgende *konjunktive Wahrheitstafel*. Man setzt hier nur die für die Deutung *wesentlichen* Wahrheitswerte ein, um die Tafel möglichst übersichtlich zu halten. So sind die Werte für X (+ + − −) und Y (+ − + −) verzichtbar, sie bleiben immer gleich, nur bei Y als Glied der Konjunktion schreibt man die Wahrheitswerte.

	$(X \rightarrow Y)$	$\wedge$	Y	$\Rightarrow$	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
1.	+	+	+	+	+
2.	−	−	−	+	+
3.	+	+	+	+	+
4.	+	−	−	+	−

Die folgenden Relationen enthalten die konjunktive Deutung der *Zeilen* der Wahrheitstafel, es sind – wie immer bei der konjunktiven Deutung – alles *strenge* Schlüsse:

1. $(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ $\quad (+ - + -) \Rightarrow (+ + + -)$
2. $\neg(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ $\quad (- + - -) \Rightarrow (+ + + -)$
3. $(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ $\quad (+ - + -) \Rightarrow (+ + + -)$
4. $(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$ $\quad (- - - +) \Rightarrow (- - - +)$

(die 3. Zeile ist gleich der 1. Zeile, in der 4 Zeile gilt auch $\Leftrightarrow$)

Dementsprechend gilt folgende *Bestimmung* von $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ bzw. dessen Negation:

$$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \Leftrightarrow [(X \rightarrow Y) \wedge Y] \vee [\neg(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y]$$
$$\neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \Leftrightarrow [(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y]$$

Grundsätzlich wäre zwar auch eine andere Kombination denkbar, nämlich: $\neg(X \rightarrow Y) \wedge Y$.

Aber die ist *kontradiktorisch* und somit in der Wahrheitstafel nicht enthalten, die Wahrheitstafel berücksichtig eben nur die *möglichen* Kombinationen. Das ist bei der *analytischen* Wahrheitstafel anders als bei der *synthetischen*, bei der *alle* Kombinationen bzw. Welten vertreten sind (wobei synthetisch allerdings *alle* Kombinationen *möglich* sind).

• strenger Schluss
Zunächst zur Erinnerung die *normale* Wahrheitstafel für $X \Rightarrow X \vee Y$.

X	⇒	X ∨ Y
+	+	+ + +
+	+	+ + −
−	+	− + +
−	+	− − −

Nun zur *konjunktiven* Wahrheitstafel (wieder in auf das Wesentliche reduzierter Form) und zur konkunktiven Deutung mit den entsprechenden Relationen:

	X	∧	(X ∨ Y)	⇒	(X ⇒ X ∨ Y)	
1.	+	+	+	+	+	$X \wedge (X \vee Y) \Rightarrow (X \Rightarrow X \vee Y)$
2.	+	+	+	+	+	$X \wedge (X \vee Y) \Rightarrow (X \Rightarrow X \vee Y)$
3.	−	−	+	+	+	$\neg X \wedge (X \vee Y) \Rightarrow (X \Rightarrow X \vee Y)$
4.	−	−	−	+	+	$\neg X \wedge \neg(X \vee Y) \Rightarrow (X \Rightarrow X \vee Y)$

Es geht hier um die Konjunktion von X und $X \vee Y$, $(X \vee Y)$ als *Gesamtheit*. Daher zählt bei $X \vee Y$ nur das + oder – unter dem *Relator* $\vee$ (nicht unter dem X bzw. Y). So steht z. B. in der 2. Zeile einfach $X \wedge (X \vee Y)$ und nicht $X \wedge (X \vee \neg Y)$, wie der Ausdruck im Detail aussehen würde (vgl. die obige normale Wahrheitstafel).

Dies alles spielt aber beim *strengen* Schluss ohnehin keine Rolle, denn jeder Schluss auf eine *Tautologie* ist ja seinerseits eine Tautologie: $\Phi \Rightarrow$ Tautologie. Und da hier aber auf eine Tautologie, nämlich $X \Rightarrow X \vee Y$ geschlossen wird, ist es letztlich ohne Relevanz, von welcher Relation auf $X \Rightarrow X \vee Y$ geschlossen wird. Somit gibt es gewisse Unterschiede zum semi-analytischen Schluss, denn z. B. ein Schluss auf $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ ist nicht automatisch eine Tautologie.

2.3 IMPLIKATIVE DEUTUNG DER WAHRHEITSTAFEL

Hier wird bei einer (semi)analytischen Relation $\Phi \longrightarrow \Psi$ aus der Prämisse (Φ) auf den Schluss-Satz (Ψ) geschlossen. Es wird also gefragt: *Wenn* die Prämisse (Φ) wahr ist, ist *dann* auch der Schluss-Satz (Ψ) wahr usw.? Diese Deutung ist nur bei *implikativen* Relationen (wie $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$ u. ä.) relevant, dort aber besonders wichtig.

Bei *(semi)analytischen* Relationen ist es möglich, allein aus der Prämisse (Φ) in gewissem Ausmaß auf den Schluss-Satz (Ψ) zu schließen, anders als bei den *synthetischen* Relationen: dort ist wie beschrieben ein Schluss nur möglich, wenn man die Gesamt-Relation $\Phi \rightarrow \Psi$ mit berücksichtigt.

• semi-analytischer Schluss
Als Beispiel zunächst wieder *der* semi-analytische Schluss $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ mit der normalen Wahrheitstafel:

	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	$+ + +$	$+$	$+$
2.	$+ - -$	$+$	$-$
3.	$- + +$	$+$	$+$
4.	$- + -$	$-$	$-$

Bei der implikativen Interpretation ergeben sich folgende Zeilen:

1.	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+ + + -)$
2.	$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$	$(+ + + +)$
3.	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+ + + -)$
4.	$\neg((X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y)$	$(- + - +)$

Hier wird also z. B. (1. Zeile) geschlossen: „Wenn $X \rightarrow Y$ gültig ist, dann ist auch Y gültig". Genauer wäre zu formulieren: „Wenn $X \rightarrow Y$ gültig ist, dann ist es gültig, dass auch Y gültig ist". Dabei ist die Paradoxie der Implikation zu bedenken, dass $\neg\Phi \Rightarrow \Phi \rightarrow \Psi$.

Erläuterungen im Einzelnen:

1. Zeile: sie ist die zentrale Zeile, und sie ist gleich der 3. Zeile (zwar ist in der 1. Zeile X = + und in der 3. Zeile X = –, aber das hat für den Gesamtschluss keine Relevanz).

2. Zeile: wie man sieht, nur in einer von den 4 Zeilen, nämlich der 2. Zeile, steht eine *Tautologie*. Das erklärt sich folgendermaßen: $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ ist *semi-analytisch*, aber $(X \rightarrow Y) \Leftarrow Y$ ist *streng analytisch*. Und $\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$ ist die *Kontraposition* davon. $X \rightarrow Y$ wird implikativ immer als *Einheit* gefasst, daher wird es negiert als $\neg(X \rightarrow Y)$ und nicht etwa als $\neg(X \rightarrow \neg Y)$ oder einfach $X \rightarrow \neg Y$, wie die Wahrheitstafel suggerieren könnte.

3./4. Zeile: hier wird einmal von $X \rightarrow Y$ auf Y und einmal auf $\neg Y$ geschlossen, somit können diese Schlüsse nur *partiell analytisch* sein.

4. Zeile: wie schon bei der synthetischen Wahrheitstafel kann man diskutieren, ob das Zeichen – (minus) unter dem $\longrightarrow$ in der Wahrheitstafel relevant oder irrelevant ist. Ich gehe hier davon aus, dass man es berücksichtigen sollte. Die Zeile ist dann zu lesen: „Wenn $X \rightarrow Y$ gültig ist, dann ist es ungültig, dass auch Y ungültig ist".

Natürlich könnte man *andere Relatoren* verwenden, so dass *alle* Relationen tautologisch würden, in der 1. und 3. Zeile ergäbe sich also z. B. $(X \rightarrow Y) \Leftarrow Y$ und in der 4. Zeile $(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\!\vee^{+}\ \neg Y$. Aber es geht ja gerade darum, *alle* Relationen mit der *Implikation* $\rightarrow$ darzustellen.

Man kann $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ folgendermaßen *implikativ definieren*:

$$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \Leftrightarrow$$
$$\neg[\neg(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \vee \neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y)] \vee \neg\ [\neg(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y]$$

Anders als bei der *konjunktiven* Definition entspricht diese *implikative* Definition aber nicht der Wahrheitstafel; die Begründung dafür würde aber zu weit führen.

• Strenger Schluss

Bei einem *strengen* Schluss sieht das nicht anders aus, z. B. bei $X \Rightarrow X \vee Y$.

	$X \Rightarrow X \vee Y$		
1.	$+ \quad + \quad + + +$	$X \Rightarrow X \vee Y$	$(+ + + +)$
2.	$+ \quad + \quad + + -$	$X \Rightarrow X \vee Y$	$(+ + + +)$
3.	$- \quad + \quad - + +$	$\neg X \longrightarrow X \vee Y$	$(+ + + -)$
4.	$- \quad + \quad - - -$	$\neg X \longrightarrow \neg(X \vee Y)$	$(+ + - +)$

Auch hier ist nicht jeder Einzel-Schluss der Wahrheitstafel *tautologisch*. Und das betrifft Schlüsse von einer *negativen* Prämisse aus.
Das erklärt sich wieder wie folgt:
in der 3. Zeile wird von $\neg X$ auf $X \vee Y$ geschlossen,
in der 4. Zeile wird von $\neg X$ auf die *Negation*, also auf $\neg(X \vee Y)$ geschlossen.

Somit können nicht beide Schlüsse *vollständig* gelten, sondern nur *partiell*.
Allerdings ist auch eine andere Interpretation möglich; diese zeigt die folgende Wahrheitstafel mit veränderten Relationen:

	$X \Rightarrow X \vee Y$		
1.	+ + + + +	$X \Rightarrow X \vee Y$	(+ + + +)
2.	+ + + + −	$X \Rightarrow X \vee \neg Y$	(+ + + +)
3.	− + − + +	$\neg X \Rightarrow \neg X \vee Y$	(+ + + +)
4.	− + − − −	$\neg X \Rightarrow \neg X \vee \neg Y$	(+ + + +)

Hier sind also *alle* 4 Relationen strenge Schlüsse. Das erreicht man dadurch, dass man X und Y immer isoliert betrachtet, vor allem hinsichtlich der Negationen. So zählt z. B. in der 4. Zeile hier nicht (wie oben) die Negation der Relation, nämlich $\neg(X \vee Y)$, sondern die Negationen der Einzelglieder $\neg X \vee \neg Y$; diese Thematik hat uns ja auch schon bei der konjunktiven Deutung beschäftigt.
Allerdings entspricht die obige Deutung nicht der üblichen Lesung der Wahrheitstafel, bei der man nämlich immer den *Kombinationswert* nimmt, also z. B. $\neg(X \vee Y)$; ich werde diese Variante daher nicht weiter verfolgen. Hier besteht jedoch noch weiterer Forschungsbedarf.

2.4 IMPLIKATIVE WAHRHEITSTAFEL

Die implikative Deutung der Wahrheitstafel führt uns zu einer *implikativen Wahrheitstafel*, bei der mit dem Symbol ± (= *möglich* bzw. gültig oder ungültig) gearbeitet wird; wie schon angemerkt schreibe ich als Kennzeichnung vorne ‚Imp'.

• semi-analytischer Schluss
Zunächst wieder der Schluss $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$. Die *normale* (vereinfachte) Wahrheitstafel ist:

	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	+	+	+
4.	+	−	−

Die – vereinfachte – *implikative* Wahrheitstafel (mit ihren Relationen) ist dagegen :

Imp	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y	
1.	+	±	+	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
2.	−	+	−	$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$
3.	+	±	+	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
4.	+	±	−	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$

Die 1. Zeile ist z. B. zu lesen:
Wenn $X \rightarrow Y$ gültig (+) ist, dann folgt *semi-analytisch* (±), dass Y gültig (+) ist.
Die 2. Zeile ist zu lesen:
Wenn $X \rightarrow Y$ nicht gültig (–) ist, dann folgt *analytisch* (+), dass Y nicht gültig (–) ist.
Die 3. Zeile ist entsprechend der 1. Zeile zu lesen:
Wenn $X \rightarrow Y$ gültig (+) ist, dann folgt *semi-analytisch* (±), dass Y gültig (+) ist.
Die 4. Zeile ist zu lesen:
Wenn $X \rightarrow Y$ gültig (+) ist, dann folgt *semi-analytisch* (±), dass Y nicht gültig (–) ist.

Die einzelnen Implikationen sind uns schon bekannt, aber hier entsprechen sie genau der Wahrheitstafel, sind schon aus der Wahrheitstafel abzuleiten; dabei gilt:

+ entspricht $\Rightarrow$
± entspricht $\longrightarrow$

Die Frage ist: was entspricht – (ungültig)?
Es lässt sich zeigen, dass der Wert – (ungültig) nicht in der *implikativen* Wahrheitstafel unter dem Zentral-Relator (hier $\longrightarrow$) auftritt. Denn dies entspräche einer *Kontradiktion*, und eine Kontradiktion ist in der implikativen Wahrheitstafel ausgeschlossen.

Wenn man dennoch ein – (ungültig) in einer implikativen Tafel (unter dem $\longrightarrow$) erhalten will, kann man eine *systematische* implikative Wahrheitstafel aufstellen. In dieser Tafel werden $X \rightarrow Y$ und Y als *unabhängig* (wie synthetisch) behandelt, somit in jeder möglichen Weise kombiniert.

Imp	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y	
1.	+	±	+	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
2.	+	±	–	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$
3.	–	–	+	$^{-}\neg^{-}[\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y]$
4.	–	+	–	$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$

Neu ist die 3. Zeile:
$\neg(X \rightarrow Y)\ {}^{-}\!\wedge^{-}\ Y$ ist eine *Kontradiktion*. Das ist für die konjunktive Deutung relativ unproblematisch, weil sich paradoxerweise aus einer Kontradiktion alles ableiten lässt:

$$\neg(X \rightarrow Y)\ {}^{-}\!\wedge^{-}\ Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$$

Bei der implikativen Wahrheitstafel ist das Problem aber diffizil: Zunächst könnte man angeben: $\neg(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ (+ – + +).

Doch dies ist *semi-analytisch*, was nicht adäquat ist. Außerdem zeigt die Wahrheitstafel zeigt, dass $\neg(X \rightarrow Y)$ und Y in keiner Welt *gemeinsam wahr* sind. Auch eine spätere quantitative Analyse wird zeigen, dass diese Deutung unrealistisch ist.

Oder man könnte an $\neg[\neg(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$ denken, aber dies ist auch *semi-analytisch*, Verlauf (– + – –).

Wenn die 4. Zeile $\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$ lautet, so wird die 3. Zeile am ehesten als $^{-}\neg^{-}[\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y]$ dargestellt, und das ist eine *Kontradiktion*, allerdings, und das ist wichtig, keine Kontradiktion der *Implikation*, sondern der *Negation*.

Erläuterung: die 4. Zeile besagt: „wenn $\neg(X \rightarrow Y)$ dann notwendig $\neg Y$".
Die 3. Zeile besagt dann: „Es ist nicht wahr, dass wenn $\neg(X \rightarrow Y)$ dann notwendig $\neg Y$".
Und das kann man übersetzen in: „Wenn $\neg(X \rightarrow Y)$ dann unmöglich Y".

Diese Argumentation ist vielleicht schwer nachvollziehbar, aber der Fall tritt wie gesagt bei der üblichen Wahrheitstafel gar nicht auf, weil dort keine Kontradiktionen zugelassen sind. Denn sonst treten *paradoxe* oder *irreguläre* Verhältnisse auf.

So gesehen wird für das − am besten $\neg(\Rightarrow)$ verwendet, was nicht mit $\not\Rightarrow$ und nicht mit $\Rightarrow\neg$ verwechselt werden darf. Insgesamt erhält man in der implikativen Wahrheitstafel:

+ entspricht	$\Rightarrow$	tautologisch	(notwendige Folge)
± entspricht	$\longrightarrow$	semi-analytisch	(mögliche Folge)
− entspricht	$\neg(\Rightarrow)$	kontradiktorisch	(unmögliche Folge)

• strenger Schluss
Die implikative (reale) Wahrheitstafel für $X \Rightarrow X \vee Y$ lautet:

Imp	$X \Rightarrow X \vee Y$		
1.	+ + +	$X \Rightarrow X \vee Y$	(+ + + +)
2.	+ + +	$X \Rightarrow X \vee Y$	(+ + + +)
3.	− ± +	$\neg X \longrightarrow X \vee Y$	(+ + + −)
4.	− ± −	$\neg X \longrightarrow \neg(X \vee Y)$	(+ + − +)

Wir haben hier wieder den Sachverhalt, dass aus $\neg X$ zum einen $X \vee Y$ abgeleitet wird und zum anderen die Negation, also $\neg(X \vee Y)$. Daher wird in einer implikativen Wahrheitstafel in diesem Fall ± verwendet. Die 3. Zeile wäre also z. B. zu verstehen als: „Wenn X falsch ist, dann ist es *möglich*, dass $X \vee Y$ wahr ist.

Grundsätzlich wäre auch möglich, für die *Einzelrelationen* jeweils die implikative Wahrheitstafel aufzustellen, aber darauf möchte ich hier verzichten.

2.5 VERSTÄRKTE IMPLIKATIVE DEUTUNG DER WAHRHEITSTAFEL

Hier wird noch berücksichtigt, ob die Gesamtrelation $(\Phi \longrightarrow \Psi)$ wahr oder falsch ist. D. h. es wird aus der Prämisse Φ und der Gesamtrelation $\Phi \longrightarrow \Psi$ auf die Konklusion Ψ geschlossen. So ergeben sich in allen Fällen *strenge* Schlüsse.

Nehmen wir als Beispiel zunächst wieder den *semi-analytischen Schluss*: $(X \to Y) \longrightarrow Y$. Hier wird also noch die Gesamtrelation $(X \to Y) \longrightarrow Y$ als *Verstärkung* hinzugefügt; oder aus anderer Sicht wird die Prämisse $X \to Y$ hinzugefügt.

Die *verstärkte implikative Wahrheitstafel* lautet (zur Erinnerung die einfach-implikat. Tafel)

Imp	$[(X \to Y)$	$\longrightarrow Y]$	$\wedge$	$(X \to Y)$	$\Rightarrow Y$	Imp	$(X \to Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	+		+	+	+ +		+	±	+
2.	+		−	−	+ −		−	+	−
3.	+		+	+	+ +		+	±	+
4.	−		−	+	+ −		+	±	−

Daraus ergeben sich folgende, sämtlich *tautologische*, Einzelrelationen:

$$[(X \to Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y$$
$$[(X \to Y) \longrightarrow Y] \wedge \neg(X \to Y) \Rightarrow \neg Y$$
$$[(X \to Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \to Y) \Rightarrow Y$$
$$\neg[(X \to Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \to Y) \Rightarrow \neg Y$$

Bei einem *strengen* Schluss, z. B. $X \wedge Y \Rightarrow Y$, sind bei der *implikativ verstärkten* Wahrheitstafel dagegen *nicht alle* Relationen tautologisch. Das lässt sich leicht erklären: Durch Konjunktion von z. B. $X \wedge Y$ mit $X \wedge Y \Rightarrow Y$, also einer Tautologie, verändern sich die

Wahrheitsverläufe der Relationen gar nicht; denn durch *Konjunktion* einer Relation mit einer Tautologie bleibt der Wahrheitsverlauf der Relation erhalten.

2.6 BESONDERE IMPLIKATIVE FÄLLE

• *Kontradiktorischer Gegensatz*, z. B.: $(X \wedge Y) \longrightarrow (X \mid Y)$
Hier gilt: $(X \wedge Y) \ {}^{+}{>}{<}^{+} \ (X \mid Y)$.

Normale Wahrheitstafel

	$X \wedge Y$	$\longrightarrow$	$X \mid Y$
1.	+	−	−
2.	−	+	+
3.	−	+	+
4.	−	+	+

Implikative Wahrheitstafel

Imp	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	$X \mid Y$
1.	+	+	−
2.	−	+	+
3.	−	+	+
4.	−	+	+

D. h. bei einem *kontradiktorischen Gegensatz* tritt in der implikativen Wahrheitstafel unter dem zentralen Relator (hier $\longrightarrow$) nur + auf. Man muss dabei berücksichtigen, dass durch den Wahrheitsverlauf der Einzelrelationen die Wahrheitstafel so gestaltet ist, dass *Kontradiktionen ausgeschlossen* sind. Z. B. treten eben bei obiger Tafel nur die Kombinationen $X \wedge Y$ (+), $X \mid Y$ (−) und $X \wedge Y$ (−), $X \mid Y$ (+) auf.

• *Unabhängigkeit*
$X \rfloor Y$ und $X \lfloor Y$ sind logisch voneinander völlig unabhängig. Somit entspricht
$X \rfloor Y \longrightarrow X \lfloor Y$ der *synthetischen* Relation $X \rightarrow Y$.

Normale Wahrheitstafel

	$X \rfloor Y$	$\longrightarrow$	$X \lfloor Y$
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	−	+	+
4.	−	+	−

Implikative Wahrheitstafel

Imp	$X \rfloor Y$	$\longrightarrow$	$X \lfloor Y$
1.	+	±	+
2.	+	±	−
3.	−	±	+
4.	−	±	−

In der implikativen Wahrheitstafel einer Implikation von zwei *unabhängigen* Relationen steht unter dem Zentral-Relator also nur ±.

2.7 VERHÄLTNIS VON KONJUNKTIVER UND IMPLIKATIVER WAHRHEITSTAFEL

1. In der implikativen Wahrheitstafel gibt es unter dem Relator kein – (ungültig/unmöglich), sondern nur + und ± (insofern sie die logische Abhängigkeit der Einzelrelationen gemäß der konjunktiven Wahrheitstafel berücksichtigt); das gilt gleichermaßen für semi-analytische wie für streng analytische Relationen.

2. Bei tautologischen Implikationen (⇒) gilt: grundsätzlich kann dem + (unter dem Relator) in der konjunktiven Tafel ein + oder ± in der implikativen Tafel entsprechen. Dem + in der *zentralen Zeile* der konjunktiven Wahrheitstafel entspricht auch ein + in der implikativen Tafel und umgekehrt. Die zentrale Zeile der Wahrheitstafel ist bei positiven Relationen die 1. Zeile (in der dann nur + vorkommt), bei einer negativen Relation kann die zentrale Zeile die 2. oder eine andere Zeile sein.

3. Bei semi-analytischen Implikationen (⟶) gilt:
   - einem + in der konjunktiven Tafel entspricht ein + oder ± in der implikativen Tafel
   - einem – in der konjunktiven Tafel entspricht normalerweise ein ± in der implikativen Tafel, bei besonderen Relationen aber auch ein + (was damit die stärkste Abweichung bedeutet).
   - Dem + in der zentralen Zeile der konjunktiven Tafel entspricht ein ±. Dies ist nicht verwunderlich, denn die Relation in der zentralen Zeile (bzw. der Schluss) ist ja nur semi-analytisch.

2.8 ÜBERSICHT

Zum Abschluss seien wegen der sehr komplizierten Materie noch einmal die Deutungen bzw. Wahrheitstafeln für $(X \to Y) \longrightarrow Y$ aufgezeigt, jeweils in vereinfachter Form; d. h. es werden nur die entscheidenden Wahrheitsverläufe gezeigt:

- normale Wahrheitstafel

	$(X \to Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	–	+	–
3.	+	+	+
4.	+	–	–

- konjunktive Deutung

1.	$(X \to Y) \wedge Y$	$\Rightarrow (X \to Y) \longrightarrow Y$	$(+ - + -) \Rightarrow (+ + + -)$
2.	$\neg(X \to Y) \wedge \neg Y$	$\Rightarrow (X \to Y) \longrightarrow Y$	$(- + - -) \Rightarrow (+ + + -)$
3.	$(X \to Y) \wedge Y$	$\Rightarrow (X \to Y) \longrightarrow Y$	$(+ - + -) \Rightarrow (+ + + -)$
4.	$(X \to Y) \wedge \neg Y$	$\Rightarrow \neg[(X \to Y) \longrightarrow Y]$	$(- - - +) \Rightarrow (- - - +)$

- konjunktive Wahrheitstafel

	$(X \to Y)$	$\wedge$	Y	$\Rightarrow$	$(X \to Y) \longrightarrow Y$
1.	+	+	+	+	+
2.	–	–	–	+	+
3.	+	+	+	+	+
4.	+	–	–	+	–

• implikative Deutung

1.	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+ + + -)$
2.	$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$	$(+ + + +)$
3.	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+ + + -)$
4.	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$	$(- + - +)$

• implikative Wahrheitstafel

Imp	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	+	±	+
2.	−	+	−
3.	+	±	+
4.	+	±	−

• systematische implikative Wahrheitstafel

I/s.	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	+	±	+
2.	+	±	−
3.	−	−	+
4.	−	+	−

• verstärkte implikative Deutung

1.	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$	$\wedge\ (X \rightarrow Y)$	$\Rightarrow Y$	$(+ - + -) \Rightarrow (+ - + -)$
2.	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$	$\wedge\ \neg(X \rightarrow Y)$	$\Rightarrow \neg Y$	$(- + - -) \Rightarrow (- + - +)$
3.	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$	$\wedge\ (X \rightarrow Y)$	$\Rightarrow Y$	$(+ - + -) \Rightarrow (+ - + -)$
4.	$\neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$	$\wedge\ (X \rightarrow Y)$	$\Rightarrow \neg Y$	$(- - - +) \Rightarrow (- + - +)$

• verstärkte implikative Wahrheitstafel

	$[(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	$Y]$	$\wedge$	$(X \rightarrow Y)$	$\Rightarrow$	Y
1.		+		+	+	+	+
2.		+		−	−	+	−
3.		+		+	+	+	+
4.		−		−	+	+	−

Die *normale* Tafel enthält implizit eine konjunktive Deutung, man kann sie aber auch implikativ deuten.

Die *konjunktive* Tafel enthält natürlich eine konjunktive Deutung, d. h. sie schließt von der *Konjunktion* von Prämisse und Schluss-Satz auf den Gesamt-Schluss. Die konjunktive Tafel bedeutet immer eine Tautologie, sie enthält die normale Tafel als Teil.

Die *implikative* Tafel enthält natürlich eine implikative Deutung, d. h. sie schließt von der Prämisse auf den Schluss-Satz; die implikative Deutung ist bei *Implikationen* wie $\longrightarrow$ zusätzlich sinnvoll.

3. QUANTOREN-LOGISCHE ANALYTISCHE WAHRHEITSTAFEL

In der *Aussagen-Logik* kann die Gültigkeit einer Relation durch die *Wahrheitstafeln* problemlos überprüfen. Dabei ergibt sich die Gültigkeit der Gesamt-Relation aus der Gültigkeit der

Einzel-Relationen (bzw. Einzelfaktoren).

In der *Quantoren-Logik* ist das schwieriger. Man kann nicht einfach aus den Wahrheitstafeln der Aussagen-Logik Wahrheitstafeln für die Quantoren-Logik ableiten. Dennoch gibt es verschiedene Möglichkeiten. Die folgenden Ausführungen hierüber sind recht speziell.

Auf *synthetische* Relationen bin ich bereits früher eingegangen (in 1-2-1-4), jetzt geht es um *analytische* Relationen. Es werden verschiedene Möglichkeiten vorgeführt, auch für quantoren-logische Relationen Wahrheitstafeln aufzustellen.

3.1 QUANTOREN-LOGISCHE WAHRHEITSTAFEL

Ich wähle zunächst als Beispiel die einfache Relation: Λx(Fx) ⇒ Vx(Fx). Als erstes stellen wir folgende Wahrheitstafel auf, gemäß der Definition der Implikation:

Λx(Fx)	[⇒]	Vx(Fx)
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	+	−

Das Problem ist hier: Λx(Fx) und Vx(Fx) werden wie *unabhängige* Variablen (z. B. wie X und Y) behandelt, so als ob es sich um eine *synthetische* Relation handelt. In Wahrheit sind Λx(Fx) und Vx(Fx) aber voneinander *abhängig*. Es handelt sich um eine *analytische* Relation, um eine Tautologie. Und bei einer Tautologie dürfen in der (normalen) Wahrheitstafel nur + (gültig) unter dem Relator vorkommen; daher schreibe ich das Zeichen für logische Folge auch in Klammern: [⇒].

Da hier auch ein − (ungültig) unter dem Relator steht, kann man an dieser Wahrheitstafel nicht einfach ablesen, ob die Gesamtrelation *tautologisch* ist. Man kann in der Wahrheitstafel nur prüfen, welcher Relator hier stimmen würde. Z. B. in der 2. Zeile: Es ist nicht möglich, dass Λx(Fx) wahr ist und Vx(Fx) falsch, also muss hier ein − (ungültig) stehen. Der Relator, der sich dann als richtig erweist, muss gesetzt werden; das ist also z. B. der Implikator →. (Es wird sich später noch zeigen: wenn wir eine Wahrheitstafel verwenden, welche die Abhängigkeiten berücksichtigt, kommt hier gar kein − unter dem Relator vor.) Die Frage ist, wie man diese Wahrheitstafel genauer analysieren kann.

Ehe man sich diesem Problem weiter zuwendet, geht es darum, das + und − unter den Quantoren präzise zu bestimmen. In der Quantoren-Logik stehen + und − in der Wahrheitstafel nämlich nicht wie bei der Aussagen-Logik einfach für „ja" (wahr) und „nein" (falsch), sondern sie müssen folgendermaßen gedeutet werden:

Λx(Fx)	Vx(Fx)
+: Λ	+: V
−: ¬Λ	−: ¬V

Somit ergibt sich folgende Wahrheitstafel:

Λx(Fx)	[⇒]	Vx(Fx)
Λ	+	V
Λ	−	¬V
¬Λ	+	V
¬Λ	+	¬V

Es gibt nun zwei (in 2-1-0-5 genauer beschriebene) Varianten bzw. Interpretationen der *Wahrheitstafel*: die *konjunktive* und die *implikative*.

• *Konjunktive (Deutung der) Wahrheitstafel*
Hier wird aus der *Konjunktion* von Prämisse und Schluss-Satz auf die Gesamtrelation geschlossen.

$[\Lambda x(Fx)$	$\wedge$	$Vx(Fx)]$	$\Rightarrow$	$[\Lambda x(Fx)\ [\Rightarrow]\ Vx(Fx)]$
Λ	+	V	+	+
Λ	−	$\neg V$	+	−
$\neg\Lambda$	−	V	+	+
$\neg\Lambda$	−	$\neg V$	+	+

Diese Wahrheitstafel enthält folgende einzelnen Relationen:

1. $[\Lambda x(Fx) \wedge Vx(Fx)] \Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
2. $[\Lambda x(Fx)\ {}^{-}\wedge^{-}\ \neg Vx(Fx)] \Rightarrow {}^{-}\neg^{-}[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
3. $[\neg\Lambda x(Fx) \wedge Vx(Fx)] \Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
4. $[\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg Vx(Fx)] \Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$

Dazu folgende Anmerkungen :
- Dass drei dieser Schlüsse Tautologien sind, braucht nicht zu verwundern. Denn jeder beliebige Schluss auf eine Tautologie ist ja eine Tautologie: $\Phi \Rightarrow$ Tautologie.
- Anders ist der Fall in der 2. Zeile gelagert: Die Konklusion ist eine *Kontradiktion*. Aber die Prämisse ist auch eine *Kontradiktion*. Insofern gilt der Schluss, denn jeder Schluss von einer Kontradiktion aus gilt streng. Allerdings tritt die Kontradiktion $\Lambda x(Fx)\ {}^{-}\wedge^{-}\ \neg Vx(Fx)$ nur auf, weil man in dieser provisorischen Wahrheitstafel $\Lambda x(Fx)$ und $Vx(Fx)$ wie *unabhängige* Variablen behandelt. Man kann diesen Fall daher aus der Wahrheitstafel rausnehmen, erhält dann eine *tautologische* Wahrheitstafel, jedoch mit nur *drei* Zeilen.

$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$
Λ	+	V
$\neg\Lambda$	+	V
$\neg\Lambda$	+	$\neg V$

• *Implikative (Deutung der) Wahrheitstafel*
Die *implikative* Wahrheitstafel ist im Punkt 1. des Exkurses eingeführt worden. Bei ihr wird direkt von der Prämisse auf den Schluss-Satz geschlossen. In der *quantoren-logischen* Form sieht sie folgendermaßen aus:

Imp	$\Lambda x(Fx)$	$[\Rightarrow]$	$Vx(Fx)$	
1.	Λ	+	V	$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$
2.	Λ	−	$\neg V$	${}^{-}\neg^{-}[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
3.	$\neg\Lambda$	±	V	$\neg\Lambda x(Fx) \longrightarrow Vx(Fx)$
4.	$\neg\Lambda$	±	$\neg V$	$\neg\Lambda x(Fx) \longrightarrow \neg Vx(Fx$

Interpretation:
1. Zeile: Wenn $\Lambda x(Fx)$, dann folgt notwendig, dass auch $Vx(Fx)$
2. Zeile: Wenn $\Lambda x(Fx)$, dann folgt unmöglich, dass $Vx(Fx)$ ungültig ist
3. Zeile: Wenn $\Lambda x(Fx)$ ungültig ist, dann folgt möglicherweise, dass $Vx(Fx)$
4. Zeile: Wenn $\Lambda x(Fx)$ ungültig ist, dann folgt möglicherweise, dass $Vx(Fx)$ ungültig

Problematisch ist die 2. Zeile: wie ist hier das – (minus) unter dem Relator zu verstehen?

„$\Lambda x(Fx) \nRightarrow \neg Vx(Fx)$“ darf man *nicht* schreiben, weil keine kontradiktorische *Implikation* vorliegt (auch wenn man das intuitiv meinen könnte). Man könnte $\neg[\Lambda x(Fx) \longrightarrow \neg Vx(Fx)]$ oder ggf. $\Lambda x(Fx) \Rightarrow \neg\neg Vx(Fx)$ schreiben. Am überzeugendsten ist aber

$$\bar{\neg}[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$$

Erläuterung: die 1. Zeile besagt: wenn alle x F sind, dann sind notwendig auch einige x F. Die 2. Zeile besagt dann: Es ist nicht wahr, dass wenn alle x F sind, dass dann auch einige x notwendig F sind. Das kann man übersetzen in: wenn alle x F sind, dann sind unmöglich nicht einige x F (vgl. hierzu). Eine andere Möglichkeit wäre noch, die *Positiv-Implikation* zu verwenden, denn da ist die Kontradiktion anders bestimmt (wie schon erläutert wurde). Hier könnte man schreiben: „$\Lambda x(Fx) \ast\!\nRightarrow \neg Vx(Fx)$“

Die genaue Formalisierung ist allerdings auch nicht entscheidend, weil diese Zeile letztlich aus der Wahrheitstafel getilgt wird (vgl. unten), denn es gilt:

$$\Lambda x(Fx) \ \bar{\wedge}\ \neg Vx(Fx)$$

Die Konjunktion dieser beiden Relationen ist also *kontradiktorisch*, wenn auch nicht die Implikation.

Zur 3. und 4. Zeile: Somit erklärt sich auch das ± (was man ja eigentlich in Wahrheitstafeln nicht findet). Aus der Ungültigkeit von $\Lambda x(Fx)$ kann man nichts Sicheres über $Vx(Fx)$ schließen, es kann gültig sein oder nicht.

Trotz aller Interpretationsansätze, letztlich bleibt der Weg der *direkten* Wahrheitstafel bei der Quantoren-Logik problematisch. Daher wenden wir uns jetzt einem anderen Ansatz zu.

3.2 PRÄDIKATEN-LOGISCHE WAHRHEITSTAFEL

Hier wird der quantoren-logische Ausdruck $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ in reine *Prädikaten-Logik* umgewandelt, weil sich für prädikaten-logische Ausdrücke unproblematisch Wahrheitstafeln aufstellen lassen. Die Hypothese ist:

$$[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)] \Leftrightarrow [(Fx_1 \wedge Fx_2) \Rightarrow (Fx_1 \vee Fx_2)]$$

So dass man aus dem Wahrheitsverteilung von $(Fx_1 \wedge Fx_2) \Rightarrow (Fx_1 \vee Fx_2)$ die Wahrheitsverteilung von $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ ableiten kann. Für $(Fx_1 \wedge Fx_2) \Rightarrow (Fx_1 \vee Fx_2)$ lässt sich aber unproblematisch eine Wahrheitstafel aufstellen:

$(Fx_1$	$\wedge$	$Fx_2)$	$\Rightarrow$	$(Fx_1$	$\vee$	$Fx_2)$
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	+	+	+	−
−	−	+	+	−	+	+
−	−	−	+	−	−	−

Wie man sieht, ist der Schluss gültig, also eine *Tautologie*. Aber man will den Schluss ja nicht nur für *2* Elemente x_1 und x_2 beweisen, sondern für n (= alle) Elemente $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$. Allerdings reicht die Prüfung von 2 Elementen anstatt n Elementen, wenn man nur prüfen will, ob die Struktur *tautologisch*, *kontradiktorisch* oder *semi-analytisch* ist. Wenn die Struktur für 2 x tautologisch ist, ist sie es auch für n x usw.

Erst wenn man *genau* die Wahrheitswerte feststellen will, benötigt man ein anderes Verfahren, bei dem *alle* x berücksichtigt werden.

Interpretation der prädikaten-logischen Darstellung

Hier geht man von der Hypothese aus:

$$[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)] \Leftrightarrow [Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n]$$

Man kann normalerweise die Implikation nicht für *alle* Glieder überprüfen, denn die vollständige Formulierung lautet ja: $Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$

n kann also beliebig groß sein. Dennoch kann man durch Interpretation auch ohne vollständige Wahrheitstafel das Gesetz überprüfen. Dabei ist Folgendes zu bedenken:
- eine *Konjunktion* ist nur wahr, wenn alle Glieder wahr sind, das ist aber (bei unabhängigen Variablen) stets nur in der *ersten* Zeile der Wahrheitstafel gegeben, egal wie groß n ist
- eine *Disjunktion* ist nur falsch, wenn alle Glieder falsch sind, das ist aber (bei unabhängigen Variablen) stets nur in der *letzten* Zeile der Wahrheitstafel so, egal wie groß n ist
- eine *Implikation* ist bei falschem Vorderglied (Prämisse) immer wahr. Sie ist nur falsch, wenn das Vorderglied wahr und das Nachglied falsch ist.

$Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n$ ist also nur in der 1. Zeile wahr. $Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$ ist aber auch in der 1. Zeile wahr. Somit ist die Implikation $Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$ in der 1. Zeile wahr. In allen anderen Zeilen ist $Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n$ aber falsch, somit ist in diesen Zeilen die Implikation wahr (unabhängig davon, welchen Wert $Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$ besitzt). Damit ist bewiesen, dass obige Formel *tautologisch* gilt, also nur + unter dem Zentral-Relator $\Rightarrow$ steht.

3.3 WAHRHEITSTAFEL ANALOG AUSSAGEN-LOGIK

Ich habe oben darauf hingewiesen, dass man $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ prinzipiell *prädikaten-logisch* durch $(Fx_1 \wedge Fx_2) \Rightarrow (Fx_1 \vee Fx_2)$ darstellen kann (auch wenn die beiden Relationen nicht im strengen Sinn äquivalent sind, weil im 2. Fall n festgelegt ist: n = 2). Nun kann man – zur *Vereinfachung* – folgende Übersetzungen in *Aussagen-Logik* vornehmen:

$X \wedge Y$ für $Fx_1 \wedge Fx_2$, $X \vee Y$ für $Fx_1 \vee Fx_2$

So könnte man vereinfachend folgende Wahrheitstafel für $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ aufstellen, indem man aussagen-logisch schreibt: $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$.

$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	$X \vee Y$
+	+	+
−	+	+
−	+	+
−	+	−

Diese Wahrheitstafel der Aussagen-Logik gibt die realistischen Wahrheitswerte an, welche die *Abhängigkeit* von $X \wedge Y$ und $X \vee Y$ widerspiegeln. Übersetzt man jetzt wieder in Quantoren-Logik, ergibt sich:

$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$
+	+	+
−	+	+
−	+	+
−	+	−

Hier steht jetzt unter $\Lambda x(Fx)$ + − − − (und nicht mehr: + + − −). Und unter $Vx(Fx)$ steht jetzt + + + − (und nicht mehr + − + −). Somit kann man jetzt zurecht $\Rightarrow$ verwenden.

Ich nenne eine solche Wahrheitstafel auch *real*, weil sie sich an den realen Werten der Aussagen-Logik orientiert und nicht – wie die *systematische* Wahrheitstafel – an den theoretisch möglichen Kombinationen. Hier kommt dann die problematische, kontradiktorische Kombination $\Lambda x(Fx)$: + und $Vx(Fx)$: − gar nicht vor, weil die Abhängigkeit zwischen $\Lambda x(Fx)$ und $Vx(Fx)$ in die Wahrheitstafel eingeht. Setzt man jetzt wieder ein: Λ und V ein, so erhält man:

$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$
Λ	+	V
$\neg\Lambda$	+	V
$\neg\Lambda$	+	V
$\neg\Lambda$	+	$\neg$V

Man muss sich dabei allerdings bewusst bleiben, dass streng genommen eine Darstellung der Quantoren-Logik (des Partikulär-Quantors) in der Aussagen-Logik nicht möglich ist.

• *Konjunktive* Wahrheitstafel
Wir können jetzt die konjunktive Wahrheitstafel für $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ aufstellen, und zwar wiederum analog dem *aussagen-logischen* $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$. Die konjunktive Wahrheitstafel verdeutlicht am besten die logische Struktur des Schlusses, gemäß der – wichtigsten – konjunktiven Deutung.

	$[\Lambda x(Fx)$	$\wedge$	$Vx(Fx)]$	$\Rightarrow$	$[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
1.	Λ	+	V	+	+
2.	$\neg\Lambda$	–	V	+	+
3.	$\neg\Lambda$	–	V	+	+
4.	$\neg\Lambda$	–	$\neg$V	+	+

Dabei ergeben sich folgende Einzel-Relationen:

1.	$[\Lambda x(Fx) \wedge Vx(Fx)]$	$\Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
2.	$[\neg\Lambda x(Fx) \wedge Vx(Fx)]$	$\Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
3.	$[\neg\Lambda x(Fx) \wedge Vx(Fx)]$	$\Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$
4.	$[\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg Vx(Fx)]$	$\Rightarrow [\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)]$

Diese konjunktiven Relationen zu nennen, hätte man sich auch sparen können. Denn sie müssen ja *tautologisch* sein, weil wie gesagt gilt: (beliebige) Relation $\Rightarrow$ Tautologie.

• *Implikative* Wahrheitstafel (analog $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$)
Die *implikative* Wahrheitstafel geht davon aus, dass man alle Zielen als Implikationen deutet und dann angibt, sind sie notwendig (+), unmöglich (–) oder möglich (±).

Imp	$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$
1.	+	+	+
2.	–	±	+
3.	–	±	+
4.	–	±	–

In der *quantoren-logischen* Form mit Λ und V ergibt sich:

Imp	$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$		
1.	Λ	+	V	$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$	(+ + + +)
2.	$\neg\Lambda$	±	V	$\neg\Lambda x(Fx) \longrightarrow Vx(Fx)$	(+ + + –)
3.	$\neg\Lambda$	±	V	$\neg\Lambda x(Fx) \longrightarrow Vx(Fx)$	(+ + + –)
4.	$\neg\Lambda$	±	$\neg$V	$\neg\Lambda x(Fx) \longrightarrow \neg Vx(Fx)$	(+ – – +)

Obwohl $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ tautologisch ist, gilt von den Einzel-Schlüssen nur der 1. als tautologisch. Der 2. und 3. Schluss sind gleich, und der 2./3. Schluss einerseits und der 4. andererseits drücken wiederum aus, dass aus $\neg\Lambda x(Fx)$ nichts Sicheres über $Vx(Fx)$ abzuleiten ist: es kann $Vx(Fx)$ folgen oder $\neg Vx(Fx)$.

3.4 UMGEKEHRTER SEMI-ANALYTISCHER SCHLUSS: $VX(FX) \longrightarrow \Lambda X(FX)$

Die Umkehrung des tautologischen, *strengen* Schlusses $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ ist der *semi-analytische* Schluss $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$. Für ihn gilt das Entsprechende wie oben gesagt. Ich bringe nachfolgend die drei wichtigsten Wahrheitstafeln (analog zur *Aussagen-Logik*), wobei ich darauf verzichtet habe, + durch Λ bzw. V und – durch $\neg\Lambda$ bzw. $\neg$V darzustellen.

normale Wahrheitstafel: (mit konjunktiven Relationen):

$Vx(Fx)$	$\longrightarrow$	$\Lambda x(Fx)$
+	+	+
+	–	–
+	–	–
–	+	–

konjunktive Wahrheitstafel

	$[Vx(Fx)$	$\wedge$	$\Lambda x(Fx)]$	$\Rightarrow$	$[Vx(Fx)$	$\longrightarrow$	$\Lambda x(Fx)]$
1.	+	+	+	+		+	
2.	+	–	–	+		–	
3.	+	–	–	+		–	
4.	–	–	–	+		+	

Dazu folgende Einzel-Relationen:

1. $[Vx(Fx) \wedge \Lambda x(Fx)] \Rightarrow [Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$
2. $[Vx(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Fx)] \Rightarrow \neg[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$
3. $[Vx(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Fx)] \Rightarrow \neg[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$
4. $[\neg Vx(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Fx)] \Rightarrow [Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$

Implikative Wahrheitstafel (mit implikativen Relationen)

Imp	$Vx(Fx)$	$\longrightarrow$	$\Lambda x(Fx)$		
1.	+	±	+	$Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$	(+ – – +)
2.	+	±	–	$Vx(Fx) \longrightarrow \neg\Lambda x(Fx)$	(– + + +)
3.	+	±	–	$Vx(Fx) \longrightarrow \neg\Lambda x(Fx)$	(– + + +)
4.	–	+	–	$\neg Vx(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx)$	(+ + + +)

Erläuterung zur implikativen Wahrheitstafel:
1. Zeile : zentrale, definierende Zeile
2./3. Zeile: sind (in dieser vereinfachten Darstellung) gleich
4. Zeile: nur hier liegt ein strenger Schluss vor, und zwar weil $\neg Vx(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx)$ die Kontraposition des strengen Schlusses $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ ist.

Fazit: auch wenn es nicht so einfach ist wie in der Aussagen-Logik, man kann vor allem einfache quantoren-logische Relationen sehr wohl mittels *Wahrheitstafeln* überprüfen.

3.5 KOMPLEXE RELATIONEN

Wir haben bisher nur *einfache* Relationen der Form $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ behandelt, weil sich hier die Wahrheitstafeln übersichtlicher darstellen lassen. Was ist aber mit *komplexen* Relationen der Form: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$?

Insofern der Ausdruck in der Klammer gleich ist (z. B. $Fx \rightarrow Gx$), es also nur um die Verhältnisse zwischen den *Quantoren* geht, gelten im Wesentlichen die oben gemachten Aussagen.

Schwieriger ist es, wenn der Ausdruck in der Klammer (und ggf. zusätzlich die Quantoren) unterschiedlich sind, also z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$. Hier hat es wenig Sinn, eine *direkte quantoren-logische* Wahrheitstafel aufzustellen, weil die Struktur in der Klammer berücksichtigt werden muss. Sondern man muss in jedem Fall eine *prädikaten-logische* Analyse vornehmen. Zwar ist auch eine Übersetzung in *Aussagen-Logik* möglich, aber hier muss man vorsichtig sein. Z. B. kann man $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ keinesfalls einfach auf $X \rightarrow Y$ oder sogar $X \wedge Y$ zurückführen, sondern nur auf $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge ... \wedge (X_n \rightarrow Y_n)$.

Dieses Problem soll hier genauer erläutert werden.

Ich habe schon mehrfach festgestellt:

aussagen-logisch $X \rightarrow Y$ entspricht *quantoren-logisch* $\Lambda(X \rightarrow Y)$.

Aber was bedeutet das genau?

Die Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$, als *Tabelle*, lautet:

	X	→	Y
1	+	+	+
2	+	–	–
3	–	+	+
4	–	+	–

Die Wahrheitstafel von $\Lambda(X \rightarrow Y)$ kann man wie beschrieben nicht direkt angeben, sondern nur, wenn man sie umformuliert und für die *Variable* n eine *Konstante* einsetzt. Ich wähle hier wieder n = 2: $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$ und schreibe die Tafel ebenfalls in *Tabellenform*:

	X_1	→	Y_1	∧	X_2	→	Y_2
1	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	–	+	–	–
3	+	+	+	+	–	+	+
4	+	+	+	+	–	+	–
5	+	–	–	–	+	+	+
6	+	–	–	–	+	–	–
7	+	–	–	–	–	+	+
8	+	–	–	–	–	+	–
9	–	+	+	+	+	+	+
10	–	+	+	–	+	–	–
11	–	+	+	+	–	+	+
12	–	+	+	+	–	+	–
13	–	+	–	+	+	+	+
14	–	+	–	–	+	–	–
15	–	+	–	+	–	+	+
16	–	+	–	+	–	+	–

Natürlich können die beiden Tafeln *nicht übereinstimmen*, denn die Tafel für $X \rightarrow Y$ enthält 2 Variablen, somit 4 Zeilen, die Tafel für $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$ enthält 4 Variablen und damit 16 Zeilen. Man könnte allerdings die Tafel für $X \rightarrow Y$ auch auf 16 Zeilen *ausweiten*, dann ergäbe sich:

	X	→	Y
1	+	+	+
2	+	+	+
3	+	+	+
4	+	+	+
5	+	−	−
6	+	−	−
7	+	−	−
8	+	−	−
9	−	+	+
10	−	+	+
11	−	+	+
12	−	+	+
13	−	+	−
14	−	+	−
15	−	+	−
16	−	+	−

Auch hier ist der Wahrheitsverlauf nicht identisch, außerdem enthält die (erste) Tabelle für $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$ insgesamt 9 + unter dem Zentral-Relator und 7 −, die erweiterte Tabelle für $X \rightarrow Y$ dagegen 12 + und 4 −. Wie man bei leicht sieht, die Tabelle für $X \rightarrow Y$ ist *Teil* der Tabelle für $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$. Wie genau sich die Anzahl der + und − verändert, wird im Kapitel 3 bzw. 4 durch Formeln beschrieben. Wenn man die Tabellen-Tafel für $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$ auf n = 3, n = 4 usw. ausweitet, verändert sie sich in bestimmter Weise.

Die behauptete *Entsprechung* von $X \rightarrow Y$ aussagen-logisch und $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$ quantoren-logisch bedeutet also nicht, das man *identische* Wahrheitstafeln enthält. Dies ist nur der Fall, wenn n = 1. Trivialerweise ist die Tafel für $X \rightarrow Y$ und $X_1 \rightarrow Y_1$ identisch.

Allerdings, die aussagen-logische Struktur gibt bereits den logischen Status der Struktur für beliebig viele *n* an: also je nachdem, ob $X \rightarrow Y$ *tautologisch*, *kontradiktorisch* oder *semi-analytisch* ist.

Das gilt auch für $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$ oder allgemein für $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_n \rightarrow Y_n)$.

Diese *Übersetzungs-Problematik* sei noch einmal systematisch dargestellt:

1. Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ oder vereinfacht: $\Lambda(X \rightarrow Y)$
2. Prädikaten-Logik
   b) vollständige Darstellung: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
   c) vereinfachte, aber zulässige Darstellung: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$
3. Aussagen-Logik
   a) vollständige Darstellung: $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_n \rightarrow Y_n)$
   b) vereinfachte, aber zulässige Darstellung: $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$
   c) unzulässige, falsche Darstellung: $X \rightarrow Y$

Inhalt des Exkurses „Verschiedene Wahrheitstafeln“