Ben-Alexander Bohnke

NEUE LOGIK

Einführung in die Integrale Logik

Ben-Alexander Bohnke
NEUE LOGIK –
Einführung in die Integrale Logik

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten
sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

E-Mail: Ben-Alexander.Bohnke@t-online.de

Printed in Germany
Bad Neuenahr-Ahrweiler 2008

ISBN 978-3-00-024415-5

Inhalts-Verzeichnis

VORWORT

0) KONZEPTION

Das Buch „Neue Logik“ gibt eine *ganzheitliche* und *systematische* Darstellung der Logik. Der Text geht aus von bekannten Theorien der *Logik*, aber auch der *Mengenlehre* und *Statistik*. Er entwickelt daraus jedoch neue und integrierende Modelle und Theorien.

Die Arbeit zielt einerseits auf die allgemeinen, *fundamentalen Strukturen* und *Gesetze* der Logik, nicht auf spezialisierte Kalküle. Andererseits zielt sie vor allem auf Diskussion, Erweiterung und Modifikation herkömmlicher Logik. Es geht mir weniger darum, bekannte logische Theoreme, Beweis- oder Ableitungsverfahren, die in vielen Lehrbüchern ausgezeichnet dargestellt sind, noch einmal zu wiederholen. Daher besteht auch keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit, ich verstehe mein Buch mehr als Ergänzung zu anderen Logik-Darstellungen.

Außerdem ist mir – neben der *Grundlagenforschung* – auch der *Praxisbezug* wichtig, anders, als dies in der reinen Logik geschieht. So stelle ich, durch viele Beispiele, immer wieder Bezüge zu unserem *alltäglichen Denken* und Sprechen her. Ebenso geht es mir um neue – deduktive und induktive – *Schlussverfahren*, die in Wissenschaften und Wissenschaftstheorie angewendet werden können; sie wären sicherlich auch für eine Umsetzung in Programmiersprachen und damit für den Einsatz am *Computer* geeignet.

Die *Formalisierung* wird so einfach wie möglich gehalten. Denn oft verschwindet hinter einem „bürokratischen“ Formelapparat das Wesentliche der Logik. Entsprechend wird hier auf einen streng axiomatischen Aufbau verzichtet. Auch Syntax bzw. Grammatik der Logik spielen eine untergeordnete Rolle.

Dasselbe gilt für die *statistischen* Ausführungen. Natürlich ist es wichtig, wenn in der Statistik z. B. verschiedene, mathematisch aufwendige *Korrelations-Koeffizienten* eingeführt werden. Aber was Korrelation eigentlich bedeutet oder noch grundsätzlicher, was *quantitativ* gegenüber *qualitativ* überhaupt bedeutet, solche Klärungen und Erörterungen sucht man im Statistik-Buch meist vergeblich. Diese grundsätzlichen Erklärungen zu liefern, in Logik wie Statistik, sehe ich als eine Aufgabe meines Buches.

1) BEGRIFF

Der Begriff der Logik wird sehr unterschiedlich definiert. Ich verstehe die Logik vorrangig als ein *System funktionaler Abhängigkeiten bzw. Relationen*. Meinen speziellen Ansatz nenne ich „*Integrale Logik*“. Denn er *integriert* und vereinheitlicht verschiedene Logiken, von *traditioneller Logik* bis zu *post-klassischen* Ansätzen. Insgesamt bedeutet die Integrale Logik ein neues, ganzheitliches *Logik-System*, was einen eigenen Namen rechtfertigt. Der Name signalisiert auch, dass die Suche nach den *logischen Fundamenten* einer Gralssuche ähneln kann.

Dieses System beinhaltet in erster Linie eine *philosophische* Logik, aber ebenfalls eine *mathematische* Logik. Allerdings wird die mathematische Logik öfters sehr speziell definiert, z. B. durch die Teilgebiete Mengenlehre, Beweistheorie, Modelltheorie und Rekursionstheorie. Dagegen meine ich hier mit mathematischer Logik vorrangig eine *quantitative*, *wahrscheinlichkeitstheoretische* Logik, die eine wesentliche Rolle in meinem Ansatz spielt.

Die *Quantitäts-Logik* umfasst eine *deduktiv-deterministische* und eine *induktiv-statistische* Komponente. Meine Logik-Quantifizierung unterscheidet sich wesentlich von der bekannten *Fuzzy Logik*, könnte die aber ergänzen.

Der Text soll einerseits abgegrenzt werden gegen Ontologie, Sprachanalyse bzw. Analytische Philosophie und Sprachphilosophie. *Ontologische* und *sprachphilosophische* Fragen bzw. Probleme der Logik werden nur soweit notwendig behandelt. Diese sollen in einem (sich in Vorbereitung befindenden) Buch über Philosophie ausführlich gewürdigt werden.

Ebenso grenzt sich mein Logik-Buch ab gegen *Statistik* und *Stochastik*. Zwar ist es mir gerade ein Anliegen, eine *Brücke zwischen Logik und Statistik* als zu schlagen – wobei die *Wahrscheinlichkeitstheorie* die Überbrückung leistet –, aber es bleibt eben primär ein Buch über Logik, gleichermaßen über *klassische* wie *nicht-klassische* Logik.

2) ENTSTEHUNG

Meine Überlegungen zur *Integralen Logik* gehen viele Jahre zurück. Im Laufe der Zeit arbeitete ich dieses Modell in mehreren Etappen immer weiter aus.

Daraus entstand zunächst das Buch: „INTEGRALE LOGIK – ein neues Modell philosophischer und mathematischer Logik“ (1. Aufl. Februar 2008, ISBN: 978-3-00-023632-7).

Das vorliegende Buch „NEUE LOGIK“ ist eine überarbeitete, vor allem aber stark gestraffte Fassung des über 800-seitigen Werkes „INTEGRALE LOGIK“. Beide Bücher sind über den Buchhandel oder beim Autor erhältlich: E-Mail: Ben-Alexander.Bohnke@t-online.de

Der Text basiert selbstverständlich auf der Literatur über die etablierte Logik. Später habe ich mich dann mit neuen, auch *nicht-klassischen* Logikmodellen auseinandergesetzt, wie Supervaluationstechnik, Parakonsistente Logik, Mehr-wertige Logik, Intuitionistische Logik, Freie Logik, Konstruktive Logik, Pac-Modell, Fuzzy Logik usw. Da aber meine Aussagen bzw. Neuerungen im Wesentlichen auf eigenen Analysen beruhen und zur Ausbildung eines eigenständigen *Logik-Systems* geführt haben, verzichte ich weitgehend auf eine Literaturdiskussion. Allerdings auch, um den Umfang des Buches nicht noch weiter auszudehnen.

3) LESER

Das Buch „Integrale Logik“ zielt einerseits auf Menschen, die eine anspruchsvolle *Einführung* in die Logik suchen. Denn es ist sehr systematisch aufgebaut und verwendet so weit möglich eine verständliche Sprache. Entsprechend verzichtet es auf überflüssige und unübersichtliche Formalisierungen bzw. auf eine streng technische und axiomatische Darstellung.

Andererseits richtet sich das Buch an *Logik-Experten*, da es verschiedene innovative Analysen enthält, mit m. W. noch nirgends veröffentlichten Ergebnissen, insbesondere neuen Logik-Formeln. Manche Problem-Diskussionen sind ausschließlich für Fachleute gedacht, sie sind meistens unter dem Punkt „Erweiterungen“ zu finden (ausführlicher allerdings in dem ersten Buch „Integrale Logik“).

Anders gesagt: Der Text besitzt Aspekte verschiedener *Arten von Büchern*. In seiner Systematik hat er etwas von einem *Lehrbuch*. Da er wenig an Kenntnissen voraussetzt, hat er etwas von einer *Einführung*. Außerdem enthält der Text viele neue logische Ansätze. Nicht jeder dieser Ansätze ist bereits vollständig ausgearbeitet und gesichert. Hier stehen noch weitere Forschungen aus, und insofern ist mein Buch – auch – ein *Forschungsbericht*.

4) BESONDERHEITEN UND NEUERUNGEN DES BUCHES

1. eine systematische und *einheitliche Darstellung* bzw. Vereinigung verschiedener Logiken, z. B. Aussagen-Logik, Prädikaten-Logik, Quantoren-Logik und Klassen-Logik
2. eine – doppelte – *Quantifizierung der synthetischen Logik* (die nicht auf der Fuzzy-Logik beruht), mittels empirischer und theoretischer Wahrscheinlichkeit
3. eine – doppelte – *Quantifizierung logischer Schlüsse* und anderer analytischer Relationen, mittels Wahrscheinlichkeitstheorie, innerhalb einer *induktiven-deduktiven* Logik
4. eine Beschreibung *semi-analytischer Relationen* als Mittelglied zwischen synthetischen und analytischen Relationen
5. eine *Modal-Logik*, welche vollständig auf Quantoren- bzw. Quantitäts-Logik zurückgeführt wird.

Konsequent *neue Ideen* haben es zunächst schwer, Anerkennung zu finden, gerade in Wissenschaft und Philosophie. Erst recht, wenn diese Ideen als *System* präsentiert werden, denn in der heutigen Philosophie besteht vielfach ein Misstrauen gegenüber *philosophischen Systemen*. Diese Haltung ist aber eher anachronistisch. Denn die *Systemtheorie*, welche die Welt und ihre Bereiche als Systeme beschreibt, in allgemeiner oder spezieller Form, ist heute die wichtigste und fortschrittlichste Theorie. Ebenso ist es ein Vorteil, wenn eine *Theorie selbst* als System aufgebaut und dargestellt wird. Insofern verstehe ich mein Buch – vom Inhalt und von der Form her – auch als Beitrag zu einer (logischen) Systemtheorie.

5) INHALTS-AUFBAU

Bei der Darstellung wird großer Wert auf *Systematik* gelegt. Das zeigt sich auch in der Bevorzugung eines *5er*-Systems, d. h. einer Unterteilung des Textes in jeweils 5 Punkte (ggf. auch 6 Punkte, wenn nämlich die 0 mitgezählt wird). Diese 5er-Unterteilung hat aber vorwiegend pragmatische und lerntheoretische Gründe, dahinter steht keine besondere Ontologie. Der Text ist entsprechend systematisch in folgende *Kapitel* unterteilt:

0 Grundlagen
1 Logik *synthetischer* Relationen
2 Logik *analytischer* Relationen
3 *Meta*-Logik *synthetischer* Relationen
4 *Meta*-Logik *analytischer* Relationen
5 System

Dabei sind die *Kapitel* 1 bis 4 gleich unterteilt, in die *Unterkapitel*:

1-1 Aussagen-Logik (bzw. 2-1, 3-1, 4-1)
1-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik
1-3 Quantitative Logik
1-4 Quantitative Aussagen-Logik
1-5 Quantitative Quantoren-Logik

Auch diese *Unterkapitel* sind gleich unterteilt, in die *Unterpunkte*:

1-1-1 Einführung
1-1-2 Implikation
1-1-3 Positiv-Implikation
1-1-4 Systematik
1-1-5 Erweiterungen

So steht z. B. „**1**-1 Aussagen-Logik“ für *Synthetische Relationen* in der Aussagen-Logik, aber „**2**-1 Aussagen-Logik“ für *Analytische Relationen* in der Aussagen-Logik.

Normalerweise wird noch eine in vierte Ebene unterteilt, also in Kap. 1: 1-1-1-1 bis 1-5-5-5; in manchen Unterkapiteln geht die Differenzierung aber nur bis Ebene drei, also z. B. 1-1-1.

ÜBERBLICK

Der Überblick gibt – in äußerster Knappheit – für Kapitel 0 bis 4 (entsprechend deren Gliederung) wichtige Inhaltshinweise oder eine exemplarische Demonstration. Da das Kapitel 5 nur Tabellen, Formeln bzw. selbst Übersichten enthält, ist es in diesem Überblick nicht erfasst.

0 GRUNDLAGEN DER LOGIK

Im Punkt „Grundlagen" werden logische, aber auch *sprachphilosophische* und *ontologische* „Essentials" dargestellt, durchaus schon in Erweiterung der herkömmlichen Logik.

0-1 Logik-Modelle

Hier werden Modelle der Logik vorgestellt, d. h. verschiedene Theorien, was Logik ist, wie sie begründet werden kann usw. Ich sehe die Logik in erster Linie als Wissenschaft von der *formalen Welt*, insbesondere als Theorie *funktionaler Relationen*, wobei logische Gesetze als ewige Wahrheiten verstanden werden können (wenn auch nicht müssen).

Ein besonderes Verhältnis besteht zwischen *Logik* und *Sprache*, wobei der Gegensatz „logische Sprache – natürliche Sprache" und der Gegensatz „logische Grammatik – sprachwissenschaftliche Grammatik" auseinander zu halten sind; so kann man z. B. auch die natürliche Sprache mittels der logischen Grammatik analysieren.

Eine wichtige Unterscheidung in diesem Zusammenhang ist die zwischen *Objekt-Sprache* und *Meta-Sprache*: in der Objekt-Sprache spricht man über (reale) *Objekte*, in der Meta-Sprache spricht man über *Sprache*, z. B. über Zeichen.

0-2 Logik-Komponenten

Man kann *erstens* vor allem drei *Ansätze* der Logik unterscheiden: einen *realistischen*, einen *linguistischen* und einen *psychologischen*. Je nach Ansatz besitzt die Logik unterschiedliche *Komponenten*:

- *reale* Komponenten: Individuen, Mengen bzw. Klassen, Sachverhalte, Ereignisse
- *sprachliche* Komponenten: Wörter bzw. Prädikate, Sätze bzw. Aussagen
- *psychische* Komponenten: Denk-Begriffe, Urteile oder Gedanken usw.

Der psychologische Ansatz wurde vorwiegend in der *traditionellen Logik* – als „Lehre vom folgerichtigen Denken" – vertreten; die *moderne Logik* ist primär „linguistisch" orientiert, geht von Aussagen bzw. Sätzen und anderen Spracheinheiten aus. Diese sprachliche Deutung hat in bestimmten Anwendungen ihre pragmatischen Vorteile, ich halte es aber überwiegend für günstiger, von *realen* Komponenten auszugehen. Allerdings, für die Logik ist es nach meiner Überzeugung grundsätzlich gleichgültig, auf welche Komponenten man sie anwendet.

Daher geht man am besten von einer *neutralen* Interpretation aus, die jedoch der *realistischen* Interpretation am nächsten steht. Hier konzentriert man sich primär auf *Relationen*, Beziehungen zwischen *Objekten* und *Eigenschaften* (als Relata). Und zwar geht es um der Logik um *korrelative* Relationen, diese bestehen nur in „funktionalen Abhängigkeiten", im gemeinsamen gültig oder ungültig sein, unabhängig von Raum, Zeit, Materie usw. Die Relationen werden insbesondere durch Symbole der *Logik* (Junktoren) und der *Mengenlehre* dargestellt. Logische Relationen können *Aussagen*, *Sachverhalte* oder *Urteile* repräsentieren.

Es werden *zweitens* herkömmlich verschiedene *Arten* der Stufen von Logik unterschieden, z. B. in der linguistischen, meta-sprachlichen Diktion *Aussagen*-Logik, *Prädikaten*-Logik, *Quantoren*-Logik u. a. Nach meiner Auffassung liegen die Unterschiede in diesen Logiken ebenfalls nicht primär in dem Ansatz oder in der Art der Komponenten, sondern im Grad der (expliziten oder impliziten) *Quantifizierung*. So gilt:

- *Aussagen-Logik*: 2-wertig, enthält nur die Werte 0 und 1
- *Quantoren-Logik*: normalerweise 4-wertig: Werte 1, < 1, 0, > 0

- *Prädikaten-Logik*: kann man als *implizit* ∞-wertige Logik interpretieren, wobei die Werte alle im Intervall von 0 bis 1 liegen, also: $\geq 0 \wedge \leq 1$

Es lässt sich entsprechend auch eine, auf *Wahrscheinlichkeitstheorie* basierende, *quantitative Logik* einführen, die – *explizit*, also numerisch – mit infiniten Werten p zwischen 0 und 1 arbeitet: $0 \leq p \leq 1$. Die Entwicklung dieser Quantitäts-Logik ist ein Schwerpunkt des Buches.

0-3 Extension und Intension

Dies ist eine zentrale Unterscheidung in der Logik sowie in der Sprachphilosophie und Semantik. Die *Extension* bzw. *Intension* sind die wichtigsten Formen von *Bedeutung* bzw. Bezeichnung. Zusammenfassend kann man sagen:

Bei Wörtern, Zeichen gilt: Die Extension sind *Objekte*, Individuen oder Klassen, die Intension sind die definierenden, wesentlichen *Begriffe* bzw. Eigenschaften; allerdings darf man nicht die Extension mit den *realen Objekten* gleichsetzen, es geht um *abstrakte Klassen* bzw. abstrakte Individuen.

Bei Sätzen gilt: Die Extension ist ein *Sachverhalt*, eine Relation zwischen Objekten; die Intension ist ein „*Begriffsverhalt*“, eine Relation zwischen Begriffen. Dabei analysiere und kritisiere ich die Theorie, dass die Extension eines Satzes sein *Wahrheitswert* sei bzw. die Intension eines Satzes sein *Wahrheitswert in allen möglichen Welten*.

0-4 Kopula

Die Kopula ‚ist' steht für eine zentrale, vielleicht die wichtigste Relation in der Logik: „X ist (ein) Y“. Ich zeige, dass ganz unterschiedlichen logischen Formalisierungen wie $x_i \in F$, Fx_i, $F \subset G$ und $A \rightarrow B$ im Grunde die *gleiche* Kopula-Struktur ausdrücken. Da es aber immer wissenschaftliches Ziel ist, eine möglichst *einheitliche* Darstellung zu wählen, diskutiere ich zwei Möglichkeiten: entweder *mengen-relational* nur das Teilmengen-Zeichen $\subset$ zu verwenden oder *logisch-wahrheitsfunktional* nur das Implikations-Zeichen $\rightarrow$. Im zweiten Fall ergibt sich allgemein $X \rightarrow Y$ (oder $\Phi \rightarrow \Psi$) und speziell: $x_i \rightarrow F$, $F \rightarrow G$, $A \rightarrow B$. Auch ein *Individual-Satz* wie ‚Sokrates ist ein Philosoph' wird hier wahrheitsfunktional interpretiert, z. B. in dem Sinn: „Wenn Sokrates existiert, ist die Klasse der Philosophen belegt“.

0-5 Synthetische und analytische Relationen

Diese Unterscheidung ist grundlegend. Verwenden wir hier der Einfachheit halber zunächst eine *sprachliche* Interpretation. *Analytisch* ist ein Satz, bei dem das Prädikat im Subjekt bereits enthalten ist (*Tautologie*) oder aber dem Subjekt widerspricht (*Kontradiktion*); *synthetisch* ist ein Satz, bei dem das Prädikat dem Subjekt etwas Neues hinzufügt, also von ihm logisch unabhängig ist.

Ich vertrete aber die These, dass man dazwischen als Drittes *partiell analytische* Relationen bzw. Sätze unterscheiden kann. Hier fügt das Prädikat dem Subjekt *teilweise* etwas Neues hinzu. Diese Definitionen kann man auch auf Schlüsse anwenden. Z. B. unterscheide ich zwischen $X \rightarrow Y$ (synthetisch) und $(X \vee Y) \longrightarrow Y$ (semi-analytisch), obwohl sich in der Wahrheitstafel dasselbe Resultat ergibt, sie also logisch äquivalent sind.

Analytische Relationen sind in *jeder* Welt gültig (Tautologie) oder in *keiner* Welt (Kontradiktion). *Partiell analytische* Relationen sind in *einigen* Welten gültig, in anderen nicht, dasselbe gilt für synthetische Relationen.

Syntaktisch kann man unterscheiden: Bei *synthetischen* Relationen findet man rechts und links vom Junktor nur *unterschiedliche* Objektzeichen ($X \rightarrow Y$), bei *partiell analytischen* Relationen findet man *partiell gleiche* Zeichen, ($X \vee Y \longrightarrow Y$), bei *streng analytischen* Relationen findet man partiell oder ausschließlich gleiche Zeichen ($X \Rightarrow X$).

Für die Implikation ergibt sich daher z. B.:

synthetisch: $X \rightarrow Y$, *partiell-analytisch* $X \vee Y \longrightarrow Y$, analytisch $X \Rightarrow X$.

1 LOGIK SYNTHETISCHER RELATIONEN

1-1 Aussagen-Logik

Die sogenannte *Aussagen-Logik* behandelt die Relationen zwischen Aussagen, deren *Struktur unberücksichtigt* bleibt. Wie gesagt geht es aber im Grunde um eine *2-wertige* Logik, die sich auf *beliebige Objekte* oder *Sachverhalte* (X, Y) beziehen kann, nicht nur auf Aussagen.

Da ich also nicht nur von *Aussagen* ausgehe, die *wahr* oder *falsch* sind, verwende ich hier nicht *w* oder *f*, sondern + (plus) für *belegt* / *gültig* oder – (minus) für *nicht belegt* / *ungültig*.

Die Relationen (Relatoren) werden durch *Wahrheitswerte* bzw. eine *Wahrheitswertetafel* definiert. Es werden die *möglichen Welten* angegeben. Bei 2 Relata – bzw. 2 Aussagen oder 2 Variablen – X und Y ergeben sich $2^2 = 4$ mögliche Welten oder logische Welten.

D. h. es wird angeben, welche *Kombinationsmöglichkeiten* von X und Y es gibt: $X \wedge Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$. Dann wird festgelegt, bei welchen dieser Möglichkeiten (in welcher dieser Welten) der betreffende Relator bzw. die Relation als *belegt* gilt.

Die Wahrheitswertetafeln für die wichtigsten Relatoren sind:

X Y	$\wedge$	$\vee$	><	|	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
+ +	+	+	–	–	+	+
+ –	–	+	+	+	–	–
– +	–	+	+	+	+	–
– –	–	–	–	+	+	+

Die *Implikation* $X \rightarrow Y$ (wenn X, dann Y) mit dem Wahrheitswerte-Verlauf + – + + führt zu *Paradoxien*. Auch entspricht sie nicht der *normal-sprachlichen* Auffassung von *Wenn-dann-Sätzen*, die nämlich nur als definiert gelten, wenn das *Vorderglied belegt* (der Vordersatz wahr) ist. Daher habe ich eine veränderte Implikation, von mir *Positiv-Implikation* genannt, eingeführt, bei der nur die Fälle berücksichtigt werden, in denen *das Vorderglied gültig* ist.

X	$*\rightarrow$	Y
+	+	+
+	–	–

1-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

Hier unterscheidet man vor allem zwischen 4 Werten: *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*. Also im Gegensatz zur Aussagen-Logik, die nur zwischen *positiv* (= alle) und *negativ* (= alle nicht) unterscheidet. Man spricht von *All-Sätzen* und *Partikulär-Sätzen* (bzw. Existenz-Sätzen), allgemeiner kann man von *All-Relationen* und *Partikulär-Relationen* sprechen.

Die *Quantoren-Logik* erfasst die Individuen x *kollektiv*, durch *Quantoren* wie Λ = alle, V = einige; die *Prädikaten-Logik* nimmt Bezug auf die *einzelnen* Individuen x_1, x_2 usw.

Beispiele für All-Strukturen sind:

1. alle x sind F
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx)$
   Prädikaten-Logik: $Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge ... \wedge Fx_n$
2. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Problematischer ist die Formalisierung von *Partikulär*-Strukturen, z. B. die verbreitete Formel $Vx(Fx \wedge Gx)$. Diese kritisiere ich im Buchtext und schlage Alternativen vor. Außerdem ist streng zwischen „mindestens einige“ und „genau einige“ zu unterscheiden.

1-3 Quantitative Logik

Ich habe im Verlaufe vieler Jahre eine *quantitative* Logik entwickelt. Diese Logik kann hier im *Überblick* nur angedeutet werden. Für die Implikation $X \rightarrow Y$ z. B. schreibt man quantitativ $p(X \rightarrow Y) = r/n$. Dies kann je nach Kontext in verschiedener Weise interpretiert werden, vor allem: „Wenn X, dann mit einer Wahrscheinlichkeit $p = r/n$ auch Y"; oder: „Die *relative Häufigkeit bzw. Wahrscheinlichkeit* von $X \rightarrow Y$ beträgt r/n". Die Berechnung vollzieht sich anhand der *Wahrheitstafel* – dabei steht q für die *absolute* Anzahl bzw. Häufigkeit.

	$X \rightarrow Y$	
1.	+ + +	$q(X \wedge Y) = a$
2.	+ − −	$q(X \wedge \neg Y) = b$
3.	− + +	$q(\neg X \wedge Y) = c$
4.	− + −	$q(\neg X \wedge \neg Y) = d$

Zur Berechnung von p dividiert man die Anzahl der *Fälle* in den +Welten (wo + unter dem Relator → steht) durch die Anzahl der Fälle in *allen* Welten. D. h. der *Nenner* ist (bei 2 Variablen) immer: a + b + c + d. Für $X \rightarrow Y$ ergibt sich:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

1-4 Quantitative Aussagen-Logik

Ich vertrete die Auffassung, dass die Aussagen-Logik ein *Grenzfall* der quantitativen Logik ist, wobei nur 2 Werte unterschieden werden: 1 bei *Position* und 0 bei *Negation*.
Das bedeutet:

$X \rightarrow Y$ steht für: $$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} = 1$$

$\neg(X \rightarrow Y)$ steht für: $$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} = 0$$

Man muss also unterscheiden:
1) $X \rightarrow Y$ als Struktur in der Aussagen-Logik mit *implizitem* Wert von $p = 1$ (Konstante).
2) $X \rightarrow Y$ in $p(X \rightarrow Y) = r/n$ in der quantitativen Logik, als Struktur mit unbestimmtem Wert (Variable), der erst durch p ein bestimmter Wert zugesprochen wird, und zwar in der *quantitativen Aussagen-Logik* $p = 1$ oder $p = 0$.

1-5 Quantitative Quantoren-Logik

In der Quantoren-Logik werden wie beschrieben normalerweise (inklusiv) 4 Werte unterschieden:

	bedeutet quantitativ
1. alle	$p = 1$
2. alle nicht	$p = 0$
3. einige	$p > 0$
4. einige nicht	$p < 1$

So steht z. B. „einige x sind F": $\vee x(Fx)$ für quantitativ $p(Fx) > 0$ oder vereinfacht $p(X) > 0$.
„Nicht alle F sind G": $\neg\wedge x(Fx \rightarrow Gx)$ steht z. B. für quantitativ vereinfacht $p(X \rightarrow Y) < 1$.

Als Formel ergibt sich hier: $$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$$

2 LOGIK ANALYTISCHER RELATIONEN

2-1 Aussagen-Logik

Man kann unterscheiden:

• Streng (vollständig) analytische Relationen

- *Tautologien*: sie sind in *jeder Welt* wahr bzw. gültig. In der Wahrheitstafel steht nur + (plus) unter dem Junktor bzw. Relator. Tautologien haben den Status von Gesetzen.

- *Kontradiktionen*: sie sind in *keiner Welt* wahr, also in jeder falsch bzw. ungültig. D. h. sie sind widersprüchlich. Es steht nur – (minus) unter dem Junktor. Kontradiktionen sind natürlich weniger bedeutsam.

• *Partiell analytische (semi-analytische) Relationen*: sie sind in *genau einigen Welten* gültig.

Tautologische *Implikationen* formalisiere ich immer durch einen *Doppelpfeil* wie $\Rightarrow$ (andere tautologische Relationen durch hochgestelltes $^{++}$).

Kontradiktorische *Implikationen* formalisiere ich durch den durchgestrichenen Doppelpfeil wie $\nRightarrow$ (sonst hochgestelltes $^{--}$).

Semi-analytische *Implikationen* kennzeichne ich durch den verlängerten Pfeil $\longrightarrow$ (andere Relationen durch hochgestelltes $^{+-}$).

Analytische Implikation

• *Tautologie*

Z. B. $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$ (Modus ponendo ponens)

Der Pfeil $\Rightarrow$ steht für die tautologische (analytische) Implikation. Der Werteverlauf in der Wahrheitstafel unter dem zentralen Relator $\Rightarrow$ lautet: + + + +.

• *Kontradiktion*

Z. B. $(X\ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \nRightarrow (X\ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$

Eine Implikation kann nur dann kontradiktorisch sein, wenn das Vorderglied eine *Tautologie* und das Nachglied eine *Kontradiktion* ist. Der Wahrheitsverlauf lautet: – – – –.

• *Partiell Analytische Implikation*

Z. B. $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$. Wahrheitsverlauf: + + + –.

$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ ist zwar *logisch äquivalent* einer *synthetischen* Relation wie $X \vee Y$.

Aber ich werde versuchen zu zeigen, dass diese Ausdrücke weder *extensional* noch *intensional* gleich sind. Dabei darf man allerdings nicht der verbreiteten Theorie folgen, nach der die *Intension* die *Extension* in allen möglichen Welten, entsprechend der Wahrheitstafel, ist.

2-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

Natürlich gelten hier zunächst alle Gesetze der *Aussagen-Logik*.

Z. B. entsprechend zum aussagen-logischen $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$ gilt quantoren-logisch:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) \Rightarrow \Lambda x(Gx)$ bzw. allgemeiner $\Lambda(X \rightarrow Y) \wedge \Lambda(X) \Rightarrow \Lambda(Y)$.

Aber es gelten eben auch *spezielle* Gesetze, die nur in der Quantoren- bzw. Prädikaten-Logik zu formulieren sind, nicht in der Aussagen-Logik. Die wichtigsten werden im *logischen Quadrat* dargestellt.

alle	$^{+}\vert^{+}$	alle$\neg$
$\Downarrow$	$^{+}\!\times^{+}$	$\Downarrow$
einige	$^{+}\!\vee^{+}$	einige$\neg$

2-3 Quantitative Logik
Auch hier beschränke ich mich in diesem Überblick wieder auf *Schlüsse* bzw. *analytische Implikationen*.

Beispiel: *Abtrennungsregel (Simplifikationsregel)*
- qualitative Form: $X \wedge Y \Rightarrow Y$
- quantitative Form: $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$
- Bruch-Form: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \Rightarrow \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{n}$ $\quad s \geq r$

Kurz-Erläuterung: Wenn c = 0, haben beide Brüche den gleichen Wert. Wenn c > 0, hat der zweite Bruch einen höheren Wert. Bei der Ungleichung ergeben sich folgende (n – r + 1) Lösungen: s = r, r + 1, …, n. Also: p(Y) = r/n, (r + 1)/n, ... , n/n

2-4 Quantitative Aussagen-Logik
Hier geht es um Schlüsse zwischen *quantitativen* Relationen bzw. Aussagen, die den Wert p = 1 oder p = 0 haben. Solche Strukturen kann man auch *deterministisch* nennen, dagegen nennt man Strukturen mit dem Wert 0 < p < 1 *statistisch*.

Beispiel: *Abtrennungsregel (deterministisch)*
- qualitative Form: $X \wedge Y \Rightarrow Y$
- quantitative Form: $p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$
- Bruch-Form: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Kurz-Erläuterung: Aus dem ersten Bruch ergibt sich: a > 0, b + c + d = 0. Es haben also alle Parameter außer a den Wert 0. Damit ergibt sich für den abgeleiteten Bruch: $\dfrac{a}{a} = 1$

2-5 Quantitative Quantoren-Logik
Hier geht es um Schlüsse zwischen Relationen (Aussagen, Prämissen), die folgende p-Werte haben: 1, < 1, 0, > 0 (während die quantitative *Aussagen*-Logik nur p = 1 und p = 0 kennt).

Beispiel: *Modus ponendo ponens* - analog
- quantoren-logische Form: $V(X \rightarrow Y) \wedge \Lambda(X) \Rightarrow V(Y)$
- quantitative Form : $p(X \rightarrow Y) > 0 \wedge p(X) = 1 \Rightarrow p(Y) > 0$
- Bruch-Form: $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0 \wedge \dfrac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \dfrac{a+c}{a+b+c+d} > 0$

Erläuterung: Aus dem ersten Bruch ergibt sich: a + c + d > 0. Aus dem zweiten Bruch ergibt sich: c + d = 0. Somit ergibt sich aus beiden Brüchen zusammen: a > 0.
Also ergibt sich für den abgeleiteten dritten Bruch der Wert p > 0.

Bezüglich *exklusiv* / *inklusiv* gilt: *genau* einige (exklusiv) ⇒ *mindestens* einige (inklusiv).
quantitativ: $0 < p(X) < 1 \Rightarrow p(X) > 0$
Das beruht auf folgenden Definitionen:
Mindestens einige x sind F: Vx(Fx). Heißt quantitativ: p(Fx) > 0, vereinfacht: p(X) > 0
Genau einige x sind F: ∃x(Fx). Heißt quantitativ: 0 < p(Fx) < 1, vereinfacht: 0 < p(X) < 1

3 META-LOGIK SYNTHETISCHER RELATIONEN

Meta-Werte sind Werte, die sich auf andere Werte (*Objekt-Werte*) beziehen. Der wichtigste Meta-Wert ist die *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T, die sich insbesondere auf die *empirische* Wahrscheinlichkeit p bezieht. Z. B. wie hoch ist p^T, wenn $p(X \rightarrow Y) = r/n$? Die theoretische Wahrscheinlichkeit gibt an, wie wahrscheinlich eine Relation ist, allein auf Grund der möglichen *Kombinationen*, also der logischen Welten bzw. der numerischen Fälle.

Die theoretische Wahrscheinlichkeit gibt aber zugleich den *Grad der theoretischen Wahrheit* an, d. h. den *Tautologie-Grad* einer Relation. Und der Umkehrwert von p^T, also $(1 - p^T)$, gibt den *Informations-Gehalt* an. p^T nimmt dabei (wie p) Werte zwischen 0 und 1 an.

Es wurde bereits unterschieden zwischen *synthetischen*, *analytischen* und *partiell analytischen* Relationen bzw. Strukturen. Man kann für alle diese Relationen (seien sie qualitativ oder quantitativ) die theoretische Wahrscheinlichkeit berechen und sie danach differenzieren. D. h., dass man – anders als es sonst dargestellt wird – auch für *synthetische* Relationen einen Tautologie-Grad berechen kann (der allerdings immer > 0 und < 1 ist).

p^T	Modalität	Tautologie-Status	Analytischer Status	Beispiel
$p^T = 1$	notwendig (sicher)	tautologisch	analytisch	$X \vee \neg X$
$p^T = 0$	unmöglich	kontradiktorisch	analytisch	$X \wedge \neg X$
$0 < p^T < 1$	(genau) möglich	partiell tautologisch	partiell analytisch	$X \wedge X$
		partiell tautologisch	synthetisch	$X \wedge Y$

3-1 Aussagen-Logik

Folgende Tabelle gibt eine Übersicht über (synthetische) Strukturen der Aussagen-Logik:

Beispiele	Wahrheits-werte	p^T
$X \rightarrow Y$	+ – + +	3/4 = 0,75
$X \leftrightarrow Y$	+ – – +	2/4 = 0,5
$X \wedge Y$	+ – – –	1/4 = 0,25

Der Wert p^T gibt an, wie wahrscheinlich ein Satz bzw. eine Relation allein von der Form her ist. Man berechnet p^T vereinfacht durch folgende Division:

$$\frac{\text{Anzahl der Welten, in denen die Struktur gültig ist (+)}}{\text{Anzahl aller möglichen Welten (+ und –)}}$$

3-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

In der traditionellen Quantoren-Logik werden, wie beschrieben, 4 Quantitäten unterschieden: *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*. Diese werden mit 2 *Quantoren* (Λ, V) formalisiert: Λ, $\Lambda\neg$, V, V$\neg$. Z. B. $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ für den *All-Satz*.

Nun ist es nicht möglich, einem solchen Satz (bzw. einer solchen Relation) direkt eine theoretische Wahrscheinlichkeit p^T zuzuweisen, weil zur Bestimmung von p^T die *absolute* Quantität benötigt wird, also die *relative* Quantität, hier *alle* = 100%, nicht ausreicht. Es ist jedoch möglich, eine Berechnung vorzunehmen, wenn man den *quantoren-logischen* Ausdruck in einen *prädikaten-logischen* umformt. Z. B.:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \quad \Leftrightarrow \quad (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$$

Bestimmung von p^T (theoretische Wahrscheinlichkeit bzw. tautologischer Grad):

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)] = 3^n/4^n$$

3-3 Quantitative Logik

Bei den quantitativen Relationen muss man zur Berechnung von p^T modifiziert vorgehen: Zunächst *addiert* man, wie schon beschrieben, die *Fälle*, die in den *belegten* Welten der Relation vorkommen (z. B. bei $X \rightarrow Y$ ist das: a + c + d) und *dividiert* sie durch *alle* Fälle in *allen* Welten, bei 2 Variablen: a + b + c + d.

So erhält man die Formel für die *empirische* Wahrscheinlichkeit p.

Z. B. für $p(X \rightarrow Y)$ ist das: a + c + d / a + b + c + d = r/n, anders geschrieben:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

Für diese Verteilung berechnet man die *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T.

p^T ergibt sich nun nach folgender Formel der *Binomial-Verteilung* (die Herleitung erfolgt im Text):

$$p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n] = \binom{n}{r}(3/4)^r (1/4)^{n-r}$$

Wenn man sich z. B. die Frage stellt: Welchen Wert hat $p(X \rightarrow Y)$ am wahrscheinlichsten (bei n = 5)? Dann kann man antworten:

Am relativ wahrscheinlichsten ist $p(X \rightarrow Y) = 4/5$, denn dafür besteht die höchste theoretische Wahrscheinlichkeit, nämlich $p^T = 405/1024 = 0{,}4$. Somit hat $p(X \rightarrow Y) = 4/5$ auch den höchsten *Tautologie-Grad* – im Vergleich mit $p(X \rightarrow Y)$ = 5/5, 3/5, 2/5, 1/5 oder 0/5.

3-4 Quantitative Aussagen-Logik

Die Aussagen-Logik unterscheidet wie gesagt (quantitativ betrachtet) nur 2 Möglichkeiten, p = 1 und p = 0.

Ich möchte mich hier auf den negativen Fall p = 0 der *Implikation* beschränken:

Für $p(X \rightarrow Y) = r/n = 0$ gilt: r = 0

Für die Formel $p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n] = \binom{n}{r}(3/4)^r (1/4)^{n-r}$ bedeutet das:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 0] = 1 \times 1 \times 1/4^n = 1/4^n$

3-5 Quantitative Quantoren-Logik

Die quantitative Quantoren-Logik behandelt, anders als die quantitative Aussagen-Logik, nicht nur p = 1 und p = 0, sondern auch p < 1 und p > 0.

Als Beispiel-Fall „einige X sind Y“: $p(X \rightarrow Y) > 0$ („einige sind“ hier mit $\rightarrow$ formalisiert)

Laut obiger Formel (in 3-4) gilt:
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 0] = 1/4^n$.
Somit gilt: $p^T[p(X \rightarrow Y) > 0] = 1 - 1/4^n = (4^n - 1)/4^n$.
Denn es muss ja gelten:
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 0] + p^T[p(X \rightarrow Y) > 0] = 1$.
Und: $1/4^n + (4^n - 1)/4^n = 1$

Dazu muss man sich klarmachen: Wenn p > 0, werden ja alle Werte außer 0 erfasst.
0 und > 0 bilden also eine *vollständige Disjunktion*, einen *kontradiktorischen Gegensatz*. Somit ergibt sich $p^T[p(X \rightarrow Y) > 0]$ als Umkehrwert von $p^T[p(X \rightarrow Y) = 0]$.

4 META-LOGIK ANALYTISCHER RELATIONEN

4-1 Aussagen-Logik

• *Vollständig* analytische Relationen sind wie beschrieben *Tautologien* oder *Kontradiktionen*.
- Tautologien: $p^T = 1$ bzw. bezogen auf 2 Variablen / 4 Welten: $p^T = 4/4$.
- Kontradiktionen: $p^T = 0$ bzw. bezogen auf 2 Variablen / 4Welten: $p^T = 0/4$.

p^T gibt den *Grad der Tautologie* bzw. bei der Implikation den *Grad der logischen Folge* an.

- *Tautologie*, z. B. Modus ponendo ponens: $p^T[(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y] = 4/4 = 1$

- *Kontradiktion*:

Eine kontradiktorische Implikation liegt nur vor, wenn das Vorderglied *tautologisch* und das Nachglied *kontradiktorisch* ist. $p^T[(X \,^+\!\vee^+ \neg X) \not\Rightarrow (X \,^-\!\wedge^- \neg X)] = 0/4 = 0$

• *Partiell-analytische Implikation:* $0 < p^T < 1$ bzw. $0/4 < p^T = 4/4$

Hier liegt nur eine partielle logische Folge vor. Z. B.:

$$p^T[(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \leftarrow Y)] = 3/4 = 0{,}75$$

$$p^T[(X \wedge Y) \longrightarrow (X \vee Y)] = 2/4 = 0{,}5$$

$$p^T[(X / Y) \longrightarrow (X \wedge Y)] = 1/4 = 0{,}25$$

4-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

Ich will mich auch hier auf einige Implikations-Beispiele beschränken.

- *Tautologie*

Schluss vom All-Satz auf den Partikulär-Satz

$p^T[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)] = 1$ bzw. $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)] = 1$

- *Kontradiktion*

Schluss vom All-Satz auf den negierten Partikulär-Satz

$p^T[\Lambda x(Fx) \,{*}\!\not\Rightarrow \neg Vx(Fx)] = 0$

(so gilt der Schluss *nur* mit der *Positiv-Implikation* $*\!\rightarrow$, wie im Text erläutert wird)

- *partiell analytische Implikation*

• Für $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$ gilt: $p^T[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)] > 0 \wedge < 1$

„Wenn *einige* Objekte x die Eigenschaft F haben, dann haben *alle* x die Eigenschaft F“. Dieser Schluss ist *nicht kontradiktorisch*, aber offensichtlich auch *nicht streng folgerichtig*, daher gilt: $0 < p^T < 1$. Man kann p^T auch genauer berechnen, wenn man (wie schon beschrieben) eine *prädikaten-logische* Umformung vollzieht:

$$p^T[(Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n)] = 1/2^{n-1}$$

• Für $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ gilt: $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] > 0 \wedge < 1$

Dieser zweite Fall ist besonders interessant. Denn in dieser Weise werden All-Sätze und Partikulär-Sätze (Existenz-Sätze) meistens formalisiert. Es zeigt sich, dass *so* aus „alle F sind G“ nicht sicher folgt „einige F sind G“, obwohl dies i. allg. als sichere Folge gilt. Nach einer prädikaten-logischen Umformulierung kann man wieder eine genaue Formel aufstellen:

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n \wedge Gx_n)] = (4^n - 2^n)/4^n$$

4-3 Quantitative Logik
In diesem Punkt konzentriere ich mich auf Schlüsse mit der *Positiv-Implikation* $*\rightarrow$.

Abtrennungsregel (Simplifikationsregel)
□ qualitative Basis: $X \wedge Y \; *\Rightarrow \; Y$
□ quantitative Form: $p(X \wedge Y) = r/n \; *\longrightarrow \; p(Y) = s/n$

□ Bruch-Form: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \; *\longrightarrow \; \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{n}$

Es gilt: $s = r, r + 1, r + 2, \ldots, n$. Also: $r \leq s$

Um nun zu berechnen, wie wahrscheinlich – bei vorgegebenem $p(X \wedge Y)$ – ein bestimmter Wert von $p(Y)$ ist, d. h. um den *Grad der logischen Folge* zu berechnen, habe ich folgende Formel entwickelt (dabei wird hier die semi-analytische Implikation $*\longrightarrow$ verwendet):

$$p^T[(p(X \wedge Y) = r/n \; *\longrightarrow \; p(Y) = s/n] = \binom{n-r}{n-s}(2/3)^{n-s}(1/3)^{s-r}$$

4-4 Quantitative Aussagen-Logik
Wieder die Abtrennungsregel, ein Schluss, dessen qualitative Basis *vollständig* analytisch ist:

Abtrennungsregel (Simplifikationsregel)
□ qualitative Basis: $X \wedge Y \; *\Rightarrow \; Y$
□ quantitative Form: $p(X \wedge Y) = r/n = 1 \; *\Rightarrow \; p(Y) = s/n = 1$

□ Bruch-Form: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = 1 \; *\Rightarrow \; \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Ich gebe hier ein Zahlenbeispiel: $(X \wedge Y) = 4/4 \; *\Rightarrow \; p(Y) = 4/4$, also: $r = 4$, $n = 4$, $s = 4$.

Nach obiger Formel (in 4-3) ergibt sich:

$$p^T[(p(X \wedge Y) = 4/4 \; *\Rightarrow \; p(Y) = 4/4] =$$

$$\binom{4-4}{4-4}(2/3)^{4-4}(1/3)^{4-4} = 1 \times (2/3)^0 \times (1/3)^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Der Schluss hat also eine Wahrscheinlichkeit $p^T = 1$, er ist somit *vollständig tautologisch*.

4-5 Quantitative Quantoren-Logik
Einige Beispiele mit *normaler Implikation* und mit *Positiv-Implikation*:
- *Tautologie:*

alle $\Rightarrow$ einige	$p^T[p(X) = n/n = 1 \; \Rightarrow \; p(X) > 0/n] = (2/2)^n = 1$
alle $\Rightarrow$ einige	$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n = 1 \; \Rightarrow \; p(X \rightarrow Y) > 0/n] = (4/4)^n$

- *Semi-analytischer Schluss*:

einige $\longrightarrow$ alle	$p^T[p(X) > 0/n \; \longrightarrow \; p(X) = n/n = 1] = 1/2^{n-1}$
einige $*\longrightarrow$ alle	$p^T[p(X) > 0/n \; *\longrightarrow \; p(X) = n/n = 1] = 1/(2^n - 1)$
alle $\longrightarrow$ einige	$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/n] = (4^n - 2^n)/4^n$

0 GRUNDLAGEN DER LOGIK

ÜBERSICHT

0-1 Logik-Modelle

Hier werden Logik-*Modelle* vorgestellt, d. h. verschiedene Theorien, was Logik ist, wie sie begründet werden kann usw. Ich sehe die Logik in erster Linie als *Wissenschaft von der formalen Welt*, wobei logische Gesetze als *ewige Wahrheiten* verstanden werden können, wenn auch nicht müssen.

0-2 Komponenten

Das sind zuvorderst *Objekte* und *funktionale Relationen* zwischen diesen Objekten.
Objekte sind abstrakt bzw. formal, im genaueren sind es *Individuen*, *Mengen* und *Klassen*, jeweils mit den dazu gehörigen *Eigenschaften* bzw. *Begriffen*.
Logische Relationen sind *funktional*, sie abstrahieren von Raum, Zeit, Kausalität usw. Zu den logische Relationen zählen z. B: „wenn – dann“ / „und“ / „oder“.

0-3 Extension und Intension

Die Extension betrifft *Objekte* (Individuen und Klassen) bzw. *Sachverhalte*. Die Intension betrifft *Eigenschaften* bzw. *Begriffe*, z. B. Allgemein-Begriffe und Individual-Begriffe, außerdem Relationen zwischen Begriffen („Begriffsverhalte“).

0-4 Kopula

Die basale logische Relation ist die *Kopula*, das „ist“, z. B. in: „x ist ein F“. Sie verbirgt sich hinter verschiedenen logischen Relationen wie *Element-Relation*, *Teilmengen-Relation*, *Implikation* u. a.

0-5 Synthetisch und analytisch

Synthetische Relationen beziehen sich auf die reale, *empirische* Welt, ihre Gültigkeit hängt ab von ihren Komponenten. *Analytische* Relationen sind gültig oder ungültig allein auf Grund ihrer logischen Struktur.

Im Punkt „Grundlagen der Logik“ erfolgt eine Darstellung und Klärung logischer Grundbegriffe und Grundaussagen. Allerdings ist es unvermeidbar, hier schon Begriffe und Formalisierungen zu verwenden, die erst in den späteren Kapiteln genauer erläutet werden. Leser, die bereits logische Vorkenntnisse haben, erst recht Logik-Experten, werden dabei keine Schwierigkeiten haben. Andere Leser werden beim *ersten* Lesen nicht alles verstehen, müssen das Kapitel „Grundlagen“ ggf. später noch einmal neu lesen. Diese Einführung ist in manchen Punkten recht knapp gehalten, bestimmte Themen, z. B. *sprachlogischer* bzw. *sprachphilosophischer* Art, werden in meinem in Arbeit befindlichen Buch „*Integrale Philosophie*“ (Arbeitstitel) sehr viel ausführlicher behandelt.

Der Leser, der direkt zur *Logik im engeren Sinne* vordringen möchte, kann dieses Kapitel auch diagonal lesen oder notfalls überspringen; allerdings werden hier bereits wesentliche *Modifikationen* der normalen Logik eingeführt, auf die später zurückgegriffen wird.

0 – 1 LOGIK - MODELLE

0-1-1 Gegenstandsbereiche

0-1-1-1 DREI ANSÄTZE
In der herkömmlichen Logik gibt es vor allem *drei* Ansätze, den Gegenstandsbereich der Logik zu bestimmen:

- *Psyche*
In der *traditionellen Logik* wurden *psychische* Entitäten, wie *Begriffe* oder *Urteile* bzw. *Gedanken*, als Gegenstand der Logik angesehen, wie auch die Kennzeichnung „Lehre vom folgerichtigen Denken“ zeigt. Der Terminus ‚Begriff‘ kann allerdings auch auf sprachliche oder reale Entitäten angewandt werden.
- *Sprache*
In der *modernen Logik* gelten primär *sprachliche* Entitäten wie *Prädikate* oder *Sätze* bzw. *Aussagen* als Gegenstände der Logik. Man kann hier von einer sprachlichen bzw. *linguistischen Orientierung* der Logik sprechen.
- *Realität*
In der *mathematischen* Logik und vor allem in verwandten Disziplinen wie *Mengenlehre* oder *Statistik* bezieht man sich primär auf *reale* Entitäten wie *Ereignisse*, *Sachverhalte* oder *Mengen*. Diese realen Entitäten können allerdings abstrakt sein.

0-1-1-2 VOR- UND NACHTEILE
Alle drei Ansätze haben ihre Vor- und Nachteile:
• *Psyche:* Psychisches wie Gedanken sind uns (in unserem Bewusstsein) *primär* gegeben, Sätze oder Sachverhalte sind nur indirekt gegeben. Aber Psychisches ist schwer zu präzisieren, außerdem besteht die Gefahr des *Psychologismus*, d. h. dass man logische Gesetze mit *psychologischen Denkgesetzen* verwechselt. Logisch wahr wäre dann das, was die meisten Menschen denken bzw. für logisch korrekt halten; doch wir wissen aus Untersuchungen, dass die Menschen in ihrem Denken viele logische Fehler begehen.
• *Sprache:* Ein Satz ist präziser zu fassen und zu beschreiben als ein Gedanke. Allerdings besteht hier folgende Unklarheit: Zum einen bezieht man sich auf (Aussage-) *Sätze* als *syntaktische* Gebilde, zum anderen bezieht man sich – *semantisch* – auf *Aussagen* (oder *Propositionen*), die man als *Bedeutungen* von Sätzen auffassen könnte; Bedeutungen sind aber ebenfalls schwer zu fassen, andererseits werden sie in erster Linie wieder als reale oder auch psychische Entitäten interpretiert, so dass hier kein eigenständiger Bereich gegeben ist. Generell gilt: Sprachliche Zeichen stehen nicht für sich selbst, sondern sie *bezeichnen* oder benennen etwas. Nur in Bezug auf dieses Bezeichnete lassen sie sich letztlich verstehen.

Außerdem gibt es die Ungereimtheit, dass man sich auf der *oberen* Ebene – sprachlich – auf Sätze/Aussagen bezieht, auf der *unteren* Ebene – real – doch auf Individuen bzw. Klassen. So formuliert man z. B. in der Prädikaten-Logik: a $\in$ F (das Individuum a ist Element der Klasse F), hier ist also eindeutig von *realen* Entitäten die Rede. Der durchgängige Bezug auf Wörter bzw. Zeichen wäre eben sehr kompliziert, falls man von rein syntaktischen Analysen absieht. Wenn man wirklich konsequent einen *sprachlichen* bzw. *linguistischen* Ansatz durchziehen wollte, also ausschließlich über sprachliche Entitäten sprechen wollte, dann müsste man jeden Satz bzw. jedes Wort – *meta-sprachlich* – in *Anführungszeichen* schreiben, was aber doch nicht getan wird.

• *Realität*: So spricht vieles dafür, die *reale* Ebene als fundamental anzusetzen. Denn erstens erhalten sprachliche Zeichen wie auch psychische Repräsentationen ihre Bedeutung normalerweise nur durch den Bezug auf die Realität. Zweitens hat Logik es mit *Wahrheit*, Richtigkeit, Gültigkeit u. ä. zu tun. Um aber (sprachlich) einen Satz oder (psychisch) einen Gedanken als wahr bzw. falsch zu kennzeichnen, gibt man an, ob er mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Auf einen extremen *Konstruktivismus* oder Idealismus, der Wahrheit nur noch im Subjekt selbst gegeben sieht, braucht hier nicht eingegangen zu werden. Allerdings gibt es auch bei der realistischen Theorie Probleme, z. B. „negative Sachverhalte", also „nicht bestehende Sachverhalte". Außerdem werden wir noch sehen, dass dieser Bezug auf die Wirklichkeit bei *analytischen* Aussagen nur noch indirekt gegeben ist.

Letztlich bietet sich eine Deutung der Logik an, die zwar realistisch orientiert ist, aber auf eine abstrakte, formale Welt Bezug nimmt; das wird in der *Integralen Logik* verwirklicht.

0-1-1-3 LOGIK ALS THEORIE DER FORMALEN WELT

Die *Integral-Logik* geht davon aus, dass die Logik unabhängig von den obigen Interpretationen ist. Für die *Philosophie* ist es von Bedeutung, ob man von *Sätzen*, *Sachverhalten* oder *Urteilen* ausgeht, für die *Logik* ist es letztlich irrelevant. Man kann sie auf alle drei Bereiche beziehen. Sinnvoller ist aber, sie unabhängig von diesen Bereichen zu definieren. So gehe ich vorrangig – ontologisch *neutral* – von *Relationen* oder Strukturen aus, anstatt von Sachverhalten, Sätzen oder Urteilen.

Die Logik betrifft die Welt der *abstrakten Formen*: In ihr spielen Materie, Zeit, Raum, Energie aber auch Bewusstsein usw. keine Rolle, sondern nur *funktionale Abhängigkeiten* oder *korrelative Beziehungen*. Die Gesetze der Logik gelten in jeder anderen Welt, also der psychischen, der sprachlichen und der materiellen Welt. Bzw. kann man die Gesetze der Logik auf jede andere Welt anwenden.

Wenn sich die Integrale Logik auch auf abstrakte Entitäten bezieht, so steht sie doch der realistischen Interpretation am nächsten, weil sich dies gerade im Bereich von Objekten anbietet. Insofern baue ich die Logik auch von den *Objekten* her auf und nicht, wie sonst häufig, von den sprachlichen Zeichen, also z. B. Eigennamen und Prädikatoren.

Wenn man also die Logik realistisch deuten kann, so ist doch folgendes zu bedenken: Es geht in der Logik nie um konkrete Dinge, Klassen von konkreten Dingen oder Relationen zwischen konkreten Dingen, sondern nur um die *Form.* Anders gesagt, es geht um eine abstrakte Welt, mit abstrakten Dingen usw.

Zuweilen bietet es sich aber an, bei der Darstellung bestimmter logischer Probleme doch auf eine konkrete, z. B. sprachliche Spezifizierung, etwas *Aussagesätze*, Bezug zu nehmen. Und bei *Beispielen* muss man ohnehin aus der abstrakten Welt zur konkreten Welt hinabsteigen.

Außerdem, trivialerweise muss sich eine (schriftliche) Arbeit über Logik notwendig der sprachlichen Zeichen bedienen. Das wird noch genauer erläutert werden.

0-1-1-4 ABGRENZUNG DER LOGIK VON DER MATHEMATIK

Diese Abgrenzung ist kompliziert und kann hier nicht im Einzelnen dargestellt werden. Üblicherweise sieht man die Logik als die *fundamentalere* Theorie an, aus der sich die Mathematik abzuleiten lässt. Andererseits kann man sagen, dass die herkömmliche Logik *qualitativ* strukturiert ist, die Mathematik dagegen *quantitativ*. Die Logik liefert die Basis, die Mathematik die speziellere Ausformung. Die Integrative Logik bemüht sich – durch Quantifizierung logischer Strukturen – um eine *Verbindung von Logik und Mathematik*. Das betrifft vor allem *Wahrscheinlichkeitstheorie* und *Statistik*.

0-1-1-5 TERMINOLOGIE
Wegen der ontologischen Unabhängigkeit der *Integral-Logik* wird prinzipiell auch eine Sprache bevorzugt, die nicht festgelegt ist auf eine bestimmte Interpretation. Da aber ein Großteil der Begrifflichkeit der modernen Logik sich auf Sprache, insbesondere *Aussagen* bezieht, werde ich teilweise diese Terminologie übernehmen. Z. B. verwende ich auch weitgehend den Begriff der ‚*Wahrheitswerte-Tafel'* oder kurz ‚Wahrheits-Tafel', der sich auf Aussagen bezieht. Dieser Terminus ist eingeführt, und es bedeutet keine Tugend, unnötig viele neue Termini einzuführen. Korrekter wäre in meinem Ansatz allerdings der Terminus ‚*Gültigkeits-Tafel'*, da ich den zu engen Begriff der *Wahrheit* (weitgehend) durch den Begriff der *Gültigkeit* oder *Belegung* ersetze. Andererseits bevorzuge ich im Bereiche der Objekte eine realistische Sprache, da die anderen Ansätze sehr kompliziert sind.

0-1-2 Inhalt der Logik

Der Begriff ‚Logik' stammt von griechisch ‚*logos*', das bedeutet Wort, Rede, übertragen Vernunft, Gedanke, Sinn, auch Weltgesetz. Man kann die Logik daher – *kommunikationstheoretisch* – als Lehre von der (vernünftigen) Argumentation oder vom (rationalen) Diskurs bestimmen. Ich ziehe aber eine *deskriptive* Definition vor und verstehe als Inhalt der Logik primär die gesamte *formale Welt*, vorrangig allerdings die *analytischen Relationen*. Der Inhalt der Logik lässt sich dabei enger oder weiter definieren. Nachfolgend werden die wichtigsten Definitionen aufgeführt. Die beziehen sich primär auf die *philosophische Logik*, die *mathematische Logik* wird oft in spezieller, mehr technischer Weise definiert.

0-1-2-1 FORMALE WELT
Dies ist die *weiteste* Definition der Logik. Sie entspricht in etwa der Auffassung der *traditionellen* Logik, wenn dort auch von Begriffen, Urteilen usw. gesprochen wird. Aus Sicht einer realistisch-formalen Logik gehören dazu vor allem:

- *Objekte*: Individuen, Mengen bzw. Klassen von Individuen
- *Eigenschaften*, Begriffe
- *funktionale Relationen*: analytische, synthetische
- *Systeme*, als komplexe Gebilde

0-1-2-2 FUNKTIONALE RELATIONEN
Hier werden nur funktionale Relationen zur Logik gezählt, *funktionale Abhängigkeiten*, d. h.:

• *synthetische* Relationen,
sie können empirisch wahr sein oder falsch, z. B.

Implikation	$\rightarrow$	$X \rightarrow Y$	wenn X, dann Y
Äquivalenz	$\leftrightarrow$	$X \leftrightarrow Y$	wenn X, dann und nur dann Y

• *analytische* Relationen
sie sind immer wahr (oder immer falsch), z. B.

analytische Implikation	$\Rightarrow$	$X \Rightarrow X$	wenn X, dann X
analytische Äquivalenz	$\Leftrightarrow$	$X \Leftrightarrow X$	wenn X, dann und nur dann X

Z. B. die analytische Implikation $X \Rightarrow X$: „Wenn X gültig ist, dann ist es sicher, dass X gültig ist"; um das zu beweisen, braucht man *keine empirischen* Untersuchungen zu machen, sondern nur den Sachverhalt zu analysieren (analytisch). Ob aber es gilt $X \rightarrow Y$: „Wenn X gültig ist, ist auch Y gültig", dass muss *empirisch* untersucht werden (synthetisch).

Dieselbe Unterscheidung kann man auch für die *Mathematik* machen, obwohl das hier meist versäumt wird:

- synthetische Relation
  = (Gleichheit, gleich groß): $X = Y$, X ist gleich groß wie Y
- analytische Relation
  ≡ (analytische Gleichheit): $X \equiv X$, X ist gleich groß wie X

0-1-2-3 ANALYTISCHE RELATIONEN

Bei dieser Bestimmung der Logik werden die synthetischen Relationen ausgegliedert. Nur die *analytischen* gelten als logisch.

Dies betrifft nicht nur die bisher angeführten Relationen, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ und $\Leftarrow$, sondern auch andere, z. B.:

$\vee$ (*Disjunktion*): $X \vee \neg X$, sprachlich X oder nicht X
(ich schreibe das genauer $X \,^{+}\!\vee^{+} X$, aber dies wird später erklärt)
>< (*Kontravalenz*): $X \,^{+}\!\!><^{+} \neg X$, sprachlich *entweder* X oder nicht X

Hier kann man auch *partiell analytische* Relationen miteinbeziehen, z. B.: $X \longrightarrow X \wedge Y$. Üblicherweise werden in der Logik – abgegrenzt von den *synthetischen* Relationen – nur vollständig *analytische* Relationen unterschieden. Ich werde aber zeigen, dass man sinnvoll *partiell analytische* Relationen einführen kann: sie entsprechen quantitativ *induktiven* bzw. *induktiv-statistischen* Relationen.

0-1-2-4 STRENG ANALYTISCHE RELATIONEN

Bei diesem Logik-Modell werden partiell analytische Relationen ausgegliedert, nur die *streng analytischen* gelten als logisch.

Bei den streng analytischen kann man genauer unterscheiden:

- *Tautologien*: sie sind grundsätzlich wahr
  z. B. $X \vee \neg X$: *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*
- *Kontradiktionen*: sie sind grundsätzlich falsch
  z. B. $X \wedge \neg X$: *Satz vom Widerspruch*

0-1-2-5 LOGISCHE FOLGERUNGEN

Eine weitere letzte Einengung ist, dass als Logik nur analytische *Folgerungs-Beziehungen* gelten. Das ist zuvorderst die *analytische Implikation* $\Rightarrow$, der *logische Schluss*, aber auch die analytische Äquivalenz $\Leftrightarrow$ und die analytische Replikation $\Leftarrow$.

Auch hier ist wieder zwischen Tautologie und Kontradiktion zu unterscheiden:

- *Tautologien*
  z. B. $X \Leftrightarrow X$ (X ist äquivalent mit X)
- *Kontradiktionen*
  z. B. $X \not\Leftrightarrow \neg X$ (X ist nicht äquivalent mit nicht X)

Ich wähle die *weiteste* Definition (wie in 0-1-2-1), der *Kernbereich* der Logik sind allerdings *analytische Relationen*, und zuvorderst logische Folgerungen bzw. *logische Schlüsse*.

0-1-3 Objektbereich – Metabereich

0-1-3-1 OBJEKT-SPRACHE / META-SPRACHE
Will man die Logik bestimmen, so kann man erstens *objekt-sprachlich* fragen: Was ist Logik? (Real-Definition). Und zweitens *meta-sprachlich*: Was ist die Bedeutung des Begriffs ‚Logik'? (Nominal-Definition)

Für den normalen Gebrauch ist aber der Unterschied zwischen diesen beiden Aspekten vernachlässigbar, dagegen spielt er in der *Sprachphilosophie* und *Ontologie* eine gewichtige Rolle. Denn damit verbunden ist das Problem, ob es so etwas wie ein Wesen der Dinge und damit auch ein *Wesen* der Logik gibt.

0-1-3-2 LOGIK ALS OBJEKTBEREICH
Man bezeichnet als Logik zum einen die Objekte, Klassen, Begriffe und Relationen selbst – je nach Weite der Definition. Logik ist dann gewissermaßen die Gesamtheit der formalen Welt. Eben die *logische Welt*. Diese Redeweise ist weit verbreitet, vor allem, wenn man mit Logik nur die logischen Relationen oder Strukturen meint.

Man spricht auch von „Logik der Gefühle, „Logik der Liebe" usw., obwohl dies eigentlich gar nichts mit Logik zu tun hat. Man meint hier einfach die *Regeln*, nach denen z. B. die Liebe „funktioniert"; diese Regeln sind aber zuvorderst empirische, etwa psychologische Gesetzmäßigkeiten, keine logischen.

Auch wenn man die weiteste Definition der Logik wählt (vgl. 0-1-2), ist es nicht trivial, was genau zu dieser logischen Welt gehört. Offensichtlich muss man die *kontradiktorischen* Relationen hinzuzählen, es wäre absurd, sie aus der Logik zu verbannen. Dies ist anders als bei der Bestimmung der realen Welt, wo es wenig Sinn hat, auch „negative Tatsachen" zur Welt hinzuzählen. Andererseits ist es befremdlich, dass widersprüchliche, somit „unmögliche" Relationen in der logischen Welt vorkommen sollen.

Aber auch die nicht widersprüchlichen Relationen werfen Probleme auf: gehört zur formalen Welt *jede* mögliche Relation bzw. jede mögliche Kombination? $X \rightarrow Y$ gehört sicherlich zur Logik. Dann wohl auch $X \rightarrow Y_1 \wedge Y_2$, dann auch $X \rightarrow Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3$. Gibt es hier ein Ende? Gehört auch $X \rightarrow Y_1 \wedge Y_2 \wedge Y_3 \wedge ...$ mit *unendlich* vielen Gliedern zur Logik-Welt?

0-1-3-3 LOGIK ALS ERZEUGUNGSSYSTEM
Man kann das Problem der Gesamtheit aller logischen Kombination umgehen, wenn man Logik quasi nicht als die *Menge* aller Produkte darstellt, sondern als das *System*, welches diese Produkte *hervorbringt*.

Die gleiche Problematik kennt man aus der Sprachwissenschaft: Gehören zu einer Sprache alle korrekt gebildeten Sätze oder sogar Texte? Oder ist alternativer Ansatz besser? Eine Sprache beinhaltet demnach bestimmte *Elemente* und *Regeln*, wie diese Elemente korrekt – zu Sätzen, Texten usw. – verknüpft und interpretiert werden können, also eine *Grammatik* einschließlich Vokabular.

Ähnlich kann man in der Logik vorgehen: Man bestimmt die Logik dann nicht als die Gesamtheit logischer Verknüpfungen (statisch). Sondern die Logik wird – konstruktiv – definiert durch *Elemente* und *Verknüpfungsregeln* – zum Verhältnis von Logik und Sprache komme ich noch. Man könnte dann unterscheiden zwischen erstens Logik und zweitens logischer (oder formaler, idealer) Welt, als Klasse oder System aller logischen Entitäten, nämlich Elementen wie Verknüpfungen. Mit dieser *konstruktivistischen* Sicht ist aber bereits ein Übergang vollzogen zur Bestimmung der *Logik als Lehre*.

0-1-3-4 LOGIK ALS THEORIE ODER LEHRE

Der obigen Bestimmung der Logik als *Objektbereich* steht eine andere Definition gegenüber: Logik ist dann die *Lehre*, die *Theorie* oder die *Wissenschaft* von der abstrakten Welt, von den analytischen Relationen oder vom folgerichtigen Denken (je nach Definition). So gehört die Logik als Disziplin zur *Philosophie* – als *mathematische Logik* wird sie der Mathematik zugeordnet. Man kann diese Lehre auch *normativ* auffassen bzw. als *Handlungsanweisung*: sie lehrt uns, wie wir *korrekt* logisch folgern oder wie wir denken *sollen*.

0-1-3-5 ÜBEREINSTIMMUNG VON OBJEKT-ASPEKT UND META-ASPEKT

Man könnte den Bezug auf die Logik als *Menge bzw. System formaler Relationen* als *Objekt-Aspekt* bezeichnen, dagegen den Bezug auf die Logik als *Theorie* als *Meta-Aspekt* (verwandt der Unterscheidung zwischen Objekt- und Meta-Sprache). M. E. sind sowohl der Objekt- wie der Meta-Sprachgebrauch akzeptabel. Ähnlich spricht man z. B. auch von ‚Biologie': meint damit einmal *das Leben selbst*, einmal die *Wissenschaft vom Leben*.

Ich vertrete aber darüber hinaus die Auffassung, dass bei der Logik Objekt-Bereich und Meta-Bereich quasi zusammenfallen.

$X \vee Y$ kann man z. B. als *Relation* ansehen oder als Bezeichnung bzw. *Beschreibung der Relation*. Daher halte ich hier eine strenge Unterscheidung von Objekt- und Meta-Sprache in der Praxis normalerweise für unnötig. Nur wenn man die meta-sprachliche Verwendung herausstellen möchte, sollte man im Beispiel ‚$X \vee Y$' schreiben.

Dies ist anders als bei einer *empirischen Wissenschaft*. Bei einer empirischen Wissenschaft ist man gut beraten, den Objekt-Bereich nicht mit dem Meta-Bereich zu identifizieren, auch wenn man denselben Begriff verwenden mag.

Genauer kann man das beim *Gesetz* unterscheiden. Ein Gesetz kann zweierlei bedeuten:

1. *Gesetzmäßigkeit*
   die dem Objekt inhärente Weise des Funktionierens
2. *Gesetzesaussage*
   die sprachlich formulierte Theorie über das Funktionieren

Z. B. gibt es offensichtlich eine Gesetzmäßigkeit des Alterns. Aber wir kennen sie bis heute nicht genau, es gibt verschieden Theorien, die das Altern beschreiben und erklären, aber keine erfasst vollständig und fehlerfrei die Gesetzmäßigkeit.

Es ist wichtig, diese beiden Bereiche auseinander zu halten. Nur ein platter *Naturalismus* („unsere Sätze spiegeln die Wirklichkeit eins zu eins") oder ein platter *Konstruktivismus* („es gibt nur die Gesetze, die wir selbst konstruieren, die Wirklichkeit selbst ist unstrukturiert") nivelliert diesen Unterschied. Denn es ist offensichtlich, dass unsere Gesetze nie absolut die realen Gesetzmäßigkeiten erfassen, sondern immer nur annäherungsweise.

Dagegen kann man bei der Logik annehmen, dass diese beiden Bereiche zusammenfallen, auch wenn sie sprachlich auseinander zu halten sind.

Angenommen, man betrachtet die Relation $X \rightarrow Y$. Wenn die Beschreibung dieser Relation ‚$X \rightarrow Y$' ist, so ist die Übereinstimmung zwischen Relation und Beschreibung offensichtlich.

Zwar könnte man auch andere Beschreibungen, logische Umformungen mit gleichem Wahrheitswert verwenden; so ist z. B. die Relation $X \rightarrow Y$ *logisch äquivalent* mit $\neg X \vee Y$ oder mit $\neg(X \wedge \neg Y)$.

Theoretisch könnte man zwar behaupten: $X \rightarrow Y$ ist die *reale* Relation. ‚$X \rightarrow Y$', ‚$\neg X \vee Y$' oder ‚$\neg(X \wedge \neg Y)$' sind dagegen verschiedene Beschreibungen von $X \rightarrow Y$, die in unterschiedlichem Ausmaß zutreffen. Aber das ist wenig überzeugend, wenn sich auch Bedeutungs-Unterschiede zwischen den verschiedenen Ausdrücken angeben lassen, wozu ich später noch komme.

0-1-4 Gültigkeit

Die *Begründung* bzw. Gültigkeit der Logik ist sehr umstritten. Zunächst wäre zu fragen, was überhaupt ‚Begründung' bedeuten soll. Beschränkt man sich der Einfachheit halber auf logischen *Aussagen* bzw. (Relationen), so lässt sich fordern: Logische Aussagen müssen *wahr* sein. Es kann hier nicht die Problematik von *Wahrheitstheorien* bzw. der Definition des Wahrheitsbegriffes verfolgt werden. ‚Wahrheit' heißt in allgemeinster Weise: *Übereinstimmung*. Übereinstimmung mit der empirischen Realität, mit der geistigen, formalen Realität, mit unserem Denken oder einfach bestimmten Regeln. Mit welchem Bereich die Logik übereinstimmen soll und wie das erkannt werden kann, darüber gibt es viele verschiedene Theorien.

Es sind vor allem folgende Positionen zu unterscheiden: *Konventionalismus*, *Empirismus*, *Linguismus*, *Kognitivismus* und *Idealismus*.

0-1-4-1 KONVENTION

Das ist die heute am meisten vertretene Auffassung: Es werden *Axiome* und *Ableitungsregeln* festgesetzt, ggf. noch semantische Regeln. Diese *Festsetzungen* sind zwar begründet, aber letztlich nur *pragmatisch*, dass sie sich als *nützlich* erweisen. Es geht nicht um absolute Wahrheiten. Was dann abgeleitet wird aus den Axiomen, hat *innerhalb* dieses Systems absolute Gültigkeit, aber eben nur relativ zu den Axiomen. Die Axiome und die Regeln selbst sind Setzungen, wir *konstruieren* sie aus unserem Denken. Diese Position, die man weiter differenzieren könnte, nennt sich *Konventionalismus*, *Konstruktivismus* oder *Pragmatismus*.

Für diese Theorie mag sprechen, dass es unterschiedliche Logiken oder Logikkalküle gibt. Aber man kann dennoch eine *Basis-Logik* postulieren, auf die alle anderen Logiken Bezug nehmen müssen, und es ist kaum begründbar, dass die Basis-Logik letztlich willkürlich sein soll. In ihr muss z. B. der *Satz vom ausgeschlossen Widerspruch* gelten. Bestimmte Logik-Systeme wie die *Fuzzy-Logik* oder auch die sogenannte *Quanten-Logik* hebeln dieses Grundgesetz nicht aus, obwohl dies oft fälschlich behauptet wird.

0-1-4-2 EMPIRIE

Nur noch selten wird heute behauptet, dass die Logik aus der *Empirie* abgeleitet ist. Diese Position nennt sich *Empirismus* oder *Realismus*. Man könnte z. B. argumentieren: Wir nehmen wahr, beobachten, dass etwas nicht gleichzeitig blau und nicht blau sein kann, also z. B. blau und rot. Aus solchen Erkenntnissen könnte man dann ein allgemeines logisches Gesetz ableiten: Etwas kann nicht zugleich eine Eigenschaft und die entgegengesetzte Eigenschaft besitzen. Logische Gesetze wären dann im Grunde *Real-Gesetze*.

Es ist richtig, dass wir die logischen Gesetze in der empirischen Wirklichkeit vorfinden, aber d. h. heißt nicht, dass sie von daher begründet wären. Ein Beweis aus der Beobachtung bliebe ja immer *induktiv*, wir könnten aus *endlich* vielen Beobachtungen kein unbegrenztes Gesetz ableiten, das für *unendlich* viele, für alle Fälle, sichere Erkenntnis garantiert. Dieses Problem stellt sich auch in den *empirischen Wissenschaften*, aber da ist es akzeptabel; doch *logische* Gesetze sind eben auch gerade dadurch unterschieden von *empirischen* Gesetzen, dass sie vollständig gesicherte Gültigkeit beanspruchen.

0-1-4-3 SPRACHE

Das Argument lautet: Logische Strukturen sind letztlich *Sprachstrukturen*, *logische* Gesetze sind somit letztlich *grammatische* Gesetze. Man könnte diese Position *Linguismus* nennen. Ein Vorteil dieser Position ist, dass uns Sprachstrukturen gut zugänglich, gut erkennbar sind.

In der Tat ist die Logik eng mit der Sprache verwandt, schon deshalb, weil wir logische Aussagen, wie andere Aussagen, in Sprache ausdrücken müssen. Aber es gibt offensichtlich sehr unterschiedlich strukturierte Sprachen, und in allen kann man logische Aussagen machen.

Zwar gibt es auch *Sprach-Universalien*, aber es dürfte kaum gelingen, alle logischen Strukturen als solche Universalien darzustellen. Auch die Annahme einer einheitlichen logischen *Tiefenstruktur*, die der unterschiedlichen *Oberflächenstruktur* zugrunde liegt, hilf nicht weiter. Es ist kaum vorstellbar, dass die Sprache eine bestimmte Logik erzwingt.

Außerdem hat man eigene *logische Sprachen* entwickelt. Die lassen sich zwar partiell auf natürliche Sprachen übertragen, aber eben nur partiell. Z. B. ist die sprachliche *Subjekt-Prädikat*-Struktur (bzw. Subjekt-Prädikat-Objekt-Struktur) doch strukturell verschieden von der formal-logischen *Argument-Prädikat-Struktur*, wie noch gezeigt werden soll.

Aber entscheidend ist: Die Berufung auf die Sprache könnte letztlich nur dazu dienen zu erklären, wie Logik *entstanden* ist, aber kann sie keinesfalls in ihrer Gültigkeit begründen. Denn man geriete dann in einen Regress, man müsste ja *weiter* begründen, warum sprachliche Strukturen gültig sind, was auch immer das bei der Sprache bedeuten soll – in erster Linie könnte es ja nur um eine Übereinstimung mit der empirischen Realität gehen.

Man kann jedenfalls mühelos einen *grammatisch korrekten* Satz formulieren, der dennoch *logisch falsch* ist, z. B.: ‚Wenn alle Menschen Säugetiere sind, dann sind auch alle Säugetiere Menschen'. Allein dies zeigt schon, dass man Logik und Sprache nicht identifizieren darf.

0-1-4-4 DENKEN

Dies ist die nach dem Konventionalismus heute verbreitetste Auffassung, die auch schon eine lange philosophiegeschichtliche Tradition besitzt: Logische Strukturen sind *kognitive* Strukturen, sind *Denkstrukturen*. Und zwar geht man dabei normalerweise davon aus, es sind *angeborene* Denkstrukturen, denn sonst müsste man letztlich auf einen Empirismus zurückgreifen. Diese Position kann man *Kognitivismus*, *Rationalismus* oder *Mentalismus* nennen.

Die Argumentation ist hier stringenter als bei der Sprache. Es mag zwar auch verschiedene Denkstile geben, aber letztlich nur *ein* Denken. D. h. wir können nur soweit logisch denken, wie unsere Denkstrukturen das zulassen. Und es ist wahr, wir können die logischen Gesetze nur erkennen, wenn unser Denken das erlaubt.

Aber ähnlich wie bei der Sprache ist das Problem: Wir können so die *Herkunft* der Logik erklären, aber lässt sie sich so *begründen*? Es ist doch erwiesen, dass viele Menschen in vielen Situationen *unlogisch denken*. Die logischen Strukturen können also keine reinen Abbildungen der Denkstrukturen sein. Es hilft auch kaum weiter, hier statistisch vorzugehen und zu sagen, die Mehrheit hat Recht, so wie die Mehrheit denkt, das ist logisch. Aus diesen Gründen ist ja der *Psychologismus*, die *psychologische Begründung* der Logik, immer wieder abgelehnt worden.

Interessant ist hier: Kaum ein Mensch, der nicht logisch geschult ist, wird *bewusst* und explizit logische Gesetze angeben können. Offensichtlich verfügt der Mensch also *unbewusst* über einige logische Regeln, da er doch in Grenzen zu logischem Denken befähigt ist. Dieses Phänomen, dass wir unbewusst „klüger" sind als bewusst, tritt allerdings nicht nur bei der Logik auf: Z. B. können alle (gesunden) Menschen halbwegs fehlerfrei ihre Muttersprache sprechen, aber kaum einer kennt die relevanten grammatischen Regeln, von komplizierten linguistischen Konstruktionen gar nicht zu sprechen.

Bezieht man allerdings die *evolutionäre Erkenntnistheorie* mit ein, können sich die Argumente für eine kognitivistische Logikbegründung verstärken. Man kann argumentieren: Unser – logisches – Denken hat sich im Zuge der *Evolution* herausgebildet und optimiert; wenn es nicht korrekt wäre, hätten wir als Art nicht überlebt. Nehmen wir als simples Beispiel: „Alle (bekannten) Löwen sind gefährlich, dies ist ein Löwe, also ist er gefährlich". Wenn es dem

Menschen nicht gelungen wäre, solche realistischen logischen Strukturen zu entwickeln und entsprechend zu handeln bzw. zu reagieren, dann hätte er keine Chance gehabt, zu überleben. Pointiert könnte die These lauten: Man begründet die Logik durch den Selektionsvorteil, je mehr ein Denken die Überlebenschance erhöht, desto logischer ist es.

Diese Argumentation ist nicht ganz von der Hand zu weisen, aber sie hat auch ihre Mängel. Denn es zeigt sich doch, dass die Menschheit und einzelne Menschen überleben, *obwohl* sie vielfach unlogisch denken. Oder sogar *weil*? U. U. ist logisches Denken in gewissen Situationen gerade für das Überleben hinderlich, weil es das Handeln lähmen kann, wenn man zu genau die Möglichkeiten des Handelns und deren wahrscheinliche Konsequenzen abschätzt.

0-1-4-5 ABSOLUTE IDEEN

So komme ich zu dem Ergebnis, dass die *beste Erklärung* ist: Logische Strukturen sind Strukturen einer *formalen Welt*, die *unabhängig vom Menschen* existiert, unabhängig von seinem Denken und Sprechen, von seinen Wahrnehmungen und erst recht Festsetzungen. Logische Basis-Gesetze sind „*Ideen*“, *ewige Wahrheiten;* das gilt nicht für jeden spezialisierten Logikkalkül. Ich vertrete die – zunächst vielleicht altmodisch anmutende – Auffassung, dass die Logik am besten als ein System *idealer Entitäten* verstanden werden kann. Diese Position kann man als *Platonismus* oder *Idealismus* bezeichnen. Die Logik wird hier so *begründet*, dass sie die Struktur einer idealen, formalen Welt ist bzw. als Lehre diese Welt beschreibt.

Wie ist es dem Menschen möglich, die logischen „Ideen“ zu erkennen? Weil er das kognitive Potential dazu hat. Das ist die einfachste Erklärung, allerdings keine völlig ausreichende.

Man könnte auf die klassischen Erklärungen verweisen wie *Erinnerung* an eine frühere geistige Existenz, höheres Erkennen usw. Dies ist aber aus heutiger Sicht sehr spekulativ. Da ein empirischer oder sprachlicher Zugang kaum in Frage kommt, muss man auf die Kognition verweisen: die *angeborene* Befähigung zum logischen Denken bzw. angeborene logische Ideen. Auch wenn der Mensch die Fähigkeit zum korrekten logischen Denken besitzt, bedeutet das ja noch nicht, dass er zwangsläufig *immer* logisch denkt. Von daher genügt es auch nicht zu sagen: Logische Gesetze sind *evident*, also unmittelbar einsichtig und unbestreitbar; denn es mag auch möglich sein, sich über Evidenz zu irren – außerdem besitzen unterschiedliche Strukturen der Logik sicher unterschiedliche Evidenz; z. B. ist die Definition der logischen *Implikation* sicher keinesfalls evident, wie noch sehr genau diskutiert werden wird.

Eine wirklich überzeugende Theorie, wie die Logik zu begründen ist und wie wir die Logik erkennen können, steht noch aus. Sie wird vermutlich folgende Faktoren umfassen müssen: angeborene Denkstrukturen, evolutionärer Erfolg, eventuell auch Kriterien der Ästhetik; vielleicht müssen auch *alle* oben genannten Begründungsfaktoren integriert werden.

0-1-5 Sprache

0-1-5-1 RELEVANZ DER SPRACHE

Eine Sprache ist ein *Zeichensystem*, mit dem wir Dinge *bezeichnen* bzw. *Aussagen* über sie machen können. Somit kann man bei einer Sprache prinzipiell unterscheiden:

- die *Form* (Syntax) der Zeichen, z. B. Ketten von Buchstaben oder Lautfolgen
- die *Bedeutung* der Zeichen, vor allem die bezeichneten Dinge bzw. Aussagen

Dabei beruht die *Zuordnung* von Zeichen zu Gegenständen normalerweise auf Festsetzungen bzw. Regeln, ist also nicht natürlich gegeben.

Die Syntax wird von der *Syntaktik* oder Grammatik beschrieben, die Bedeutung von der *Semantik*, wobei eine strikte Trennung von Form und Bedeutung allerdings nicht gegeben ist.

Eine *normale* oder *natürliche* Sprache, wie z. B. Deutsch, besitzt aber zusätzlich eine *pragmatische* Dimension: Denn sie hat nicht nur eine *Darstellungs*-Funktion, sondern kommunikative Funktionen wie *Appell*-, *Ausdrucks*- und *Diskussions*-Funktion, sie erlaubt Fragen und Befehle, alles eingebettet in einen Prozess der *Kommunikation* oder *Interaktion*. Man kann mit ihr Handlungen vollziehen (*Sprechhandlung*), seine Gefühle ausdrücken, andere Menschen beeinflussen u. v. m. Für Beispiele aus der normalen Sprache verwende ich hier fast ausschließlich die *deutsche* Sprache. Bei Englisch oder Französisch würden sich sehr ähnliche Resultate ergeben; natürlich gibt es auch normale Sprachen, die ganz anders strukturiert sind, aber in den *sprachlichen Universalien* stimmen sie dennoch alle überein – und es geht hier ja nicht um eine Arbeit über Sprachphilosophie oder Sprachvergleiche.

Man spricht auch von *logischer Sprache* oder *logischer Grammatik*. Dabei wird die logische Sprache als *künstliche*, *formale* Sprache bestimmt. Es ist wahr, dass eine solche formale Sprache der Logik entspricht. Denn die Logik ist in erster Linie *formale Logik*. Die Logik *abstrahiert* von *konkreten Bedeutungen*, sie verwendet *Variablen* wie ‚X' und ‚Y'. Sie stellt z. B. ein *Gesetz* auf wie: $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Hier ist es gleichgültig, was man für die Variablen ‚X' und ‚Y' einsetzt, das Gesetz gilt unabhängig davon. Dennoch darf man nicht verwechseln: Die Logik im eigentlichen Sinn *ist keine Sprache*, sie *bedient* sich nur einer Sprache: Man kann z. B. *logische Gesetze* auch in der *Alltagssprache* ausdrücken, wenn man Variablen der Alltagssprache wie ‚irgendein' verwendet, z. B.:

$X \Rightarrow \neg \neg X$. Übersetzt in normale Sprache: „Wenn irgendeine beliebige Aussage wahr ist, dann ist es nicht wahr, dass ihre Negation wahr ist".

Oder: $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$: „Wenn *alle* Dinge eine bestimmte Eigenschaft haben, dann haben auch (mindestens) *einige* Dinge diese Eigenschaft".

Anders sieht es aus bei einer *konkreten* Aussage in Normalsprache unter Verwendung von *Konstanten*, z. B.: „Wenn es regnet, dann ist es nicht wahr, dass es nicht regnet". Diese Aussage ist zwar logisch wahr, aber sie *kein logisches Gesetz*.

Generell sind die logischen Sprachen zwar *exakter*, aber viel *beschränkter* als normale, natürliche Sprachen. Vor allem umfassen die natürlichen Sprachen *alle* Bereiche der Realität, während sich die logische Sprache im eigentlichen Sinn nur auf *funktionale Abhängigkeiten* bezieht (wie: *wenn* X, *dann* Y). Zwar kann man eine formale Sprache konstruieren, in der z. B. auch *Ort* und *Zeit* vorkommen, aber das ist keine im strengen Sinne logische Sprache mehr. Nicht jede formale Sprache ist eine logische Sprache.

0-1-5-2 ALPHABET

Wir kennen in der natürlichen Sprache ein *Alphabet*, das über viele *Wortklassen* verfügt, z. B. Substantive, Adjektive, Verben u. a. Auch eine logische Sprache hat ein Alphabet. Es ist je nach Logik unterschiedlich, aber viel ärmer. Z. B. enthält es *Individuen-Zeichen* (wie ‚a' oder ‚x') und *Klassen-Zeichen* (wie ‚F`) sowie *logische Zeichen* (wie ‚$\rightarrow$' oder ‚$\wedge$').

Diese Zeichen unterscheiden sich von denen in normaler Sprache, und zwar sind sie primär dafür verantwortlich, dass man die Logik „*formal*" nennt. Mit der Kennzeichnung „formal" meint man nämlich mehrere verschiedene Eigenschaften – auch wenn das normalerweise nicht reflektiert wird.

• *Abkürzungen*

Anstatt (aus Buchstaben bzw. Lauten zusammengesetzte) *Wörter* in der Normalsprache, verwendet man in der Logik-Sprache überwiegend einzelne *Buchstaben*: statt ‚Sokrates' mag z. B. kurz ‚a' stehen. Statt ‚entweder - oder' steht kurz das *graphische Symbol* ‚><'. Die Abkürzungen bewirken, dass ein Satz viel *kürzer* und übersichtlicher ist als in der Normal-Sprache.

• *Variablen*

Es werden überwiegend *Variablen* verwendet, z. B.: ‚x' steht für *irgendein* individuelles Objekt, denn die speziellen Bedeutungen sind wie gesagt für die Logik irrelevant.

• *funktionale Konstanten*
Konstanten sind in der Logik letztlich nur die eigentlichen *logischen Zeichen* wie →, ∧, ∨ usw. Nur sie haben eine *feststehende*, *unveränderliche* Bedeutung.
• *Unbekannte*
Außer Variablen und Konstanten werden *Unbekannte* verwendet. Nehmen wir z. B. den Schluss: „alle F sind G, a ist ein F, a ist also ein G". ‚a' sowie ‚F' und ‚G' werden zwar üblicherweise als *Konstanten* bezeichnet, sie sollen z. B. entsprechen: a = Sokrates, F = Mensch, G = sterblich. Der Schluss lautet dann: „alle Menschen sind sterblich, Sokrates ist ein Mensch, also ist Sokrates sterblich".

Aber offensichtlich hat ‚a' nicht den gleichen Status wie ‚Sokrates', ‚a' steht zwar für ein *bestimmtes* Individuum bzw. individuelles Objekt, welches aber zunächst *nicht bekannt* ist. Den Satz ‚Sokrates ist ein Mensch' verstehen wir unmittelbar und können seine Wahrheit feststellen. Dagegen ‚Fa' sagt uns erst einmal gar nichts, zunächst müssen ‚a' und ‚F' Bedeutungen zugewiesen werden. ‚a' und ‚F' sind somit *keine echten Konstanten*, eher könnte man sie als *Variablen* einordnen, weil z. B. ‚a' einmal für Sokrates stehen mag, einmal für Platon oder auch für ein völlig anderes individuelles Objekt. Dennoch besteht ein Unterschied zwischen ‚a' als Zeichen für ein *bestimmtes* Individuum und ‚x' als Zeichen für ein *unbestimmtes*, beliebiges Individuum. ‚x' ist eine *echte Variable*, dagegen betrachtet man ‚a' (entsprechend ‚x_1', ‚x_2' usw.) am besten als *Unbekannte* (vgl. genauer in 0-2-4).

0-1-5-3 SYNTAX

Die Grammatik der *logischen Sprache* nennt man *logische Syntaktik*, sie gibt an, wie Zeichen miteinander verknüpft werden können. Die Anordnung oder Verknüpfung von Zeichen nennt man *Syntax*; allerdings wird der Begriff 'Syntax' ebenfalls für die *Lehre* von den Zeichen-Verknüpfungen verwendet. Man kann die logische Syntaktik partiell auch auf die *normale Sprache* anwenden. Der *Aufbau*, die Anordnung der Zeichen in der *Logik* ist z. T. unterschiedlich, aber auch ähnlich wie in der *normalen*, deutschen Sprache.

Die einfachste Satzstruktur im Deutschen – gemäß ihrer Grammatik – ist: *Subjekt – Prädikat*. Eine ähnliche Struktur findet sich in der logischen Syntaktik: *Argument – Prädikat*.

Zwar gibt es auch alternative Grammatiken der normalen Sprache, wie die *generative Transformationsgrammatik*, die z. B. einen Satz in *Nominalphrase* und *Verbalphrase* zerlegt, aber das kann hier ausgeklammert werden.

Ich möchte nachfolgend nur einen *einfachen* Satz analysieren, erst einen *normalsprachlichen* Satz, dann einen *formal-sprachlichen*.

Zunächst führe ich aber eine wichtige Unterscheidung ein, die sich primär auf *Sätze* bezieht:

– *Oberflächen-Struktur*: die rein *syntaktische* Zeichenfolge, die den Satz ausmacht
– *Tiefen-Struktur*: die *logisch-semantische* Struktur, die aber natürlich auch durch eine Zeichenfolge dargestellt werden muss

Dass man die logisch-semantische Struktur als ‚Tiefen-Struktur' bezeichnet, sie also für *zugrundeliegend* hält, zeigt, dass man sie als primär einschätzt.

Die Unterscheidung Oberflächen-Struktur / Tiefen-Struktur stammt aus der *generativen Transformationsgrammatik* (GTG), ich bestimme die Tiefen-Struktur aber in modifizierter Weise als *logische* Struktur.

1) normal-sprachlicher Satz
Nehmen wir als Beispiel den Satz: ‚Sokrates ist ein Mensch' (*Oberflächen-Struktur*).

	Sokrates	ist ein Mensch
Grammatik:	Subjekt	Prädikat
Logische Syntax:	Argument	Prädikat

Wie man sieht, entspricht sich hier die Analyse von *deutscher Grammatik* und *logischer Syntaktik* weitgehend. In der logischen Syntaktik gilt ‚ist ein Mensch' als *1-stelliges* Prädikat, das 1 Argument verlangt, also z. B. ‚Sokrates'. Im Gegensatz zu mehr-stelligen Prädikaten, etwa *2-stelligen* Prädikaten wie ‚ist-Lehrer-von', das 2 Argumente verlangt, z. B. Sokrates und Platon, so dass sich der Satz ergibt: ‚Sokrates ist Lehrer von Platon'; es gibt auch 3- und noch höher-stellige Prädikate.

‚... ist ein Mensch' (mit Leerstelle) wird dabei als 1-stelliger *Prädikator* bezeichnet. Prädikatoren sind *Wortklassen*, keine Satz-Kategorien. M. E. ist die obige Bezeichnung daher wenig konstruktiv, es ist sinnvoller, im Beispiel nur ‚Mensch' als Prädikator zu bezeichnen.

Aber auch die Einstufung von ‚ist ein Mensch' als 1-stelliges Prädikat finde ich nicht überzeugend. Nach meiner Auffassung darf man die Zeichensequenz ‚ist ein Mensch' in dem Satz ‚Sokrates ist ein Mensch' nur in der *Oberflächen-Struktur* als 1-stelliges Prädikat angeben, nicht in der logischen *Tiefen-Struktur*.

Zur Bestimmung der *logischen* Tiefen-Struktur des Satzes bezieht man sich auf die *Prädikaten-Logik*. Man übersetzt den Satz – zunächst noch in *normaler* Sprache – in eine Form, die der prädikaten-logischen *Bedeutung* entspricht (vgl. unten). So ist der Satz tiefenstrukturell – *extensional* (mit Bezug auf *Klassen*) – folgendermaßen zu analysieren:

‚Sokrates ist (ein) Element von der Klasse der Menschen'.

Sokrates	ist Element von	Klasse der Menschen
Argument 1	Prädikat	Argument 2

Hier wird also tiefen-strukturell das *2-stellige* Prädikat ‚(X) ist-Element-von (Y)' verwendet, das der *Kopula* entspricht.

Intensional (mit Bezug auf *Eigenschaften*) ergäbe sich ein entsprechendes Resultat: ‚Sokrates kommt die Eigenschaft Mensch zu' wäre zu analysieren als:

Sokrates(Argument 1) – kommt zu (Prädikat) – die Eigenschaft Mensch (Argument 2).

Hier zeigt sich, dass auf einer tieferen, logisch-semantischen Ebene *jeder* Satz mindestens ein *2-stelliges* Prädikat besitzt, denn ein Satz ist ein *Relationsgebilde*, und eine Relation bedeutet immer die Verbindung von mindestens *zwei* Relata (Relationsgliedern) durch einen Relator.

Nach der logischen Syntaktik bezeichnen 2-stellige Prädikatoren *geordnete Paare* bzw. Klassen von geordneten Paaren. Somit wäre der Satz ‚Sokrates ist Element der Klasse der Menschen' etwa folgendermaßen zu formulieren: ‚Sokrates und die Klasse der Menschen bilden ein geordnetes Paar, das ein Element der Klasse der geordneten Paare ist, die durch den 2-stelligen Prädikator „... ist Element von ..." bezeichnet werden'.

Allgemein geht man von *n-Tupeln* aus. Ein *n-stelliges* Prädikat bezeichnet ein n-Tupel, ein 2-stelliges Prädikat z. B. ein 2-Tupel oder *geordnetes Paar*. Allerdings ist diese Formulierung ziemlich kompliziert und enthält ja wiederum den Ausdruck ‚ist-Element-von', was eine weitere und noch kompliziertere Umformulierung erfordern würde.

Man könnte einem normal-sprachlichen Satz auf einer noch tieferen, abstrakteren Ebene, zusätzlich auch eine *formal-logische Tiefen-Struktur* zusprechen.

Oberflächen-Struktur	Sokrates ist ein Mensch
↑	
Tiefen-Struktur	Sokrates ist Element (von) der Klasse der Menschen
↑	
formale Tiefen-Struktur	$x \in F$

Es ist allerdings zu hinterfragen, ob man einem *normal-sprachlichen* Satz eine *formal-logische* Tiefen-Struktur zuordnen soll, d. h. generell, ob einer *inhaltlichen* Struktur eine *for-*

formale Struktur als Tiefen-Struktur zuzuordnen ist. Die *formale Logik* wäre dann prinzipiell die fundamentale Tiefen-Struktur der *natürlichen Sprache*.

2) formal-sprachlicher Satz
Nach der Analyse eines *normal*-sprachlichen Satzes wenden wir uns jetzt einem *formal*-sprachlichen Satz zu. Dafür formalisieren wir einfach den Satz ‚Sokrates ist (ein) Mensch'. Dabei sind vor allem 2 Formalisierungen bzw. entsprechend 2 formale Sätze zu unterscheiden: *extensional* ‚$a \in F$' und *intensional* ‚Fa'. Ich konzentriere mich dabei auf ‚$a \in F$'.

Oberflächen-strukturell entspricht die Formalisierung ‚$a \in F$' fast exakt dem *normal*-sprachlichen Satz. Und so könnte man entsprechend analysieren: a ist (ein) F.

a	$\in$ F
Argument	Prädikat

Ich halte allerdings eine solche oberflächen-strukturelle Analyse für inadäquat, da die Logik das ‚$\in$' normalerweise nicht als Teil eines 1-stelligen Prädikats (‚$\in F$') versteht oder jedenfalls verstehen sollte, sondern ausschließlich als 2-stelliges Prädikat, im Sinne von: „ist-Element-von", wie gleich vorgeführt.

Bei der intensionalen Formalisierung ‚Fa' steht ‚a' steht z. B. für Sokrates, ‚F' steht für Mensch, das ‚ist ein' (‚kommt zu') wird allein durch die *Syntax (Stellung)* ausgedrückt

Tiefen-strukturell besteht das Problem, dass die Tiefen-Struktur von ‚$a \in F$' sich normalerweise nicht von der Oberflächen-Struktur unterscheidet, also auch ‚$a \in F$' lautet. Allerdings ist der Satz tiefen-strukturell *anders* zu verstehen und zu analysieren. Denn als (logische) *Bedeutung* von ‚$a \in F$' umschreibt man am besten: Individuum a ist Element der Klasse F. Die Tiefen-Struktur orientiert sich ja aber an der Bedeutungsstruktur, insofern ergibt sich folgende Zerlegung in Argument(e) und Prädikat:

a	$\in$	F
Argument_1	Prädikat	Argument_2

Wenn aber *Oberflächen*- und *Tiefen-Struktur* zusammenfallen, dann wird ihre Unterscheidung letztlich sinnlos. Und dann sollte man sich an die tiefen-strukturelle Analyse halten, die nämlich den Satz so zerlegt, wie es seiner logischen Bedeutung entspricht. Diese semantische Struktur ist letztlich die wesentliche, die syntaktische Struktur ist eben nur „oberflächlich".

Es wäre daher zu fragen, ob die Unterscheidung *Oberflächen*- versus *Tiefen-Struktur* generell in der formalen Logik unnötig ist. Aber zwischen *verschiedenen* Logik-Ebenen kann man durchaus mit dem Konzept der *Tiefen-Struktur(en)* arbeiten, in der Weise, dass *eine* logische Struktur die Tiefen-Struktur für eine *andere* darstellt, z. B. folgendermaßen:

Klassen-Logik	$F \subset G$
$\uparrow$	
Quantoren-Logik	$\Lambda x(Fx \to Gx)$
$\uparrow$	
Prädikaten-Logik	$(Fx_1 \to Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n \to Gx_n)$

0-1-5-4 SEMANTIK
Zwischen *Syntax* und *Semantik*, zwischen *Form* und *Bedeutung* bestehen vielerlei Beziehungen. Um nur *einen* Aspekt herauszugreifen: Je nachdem, welche *Zeichenklassen* es in der

Syntax gibt, wird damit auch eine Aussage über die *Bedeutungen* und damit über die *Welt* getroffen.

Z. B. unterscheidet die normale Sprache syntaktisch (u. a.) zwischen den Wortarten *Substantiven*, *Adjektiven* und *Verben*. Mit diesen Wortarten werden aber verschiedene Bedeutungen verbunden, wie schon die Begriffe *Dingwörter*, *Eigenschaftswörter* und *Zeit- oder Bewegungswörter* besagen. Damit wird ausgedrückt, dass es diese Phänomene, Dinge, Eigenschaften, Bewegungen gibt und dass sie zu unterscheiden sind. Die übliche logische Sprache vereinigt diese drei Wortarten jedoch als *Prädikatoren*, unterscheidet sie somit nicht. Damit ist natürlich eine wichtige Aussage über die Welt gemacht, etwa, dass es keinen wesentlichen Unterschied zwischen „Dingen" und „Eigenschaften" gibt.

Man könnte vermuten, die *Semantik* sei in der Logik weniger ausgeprägt, denn die – formale – Logik *abstrahiert* ja gerade von der konkreten Bedeutung der deskriptiven Ausdrücke. Diese Vermutung wäre aber ein Irrtum, denn die Logik ist *primär semantisch*, nicht syntaktisch orientiert. Allerdings geht es der Logik nicht um die *konkrete* Bedeutung von Wörtern oder Sätzen, sondern um *abstrakte* Bedeutungen.

Einerseits verwendet die Logik eine extensionale Semantik nahe der *Mengen-Theorie*, indem sie von (formalen) Mengen, Klassen, Individuen bzw. Elementen, Relationen wie der Element-Relation usw. ausgeht. Die Bedeutung eines Satzes wird hier als mengen-relationale Relation zwischen Objekten dargestellt (auf die Semantik von Eigenschaften wird später eingegangen).

Am wichtigsten ist aber für die logische Bedeutung von *Sätzen* der Bezug auf *Wahrheit* bzw. *Wahrheitswerte*. Da die Logik eben *formal* ist, muss ich nicht die konkrete Bedeutung des Satzes kennen, um seine Wahrheit zu bestimmen. Denn wichtig ist für die Logik nicht, ob ein konkreter Satz *empirisch* wahr oder falsch ist, sondern unter welchen Bedingungen er wahr oder falsch ist. Anders gesagt, unter Bezug auf welche anderen Sätze er wahr oder falsch ist; dabei sind diese anderen Sätze primär die *Teil-Sätze des Gesamt-Satzes*.

Z. B. „wenn X, dann Y": $X \rightarrow Y$. Um zu wissen, ob dieser Satz wahr ist, muss ich nicht die Bedeutung von X und Y kennen. Ich muss nur wissen, ob die Einzelsätze ‚X' und ‚Y' wahr sind, und außerdem die Definition von $\rightarrow$ kennen. Es kann auch schon reichen, nur den Wahrheitswert *eines* Satzes zu kennen. Wenn ich z. B. weiß, dass ‚Y' wahr ist, weiß ich bereits, dass ‚$X \rightarrow Y$' wahr ist. Aber auch wenn ich z. B. weiß, dass ‚X' falsch ist, weiß ich bereits, dass ‚$X \rightarrow Y$' wahr ist. Die alles bewegt sich in einem *hypothetischen* Raum: w*enn – dann*.

Man spricht hier von einer w*ahrheitswert-funktionalen Semantik,* weil die Wahrheit eines *Gesamt*-Satzes ($X \rightarrow Y$) eine *Funktion* der Wahrheit(swerte) seiner *Teil*-Sätze (X, Y) ist.

Oben habe ich einen *synthetischen* Satz wie $X \rightarrow Y$ dargestellt. Bei einem *analytischen* Satz wie $X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist die Wahrheit des Gesamt-Satzes sogar unabhängig von der Wahrheit der Teil-Sätze, $X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist nämlich immer wahr, es ist eine Tautologie.

Diese Aussagen gelten für die *reine* Logik. Für die *angewandte* Logik sind die Verhältnisse etwas anders. Angenommen ich will folgenden Schluss ziehen: „Alle Philosophen sind weise, Sokrates ist Philosoph, also ist Sokrates weise". Der Gesamt-Satz ist ohne Zweifel wahr, denn er ist tautologisch. Um aber zu wissen, ob die Schlussfolgerung „Sokrates ist weise" empirisch wahr ist, muss ich auch wissen, ob die Vordersätze, die Prämissen wahr sind; es sei denn, ich untersuche *direkt*, ob Sokrates weise ist, was natürlich einfacher wäre.

Die wahrheitswert-funktionale Semantik beruht auf der Definition der logischen Zeichen bzw. Junktoren. Diese haben eine konkrete, konstante Bedeutung, die sich aber allein durch *Wahrheitswerte* angeben lässt, konkret durch die *Wahrheitstafeln*. Ich werde allerdings später zeigen, dass dieser Ansatz nicht ausreicht; denn zwei Sätze, welche *dieselbe Wahrheitstafel* besitzen, können sich in ihrer Bedeutung durchaus unterscheiden.

Allerdings vermittelt die Logik auch darüber hinaus gewisse semantische *Informationen*
Man vergleiche die beiden folgenden Sätze:

‚Sokrates ist ein Mensch' (Substantiv-Satz)
‚Sokrates ist weise' (Adjektiv-Satz)

In der normalen Sprache sind diesen beiden Sätze durchaus unterschieden. ‚Mensch' ist ein *Substantiv*, das Wort ‚weise' ist dagegen ein *Adjektiv*. Auch wenn das nicht ganz klar abgegrenzt werden kann, versteht man es in der Grammatik doch so, dass ein Substantiv eine komplexere, wichtigere Bestimmung bedeutet als ein Adjektiv. In der *traditionellen* Logik verstand man entsprechend z. B. „Mensch" als *Artbegriff*, der ein Individuum wesentlich und vollständig kennzeichnet; und ein Artbegriff konnte nur durch ein Substantiv repräsentiert werden. Eigenschaften konnten dagegen auch zufällig sein (*Akkzidentien*), ihnen entsprachen die weniger wichtigen Adjektive.

In der *formalen* Logik ist der Unterschied zwischen Substantiven, Adjektiven und Verben wie beschrieben dagegen aufgehoben; alle werden durch *Prädikatoren* ersetzt. So würden beide obigen Sätze z. B. durch ‚$a \in F$' dargestellt.

0-1-5-5 FORMALISIERUNG

Die *Übersetzung* eines Satzes der *normalen Sprache* in einen Satz der *formalen logischen Sprache* nennt man *Formalisierung*. Hier ist zu unterscheiden:

- der Satz ist in der Alltagssprache auch schon *abstrakt* formuliert
- der Satz ist *konkret* formuliert, mit Konstanten, das ist der häufigere Fall.

Durch die Formalisierung wird keine Bedeutungsgleichheit erreicht (wie wenn man einen Satz von einer normalen Sprache in eine andere übersetzt), sondern nur die *logische Struktur* des Satzes dargestellt. Man macht das, um eben diese Struktur und damit die Wahrheitsbedingungen herauszufinden.

Nehmen wir als Beispiel den folgenden Satz der normalen Sprache: ‚Sokrates ist Philosoph'. Natürlich ist dieser Satz nicht ohne Bedeutungsverlust in die logische Sprache übersetzbar, denn es gibt in der logischen Sprache keine Wörter wie ‚Sokrates' usw. Zwar wird oft so getan, als sei eine Übersetzung möglich, man wählt dann die Individuen-Konstante ‚a' und die Eigenschafts-Konstante (bzw. Prädikat-Konstante) ‚F' und schreibt z. B. ‚$a \in F$'.

Aber ‚$a \in F$' könnte natürlich auch für ‚Platon ist Grieche' stehen. Wenn man wirklich eine direkte Übersetzung vornehmen will, muss man sich eindeutige Termini erst definieren, z. B.: x_{so} =df Sokrates, F_{Ph} =df Philosoph. „x" und „F" sind hier Variablen, die aber durch die *Indizes* zu echten Konstanten werden, sie haben dann eine feste Bedeutung. Dann mag ‚$x_{so} \in F_{Ph}$' als direkte Übersetzung dienen. Doch es ist wie gesagt gar nicht der Sinn der Logik, direkte Übersetzungen vorzunehmen.

Eine andere Prozedur ist die *De-Formalisierung*, also die *Rückwandlung* einer *formalen* Aussage in eine *normal-sprachliche*, was allerdings selten zum Thema gemacht wird. Es gibt nämlich einen Unterschied im Schreiben und Lesen: Einen formalen Satz wie ‚$X \rightarrow Y$' sprechen wir auch formal: ‚X impliziert Y'.

Anders ein Satz wie: ‚$\Lambda x(x \in F \rightarrow x \notin G)$'. Den würde man normalerweise nicht lesen: ‚Allquantor, klein x, Klammer auf, Element-Zeichen, F, Implikator, durchgestrichenes Element-Zeichen, G, Klammer zu'. Sondern man liest ihn mehr oder weniger in der *normalen Sprache* (d. h. man *de-formalisiert* ihn). Z. B.: ‚Für alle x gilt: wenn x Element der Klasse F ist, dann ist x nicht Element der Klasse G'.

Anders gesagt: Die formale, logische Sprache ist primär eine *geschriebene* Sprache, nur sehr begrenzt auch eine *gesprochene* Sprache.

0 – 2 KOMPONENTEN DER LOGIK

0-2-1 Einteilung der Komponenten

0-2-1-1 STUFUNG IN DER LOGIK
Die *herkömmliche* Logik geht meist von einer *2-Stufung* der logischen *Komponenten* aus.
Je nachdem, auf welchen *Wirklichkeitsbereich* sie sich ausrichtet, ergibt dies folgende Stufen:

- *Psyche*
  1. Begriffe (unterteilt in Allgemein-Begriffe und Individual- Begriffe)
  2. Urteile bzw. Gedanken
- *Sprache*
  1. Wörter (unterteilt in Eigennamen und Prädikatoren)
  2. Sätze bzw. Aussagen
- *Realität*
  1. Dinge / Sachen (unterteilt in Individuen und Klassen)
  2. Ereignisse bzw. Sachverhalte

Das Augenmerk der Logik gilt dabei vor allem den jeweils unter 2. genannten Entitäten.
Als Hauptunterschied zwischen 1. und 2. gilt jeweils:
– Die *Entitäten unter 2.* (Urteile, Sätze, Sachverhalte) sind *wahr* oder *falsch* o. ä.
– Für die *Entitäten unter 1.* (Begriffe, Wörter, Dinge) gilt das nicht; man kann also z. B. von einem isolierten Wort nicht sagen, es ist wahr oder falsch.
Wie ich in 0-4-4-1 noch zeigen werde, kann man diesen Unterschied allerdings relativieren.

0-2-1-2 OBJEKTE UND RELATIONEN
Auch in der *Integralen Logik* wird eine grundsätzliche *2-Teilung* vorgenommen, in:

1. *Objekte* (logische Objekte)
   - Individuen
   - Mengen — Verknüpfungen von Individuen
   - Molekular-Mengen — Verknüpfungen von Mengen
2. *Relationen* (logische Relationen)
   - Individuen-Relationen — Relationen zwischen Individuen und Mengen
   - Mengen-Relationen — Relationen zwischen Mengen
   - Molekular-Relationen — Relationen zwischen anderen Relationen

Anstelle von *Mengen* kann man auch von *Klassen* ausgehen.
Wie man sieht: Es besteht eine *Parallele* zwischen Objekten und Relationen:

• Individuen	Individuen-Relationen
• Mengen	Mengen-Relationen
• Molekular-Mengen	Molekular-Relationen

(Im dritten Punkt ist die Parallele nicht ganz gegeben, dazu komme ich noch.)

Von daher lassen sich *3 Bereiche* der Logik bzw. 3 Logiken unterscheiden:

- *Individuen-Logik* (meistens *Prädikaten-Logik* genannt)
- *Mengen-Logik* (meistens *Klassen-Logik* genannt)
- *Molekular-Logik* (meistens *Aussagen-Logik* genannt)

Die Integral-Logik greift zwar die obigen Unterscheidungen zur Differenzierung auf, primär bezieht sie sich aber auf *generelle Komponenten*, die eben alles sein können. Sie sind *nicht danach spezifiziert*, ob es sich um Individuen, Mengen, Relationen usw. handelt.

Allerdings ist hier auch eine *3er-Unterteilung* möglich:

1. Objekte	z . B. X, Y	konkret: X = Regen, Y = Nässe
2. Relationen	z. B. →	konkret: wenn – dann
3. Relationsgefüge	z. B. X → Y	konkret: wenn Regen, dann Nässe

Es wird hier also genauer unterschieden zwischen den *Relationen* und den *Relationsgefügen* (oder *Relationssystemen*); die Relationsgefüge entsprechen den *Sachverhalten*, *Aussagen* oder *Urteilen*; allerdings kann man zur Vereinfachung auch Relationsgefüge als ‚Relationen' bezeichnen, wenn keine Missverständnisse auftreten können.

Am häufigsten verwende ich im Folgenden aber den Terminus ‚*Struktur*' für ein Relationsgefüge (genauer gehe ich darauf ein in 0-2-5-1).

Die oben dargestellte Theorie, die sich auf *Objekte* und Relationen zwischen ihnen bezieht, kann man *extensional* nennen. Man kann, ja muss sie durch eine zweite *intensionale* Theorie ergänzen, die sich auf *Eigenschaften* (oder *Begriffe*) und Relationen zwischen ihnen bezieht. Auf den Unterschied von Extension und Intension wurde schon kurz eingegangen – und er wird uns noch ausführlich beschäftigen.

0-2-1-3 LOGISCHER AUFBAU DER WELT

Ich möchte hier schon einen kurzen Überblick über den *logischen Aufbau der Welt* geben. Im Einzelnen wird in vielen späteren Punkten darauf eingegangen.

Man kann aus logischer Sicht zunächst sagen: Die Welt ist die Gesamtheit (All-Klasse) aller Entitäten. Entitäten sind dabei *Objekte*, *Eigenschaften*, *Relationen* und Relationsgefüge = *Strukturen* (die Quantität wird hier nicht explizit genannt, geht aber implizit in diese Sammlung ein). Zur Übersichtlichkeit lasse ich die *Eigenschaften* erst einmal beiseite.

Welt (alle Entitäten)

Objekte Relationen Strukturen

Nun kann man allerdings analysieren: *Strukturen* bestehen aus Objekten und Relationen, insofern ist der Begriff der Struktur *abgeleitet*. Man kann einfacher also auch unterteilen:

Welt

Objekte Relationen

Andererseits kann man eine *umgekehrte* Darstellung wählen; demnach ist das Relationsgefüge, die Struktur (real also der Sachverhalt) der *Ausgangspunkt*. Die Welt ist demnach die Menge aller Strukturen oder aller Sachverhalte.

Welt

Struktur_1 Struktur_2 ... Struktur_n

Dieses Welt-Modell ist erst einmal offen auch für eine generelle, *über-logische* Betrachtung. Wie schon bemerkt und später noch genauer aufgezeigt werden soll, berücksichtigt die Logik aber nur *funktionale* Relationen; räumliche, zeitliche, kausale u. a. Relationen werden nicht miterfasst. Somit ist das logische Welt-Modell zwar einerseits allgemeingültig auf jeden Wirklichbereich anwendbar, aber es liefert andererseits keine vollständige Erfassung.

0-2-1-4 SCHREIBWEISE

Nachdem oben die möglichen *Ebenen* bestimmt worden, auf welche die Logik Bezug nehmen kann, soll nun die festgelegt werden, wie diese Ebenen in der *Schreibweise* behandelt werden.

Der normale Bezug der Sprache geht auf die *reale* Ebene. Dafür verwende ich keine besonderen Zeichen. Wenn ich etwas als *psychisch* kennzeichnen will, schreibe ich es in # ... #. Wenn ich etwas als *sprachlich* kennzeichnen will, schreibe ich es in ‚ ...’. Wenn ich etwas *anführen* möchte, abgrenzen möchte, als Beispiel o. ä., ohne mich auf eine Ebene festzulegen, schreibe ich „ ...“.

Ich setze den Punkt immer *hinter* das Anführungszeichen, denn es geht hier nur um *Beispielsätze* usw., aber nicht um wörtliche Rede; so wird eine größere Einheitlichkeit erreicht. Wenn ich etwas *hervorheben* möchte, z. B. als Fachbegriff oder als besonders wichtig, verwende ich meistens *Kursiv*-Schrift; in diesem Fall verzichte ich ggf. auf Anführungszeichen.

- Sachverhalt: Peter ist klug.
- Urteil: #Peter ist klug#.
- Satz: ‚Peter ist klug’.
- Unspezifiziert: „Peter ist klug“.

Formalisierungen, logische und mathematische *Formeln*, schreibe ich im Folgenden immer *ohne* Anführungen, auch wenn sie *meta-sprachlich* verwendet werden (bis auf wenige Ausnahmen, wenn der meta-sprachliche Status betont werden soll). Die sprachliche Exaktheit bewerte ich hier niedriger; als wichtiger erachte ich, dass die Formel übersichtlich ist.

0-2-1-5 OBJEKT- UND META-SPRACHE

Dieses Thema wurde schon mehrfach kurz angesprochen. Da es aber wichtig ist und zu Missverständnissen Anlass geben kann, führe ich es noch etwas weiter aus. Man unterscheidet zwischen:

• *Objekt-Sprache*: In dieser Sprache wird über *Objekte*, über die Welt gesprochen bzw. geschrieben. Z. B. sage ich aus: Aristoteles war ein genialer Philosoph.

• *Meta-Sprache*: In dieser Sprache wird über die (Objekt-)*Sprache* gesprochen/geschrieben.
Z. B. der *Satz* ‚Aristoteles war ein genialer Philosoph’ besteht aus fünf Wörtern (syntaktische Aussage). Oder: ‚Aristoteles war ein genialer Philosoph’ ist wahr (semantische Aussage).

Bei der Objekt-Sprache äußert man sich *in* der Sprache, verwendet sie, bei der Meta-Sprache führt man die Objekt-Sprache an.

Im Grunde ist die Eingrenzung auf Objekt- und Meta-*Sprache* aber zu eng. Ebenso könnte ich unterscheiden: *Objekt-Sachverhalt*: ein Sachverhalt besteht bzw. wird festgestellt, *Meta-Sachverhalt*, es wird eine Feststellung über einen Sachverhalt getroffen (entsprechend *objekt-psychisch* oder *meta-psychisch*). Natürlich erfolgt diese Feststellung in Sprache, womit man wieder auf die Unterscheidung Objekt- und Meta-Sprache verwiesen ist.

Die Unterscheidung zwischen Objekt- und Meta-Sprache ist auch in der Alltagssprache wichtig, weil es sonst zu Missverständnissen kommen kann. Z. B: ‚Aristoteles ist ein genialer Philosoph ist wahr.' Dies führt zu Verwirrung. Richtig wäre: Der Satz ‚Aristoteles ist ein genialer Philosoph' ist wahr.

In der Theorie von Mathematik und Logik kann die Nicht-Unterscheidung von Objekt- und Meta-Sprache zu *Antinomien* führen, in der praktischen Verwendung ist dies aber zu vernachlässigen. Aus dem Kontext ist im Grunde immer zu erkennen, ob eine Formel objektsprachlich oder meta-sprachlich gemeint ist. Und anders als in der normalen Sprache ergeben sich auch kaum Missverständnisse. Z. B.: $X \rightarrow Y$ ist eine logische Aussage. Oder ganz korrekt: ‚$X \rightarrow Y$' ist eine logische Aussage. Da der logische Ausdruck durch die Formalisierung ohnehin abgegrenzt ist, muss man ihn optisch nicht notwendig durch *Anführungszeichen* o. ä. zusätzlich abgrenzen. Andererseits müssten bei korrekter Verwendung der Meta-Sprache sehr häufig Anführungszeichen verwendet werden, was die ohnehin komplizierten Formeln noch unübersichtlicher machte. Da es mir aber wichtig ist, den Text so übersichtlich wie möglich darzustellen, verzichte ich in den Formalisierungen auf den Perfektionismus der strengen Unterscheidung zwischen Objekt- und Meta-Sprache.

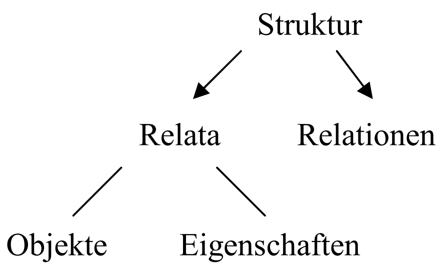
0-2-2 Objekte und Verknüpfungen

0-2-2-1 LOGISCHE OBJEKTE

‚Objekte' nehme ich als einen übergeordneten *extensionalen* Sprachbegriff oder Terminus. Er lässt sich wie gesagt differenzieren, in *Individuen*, *Mengen/Klassen* oder *Mengen-Verknüpfungen*. Ein Objekt ist eine Ganzheit, eine identifizierbare Entität, traditionell sprach man von ‚Substanz'. Am ehesten denkt man bei Objekten an *konkrete*, körperliche, materielle Objekte, aber es gibt auch *abstrakte* Objekte, die nicht oder nur partiell spezifiziert sind.

Man könnte auch (unräumliche, unzeitliche) *logische Objekte* angeben, aber wesentlich bei der Logik sind die *logischen Relationen*, und die können zwischen allen Objekten bestehen.

Die *Intensionen*, d. h. die *Eigenschaften* oder *Begriffe*, die mit den Individuen und Mengen verbunden sind, fasse ich mit den Objekten im Terminus '*Relata*' zusammen, denn beide haben kaum einen eigenständigen Status, sondern sind primär Bestandteile Strukturen.



Diese Bereiche werde ich jetzt näher beschreiben, ohne sprachphilosophische Details.

0-2-2-2 INDIVIDUEN

Dies ist die unterste Ebene, sie umfasst *individuelle Objekte*, z. B. den Philosophen Sokrates. In der logischen Sprache verwendet man für Individuen *Variablen* wie ‚x', ‚y' oder *Konstanten* wie ‚a' und ‚b'. Ich bevorzuge als Konstanten allerdings ‚x_1' und ‚x_2' usw.

Um auszudrücken „dasjenige Objekt, das die Eigenschaft F hat", verwendet man den *Kennzeichnungs-Operator*: ιx(Fx). Man spricht auch von *‚Jota-Operator'*, weil das griechische Zeichen ι (Jota) verwendet wird.

Man könnte diskutieren, ob es – real – *bestimmte* und *unbestimmte* Objekte gibt; oder ob es sinnvoller ist davon auszugehen, dass nur unsere *Sprachzeichen* semantisch bestimmt oder unbestimmt sind – die Objekte dagegen grundsätzlich bestimmt. Ich werde in 0-2-4 zeigen, dass die Antwort hierauf recht komplex ausfallen muss; vor allem im Bereich der *Quantenphysik* geht man allerdings davon aus, dass Objekte nicht *deterministisch* (vollständig bestimmt), sondern nur *statistisch* (partiell bestimmt) zu fassen sind. Eine weitere Diskussion wäre, inwieweit individuelle Objekte eine einheitliche *Identität* besitzen bzw. diese – über die Zeit – bewahren. Aber in der Logik kann man von diesen Fragen weitgehend abstrahieren.

Der Bezug auf Individuen – individuelle Objekte – ist ein *extensionaler* Zugang. *Intensional* bezieht man sich entsprechend auf *Individual-Eigenschaften* oder *Individual-Begriffe.* Z. B. könnte man von einer *Gesamt-Eigenschaft* „Sokrates" ausgehen – ich schreibe sie ‚E(Sokrates)', also ‚E' für ‚Eigenschaft'; bzw. geht man von einzelnen *individuellen Eigenschaften* aus, wie etwa der Körpergröße von Sokrates. Die Bestimmung einer solchen *Individual-Eigenschaft* bzw. eines solchen *Individual-Begriffs* ist allerdings nicht unproblematisch; dies wird vor später beim Punkt „Definitionen" erläutert.

0-2-2-3 MENGEN

Mengen sind gedachte *quantitative Zusammenfassungen* von Individuen, die als *Elemente* der Menge gelten. Eine Menge ist z. B. die Zusammenfassung von Sokrates, Platon, Aristoteles.

Man kann *Individuen* auch als Mengen mit nur *einem* Element ansehen. Die Menge „Sokrates" wäre z. B. die Menge, die als einziges Element eben Sokrates enthält.

Man benennt Mengen mit ‚M' und ‚N' und schreibt Mengen mit *geschweiften Klammern*.

M = {Sokrates, Platon, Aristoteles} bzw. N = {x, y, z}

Andererseits kann man Mengen auch als bestimmte *Verknüpfungen von Individuen*, nämlich *Vereinigungen* ansehen. Ich verwende dann nicht das unspezifische *Komma*, sondern das *Vereinigungs*-Zeichen ∪. M = {Sokrates ∪ Platon ∪ Aristoteles}

Im Grunde kann man dann auch die geschweiften Klammern weglassen. Das diente einer Vereinheitlichung, wie sie in der Wissenschaft immer erwünscht ist. So ergibt sich z. B.:

M = Sokrates ∪ Platon ∪ Aristoteles

Wie sich später noch zeigen wird, steht das ∪ in Verbindung zu dem Junktor „*oder*", formal ∨ . Das mag irritieren, denn bei einer Vereinigung von Elementen mag man sprachlich doch eher an „*und*" denken, formal ∧. Das „und" ist aber mit dem *Schnitt-Operator* ∩ verbunden, der für die *Schnitt-Menge* steht. Man kann sich nun leicht klarmachen, dass die Schnitt-Menge der Individuen (bzw. der Individual-Mengen) Sokrates, Platon und Aristoteles zu einer *leeren* Menge führen würde, nicht zur Vereinigung.

und	∧	Schnitt-Menge	∩
oder	∨	Vereinigungs-Menge	∪

0-2-2-4 KLASSEN

Klassen sind Mengen von *allen* Individuen, denen eine *bestimmte Eigenschaft* zukommt (bzw. ein bestimmter Begriff). Z. B. ist die Klasse der Menschen die Menge aller Objekte, denen die Eigenschaft zukommt, Mensch zu sein.

Diese Bestimmung zeigt die Bedeutung der *Intension*. Man muss zur Definition einer Klasse letztlich auf eine *Eigenschaft* zurückgreifen. Denn sonst geriete man in einen *Zirkel*: „Die Klasse aller Menschen ist die Menge aller Objekte, die Elemente der Klasse Mensch sind".

Zwar kann man Klassen partiell als *Schnitt-Mengen* oder *Vereinigungs-Mengen* anderer Klassen darstellen. So mag man bestimmen: „Die Klasse der Rappen ist die Schnitt-Menge der Klasse der Pferde und der Klasse der schwarzen Objekte“. Führt man diese Definitionen aber weiter, so wird man sich letztendlich doch auf *Eigenschaften* bzw. *Begriffe* beziehen müssen. Immer weiter auf andere Klassen zu verweisen, ist nicht wirklich überzeugend.

Klassen (*extensional*) entsprechen (*intensional*) *Klassen-Eigenschaften* oder *allgemeine Eigenschaften*, also z. B. die Eigenschaft „Mensch“ (oder „Menschlichkeit“). In der traditionellen Logik sprach man von „Allgemein-Begriffen“, ich verwende ‚Allgemein-Eigenschaft’ und ‚Allgemein-Begriff’ parallel. Wie sich Klassen und ihr Verhältnis zu Begriffen im Einzelnen bestimmen lässt, wird später noch diskutiert werden.

Klassen ordnen die Wirklichkeit nach *Gleichheit* bzw. *Ähnlichkeit*, indem sie *alle* Individuen mit ähnlichen Eigenschaften zusammenfassen (im Gegensatz zu einer *Menge*, die auch *ungleiche* Objekte willkürlich verbinden kann).

Klassen lassen sich in *Teilklassen* (Teilmengen) zerlegen, bei einer vollständigen Zerlegung bilden die Klassen die Vereinigungs-Menge ihrer Teilklassen. Dabei gilt: Die Elemente einer Teilklasse sind sich ähnlicher als die Elemente der Klasse (Oberklasse). Sei die Oberklasse die Klasse aller Pferde und die Teilklasse umfasse alle Rappen, dann sind die Rappen sich prinzipiell ähnlicher als die Pferde, und zwar in diesem Fall um genau *eine* Eigenschaft, nämlich die schwarze Hautfarbe.

Klassen bezeichnet man mit den Buchstaben ‘F’ und ‘G’ bzw. ‘F_1’, ‘F_2’ usw.
Um sie genau von Begriffen abzugrenzen, kann man ggf. schreiben: ‘K(F)’, ‘K(G)’ usw.
Klassen lassen sich vor allem auf zwei Arten *formalisieren*: *Aufzählung* und *Beschreibung*.

• *Aufzählung*

$$F = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n$$

Ich verwende also die oben eingeführte Formalisierung.
Die herkömmlich Formalisierung wäre: $F = \{x_1, x_2, \ldots , x_n\}$
Beide Formalisierungen gelten nur bei *endlichen* Klassen. Bei *unendlichen* Klassen gilt:

$$F = x_1 \cup x_2 \cup \ldots$$

• *Beschreibung*

Die herkömmliche Schreibweise ist: $F = \{x / Fx\}$
Lies: „Die Klasse F ist die Menge aller x, für die gilt: x hat die Eigenschaft F“.

Normalerweise habe ich für *Eigenschaft* immer das ‚E’ geschrieben, die Eigenschaft der Klasse F schreibt man also ‚E(F)’ (sprich ‚E von F’). Daher müsste die Formalisierung eigentlich lauten: $F = \{x / E(F)x\}$. Durch die Syntax ist aber bei $F = \{x / Fx\}$ klar, dass die *Eigenschaft* F gemeint ist, ohne dass man ‚E’ nennt. Denn wäre die *Klasse* F gemeint, würde man schreiben $F = \{x / x \in F\}$, was wiederum ein Zirkel wäre.

Alternativ zur Mengen-Darstellung kann man den *Klassen-Operator* nutzen. Um auszudrücken „die Klasse aller x, für die gilt, x hat die Eigenschaft F“, verwendet man den *Klassen-Operator* oder *Lambda-Operator*, benannt nach dem griechischen Zeichen *Lambda* λ: $\lambda x(Fx)$.

0-2-2-5 VERKNÜPFUNGEN

Logische *Verknüpfungen* müssen genauer beschrieben werden. Verknüpfungen in der Logik sind keine räumlichen oder zeitlichen Synthesen, sondern man muss sie rein *quantitativ* verstehen. Am besten bieten sich hier *mengentheoretische* Begriffe an. Allerdings werden zur Definition auch logische Junktoren, die sich auf *Relationen* beziehen, verwendet.

Im weiteren Sinn kann man Verknüpfungen noch zu den *Objekten* rechnen. Ich spreche hier von *Mengen*-Verknüpfungen, man kann aber genauso von *Klassen*-Verknüpfungen ausgehen.

Herkömmlicherweise werden *Verknüpfungen* nur auf Mengen bezogen. Dabei ergibt sich aus der Verknüpfung von zwei (oder mehr) Mengen eine neue Menge. Wie beschrieben, kann man aber auch *Individuen* zu einer Menge verknüpfen. Eine *komplexe* Menge, die sich aus der Verknüpfung von anderen Mengen ergibt, nenne ich *Molekular-Menge* (*Molekül-Menge*).

Verknüpfungen von Mengen sind genau zu unterscheiden von *Relationen* zwischen Mengen: „M ist *Teilmenge* von N" ist z. B. eine Relation, sprachlich eine *Aussage*, die *wahr* oder *falsch* sein kann. Dagegen sind Verknüpfungen von Mengen ebenfalls Mengen und damit nicht wahr oder falsch.

Man kann Verknüpfungen in zweierlei Weise auffassen:
1) *statisch*, als *Zustände*:
die Menge M *ist* mit der Menge N verknüpft
2) *dynamisch* bzw. handlungstheoretisch, als *Operationen*:
die Menge M *wird* mit der Menge N verknüpft

Anhand der Vereinigung von Mengen (vgl. unten) sei das genauer erklärt:

$M_1 \cup M_2 = N$

$M_1 \cup M_2$	Verknüpfung, hier Vereinigung bzw. Vereinigungs-Menge
$\cup$	Verknüpfungs-Operation bzw. Operator
N	Resultierende Menge: Molekular-Menge
M_1, M_2	Ausgangs-Mengen

Bei 2 Mengen M und N sind $4^2 = 16$ *Verknüpfungen* möglich.
Ich gebe aber nur die wichtigsten Verknüpfungen zwischen 2 Mengen M und N an:

- Vereinigungs-Menge $M \cup N$
- Schnitt-Menge $M \cap N$
- Differenz-Menge $M \setminus N$
- Ergänzungs-Menge M'

• *Vereinigungs-Menge* $M \cup N$ (Vereinigungs-Verknüpfung)
Die wird herkömmlich definiert als eine Verknüpfung von 2 Mengen M und N, wobei alle Elemente erfasst werden, die in M *oder* N enthalten sind (inklusives oder):

$M \cup N = \{x / x \in M \lor x \in N\}$

Ich möchte die Vereinigungs-Menge aber wie gesagt allgemeiner verstehen. Auch Individuen x, y, z lassen sich vereinigen, und zwar enthält man so die Menge (bzw. Vereinigungsmenge) dieser Individuen.

$x \cup y \cup z = \{x, y, z\}$

• *Schnitt-Menge* $M \cap N$ (Schnitt-Verknüpfung)
Sie spielt neben der Vereinigungs-Menge die wichtigste Rolle. Es ist die Menge aller x, die in M *und* N enthalten sind.

$M \cap N = \{x / x \in M \land x \in N\}$

• *Differenz-Menge* $M \setminus N$ (Rest-Menge)
Es ist die Menge aller x, die zu M, aber nicht zu N gehören

$M \setminus N = \{x / x \in M \land x \notin N\}$

• *Ergänzungs-Menge* M' (Komplement-Menge)
Zur Ergänzungs-Menge M' gehören alle Elemente, die zu N, aber nicht zu M gehören. Somit ist die Ergänzungs-Menge das Gegenstück zur Differenz-Menge.

$M' = N \setminus M = \{x / x \in N \wedge x \notin M\}$

Oft wird als zusätzliche Bedingung angegeben: $M \subseteq N$

Mengen-Verknüpfungen können prinzipiell unabhängig davon vollzogen werden, in welcher *Relation* die Mengen zueinander stehen; Mengen-Relationen sind z. B. *Teilmengen*-Relation oder *Identität* (dies wird noch ausführlich erläutert). Nur ergeben sich unterschiedliche Ergebnisse der Mengen-Verknüpfungen in Abhängigkeit von der *Relation*. Wenn M und N identisch sind, dann ist z. B. die Schnitt-Menge $M \cap N$ identisch mit M bzw. N. Wenn dagegen M und N sich gegenseitig ausschließen, dann ist ihre Schnitt-Menge *leer*.

0-2-3 Objekte und Eigenschaften

0-2-3-1 ENTSPRECHUNG VON OBJEKTEN UND EIGENSCHAFTEN

Ich habe oben über Objekte und Eigenschaften geschrieben, dabei wurde deutlich: *Objekten* entsprechen immer *Eigenschaften* (bzw. Begriffe).

Individuen entsprechen *Individual-Eigenschaften.*

Klassen entsprechen *Klassen-Eigenschaften* oder Allgemein-Eigenschaften.

Ein Objekt ist immer eine *Ganzheit*, das gilt für Individuen wie für Klassen. Eine Eigenschaft, selbst eine komplexe Eigenschaft, kann man dagegen normalerweise als etwas *Isoliertes* sehen, das zwar begrifflich oder logisch eigenständig zu fassen ist, real aber nicht alleine auftritt. Im Folgenden sollen Objekte und Eigenschaften bzw. deren Verhältnis genauer untersucht werden.

0-2-3-2 FORMALES VERSUS INHALTLICHES OBJEKT

• Inhaltliches Objekt

In der *normalen Sprache*, aber auch in unserem normalen Weltverständnis ist ein Objekt durch *inhärente* Eigenschaften *bestimmt*. Z. B. ist das Individuum Sokrates oder die Klasse der Menschen mit Eigenschaften ausgestattet, die von dem Objekt nicht zu trennen sind.

So gehört die Eigenschaft „Mensch" unmittelbar zu Sokrates hinzu. Und die Klasse Mensch umfasst ihrerseits *inhaltlich bestimmte* Individuen, also etwa: Sokrates, Platon, Aristoteles …

Zwar kann man ggf. einen *Träger* der Eigenschaften unterscheiden, aber der ist dann auch inhaltlich bestimmt. Z. B.: Der Mensch ist ein „Tier" (Träger), das vernunftbegabt (Eigenschaft) ist. Das Objekt bildet ein *Ganzes* (traditionell eine Substanz), in ihm sind Träger und Eigenschaften untrennbar verbunden.

• Formales Objekt

In der *formalen Logik* ist ein Objekt dagegen inhaltlich völlig *unbestimmt*, entsprechend der Objekt-*Variablen* ‚x' in der Logik (wie ich noch zeigen werde, gilt das im Grunde auch für Konstanten). Sowohl *allgemeine Objekte* (Klassen) wie *individuelle Objekte* sind formal.

Z. B. wäre die (formale) Klasse F durch folgende formale Individuen zu bestimmen:

$K(F) = x_1 \cup x_2 \cup ... \cup x_n$

Es wäre allerdings sinnlos, in dieser Weise eine *inhaltlich* bestimme Klasse zu definieren:

$\text{Klasse(Mensch)} = x_1 \cup x_2 \cup ... \cup x_n$

Das wäre unspezifisch, denn $x_1 \cup x_2 \cup ... \cup x_n$ könnte genauso gut für die Klasse aller Affen stehen wie für alle Menschen.

• Kombination von formalen Objekten und Eigenschaften
Nun können formale (variable) Objekte aber *Träger von Eigenschaften* sein, zunächst von *formalen* Eigenschaften, z. B.: $K(F) = x_1[Fx_1] \cup x_2[Fx_2] \cup ... \cup x_n[Fx_n]$
(lies: ‚x_1, für das gilt, es hat die Eigenschaft F' usw.)

Aber auch so kann man eine *inhaltlich* bestimmte Klasse nicht definieren, nur wenn man inhaltliche (konstante) Eigenschaften angibt: Klasse(Mensch) =
– *kollektiv*: Λx[Mensch x], {x / Mensch x}, λx(Mensch x)
– *individuell*: x_1[Mensch x_1] $\cup$ x_2[Mensch x_2] $\cup ... \cup$ x_n[Mensch x_n]
Und das ist der Weg der *Anwendung* der formalen Logik: Die Objekte sind *formal*.
Es können ihnen aber *inhaltliche* Eigenschaften zugeordnet werden.

Allerdings macht die Logik das nicht ganz konsequent, denn dann müsste sie auch Individuen so bestimmen, z. B. Sokrates = x_i[Sokrates x_i]; stattdessen verwendet man Konstanten.

Ist es nun sinnvoller, Objekte primär als formal oder als inhaltlich zu bestimmen? Die *erste Definition* (formales Objekt) hat zwar den Vorteil, dass sie Eigenschaften und Objekt sauber trennt; aber sie ist ganz unspezifisch. Die *zweite Definition* (inhaltliches Objekt) erlaubt dagegen echte Begriffs- und Bedeutungsbestimmungen.

Aber wir müssen uns hier gar nicht festlegen, sondern können gleichberechtigt neben den *inhaltlichen* Objekten auch *formale* Objekte angeben, die eben Bestandteil der inhaltlichen Objekte sind, z. B.:

Mensch (inhaltliches Objekt) = x (formales Objekt) + „Menschlichkeit“ (Eigenschaft)

0-2-3-3 WESENTLICHE UND KONTINGENTE EIGENSCHAFTEN

Ich habe oben gezeigt, dass es sinnvoll ist, von *inhaltlichen Objekten* auszugehen, die bereits *Eigenschaften* enthalten. Damit wird die Abgrenzung bzw. Unterscheidung von *Objekten versus Eigenschaften* natürlich relativiert. Dies ist aus Gründen der Systematik nicht gerade wünschenswert, aber hat sich doch als beste Lösung erwiesen.

Weiter habe ich oben nur allgemein von *Eigenschaften* bzw. Begriffen gesprochen. Aber wir müssen genauer unterscheiden:

- wesentliche (*definierende, essentielle*) Eigenschaften
- unwesentliche (*kontingente, akzidentelle*) Eigenschaften

• *wesentliche Eigenschaften*
Dies sind *notwendige*, *identitätsbestimmende* Eigenschaften. Man kann auch von *Identitäts-* oder *Kern-Eigenschaften* sprechen, wenn man den etwas belasteten Begriff ‚wesentlich' umgehen will. Dabei können wir *2 Stufen* unterscheiden, wie später genauer erläutert wird.

Betrachten wir zunächst *Klassen* von Individuen: Z. B. ist natürlich für die Mitglieder der Klasse Mensch *primär* (1. Stufe) wesentlich, dass sie die Eigenschaft „Mensch“ besitzen – oder als Adjektiv geschrieben ‚Menschlichkeit'.

Wir fragen dann aber, auf einer 2. *Stufe* (vgl. unten), welche Eigenschaften den Menschen *wesentlich* bestimmen. Hier wäre etwa die Eigenschaft „sprachbegabt“ zu nennen. Eine *wesentliche* Eigenschaft muss normalerweise *allen* Menschen zukommen, aber dies ist nur eine *notwendige* Bedingung, keine *hinreichende*.

Für ein *Individuum* gilt Entsprechendes: Z. B. kommt dem Individuum Sokrates primär (1. Stufe) der Individual-Begriff „Sokrates“ *wesentlich* zu. In der 2. Stufe gilt für Individuen normalerweise, dass ihnen eine *wesentliche* Eigenschaft *immer* und *überall* zukommen muss.

Die philosophische Klassik sah großenteils das Wesentliche des Individuums im *Allgemeinen*. So wäre es z. B. für Sokrates wesentlich, dass er Mensch ist (Artbegriff), aber nicht seine individuellen Eigenschaften, etwa seine spezifischen philosophischen Gedanken. Aus heutiger Sicht ist zwar für das Individuum auch das Allgemeine wesentlich, aber ebenso das *Besondere*, z. B. für Sokrates das, was ihn von anderen Menschen unterscheidet.

Solche essentiellen Eigenschaften kann man auch *analytisch*, genauer *material-analytisch* oder *definitions-analytisch* nennen. Denn sie sind Bestandteil von *Definitionen* oder folgen aus Definitionen.

Es ist schwierig, *generell* zu bestimmen, was eine Eigenschaft zu einer *wesentlichen* macht. Und es kann im konkreten Einzelfall noch schwieriger sein zu sagen, ob die Eigenschaft z. B. eines bestimmten Menschen für ihn wesentlich ist oder nicht. Dennoch ist die Unterscheidung wesentlicher und kontingenter Eigenschaften keinesfalls in den Bereich der *Metaphysik* oder Mystik abzuschieben, sondern eine letztlich wissenschaftlich zu klärende Frage.

• *kontingente Eigenschaften*

Das sind *zufällige*, z. B. *partikuläre* Eigenschaften, welche die Identität nicht berühren.

Bei *Klassen* geht es hier um Eigenschaften, die nur einem *Teil* der Klassenmitglieder zukommen, im Beispiel solche, die nur *einigen* Menschen zukommen, wie die Eigenschaft „schwarzhaarig". Aber es gibt auch *allgemeine* Eigenschaften, die kontingent sind, beim Menschen z. B. die Eigenschaft „Erdbewohner"; offenbar sind (bisher) *alle* Menschen Bewohner der Erde, aber dennoch ist „Erdbewohner" keine notwendige Eigenschaft eines Menschen – warum soll ausgeschlossen werden, dass ein Mensch etwa „Mondbewohner" ist?

Beim *Individuum* kann eine kontingente, partikuläre Eigenschaft eine solche sein, die es nur *manchmal*, nur zu bestimmten Zeiten besitzt. Z. B. „Sokrates ist müde": Müdigkeit ist sicher eine Eigenschaft, die Sokrates nicht ständig zukam.

Kontingente Eigenschaften kann man auch *synthetisch* nennen, denn sie folgen nicht aus Definitionen, sind nicht durch Begriffs-*Analyse* zu ermitteln, sondern geben eine neue, zusätzliche Information über das Objekt.

0-2-3-4 KONKRETE UND ABSTRAKTE OBJEKTE

Wir haben oben zwischen *formalen* und *inhaltlichen* Objekten unterschieden. Nach der Analyse von Eigenschaften können wir bei den inhaltlichen Objekten jetzt zusätzlich unterscheiden zwischen: *konkreten* Objekten und *abstrakten* Objekten

• konkrete Objekte

Ein *konkretes* Objekt ist das Objekt mit *allen* seinen (wesentlichen und kontingenten) Eigenschaften. Wenn man Z. B. den *konkreten* Sokrates erfassen will, dann muss man *alle* seine Eigenschaften erfassen, und zwar *quantitativ* präzise, also z. B. seine genaue Körpergröße, die genaue Farbe seiner Haare usw., auch wenn das für seine Identität nicht ausschlaggebend ist.

Und die *konkrete Klasse* der Menschen umfasst *alle* Menschen mit *allen* ihren individuellen Eigenschaften.

• abstrakte Objekte

Ein *abstraktes* Objekt ist das Objekt nur mit seinen *definierenden*, *wesentlichen* Eigenschaften. Ein *vollkommen abstraktes* Objekt ist ein *formales* Objekt, bei dem nämlich von *allen* Eigenschaften *abstrahiert* ist. *Ontologisch* ergeben sich hier durchaus Unterschiede; z. B. könnte man bestreiten, dass es *abstrakte* Objekte real gibt; man könnte allerdings auch bestreiten, dass es *konkrete* Objekte real gibt. Im Speziellen könnte man einwenden, das *Klassen* grundsätzlich abstrakt sind, weil sie nämlich von den Beziehungen zwischen den Klassenmitgliedern abstrahieren (etwa im Gegensatz zum System oder der Ganzheit).

0-2-3-5 SIND OBJEKTE ODER BEGRIFFE PRIMÄR?

Diese Frage lässt sich keineswegs leicht beantworten, sie hängt auch zusammen mit dem berühmten *Universalienproblem*. Ich werde die zwei relevanten Positionen kurz vorstellen.

• Objekte sind primär

Man könnte hier erstens anführen, Eigenschaften / Begriffe lassen sich auf *Klassenzugehörigkeit*en reduzieren. So mag man z. B. umformulieren: ‚Die Eigenschaft „Mensch“ zu besitzen, heißt, Element der Klasse der Menschen zu sein’. Hier wird festgelegt: Eigenschaft = *Klassenzugehörigkeit*. Und so kann man die Zusprechung von Klassenzugehörigkeiten immer weiter fortsetzen, aber letztlich bleibt dies ohne Erklärungswert, wenn man sich nicht irgendwann auf Eigenschaften bezieht. Erst recht bei *individuellen* Eigenschaften ist es problematisch, wenn man z. B. die (komplexe) Individual-Eigenschaft „Sokrates“ erklärt als Zugehörigkeit zur Klasse Sokrates; denn es gibt eben gerade nur *ein* Individuum Sokrates.

Zweitens könnte man argumentieren, dass es *isolierte* Eigenschaften gar nicht gibt, dass Eigenschaften immer nur in Verbindung mit einem Objekt auftreten und somit die Objekte wichtiger sind. Aber diese Argumentation würde von einer anderen Ebene aus geführt, z. B. einer physikalischen Theorie der Welt. *Physikalisch* betrachtet könnte man bestreiten, dass sich Objekt und Eigenschaft trennen lassen, *logisch* ist das aber möglich und legitim.

• Eigenschaften sind primär

Hier wäre erstens auf eine Theorie zu verweisen, nach der ein Objekt nur eine Kombination von Eigenschaften ist. Konkret kann das vor allem bedeuten: Ein Objekt ist eine

– *Vereinigungs-Menge* von Eigenschaften: $E(F) \cup E(G)$, kurz $E(F \cup G)$
bzw. $E(F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_n)$. ‚E’ steht wie schon eingeführt für ‚Eigenschaft’.

– *Schnitt-Menge* von Eigenschaften: $E(F \cap G)$ bzw. $E(F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_n)$

Hier ist das Objekt auf seine Eigenschaften reduzierbar, somit ist ‚Objekt’ kein eigenständiger Begriff. Man muss keinen gesonderten *Träger* der Eigenschaft, keinen *Besitzer* der Eigenschaft annehmen. Diese Theorie hat zunächst den Vorteil der Einfachheit und Eleganz, aber bei komplizierten Fällen ergeben sich schnell Schwierigkeiten, und es ist *ontologisch* auch problematisch, vollständig auf Objekte oder Träger zu verzichten.

Überzeugender für eine Dominanz von Eigenschaften spricht aber: Wenn man Objekte nicht rein formal fassen will, benötigt man Eigenschaften, um sie zu bestimmen. Denn wie oben dargelegt, ist die Rückführung auf *Klassenzugehörigkeiten* nicht endlos durchführbar.
Außerdem enthalten, wie erläutert, inhaltlich bestimmte Objekte bereits Eigenschaften in sich.

Abschließend eine Übersicht:

konkretes Objekt

abstraktes Objekt + kontingente Eigenschaften

formales Objekt + wesentliche Eigenschaften

0-2-4 Konstanten und Variablen

0-2-4-1 EINFÜHRUNG

Der Punkt Konstanten versus Variablen betrifft primär die *Sprache* bzw. die *Meta-Sprache*. Nachdem wir uns zuletzt vor allem mit der *realen* Ebene der *Objekte* bzw. der *Objekt-Sprache* beschäftigt haben, geht es jetzt also wieder primär um die Zeichen selbst.

Zwar kann man zunächst auch definieren: *Konstanten* stehen für *bestimmte* Objekte, *Variablen* stehen für *unbestimmte* Objekte. Doch wäre in Frage zu stellen, ob es real überhaupt unbestimmte Entitäten gibt. Um sich aber eine anspruchsvolle ontologische Diskussion über die Bestimmtheit und Bestimmtheit der Welt zu ersparen (die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde), formuliert man lieber:

Konstanten stehen für *bestimmte*, *gleichbleibende Interpretationen*,
Variablen stehen für *unbestimmte*, *wechselnde Interpretationen*.

Was *Variablen* und *Konstanten* betrifft, so herrscht in der Logik leider einige Unklarheit, ja ein Durcheinander. Ausführlich gehe ich darauf in meinem Buch „Integrale Logik" ein.

Es wurde schon festgestellt, dass es bei den *logischen Zeichen* wie $\rightarrow \leftrightarrow \leftarrow \wedge \vee$ nur Konstanten gibt. Das Problem Konstanten versus Variablen betrifft vor allem die Zeichen, die sich auf Individuen, Klassen und Sachverhalte (bzw. deren Intensionen) beziehen, man nennt sie *deskriptive Zeichen*.

Man könnte durchaus die These vertreten, dass die Logik *gar keine deskriptiven Konstanten* benötigt, weil sie eben grundsätzlich von Bedeutung abstrahiert, weil jedes Zeichen sich prinzipiell auf wechselnde bzw. verschiedene Entitäten anwenden lässt. Da die Unterscheidung zwischen Konstanten und Variablen aber etabliert ist, will ich sie auch berücksichtigen.

0-2-4-2 INDIVIDUEN-KONSTANTEN

Individuen-Konstanten sind Zeichen, die ein *bestimmtes* individuelles Objekt bezeichnen bzw. benennen; anders gesagt, Individuen-Konstanten bezeichnen *stets dasselbe* Individuum.

1) *Formale, logische Sprache*

Wenden wir uns zunächst der formalen Sprache der Logik zu: Normalerweise werden in der *Logik* ‚a', ‚b' usw. bzw. ‚a_1' und ‚a_2' usw. als *Individuen-Konstanten* verwendet. Ich habe aber schon darauf hingewiesen, dass ‚a' natürlich keineswegs so eine Individuen-Konstante ist wie ein *Eigennamen* in der normalen Sprache. Nehmen wir als Beispielsatz: ‚a ist Philosoph'. Um zu wissen, ob der Satz wahr ist, muss ich ‚a' *interpretieren*, muss ‚a' eine konkrete Bedeutung zuweisen. Dies ist aber eben genau die Definition einer *Variable*, dass diese erst durch eine Interpretation genau bestimmt wird (vgl. später). Man könnte ‚a' also allenfalls als *Unbekannte* auffassen, es steht zwar für ein bestimmtes Individuum, aber man weiß nicht, für welches. Ob sich allerdings wirklich ein Unterschied zwischen *Variablen* und *Unbekannten* aufrechterhalten lässt, würde eine weitere komplizierte Analyse erfordern.

Ich benötige in meinem Buch die Buchstaben ‚a', ‚b' usw. für Zahlengrößen. Um Missverständnisse zu vermeiden, verwende ich stattdessen das Zeichen ‚x' (bzw. ‚y') das eigentlich als Individuen-*Variable* gilt. Durch einen *Index* wird es aber zur *Konstante* transformiert. D. h. als *Individuen-Konstante* wähle ich ‚x_1' usw., ‚x_i' oder ‚x_n', je nach genauer Intension. ‚x_1' steht für ein genau bestimmtes x, ‚x_i' bezeichnet ein x aus einer finiten Menge oder Folge, ‚x_n' kann für jedes beliebige x stehen und kann nur indirekt noch als Konstante gelten.

2) *Normale Sprache*

Betrachten wir nun zum Vergleich die Individuen-Konstanten in der *normalen Sprache*. Hier scheint zunächst klar: Eine Individuen-Konstante ist ein *Eigenname*. Nehmen wir einen *Vornamen* wie ‚Hans'. Er ist sicher angelegt als Konstante, faktisch heißen aber Tausende Menschen ‚Hans' – so gesehen müsste man ‚Hans' als Individuen-*Variable* führen.

Dagegen kann man einen *vollständigen Namen*, mit Vor- und Nachnamen, wie ‚Karl Popper' als eine echte Konstante, mir klarer Extension ansehen; natürlich können ggf. auch mehrere Personen den gleichen Namen, z. B. ‚Karl Popper' haben, dem könnte man durch Nennung des vollständigen Namens ‚Sir Karl Raimund Popper' wahrscheinlich entgehen, jedenfalls fungiert der vollständige Name nicht als Variable, selbst wenn mehrere so heißen.

Allerdings gibt es folgende Problematik der Bedeutung von *Eigennamen*: sie sind in der normalen Sprache (normalerweise) nicht *sprachlich* definiert. Man findet in einem reinen *Wörterbuch* nicht die Bedeutung von ‚Karl Popper', sondern nur im *Lexikon*, im Sinne einer „Sacherklärung". Dies liegt daran, dass eine solche Namengebung im Wesentlichen ein *persönlicher*, *individueller* Akt ist (die Eltern geben ihrem Kind einen Namen) und keine Bedeutungszuweisung in Regie der *Sprachgemeinschaft*. So ist z. B. die Bedeutung des Namens ‚Hans Georg Friedrich Michels' bei seiner Familie und seinen Freunden bekannt, nicht aber allgemein. Dennoch sind in einer Gesellschaft bestimmte Eigennamen von *Prominenten* in ihrer Extension bekannt. Eigennamen, deren Extension allgemein bekannt sind, sind außerdem z. B. Namen von Ländern, Gebirgen oder Flüssen wie ‚Rhein', ‚Mosel', ‚Lahn'.

Bei Namen von *unbekannten* Menschen, z. B. ‚Hans Günther Friedrich Michels', weiß also der normale Sprecher der deutschen Sprache nicht, wer damit gemeint ist. Auch hier benötigt man zu dem Namen eine Erklärung, Beschreibung o. ä., was bzw. wer die *Extension* dieses Namens ist; und grundsätzlich muss bei allen Sprachzeichen *zunächst* die Bedeutung, die Intension festgelegt werden.

0-2-4-3 INDIVIDUEN-VARIABLEN

1) *Formale, logische Sprache*

Beginnen wir wieder mit der Logik-Sprache: Als *Individuen-Variable* gelten ‚x', ‚y' usw. (jeweils ohne Index). Eine Struktur wie ‚Fx' wird in der Logik normalerweise als *offener Satz* oder *Satzform* (bzw. Satzfunktion, Aussageform) interpretiert, die *weder wahr noch falsch* ist. Eine solche Satzform kann durch 2 Arten in einen echten Satz überführt werden:

erstens, man *bindet* die Variable ‚x' durch Quantoren, z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

zweitens, man *ersetzt* die Variable durch eine Konstante, z. B. ‚x' durch ‚x_1': Fx_1

Aber wie definiert man ‚x'? Man kann *syntaktisch* festlegen, dass für ‚x' eine *Individuen-Konstante* eingesetzt wird, z. B. ‚x_1' oder ‚x_2', wodurch dann z. B. aus der *Satzform* ‚Fx' der *Satz* ‚Fx_1' entsteht. Aber dass ‚x' quasi nur als Leerstelle fungiert, ist keine echte, semantisch ausreichende Erklärung. Es muss ein *Definitionsbereich* (oder Individuenbereich) für ‚x' angegeben werden, aus dem dann Konstanten auszuwählen sind. Anders gesagt, ‚x' ist als *Zusammenfassung* von Konstanten zu bestimmen.

Dabei muss vor allem unterschieden werden, ob diese Zusammenfassung *konjunktiv* oder *disjunktiv* zu verstehen ist.

• *konjunktiv*: z. B. $x = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ / $Fx \leftrightarrow Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge Fx_3$, *allgemein*: $x = x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$

$Fx \leftrightarrow Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge Fx_3$ ist aber nur wahr, wenn alle Glieder wahr sind. Das ist für eine Variable ungeeignet, die ja wechselnd auf verschiedene Individuen angewendet wird.

• *disjunktiv*: z. B. $x = x_1 \vee x_2 \vee x_3$ / $Fx \leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee Fx_3$, *allgemein:* $x = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$

Hier ergibt sich aber folgendes Problem: Wie sich im Kapitel über Quantoren-Logik aber noch zeigen wird, gilt: $Vx(Fx) \Leftrightarrow Fx_1 \vee Fx_2 \vee ... \vee Fx_n$.

Somit würde gelten: $Fx \Leftrightarrow Vx(Fx)$. Und $Vx(Fx)$ bedeutet: ‚Es gibt mindestens ein x, für das gilt: es hat die Eigenschaft F'. Dies ist aber ein *Satz*, der durchaus wahr oder falsch ist.

Fazit: Es ist offensichtlich schwierig, eine klare *semantische* bzw. *logische* Definition einer Variablen zu finden. Die beste Lösung ist doch die *Disjunktion von Konstanten*. Wenn einem die genannten Probleme hierbei zu bedenklich scheinen, muss man sich notfalls doch mit der *syntaktischen* Definition der „Leerstelle" zufrieden geben.

2) *Normale Sprache*

Die Frage ist nun, was sich daraus für die *normale Sprache* ergibt. Wie ist die Individuen-Variable ‚x' normal-sprachlich zu verstehen? Generell ist 'x' hier zu übersetzen als *‚Objekt'* (‚Ding', ‚Gegenstand') o. ä. Dabei ist folgendes zu bedenken: In der normalen Sprache werden Individuen- und Klassen-Zeichen anders gehandhabt als in der logischen Sprache. In der formalen Sprache hat man die Individuen-Variable ‚x', auf die ein *Quantor* (z. B ‚Λ') angewandt wird und der dann *Prädikatoren* (Eigenschafts- oder Klassen-Ausdrücke wie ‚F') zugeordnet werden, z. B. Λx(Fx).

In der normalen Sprache werden aber Klassen-Ausdrücke (bzw. Eigenschafts-Ausdrücke) selbst *quantifiziert*, dabei jedoch *individualisiert*. Diesen Klassen-Ausdrücken werden andere Klassen-Ausdrücke zugeordnet. Z. B. ‚Alle Menschen sind sterblich'. Der Quantor „alle" richtet sich hier auf den Klassenausdruck ‚Mensch'. Dann wird ‚Mensch' der Eigenschafts-Ausdruck ‚sterblich' zugeordnet. In diesem Zusammenhang ist es auch keineswegs trivial, ob ‚Objekt' als Individuums-Zeichen oder Klassen-Zeichen zu verstehen ist (vgl. unten).

Dennoch will ich hier für ‚x' ‚Objekt' einsetzen, weil das noch am ehesten der formalen Sprache entspricht; Varianten sind: x = Objekt, x = das (dieses) Objekt, x = irgendein Objekt.

Fassen wir die Aussagen über *Individuen-Konstanten* und *-Variablen* noch mal zusammen:

1. <u>normal-sprachlich</u>
 - *Konstanten*: ‚Sokrates', ‚Platon'
   konstanter Satz: ‚Sokrates ist Philosoph'
 - *Variablen*: ‚Objekt' (der Status von Individuen-Variablen ist hier problematisch)
   variabler Satz: ‚Objekt ist Philosoph'
   ggf. ‚Sokrates oder Platon oder Aristoteles oder anderes Objekt ist Philosoph'

2. <u>logik-sprachlich</u>
 - *Konstanten*: ‚x_1, x_2, x_3' usw., allgemein ‚x_i' bzw. ‚y_i' (keine echten Konstanten)
   konstanter Satz: ‚x_1 ist Philosoph'
 - *Variablen*: ‚x', ‚y'
   Satzform: *ungebundene* Variable: ‘x ist Philosoph'
   variabler Satz: *gebundene* Variable: z. B. ‚Vx(x ist Philosoph)'

0-2-4-4 KLASSEN-ZEICHEN BZW. EIGENSCHAFTS-ZEICHEN

1) *Formale, logische Sprache*
Als Klassen- bzw. Eigenschafts-Zeichen verwendet man in der Logik überwiegend:
‚F', ‚G', ‚H' bzw. ‚F_1', ‚F_2' usw.
Man kann differenzieren zwischen Klassen ‚K(F)' und Eigenschaften ‚E(F)'.

Genau wie bei den *Individuen-Zeichen* gilt auch hier: Letztlich kann die *formale* logische Sprache prinzipiell keine echten Konstanten besitzen, weil sie eben formal ist und nicht inhaltlich bestimmt (die Argumentation braucht nicht noch einmal wiederholt werden).

Ich verstehe die obigen Zeichen also zunächst als *Variablen*. Aber sollten sie in einem Kontext als *Konstanten* verstanden werden, will ich dies nicht durch zusätzliche Indizes wie in ‚F_i', ‚F_j' verkomplizieren. Auch ‚F_1', ‚F_2' sind offen für beide Interpretationen, als Konstanten und Variablen. Ggf. kann man Zeichen wie ‚Mn' (mit der Bedeutung ‚Mensch') verwenden, wenn es notwendig sein sollte, sie als Konstanten auszuweisen.

Es ist aber für die Logik gar nicht so wesentlich, ob man mit Konstanten oder mit Variablen als *deskriptiven* Zeichen arbeitet. Die *Unterscheidbarkeit* ist wichtig, ich muss nicht wissen, welche Bedeutung ‚x_1' und ‚x_2' haben, es reicht, dass ich sie *unterscheiden* kann.

2) *Normale Sprache*
Hier sind die Verhältnisse komplizierter. So ist die Abgrenzung zwischen *Individual*-Zeichen und *Klassen*-Zeichen nicht eindeutig. Z. B. ist ‚Mensch' primär ein *Klassen-Zeichen* (bzw.

Eigenschafts-Zeichen), denn ‚Mensch' bezeichnet die Klasse der Menschen (oder die Eigenschaft „Mensch"). Aber man kann ‚Mensch' quasi wie eine *Individuums*-Variable verwenden. ‚Mensch ist sterblich' sei die *Satzfunktion*. Durch Einsetzen von z. B. ‚Platon' erhalte ich den wahren Satz: ‚Platon ist sterblich'. Andererseits kann man auch durch Quantifizierung von ‚Mensch' einen Satz erzeugen: ‚Für alle Menschen gilt: sie sind sterblich'.

Auch die Abgrenzung von *Konstanten* und *Variablen* bereitet Probleme. Z. B. in der *Satzform* ‚x ist ein Mensch' fungiert ‚x' als Variable und ‚Mensch' als Konstante. Aber ich schon oben gezeigt habe: man kann ‚Mensch' auch wie eine Variable verwenden, denn ‚Mensch' lässt sich ja auf ganz unterschiedliche Individuen anwenden, auf Sokrates, Platon usw. Das gilt offensichtlich generell in der normalen Sprache. Zunächst kann man darauf hinweisen: Es gibt Zeichen *unterschiedlicher Bestimmtheit*, z. B. das Wort ‚Lebewesen' hat weniger Merkmale (kleinere Intension) als der Begriff ‚Pflanze', bezieht sich aber in der Wirklichkeit auf mehr Objekte (größere Extension). So gesehen ist ‚Lebewesen' in größerem Ausmaß eine Variable als ‚Pflanze', denn es ist vieldeutiger. So könnte man eine *Kette unterschiedlicher Variabilität* aufstellen, z. B. ergibt sich folgende Reihenfolge: Lebewesen – Pflanze – Blume – Rose. ‚Lebewesen' ist unbestimmter als ‚Pflanze' usw.

0-2-4-5 QUANTITATIVE THEORIE DER BESTIMMTHEIT

Sowohl in der Logik wie in der normalen Sprache gibt es (in unterschiedlicher Weise) keine eindeutige und klare Abgrenzung von Konstanten und Variablen. Entsprechend steht eine wirklich präzise Theorie von Konstanten versus Variablen noch aus.

Bei einer solchen Theorie müsste es um eine Relativierung des Unterschiedes von Konstante und Variable, zugunsten einer *quantitativen* Theorie der *Bestimmtheit*. Ist ein Objekt bzw. ein Zeichen *total bestimmt* (reine Konstante) oder wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? Bei *unendlichen vielen* Möglichkeiten ist es *absolut variabel*. Allerdings geht es dabei um die *wechselnde* Verwendung, eine Klassen-Konstante bezeichnet die Klasse als Ganze – mit vielen Elementen –, sie bleibt dennoch eine Konstante.

Eine *quantitative Formel* von Konstanz bzw. Variabilität könnte folgendermaßen aussehen:

p(Konstanz) = 1/n.

Dabei ist n die *Anzahl von Bedeutungen*, für die das Zeichen alternativ/wechselnd stehen kann. Nur bei p(Konstanz) = 1 liegt im strengen Sinn eine *Konstante* vor.

Veranschaulichen wir uns das an der Individuen-Variablen ‚x':

Variable	Bedeutung	p(Konstanz)
‚x'	x_1	1/1 = 1
	x_1, x_2	1/2 = 0,5
	x_1, x_2, x_3	1/3 = 0, 33
	x_1, x_2, x_3, x_4	1/4 = 0,25
	....	
	$x_1, x_2, \ldots, x_n$	1/n
	$x_1, x_2, \ldots$	$1/\infty \approx 0$ (oder: $1/\infty = 0$)

0-2-5 Relationen

0-2-5-1 LOGISCHE RELATIONEN

Relationen sind neben *Objekten* (bzw. Eigenschaften) die zweite Basiskomponente der Logik. Relationen sind Beziehungen, Verhältnisse zwischen zwei oder mehr Entitäten.

• *Extensionale und intensionale Relationen*
– *extensional*:
atomar: Relationen zwischen *Objekten*, also zwischen Individuen, Mengen/Klassen
molekular: Relationen zwischen *Objekt-Relationen*
– *intensional*:
atomar: Relationen zwischen *Eigenschaften*
molekular: Relationen zwischen *Eigenschafts-Relationen*
– *gemischt extensional-intensional*:
atomar: Relationen zwischen Objekten und Eigenschaften
molekular: Relationen zwischen *gemischten Relationen*

• *Relationen versus Objekte*: Relationen sind einerseits klar von *Objekten* zu trennen. Relationen bzw. Strukturen, z. B. Aussagen, sind wahr oder falsch, von Objekten kann man dagegen nicht sagen, sie sind wahr oder falsch (jedenfalls nach üblicher Deutung). Andererseits haben wir gesehen: Ein Objekt ist ein Träger, der bestimmte Eigenschaften „trägt". Dies heißt aber nichts anderes, als dass der *Träger in Relation zu diesen Eigenschaften* steht. Insofern geht der Begriff der Relation also schon in die Definition des Objekts ein. Nur wenn man von *formalen* Objekten ausgeht, sind diese ohne direkten Rückgriff auf Relationen zu fassen.

Die gleiche Thematik hatte man schon bei Objekten und Eigenschaften. *Inhaltlich* bestimmte Objekte enthalten bereits Eigenschaften, nur *formale* Objekte sind frei von Eigenschaften.

Dass sich hier – bei inhaltlicher Deutung – gewisse Überschneidungen zwischen den Grundbegriffen ergeben, sehe ich aber nicht als echtes Problem. Es verweist darauf, dass es sich bei Objekten, Eigenschaften und Relationen um Komponenten eines *Systems* handelt.

• *Ebene der Relation*: sprachlich = Aussage/Satz, psychisch = Urteil, real = Sachverhalt. Logische Relationen enthalten aber in keinem Fall *räumliche*, *zeitliche*, *kausale* oder andere reale Komponenten. So besteht bei der *Implikation* $X \rightarrow Y$ oder dem *Schluss* $\Phi \Rightarrow \Psi$ *keine zeitliche Folge*. Sondern es geht bei ihnen nur um (quantitatives) *Enthaltensein*, *gemeinsames Auftreten, funktionale Abhängigkeiten* o. ä. Das wird noch genauer erläutert werden.

• *Logische und hyper-logische Relationen*
– *Hyper-logische* Relationen sind z. B. *kausale* Wirkung, *räumliche* Nähe, *zeitliche* Folge, *Zielgerichtetheit* usw.
– *Logische Relationen* liegen *hyper-logischen* (über-logischen) Relationen wie z. B. *Kausalität* zugrunde. Das heißt, die kausalen Ursache-Wirkungs-Relation hat eine logische Struktur, es kommen aber noch andere Komponenten hinzu, etwa der Faktor Zeit – die Ursache geht der Wirkung zeitlich voraus.

Dennoch muss man logische Relationen nicht auf *abstrakte* Objekte beziehen, logische Relationen bestehen sehr wohl auch zwischen raum-zeitlichen Objekten.

• *Definition einer Relation*
Man kann für eine *logische Relation* schreiben:

X R Y. Soll heißen: X steht zu Y in Relation.
Alternative Schreibweise: R(X,Y)

Will man auf eine *bestimmte* Relation verweisen, kann man schreiben: $R_i(X,Y)$

Nehmen wir als Beispiel die Relation $X \rightarrow Y$.
Genauer kann man unterscheiden:

$X \to Y$	*Relationssystem* bzw. *Struktur* (das Ganze)
X, Y	*Relata*
$\to$	*Relation* (die Beziehung)
‚$\to$'	*Relator* (das Zeichen)

Noch allgemeiner wäre zu schreiben R(Φ,Ψ), wobei Φ und Ψ für beliebige Entitäten stehen können.

Der Terminus '*Relationssystem'* (oder ‚*Relationsgefüge'*) ist recht sperrig. Ich nutze daher vorwiegend zwei Alternativen:
- Wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, verwende ich 'Relation' auch für $X \to Y$ und nicht nur für die *eigentliche* Relation $\to$.
- Oder ich verwende (wie gesagt) für das Relationssystem $X \to Y$ den Terminus 'Struktur'.

• *Subjekt und Prädikat*: Herkömmlich unterscheidet man in einem Satz zwischen *Subjekt* und *Prädikat*. Man könnte diese Unterscheidung auch auf eine Relation beziehen. Nur ist diese Unterscheidung primär eine *pragmatische*: man wählt eine Entität als diejenige aus, *über die* man etwas aussagt (Subjekt), indem man ihr etwas anderes zuordnet (Prädikat).

Aber in einer Relation X R Y ist es logisch gesehen nicht von Relevanz, welches Relat man als Subjekt oder Prädikat auswählt. Es ist logisch gleichgültig, ob man z. B. formuliert:

„X ist Vorfahre von Y" (X = Subjekt) Oder: „Y ist Nachfahre von X" (Y = Subjekt).

Es liegt dieselbe Relation zugrunde. Es recht gilt das bei primär logischen Strukturen wie „$X \to Y$". Diese ist logisch äquivalent mit „$Y \leftarrow X$".

0-2-5-2 RELATOREN

Logische Relationen werden formal durch *Relatoren* ausgedrückt. Es gibt Relatoren der *Prädikaten-Logik* wie ‚$\in$', der *Klassen-Logik* wie ‚$\subset$', am wichtigsten sind aber die Relationen der *Aussagen-Logik*. Bei 2 Aussagen X, Y sind 16 Relatoren bzw. Relationen gegeben. Sinnvoller ist allerdings, von der Zahl 14 (für synthetische Relationen) auszugehen, wie noch zu zeigen sein wird. Die vollständige Liste aller Relatoren wird später gebracht.

Die wichtigsten Relatoren sind:

• Konjunktion	und	formal: $\wedge$	$X \wedge Y$
• Disjunktion	oder (inklusiv)	formal: $\vee$	$X \vee Y$
• Kontravalenz	oder (exklusiv)	formal: ><	X >< Y
• Exklusion	oder (nicht beide)	formal: |	X | Y
• Implikation	wenn – dann	formal: $\to$	$X \to Y$
• Äquivalenz	nur wenn – dann	formal $\leftrightarrow$	$X \leftrightarrow Y$

Ich unterscheide dabei 3 *oder*-Relationen:

• *Disjunktion* (*subkonträrer* Gegensatz)

Die Disjunktion $X \vee Y$ schließt – als Möglichkeit – ein, dass X und Y beide positiv sind. Die Disjunktion ist deshalb *inklusiv*.

• *Kontravalenz* (*kontradiktorischer* Gegensatz)

Die Kontravalenz X >< Y meint „entweder – oder": nicht beides und nicht beides nicht. Sie schließt also aus, dass X und Y positiv sind, ich bezeichne sie daher als *exklusiv*. Als Symbol für die Kontravalenz nehme ich das ><, quasi ein umgekehrtes Äquivalenz-Zeichen $\leftrightarrow$ (denn die Kontravalenz ist die Umkehrung der Äquivalenz).

• *Exklusion* (*konträrer* Gegensatz)

Es gibt einen dritten Relator, den man auch zuweilen mit „oder“ übersetzt. Dieses „oder“ schließt nur aus, dass X und Y beides gilt. Als Symbol dient der „Sheffer Strich“: X | Y. Man nennt ihn meistens „*Exklusor*“ und die dazu gehörige Relation „Exklusion“. Diese Bezeichnung ist leider sehr unglücklich, denn unter exklusivem „oder“ versteht man üblicherweise die Kontravalenz.

Eine Sonderrolle spielt die *Negation* mit dem Negator $\neg$. Dadurch wird eine *positive* Relation (ein wahrer Satz) X in eine *negative* Relation (einen negierten bzw. falschen Satz) $\neg$X umgewandelt.

0-2-5-3 RELATIONEN UND VERKNÜPFUNGEN

Für die *Implikation* „wenn - dann“ ist die Bestimmung als *Relation* unproblematisch. Aber Termini wie „und“ (Konjunktion) bzw. „oder“ (Disjunktion) sind nicht direkt als Relationen erkennbar.

Von daher ist es verständlich, dass die Logik überwiegend nicht von Relationen ausgeht, sondern von *Verknüpfungen*. Darauf verweist auch der Begriff *Junktor* (von lat. jungere = verbinden), welcher in der Logik überwiegend anstatt ‚Relator’ verwendet wird. Denn als Verknüpfungen sind alle logischen Verbindungen, also auch die Implikation, gut zu interpretieren. Und da die moderne Logik sich eben primär auf Aussagen bezieht, geht man von der *Verknüpfung von Aussagen* aus. Aber wo bleiben dann die Relationen?

Angenommen, wir bestimmten die Konjunktion $X \wedge Y$ als *Verknüpfung* und die Implikation $X \rightarrow Y$ als *Relation*. Nun lässt sich aber die Konjunktion $X \wedge Y$ (Verknüpfung) in eine Implikation umformen, nämlich in $\neg(X \rightarrow \neg Y)$, also in eine Relation. Das ist natürlich noch kein Beweis für den Vorrang der Relation, denn umgekehrt kann man auch $X \rightarrow Y$ (Relation) in eine Konjunktion (Verknüpfung) umwandeln, nämlich in $\neg(X \wedge \neg Y)$. Aber es zeigt, dass die Konjunktion und die Implikation logisch auf *einer* Ebene liegen.

Ich halte den Ansatz der *Relation* für sehr viel fundierter. Der Ansatz der Relation wird besser verständlich, wenn man sich klar macht: Bezogen auf Aussagen bedeutet die Konjunktion $X \wedge Y$: „Die Aussagen X und Y sind *zusammen* wahr“. Daran wird deutlich, dass ein Verhältnis, also eine Relation zwischen X und Y besteht.

Dennoch mag man informell auch den Begriff der Verknüpfung verwenden, vor allem für komplexe Relationen wie $(X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y)$.

Wenn man aber ganz präzise vorgeht, sollte man unterscheiden:

- *Verknüpfungen*

  Dies sind Verknüpfungen von *Mengen* wie Schnitt-Menge oder Vereinigungs-Menge (bzw. die entsprechenden Operatoren $\cap$ und $\cup$).

  Mengen-Verknüpfungen wie $M \cap N$ oder $M \cup N$ sind wiederum Mengen, sie sind daher *nicht* wahr (positiv) oder falsch (negativ).

- *Relationen*

  Diese betreffen alle „Junktoren“ bzw. Relatoren der Logik ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ usw.) sowie Relatoren der Mengenlehre ($\subset$, $\supset$, = usw.). Sie sind wahr (positiv) oder falsch (negativ).

0-2-5-4 WAHRHEITS-TAFELN

Die Relationen (Relatoren) werden durch *Wahrheitswerte* bzw. eine *Wahrheitswerte-Tafel*, kurz: *Wahrheitstafel*, definiert. Dabei wird von Aussagen ‚A’ und ‚B’ usw. ausgegangen, die *wahr* (w) oder *falsch* (f) sein können. Ich wähle aber die *neutrale* Form ‚X’ und ‚Y’. Und anstatt *w* oder *f* schreibe ich neutral + oder –.

Generell kann man sagen: Eine logische Komponente X bzw. Y ist:

gültig (+) Alternativen: *belegt*, *positiv*
ungültig (–) Alternativen: *nicht belegt*, *negativ*

Ich schränke den Begriff ‚gültig' / ‚ungültig' also nicht auf logische Schlüsse bzw. *logische, analytische* Wahrheit ein, wie dies sonst oft geschieht.

In der Wahrheitstafel werden die *möglichen Welten* angegeben. Bei 2 Relata (bzw. 2 Aussagen oder 2 Variablen) X und Y ergeben sich $2^2 = 4$ *mögliche Welten* oder *logische Welten*: D. h. es wird angeben, welche *Kombinationsmöglichkeiten* von X und Y es gibt:

$$X \wedge Y,\ X \wedge \neg Y,\ \neg X \wedge Y,\ \neg X \wedge \neg Y$$

Dann wird angegeben, bei welchen dieser Möglichkeiten, in welcher dieser Welten, der betreffende Relator (bzw. die Relation) als gültig gilt.

Für die Implikation X→ Y ergibt sich folgende Wahrheitstafel:

X	→	Y		oder	X	Y	→
+	+	+			+	+	+
+	–	–			+	–	–
–	+	+			–	+	+
–	+	–			–	+	–

Die wichtigste Deutung der Wahrheitstafel ist: Man schließt von X und Y auf X → Y. Also z. B.: Wenn X, Y gültig sind (X+, Y+), dann ist auch X → Y bzw. → gültig (+) usw.

Aber insgesamt sind folgende Deutungen der Wahrheitstafel möglich:

- Man schließt von X,Y auf X → Y
- Man schließt von X auf X → Y
- Man schließt von Y auf X → Y
- Man schließt von X →Y auf X,Y
- Man schließt von X → Y auf X
- Man schließt von X → Y auf Y

X → Y ist also in 3 Welten belegt bzw. wahr. Diese Welten sind hier durch folgende Parameter gekennzeichnet X ∧ Y, ¬X ∧ Y, ¬X ∧ ¬Y. Das darf man nun nicht so verstehen, dass diese drei (bzw. sogar alle vier) Welten nebeneinander bestehen. Nur *eine* Welt ist *real*, die anderen drei sind zwar theoretisch möglich, aber *irreal*. Es ist unmöglich, das auch nur 2 dieser Welten nebeneinander bestehen, denn sie sind alle zueinander *kontradiktorisch*.

Z. B. ist die *Kombination*, also die *Konjunktion* (X ∧ Y) ∧ (X ∧ ¬Y) kontradiktorisch, und das gilt auch für alle anderen Kombinationen; wenn man nur die *2er*-Kombinationen berücksichtigt, dann gibt es 7 Kombinationen, diese stehen alle für *unmögliche* Welten.

Denkbar ist nur, dass man den *Geltungsbereich* der verschiedenen Welten einschränkt, vor allem:

- *zeitlich*: zum *jetzigen Zeitpunkt* gilt die Kombination Φ (z. B. X ∧ Y), aber zu einem *anderen Zeitpunkt* gilt die Kombination Ψ (z. B. ¬X ∧ ¬Y). Diese zeitliche Einschränkung bzw. Differenzierung ist die wichtigste.
- *räumlich*: an einem *Ort* (z. B. dem Ort o_i) gilt die Kombination Φ, aber an einem anderen Ort (z. B. dem Ort o_j) gilt die Kombination Ψ.
- *konditional*: unter der einen *Bedingung* gilt die Kombination Φ, aber unter einer anderen Bedingung gilt die Kombination Ψ.

Als wichtigste Relationen hatte ich genannt: X ∧ Y, X ∨ Y, X >< Y, X / Y, X → Y, X ↔ Y

Die *Wahrheitswertetafeln* für die entsprechenden Relatoren sind:

X	Y	$\wedge$	$\vee$	><	/	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
+	+	+	+	–	–	+	+
+	–	–	+	+	+	–	–
–	+	–	+	+	+	+	–
–	–	–	–	–	+	+	+

0-2-5-5 DIE POSITIV-IMPLIKATION

Die Implikation wirft verschiedene Probleme auf, sie führt zu *paradoxen* Ergebnissen und sie entspricht auch nicht unserem *normalen Sprachgebrauch* (genauer dazu später in 1-1-1-2).

Gehen wir von folgendem einfachen Beispiel aus:
„Wenn es regnet, ist die Strasse nass". Mit dem Implikations-Pfeil $\rightarrow$ geschrieben:
„Es regnet $\rightarrow$ Die Strasse ist nass"

Es regnet	$\rightarrow$	Die Strasse ist nass
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	+	–

Die Implikation X $\rightarrow$ Y ist also auch gültig (+), wenn das Vorderglied X ungültig (–) ist. Danach ist die Beispiel-Relation auch gültig, wenn es nicht regnet, egal, ob die Strasse nass ist oder nicht. Konkret, die Gesamtstruktur „Es regnet $\rightarrow$ Die Strasse ist nass" könnte sogar gültig sein, wenn es niemals regnet und die Strasse immer trocken bleibt. Das entspricht sicher nicht der Bedeutung des Satzes, wie wir ihn in *normaler Sprache* verwenden.

Aber unabhängig von diesem Beispiel, die Definition der Implikation X $\rightarrow$ Y entspricht *generell* nicht der Deutung von *Wenn-dann-Sätzen* in der normalen Sprache. Denn die *normal-sprachliche* Implikation gilt nicht als wahr, wenn der Vordersatz (X) falsch ist. Um normal-sprachliche Strukturen (Sätze) zu formalisieren, bietet sich daher eine andere Implikation an.

Doch die Implikation ist nicht nur problematisch im Hinblick auf die *normale Sprache*, sondern sie führt auch *innerhalb der Logik* zu *Paradoxien*, wenn man sie als *Folge-Beziehung* interpretiert). Dies gilt für *synthetische* Implikationen wie X $\rightarrow$ Y und für *analytische* Implikationen (Schlüsse) wie X $\Rightarrow$ X. Da aus einem *falschen* Vorder-Satz die Wahrheit des Gesamt-Satzes folgt, kann man $\neg$X $\Rightarrow$ (X $\rightarrow$ Y) schreiben. Wenn nun der Vorder-Satz nicht nur einfach ein falscher Satz ist, sondern ein *kontradiktorischer*, d. h. *logisch falscher* Satz, dann kann man aus diesem Satz *jeden beliebigen anderen Satz* logisch ableiten, wie später noch genau gezeigt werden soll. Man kann aus einem kontradiktorischen Satz sogar sein *eigenes Gegenteil* logisch ableiten, z. B. (X $\wedge$ $\neg$X) $\Rightarrow$ $\neg$(X $\wedge$ $\neg$X). Dies ist nicht gerade erwünscht in der Logik. Man könnte daher fordern, dass ein Schluss aus einem *falschen* oder sogar *kontradiktorischen* Vorder-Satz „verboten" sei, so wie in der Mathematik z. B. die *Division durch die Zahl 0* verboten ist, weil sie zu paradoxen Ergebnissen führt.

Da aber eine Implikation, die für *alle* Welten definiert ist – einschließlich derjenigen, in den der Vorder-Satz falsch ist – auch Vorteile hat, ist es sinnvoller, man *ergänzt* die normale Implikation durch eine andere Implikation, in der die geschilderte Problematik nicht auftritt.

Positiv-Implikation
Ich nenne diese andere Implikation ‚*Positiv-Implikation'* und verwende das *Symbol* *→, für die *Gesamt-Relation* X *→ Y. Es wird also der Pfeil → der normalen Implikation genommen und ein Stern * davor gesetzt. Man kann sie auch kurz *Implikation schreiben.

Der Name erklärt sich wie folgt: Die Positiv-Implikation ist nur für die Fälle definiert, in denen das Vorderglied gültig, also *positiv* (+) ist.

Die Positiv-Implikation wird in 2 Varianten eingeführt:

1)

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–

2)

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–
–	□	+
–	□	–

1) *verkürzte* Form
Im ersten Fall werden nur die 2 Welten in der Wahrheitstafel *aufgeführt*, in denen die Positiv-Implikation definiert ist, also in denen das Vorderglied (der Vordersatz) X positiv (+) ist.
2) *vollständige* Form
Im zweiten Fall werden zwar alle 4 Welten genannt, aber in den zwei Welten, in denen der Wenn-Satz falsch ist, bleibt der Wert der Relation *undefiniert* (Symbol □).

Beide Varianten der Positiv-Implikation haben ihre Vorteile, ich verwende sie alternativ, mit dem gleichen Symbol, um nicht unnötig neue Symbole einzuführen. Dazu ein *Beispiel*:

Es regnet	*→	Die Strasse ist nass
+	+	+
+	–	–
–	□	+
–	□	–

Hier zeigt sich also: Wenn der Vordersatz falsch ist, wenn es also nicht regnet, dann ist der Wahrheitswert des Satzes *nicht definiert*, man kann seinen Wahrheitswert nicht angeben.

Generell gilt: Die oben aufgezeigten Paradoxien treten bei der Positiv-Implikation nicht auf, weil ein Schluss von einer *negierten* oder *kontradiktorischen* Prämisse aus *undefiniert* bzw. *unbestimmt* ist, wie noch im Einzelnen gezeigt werden wird.

Beide Implikationen X → Y und X *→ Y haben ihre Berechtigung. Für die *normale Implikation* X → Y spricht: Es ist aus systematischen Gründen sinnvoll, die Implikation in *allen* möglichen (d. h. bei 2 Variablen = 4) Welten zu definieren, und eine andere Deutung der Wahrheitswerte bietet sich auch nicht zwingend an. Nur so lässt sich die Implikation problemlos in andere Junktoren umformen, die auch für 4 Welten definiert sind.

Man kann es auch so ausdrücken: Die normale Implikation X → Y ist, wie alle aussagenlogischen Relatoren, *streng wahrheitswert-funktional*, ihr Wahrheitswert ist eine *vollständige* Funktion der Wahrheitswerte der Teile X und Y. Dagegen ist die Positiv-Implikation nur *eingeschränkt wahrheitswert-funktional*, es wird nur für zwei von vier Welten ein Wahrheitswert für X *→ Y angegeben. Das Verhältnis dieser beiden Implikationen → und *→ wird uns im ganzen Text immer wieder beschäftigen.

0 – 3 EXTENSION UND INTENSION

Die Begriffe ‚*Extension'* und ‚*Intension'* sind schon mehrfach verwendet worden, sie sollen hier aber genauer erläutert untersucht werden. Die Verhältnisse von Extension und Intension scheinen auf den ersten Blick ziemlich einfach, und so werden sie auch in der Literatur meistens dargestellt. Bei genauerer Analyse erweisen sie sich aber – leider – als äußerst komplex; und so muss eine adäquate Darstellung auch ziemlich kompliziert ausfallen,

Die Unterscheidung *Extension - Intension* findet sich, mit unterschiedlicher Terminologie, in fast jeder Logik, und zwar bei allen *drei* genannten Ansätzen, z. B. in folgender Weise:

- Modell *Psyche*: Extension = der Umfang, Intension = der Inhalt (z. B. eines Denkbegriffs)
- Modell *Realität*: Extension = Objekte (bzw. Relationen zwischen Objekten), Intension = Eigenschaften (bzw. Relationen zwischen Eigenschaften)
- Modell *Sprache*: Extension = (Umwelt-)Referent, Intension = der Sinn.

Verwandte Begriffe sind:

Extension = das Bezeichnete, *Denotat, Referenz* (engl. reference)
Intension = das Bedeutete, *Signifikat*, *Bedeutung* (engl. meaning)

Bedeutung kann allerdings auch als Oberbegriff (für Extension und Intension) dienen.

Am häufigsten geht man – meta-sprachlich – von der *Sprache* aus, fragt also nach der Extension / Intension von *Zeichen* bzw. *Sätzen*. Dies halte ich hier auch so.

Danach sind Extension und Intension Arten von *Bedeutung*. Nun kann sich Bedeutung – in der normalen Sprache – wiederum auf die drei oben genannten Bereiche *Psyche*, *Realität* und *Sprache* beziehen, es lassen sich also psychische, reale und sprachliche Bedeutung unterscheiden – bzw. eine *neutrale* Bedeutung, die aber der realen am nächsten steht.

Die Intension wird zwar oft auch als *Sprachgebrauch* bzw. *Regeln* des Sprachgebrauchs bestimmt, dies ist aber m. E. nur eine Zwischenerklärung, die letztlich doch wieder Bezug auf Objekte, Eigenschaften o. ä. nehmen muss.

Ich ziehe vor, Extension und Intension als *reale* oder realistische bzw. neutrale Bedeutung auffassen. Somit beziehen sie sich auf Objekte, Eigenschaften oder Relationen.

Ehe wir in die komplizierte Materie einsteigen, zunächst eine *Übersicht*.

1. Extension und Intension eines *Zeichens* (oder eines Wortes)
   - Extension: *Objekte* (Individuen bzw. Klassen)
   - Intension: *Eigenschaften* (welche diese Objekte bestimmen)

2. Extension und Intension eines *Satzes* (oder eines Zeichengebildes)
   - Extension: *Sachverhalte* = *Relationen zwischen Objekten* wie Individuen, Klassen (und komplexe Relationen zwischen Sachverhalten)
   - Intension: „*Begriffsverhalte*" = *Relationen zwischen Begriffen* bzw. *Eigenschaften* (und komplexe Relationen zwischen Begriffsverhalten)

Basis ist die Bestimmung der Extension und Intension von *Zeichen* bzw. *Wörtern*. Darauf gehe ich zunächst ein.

0-3-1 Intension von Zeichen

0-3-1-1 BEGRIFF VERSUS EIGENSCHAFT

Die *Intension* von Zeichen sind *Eigenschaften.* Anstatt '*Eigenschaft'* könnte man auch '*Begriff'* sagen. Das Wort 'Begriff' ist aber sehr vieldeutig. Man kann zumindest unterscheiden zwischen dem *Sprach-Begriff* im Sinne von *Wort* bzw. Terminus und dem *Denk-Begriff* sowie dem *Real-Begriff.* Obwohl es aus Gründen der Eindeutigkeit vorzuziehen wäre, ‚Begriff' nur in *einer* Bedeutung zu verwenden, verwende ich 'Begriff' doch in mehrfacher Weise, weil der Begriff ‚Begriff' eben kaum vermeidbar ist, wenn man nicht ständig ‚Eigenschaft' wiederholen will. Normalerweise dürften dabei keine gravierenden Missverständnisse auftreten.

Man kann ‚Eigenschaft' und ‚Begriff' weitgehend *synonym* verwenden. Allerdings besteht insofern ein Unterschied, dass man mit ‚Eigenschaft' meistens eine *einfache Qualität* meint, z. B. die Farbe, mit ‚Begriff' aber auch eine *komplexe Qualität*, also ein *System von Eigenschaften*. So ist es im Grunde adäquater, von dem Begriff „Mensch" anstatt von der Eigenschaft „Mensch" zu sprechen. Oder wenn man z. B. einen bestimmten Menschen begrifflich kennzeichnen will, spricht man besser von ‚Individual-Begriff' als von ‚Individual-Eigenschaft', denn darunter stellt man sich eher eine einzelne Eigenschaft vor als etwa den Gesamtbegriff „Sokrates". Auch wenn ich von ‚Begriff' spreche, verwende ich aber als Abkürzung bzw. Symbol ‚E', z. B. ‚E(Mensch)', damit es nicht zu Verwechslungen kommt, denn das Symbol ‚B' wird (wie ‚A') gerne für Aussagen verwendet.

0-3-1-2 INTENSION VON INDIVIDUATOREN

Ein Individuator (Synonyme sind: Individuum-Zeichen, Individuen-Zeichen bzw. Individual-Zeichen) ist ein *Eigenname* (wie ‚Sokrates'), eine *singuläre Kennzeichnung* wie (‚der Begründer der sokratischen Methode') o. ä.

Die Intension eines *Individuators* ist zunächst eine *Individual-Eigenschaft* bzw. ein *Individual-Begriff.* Dabei geht man davon aus, dass *jeder* Individual-Begriff einzigartig ist (wie jedes Individuum). Bei einem *realistischen* Ansatz, wie hier vertreten, muss allerdings auch bei der intensionalen Bestimmung letztlich auf das *Individuum* (Objekt) Bezug genommen werden, denn Eigenschaften ohne Objekte gibt es real nicht. Der *Individual-Begriff* ist der *ganzheitliche* Begriff, welcher das entsprechende Individuum *wesentlich* bestimmt.

Nun können wir die Bestimmung der Intension über zumindest 2 *Stufen* vollziehen, z. B.:

1. *Stufe*: Intension(‚Sokrates') = E(Sokrates)
2. *Stufe*: Intension(‚Sokrates') = E(Philosoph $\cup$ Begründer der sokratischen Methode u. a.)

Diese beiden Stufen sind logisch und semantisch sehr unterschiedlich, wie sich zeigen wird.

1. Stufe: Intension(Individuator) = Individual-Begriff
Beispiel: Intension(‚Sokrates') = E(Sokrates)

Die Intension des *Eigennamens* ‚Sokrates' auf der 1.Stufe ist der *Individuum-Begriff* „Sokrates". *Adjektivisch* formuliert: Intension(‚Sokrates') = E(sokratisch).

D. h. der *Individual-Begriff* „Sokrates" ist der *einzelne* Begriff, die *Gesamt*-Eigenschaft, welche Sokrates wesentlich bestimmt.

Obwohl hier Sokrates die Eigenschaft „sokratisch" als *wesentlich* zugesprochen wird, macht man auf der *1. Stufe* keine Aussage über das *Wesen* des Sokrates, macht im Grunde gar keine Aussage über ihn. Sondern es handelt sich um eine generelle sprachliche *Festlegung*, dass ein *Individuum* durch den entsprechenden Individual-Begriff wesentlich bestimmt wird.

Als Abkürzung für ‚Eigenschaft' oder ‚Begriff' verwende ich wie gesagt ‚E'.

Halb formal: Intension(‚Sokrates') = E(Sokrates) Formal: Intension(‚x_i') = E(x_i)

2. *Stufe*: Intension^2(Individuator) = wesentliche, definierende Eigenschaften des Individuums
Beispiel: Intension^2(‚Sokrates') = E(Philosoph ∪ Begründer der sokratischen Methode ...)
Um die 2. Stufe zu kennzeichnen, kann man eine *hochgestellte* 2 verwenden.

Auf der 2. Stufe werden mehrere – mindestens zwei – Eigenschaften angegeben, die den Namen ‚Sokrates' bzw. den *Individual-Begriff* „Sokrates" *bestimmen*. Letztlich geht diese Bestimmung aber zurück auf die *wesentlichen Eigenschaften des Individuums* (Objekts) Sokrates. Hier, auf der 2. Stufe, werden *echte* Aussagen über das Wesen des Sokrates gemacht.

Natürlich kann die Intension auch *mehr als zwei* Eigenschaften umfassen, z. B. formal:

Intension(‚x_i') = E(F_1 ∪ ... ∪ F_i)

Aber eine solche *Wesensbestimmung* umfasst kaum mehr als etwa *10* Eigenschaften (1 bis i). Die *wesentlichen* Eigenschaften könnten bei Sokrates z. B. sein: Mensch, Philosoph, weise, Athener, Erfinder der sokratischen Methode, Geburts-Jahr 469 v. Chr., Todes-Jahr 399 v. Chr. Es sind – analog zur *klassischen Definitionslehre*, die sich allerdings nur auf Prädikatoren bezog – *allgemeine* Eigenschaften wie „Mensch" und *differenzierende* wie das Geburtsdatum.

Eine andere Möglichkeit ist, auf dieser *2. Stufe* nicht mehr von der *Intension* des Namens (sprachlich) auszugehen, sondern direkt von dem *Begriff* (real), also:

E(Sokrates) = E(Philosoph ∪ Begründer der sokratischen Methode ...)

Die Eigenschaften werden meistens in Form in Form einer Menge, insbesondere einer *Vereinigungs-Menge* angegeben: E(F_1 ∪ ... ∪ F_i). Dies kann als Abkürzung verstanden werden für E(F_1) ∪ ... ∪ E(F_i). Die Eigenschaften können auch als *Schnitt-Menge* angegeben werden.

0-3-1-3 INTENSION VON PRÄDIKATOREN

Prädikatoren sind *Klassen-Zeichen* bzw. Zeichen, die sich auf *Klassen-Begriffe* oder *Allgemein-Begriffe* beziehen, z. B. ‚Mensch' oder ‚Philosoph'.

In der logischen Sprache wird normalerweise kein Unterschied zwischen *Substantiven*, *Adjektiven* und *Verben* gemacht, dies alles sind *Prädikatoren*.

Die Intension eines Prädikators sind die *wesentliche Eigenschaft* bzw. die *wesentlichen Eigenschaften*, welche die entsprechende Klasse definieren. Wir bestimmen entsprechend zu der Darstellung bei den Individual-Begriffen die Intension von Prädikatoren über 2 Stufen.

1. Stufe: Intension(Prädikator) = Allgemein- oder Klassen-Begriff
Beispiel: Intension(‚Mensch') = E(Mensch)
Also die Intension des Prädikators ‚Mensch' auf der 1. Stufe ist der Allgemein-Begriff „Mensch", der *einzelne* Begriff, welcher die Klasse der Menschen wesentlich bestimmt.

2. *Stufe*: Intension^2(Prädikator) = wesentliche, definierende Eigenschaften der Klasse
Beispiel: Intension^2(‚Mensch') = E(Sinnenwesen ∪ vernünftig).
Diese Bestimmung erfolgt gemäß der klassischen philosophischen Definition, dass der Mensch ein *vernünftiges Sinnenwesen* (animal rationale) ist.

Auf der 2. Stufe werden also mehrere – mindestens zwei – Eigenschaften angegeben, die das Wort ‚Mensch' genauer definieren.

Eine andere Möglichkeit ist wie gesagt, auf dieser *2. Stufe* nicht mehr von der *Intension* (sprachlich) auszugehen, sondern direkt von dem *Begriff* (real), also:

E(Mensch) = E(Sinnenwesen ∪ vernünftig)

Aus Sicht der formalen Logik können wir, wie beschrieben, z. B. "Mensch", „Philosoph", aber auch „Sokrates" (sprachlich also *Substantive*) nicht nur als Objekte, sondern auch als *Eigenschaften* fassen. Es ist allerdings, in der normalen Sprache, verständlicher, Eigenschaften durch *Adjektive* darzustellen, so ist auch eine bessere Unterscheidung von Objekt und Eigenschaft möglich.

Das wäre nicht nur auf Eigennamen, sondern auch auf *Prädikatoren* anzuwenden. Z. B. ergäbe sich: Intension(‚Mensch') = E(menschlich) bzw. Intension(‚Mensch') = menschlich.

Aber es gibt in der Sprache nicht immer entsprechende Adjektive, z. B. gibt es für ‚Pferd' kein Adjektiv ‚pferdig'. Außerdem haben die Adjektive manchmal unerwünschte *Nebenbedeutungen*: z. B. Mensch – menschlich, Mann – männlich, Frau – fraulich; es hat nicht genau die gleiche Bedeutung, ob man von jemandem sagt, er ist ein Mensch oder er ist menschlich.

0-3-1-4 ABSTRAKTE UND KONKRETE INTENSION

Ich habe bei der Intension nur auf die *wesentlichen* Eigenschaften Bezug genommen, entsprechend der Unterscheidung von *wesentlichen* und *kontingenten* Eigenschaften.

Man kann hier von *abstrakter* Intension sprechen, weil nur *einige* Eigenschaften herausgegriffen werden, von anderen dagegen *abstrahiert* wird. Dagegen kann man die Intension, die *alle* (wesentlichen und kontingenten) Eigenschaften umfasst, *konkrete* Intension nennen.

Es ist wichtig herauszustellen: Die *primäre*, die eigentliche Intension ist die *abstrakte*, diese verwenden wir in unserem Sprechen und Schreiben; die konkrete Intension ist sekundär, sie ist im Grunde nur eine Vergleichsgröße.

Wir rechnen zu einem Begriff nur die *wesentlichen* Eigenschaften. Wenn zu der Intension z. B. von dem Wort ‚Mensch' bereits *alle* Eigenschaften gehörten, die allen individuellen Menschen zukommen, dann wäre nichts Neues mehr über den Menschen auszusagen, alle Aussagen über den Menschen wären *analytisch*. Das entspricht aber natürlich überhaupt nicht unserm Sprachgebrauch. Außerdem können wir gar nicht *alle* Eigenschaften (aller Menschen) kennen. Dieses Problem soll später – bei der Extension – genauer erklärt werden.

0-3-1-5 FAZIT

Nach meiner Auffassung bezieht sich die Intension (eines Zeichens) auf die *reale* Ebene. Die *sprachliche* und *psychische* Bestimmung sind nicht unwichtig, doch ich verstehe sie als andere Formen von *Bedeutung*, nicht als Intension. Für die Intension benötigen wir eine präzise Bestimmung, dies kann die *psychische* Intension nicht leisten, auch die verwandte Definition der Intension als *Sprachgebrauch* ist zu vage; und die *sprachliche* Intension ist auf die Sprache limitiert, bleibt letztlich ein geschlossenes System ohne Real-Bezug.

Allerdings bestimme ich die Intension als *abstrakt*, sie erfasst nur die *wesentlichen* Eigenschaften von Objekten. Allenfalls könnte man unterscheiden:

primäre Intension = *abstrakte* Intension = die wesentlichen Eigenschaften
sekundäre Intension = *konkrete* Intension = alle Eigenschaften

0-3-2 Extension von Zeichen

Bei der Extension ergeben sich viele Parallelen zur Intension, weswegen ich in der Darstellung der Extension manche Punkte ausspare, um mich nicht zu wiederholen.

Wie schon beschrieben, unterscheidet man bei den deskriptiven Zeichen vor allem:

- *Individual-Zeichen* bzw. Individuen-Zeichen (Individuatoren)
- *Klassen-Zeichen* (Prädikatoren).

In einer ersten Bestimmung kann man formulieren:

Die Extension von *Individuen-Zeichen* sind *Individuen*
Die Extension von *Klassen-Zeichen* sind *Klassen*

0-3-2-1 EXTENSION VON INDIVIDUATOREN

Ein Individuum-Zeichen ist ein *Eigenname* (wie ‚Sokrates'), eine *singuläre Kennzeichnung* wie (‚der Begründer der sokratischen Methode') o. ä. Die Extension eines solchen *Individuators* (Individual-Zeichens) ist ein *individuelles Objekt*, ein *Individuum.*

Auch hier kann man wieder *2 Stufen* unterscheiden:

1. Stufe: Extension(Individuator) = Individuum

Beispiel: So ist die Extension des *Eigennamens* ‚Sokrates' das Individuum Sokrates.

Halb formal: Extension(‚Sokrates') = Sokrates. Formal: Extension(‚x_i') = x_i

Nun haben wir gesehen, dass ein Individuum auch durch einen *Träger* = formales Objekt und eine *individuelle Bestimmung* definiert werden kann. Im Beispiel: ‚Sokrates ist dasjenige Individuum, dem die Individual-Eigenschaft „Sokrates" (wesentlich) zukommt'.

Halb-Formal: Die Extension von ‚Sokrates' ist: ιx(Sokrates x). Bei *adjektivischer* Darstellung: Extension(‚Sokrates') = ιx(sokratisch x). Bzw. formal: ιx(Fx).

Um auszudrücken *„dasjenige* Objekt, das die Eigenschaft F hat", kann man den *Kennzeichnungs-Operator* verwenden: ιx(Fx). Man spricht auch von *‚Jota-Operator'.*

Allerdings liegt hier keine *streng extensionale* Darstellung vor, sondern eine *gemischt extensional-intensionale* Bestimmung vor: einem Objekt (extensional) kommt eine Eigenschaft (intensional) zu.

2. Stufe: Extension^2(Individuator) = dasjenige Individuum, dem die Eigenschaften F_1 bis F_i wesentlich zukommen. Man kann auch sagen, das Individuum *mit* seinen wesentlichen Eigenschaften.

Beispiel: Extension^2(‚Sokrates') = ιx(Mensch x ∧ Begründer der sokratischen Methode x).

Natürlich können es auch *mehr als zwei* Eigenschaften sein, z. B. formal:

Extension(‚x_i') = $\iota x(F_1x \wedge ... \wedge F_ix)$.

Eine andere Möglichkeit ist, auf dieser *2. Stufe* nicht mehr direkt von der *Extension* (sprachlich) auszugehen, sondern von dem *Objekt* (real), also:

Sokrates = ιx(Mensch x ∧ Begründer der sokratischen Methode x)

Ich habe schon darauf hingewiesen, dass es schwer ist, genau zu definieren, was *wesentlich* ist. So sollen wesentliche Eigenschaften einem Individuum normalerweise *immer* zukommen. Aber z. B. ist es ein Problem, dass man Sokrates kaum als Baby schon Weisheit zusprechen könnte. Doch es nicht primäre Aufgabe der Logik, das zu analysieren.

Auf der 2. Stufe ist aber eine rein extensionale Darstellung möglich. Denn anstatt z. B. „Sokrates besitzt die *Eigenschaft* Weisheit", könnte man auch interpretieren: „Sokrates ist Element der *Klasse* aller weisen Objekte". Anstatt von *Eigenschaften* spricht man also von *Klassen-Zugehörigkeiten*. Doch bei manchen Eigenschaften ist diese Aussage ziemlich absurd: Wenn man etwa sagen würde, ‚Sokrates ist Element der Klasse aller Objekte, welche die sokratische Methode erfunden haben', ist das zwar formal korrekt, aber wenig sinnvoll, denn Sokrates ist eben der *einzige* Erfinder dieser Methode. Außerdem bereitet es grundsätzlich Probleme, auf immer weitere Klassen-Zugehörigkeiten zurückzuführen, sinnvoller ist, sich schlussendlich auf *Eigenschaften* zu beziehen.

Nachfolgend greife ich zurück auf die oben eingeführten Unterscheidungen zwischen: *formales* versus *inhaltliches* Objekt und *konkretes* versus *abstraktes* Objekt (statt von ‚Objekt' kann man hier spezifisch von ‚Individuum' sprechen) – und komme zu folgenden Aussagen:

• Die Extension eines Individual-Zeichens ist *kein konkretes* Individuum

Üblicherweise wird so dargestellt, als gehe es bei der Extension um das *konkrete* Individuum. Entsprechend könnte man meinen, das Individuum wird in der Extension mit *allen* seinen *Eigenschaften* erfasst. Aber das ist unrealistisch: *erstens* wären dies extrem viele Eigenschaften, die man normalerweise nie vollständig kennen könnte; zweitens wären dann alle Aussagen über das Individuum *analytisch*. Denn wenn ich mit der Extension von ‚Sokrates' *alle* Eigenschaften von ihm bereits erfasse, dann ist ja alles Wahre, was ich über ihn aussage, *tautologisch* (und alles Falsche *kontradiktorisch*), was gänzlich unsinnig wäre.

• Die Extension eines Individual-Zeichens ist *kein formales* Individuum
Ebenso problematisch wäre die ganz gegensätzliche Theorie, dass ein Objekt extensional *ohne jegliche* Eigenschaft, rein *formal* bestimmt wird. Wenn z. B. die Extension von ‚Sokrates' nur ein *formales* (singuläres bzw. individuelles) Objekt, nur ein Träger oder ein Prinzip wäre, dann besäße ‚Sokrates' dieselbe Extension wie ‚Platon', ja dann besäßen alle Individual-Zeichen die gleiche Extension.

• Die Extension eines Individual-Zeichens ist ein *abstraktes* Individuum
Die Extension eines Individual-Zeichens ist also ein inhaltliches (bzw. inhaltlich bestimmtes) Individuum, aber ein abstraktes Individuum. Man könnte das abstrakte Objekt auch als *Kern* oder „Wesen" des gesamten Objektes deuten. Ein Individuum wird in der Extension nur als *abstraktes Objekt* erfasst, d. h. mit seinen *wesentlichen*, *definitorischen* Eigenschaften. Wenn ich aber über das abstrakte Individuum weitergehende Aussagen machen will, untersuchen will, welche *kontingente* Eigenschaften ihm zukommen, dann muss ich auf das *konkrete* Individuum zurückgreifen und dieses untersuchen, obwohl es nur partiell zu erfassen ist.

0-3-2-2 EXTENSION VON PRÄDIKATOREN

Die Extension eines *Prädikators* (Klassen-Zeichens) wie ‚Mensch' ist eine (abstrakte) *Klasse*, z. B. die *Klasse Mensch*. Informell sagt man: Die Extension von ‚Mensch' sind *die Menschen*.

1. Stufe: Extension(Prädikator) = Klasse
Beispiel: Extension(‚Mensch') = Klasse der Menschen
Man kann diese Klasse aber in verschiedener Weise *darstellen*:
– *ganzheitlich*: Klasse F bzw. als Beispiel die Klasse Mensch
– *kollektiv*: $\Lambda x[Fx]$, heißt: alle x, für die gilt, die haben die Eigenschaft F.
andere Darstellungen: $\{x / Fx\}$ oder mit Lambda-Operator: $\lambda x(Fx)$
Beispiel: Λx[Mensch x], {x / Mensch x}, λx(Mensch x)
– *individuell*: $x_1[Fx_1] \cup x_2[Fx_2] \cup ... \cup x_n[Fx_n]$
Beispiel: x_1[Mensch x_1] $\cup$ x_2[Mensch x_2] $\cup ... \cup$ x_n[Mensch x_n]

Hier sei nur auf *ein* Problem hingewiesen: Unbrauchbar sind *Zirkel*-Definitionen, z. B.:

$$\text{Klasse } F = \Lambda x[x \in F] = x_1[x_1 \in F] \cup x_2[x_2 \in F] \cup ... \cup x_n[x_n \in F]$$

„Die Klasse F ist die Menge aller x, für die gilt: sie sind Elemente der Klasse F" (u. ä.).

2. Stufe: Extension^2(Prädikator) = diejenigen Individuen, denen die Klassen-Eigenschaften F_1 bis F_i wesentlich zukommen. Bzw. die, welche Elemente der Schnittmengen von F_1 bis F_i sind.
Beispiel: Extension^2(Mensch) = Klasse aller Individuen, die Elemente der Schnitt-Menge der Klasse der Sinnenwesen und der Klasse der vernünftigen Objekte (rein extensional).
Die klassische Philosophie *definierte* den Menschen wie gesagt als *vernünftiges Sinnenwesen* (animal rationale), also durch *2* Begriffe, darauf nehme ich im Beispiel Bezug.
Auch hier ist wieder eine ganzheitliche, kollektive oder individuelle Darstellung möglich; beschränken wir uns auf die ganzheitliche Darstellung:

$$\text{Extension}^2(\text{Mensch}) = \text{Klasse(Sinnenwesen)} \cap \text{Klasse(vernünftige Objekte)}$$

Entsprechend zu den Individuen gilt bei Klassen: Es handelt sich um *abstrakte Klassen*, denn sie umfassen nur *abstrakte* Individuen. Z. B. umfasst die Klasse der Menschen alle Menschen nur mit den *gemeinsamen* Eigenschaften, die sie als Elemente der Klasse *Mensch* bestimmen, aber nicht mit ihren individuellen Unterschieden.

In der logischen Sprache wird normalerweise kein Unterschied zwischen *Substantiven*, *Adjektiven* und *Verben* gemacht, dies alles sind *Prädikatoren*. Insofern wird z. B. nicht unterschieden zwischen „Mensch“ und „rot“, beides sind – intensional gesehen – gleichermaßen *Eigenschaften*. Was ist aber z. B. die Extension vom Wort ‚rot'? Nach überwiegender Auffassung ist das die *Klasse* aller roten Gegenstände. Eine alternative Möglichkeit wäre, als Extension die Klasse aller realen Vorkommnisse von „rot“ zu verstehen; aber dann wäre die Gleichbehandlung von Substantiven und Adjektiven nicht mehr gegeben.

0-3-2-3 DISKUSSION

Nun könnte man kritisieren: Es gibt hier in der Extension gar *keinen Unterschied* zwischen den *Elementen* einer Klasse, also z. B. den Menschen als Elementen der Klasse *Mensch*; der Sinn einer Aufzählung wie $\text{Mensch}_1 \cup \text{Mensch}_2 \cup \ldots \cup \text{Mensch}_n$ besteht nur in der Zuordnung eines *Zählindex*.

Konstruktiver könnte daher folgende Lösung scheinen: Als Extension eines Prädikators, in einer Klasse, werden die Elemente so erfasst, wie es der *Extension eines Eigennamens* entspricht. Z. B. in der Klasse der Philosophen wird Sokrates mit den ihn *als Individuum definierenden*, wesentlichen Eigenschaften erfasst – aber ohne *unwesentliche* Eigenschaften. Somit werden z. B. Sokrates, Aristoteles, Platon durchaus *unterschiedlich* in der Extension repräsentiert, nicht nur als Philosophen. So würde die Extension(‚Philosoph') nicht lauten „$\text{Philosoph}_1 \cup \text{Philosoph}_2 \cup \ldots \cup \text{Philosoph}_n$, sondern z. B. „Sokrates ∪ Platon ∪ Aristoteles ∪ ...“.

Dagegen spricht aber: Wenn man das Wort ‚Philosoph' verwendet, kann man unmöglich die individuellen essentiellen Eigenschaften aller in der Extension erfassten Philosophen kennen; auch eine Aussage wie ‚jeder Philosoph ist ein Weiser' macht nur Sinn, wenn von allen individuellen Unterschieden abgesehen wird. Daher und aus anderen, hier nicht zu nennenden Gründen bevorzuge ich doch die zuerst genannte Definition:

Die Extension eines Prädikators ‚F' ist die abstrakte Klasse „F“ (1. Stufe) bzw.

Die Extension^2 *von ‚F'* $= x_1[Fx_1] \cup x_2[Fx_2] \cup \ldots \cup x_n[Fx_n]$ (2. Stufe)

D. h. alle Elemente von F werden nur mit den Eigenschaften erfasst, die sie als Elemente der Klasse „F“ bestimmen, aber nicht mit ihren individuellen Unterschieden.

0-3-2-4 FAZIT

Man kann zusammenfassend unterscheiden:

- *abstraktes* Objekt (= Extension eines Zeichens oder Wortes)
  Individuator: bezeichnet das Objekt mit seinen *wesentlichen* Eigenschaften
  Prädikator: bezeichnet die Objekte mit den *wesentlichen* Eigenschaften der *Klasse*
- *konkretes* Objekt:
  das ist das reale Objekt mit *allen* seinen (wesentlichen und zufälligen) Eigenschaften

Graphisch könnte man das folgendermaßen darstellen:

Wort/Zeichen
↓
abstraktes Objekt
(Extension)
↓
konkretes
Objekt

Ggf. könnte man auch den Terminus der ‚Extension' differenzieren:

– *abstrakte* Extension *abstraktes* Objekt

– *konkrete* Extension *konkretes* Objekt

Aber die *primäre*, die eigentliche Extension ist eben die *abstrakte*, anders, als es meistens dargestellt wird.

0-3-2-5 ZUORDNUNGS-PROBLEM

Hier einige Überlegungen für Spezialisten: Ich habe im vorausgegangenen Text erläutert (nur mit einem anderen Beispiel):

1. Stufe: Extension(‚Quadrat') = λx(quadratisch x)

alle x, für die gilt: sie haben die Eigenschaft „quadratisch"

2. Stufe: Extension^2(‚Quadrat') = λx(rechteckig x $\wedge$ gleichseitig x)

alle x, für die gilt: sie haben die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig"

Dabei sollen die genannten Eigenschaften dem Objekt *wesentlich* zukommen.

Die 2. Stufe ist vor allem von Interesse. (Man könnte diskutieren, ob man zur *vollständigen* Bestimmung eines *Quadrats* auch andere Begriffe benötigt, aber das ist hier irrelevant).

Nun ergeben sich folgende zwei Probleme:

• Erstens, *kommen* die Eigenschaften dem *inhaltlichen* Objekt *zu*?

Darf man z. B. sagen, dass einem Quadrat die Eigenschaften„rechteckig" und „gleichseitig" *zukommen* oder es diese Eigenschaften *besitzt* ? Eine solche Redeweise habe ich oben öfters verwendet, z. B. dass ich sagte, Sokrates komme die Eigenschaft „sokratisch" zu.

Aber diese Redeweise bzw. Schreibweise ist nicht wirklich korrekt:

Ein Quadrat *besitzt nicht* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig". Ein Quadrat *hat nicht* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig". Und: Einem Quadrat *kommen nicht* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" *zu*. Und schon gar nicht gilt: Einem Quadrat *kommen* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" *wesentlich zu*.

Denn die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" *konstituieren* erst das Objekt Quadrat (bzw. die Klasse der Quadrate). So darf man *korrekt* nur sagen: Ein Quadrat *beinhaltet* (oder *enthält*) die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig". Diese Eigenschaften sind eben (logisch) *Teil* oder *Bestandteil* vom Quadrat. Und sie sind deshalb *wesentlich*, weil sie das „Wesen" des Quadrates erst begründen.

Trotz der obigen Ausführungen ist ein Satz wie ‚ein Quadrat *besitzt* die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig"' nicht wirklich falsch. Aber er ist *redundant*, er sagt nichts Neues über das Quadrat aus. Denn ein Quadrat gibt es eben nur durch die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig".

In jedem Fall gilt: Einem Objekt können *synthetische* Eigenschaften *zukommen*, das sind Eigenschaften, die *nicht in ihm bereits enthalten* sind. Z. B. kann einem Quadrat zukommen, dass es blau ist oder groß bzw. kann es die Eigenschaften „blau" und „groß" besitzen.

• Zweitens, kommen die Eigenschaften dem *formalen* Objekt zu?

Nun könnte man argumentieren, das oben genannte Problem sei kein wirkliches Problem, weil ja in der formalen Logik die Eigenschaften auch nicht dem *inhaltlich* bestimmten Objekt, z. B. dem Quadrat, zugewiesen werden, sondern dem *formalen* Objekt x.

Das zeigt die Formalisierung: Extension(‚Quadrat') = λx(rechteckig x $\wedge$ gleichseitig x)

Aber, die Eigenschaften „rechteckig" und „gleichseitig" kommen offensichtlich auch nicht dem formalen Objekt x zu. Denn ein formales Objekt *besitzt gar keine Eigenschaften*. Anders gesagt, es könnte genauso gut die Eigenschaft „rund", „dreieckig" o. a. besitzen.

Es *kommen* dem formalen Objekt x auch keine Eigenschaften *zu*. Schon gar nicht können einem formalen Objekt *wesentliche* Eigenschaften zukommen.

Formale, unbestimmte Objekte *besitzen* nur formale, *unbestimmte* Eigenschaften, keine inhaltlichen. Aber man kann ihnen (sprachlich) bestimmte inhaltliche Eigenschaften *zusprechen* oder *zuordnen*, jedenfalls informell, bei der Verwendung von Beispielen. Das ist die Methode der Logik. Dabei ist kritisch nach der ontologischen Berechtigung zu fragen, oder ob hier nur ein pragmatisch bzw. technisch begründetes Vorgehen gegeben ist.

0-3-3 Extension versus Intension

0-3-3-1 STUFEN-THEORIEN

Wir haben bei der Intension und Extension 2 Stufen unterschieden. Diese Stufen wurden hier in bestimmter Weise interpretiert. Ich werde aber auch eine *alternative* Theorie vorstellen.

• Parallele Stufen von Intension und Extension

Fassen wir das noch einmal zusammen, am einfachsten am Beispiel ‚Rappe'.

1) Intension
   1. Stufe: Allgemein-Begriff „Rappe" , kurz: E(Rappe)
   2. Stufe: Vereinigungs-Menge der Begriffe/Eigenschaften „Pferd" und „schwarz"
      E(Pferd $\cup$ schwarz)
2) Extension
   1. Stufe: Klasse der Rappen
   2. Stufe: Schnitt-Menge der Klasse der Pferde und der Klasse der schwarzen Objekte
      K(Pferde $\cap$ schwarze Objekte)

Dabei geht es bei der Intension wie der Extension um einen *abstrakten* Ansatz, d. h. es geht nur um die *wesentlichen* Eigenschaften.

Die 2. Stufe ist die wichtigere, erst auf dieser zweiten Stufe wird überzeugend deutlich, warum man die Intension auch als *Sinn* oder *Inhalt* bestimmt. Im Beispiel: Der *Inhalt* des Wortes ‚Rappe' ist eben „schwarzes Pferd" und nicht der Allgemein-Begriff „Rappe".

Nun könnte man gegen diese Darstellung einwenden, dass hier *kein gravierender Unterschied* zwischen Extension und Intension besteht, beide nehmen entscheidend Bezug auf die *wesentlichen Eigenschaften* des Objekts. Beide entsprechen sich genau, auf der 1. Stufe wie auf der 2. Stufe. Warum benötigt man dann überhaupt Extension *und* Intension *beide* ? .

• Alternatives Stufen-Modell

In der Tat gibt es alternative Modelle, welche die Beziehung zwischen Extension und Intension anders definieren. Vor allem, nicht zwischen zwei Stufen unterscheiden bzw. auf eine Stufe verzichten. Das gilt z. B. in der *klassischen* Logik, in der man meistens vom – geistigen – *Begriff* (und nicht vom Wort) ausgeht, und so ergibt sich eine andere Einteilung:

Begriff „Rappe"
1) Intension (Inhalt)
   Verbindung der Begriffe „Pferd" und „schwarz"
2) Extension (Umfang)
   Klasse der Rappen

Hier besteht also ein klarer Unterschied zwischen Extension und Intension, jede hat ihren eigenen Zugang zur Wirklichkeit. Außerdem kommt man zunächst ohne zwei Stufen aus, was natürlich als Vereinfachung erwünscht wäre.

• Diskussion

Aber der 2-stufige Ansatz besitzt den Vorteil einer *parallelen* Darstellung von Extension und Intension. Auch werden Extension und Intension in der *modernen* Logik in erster Linie als Bedeutungen von *Zeichen*, nicht als Begriffs-Bestimmung verstanden.

Und schließlich: Letztlich kommt man nicht einmal mit *zwei* Stufen aus, sondern man kann noch *weitere* Stufen annehmen, die *Kette* fortsetzen, fragen, wie sich ‚Pferd' und ‚schwarz' weiter bestimmen lassen. Dies gehört allerdings nicht mehr zur *direkten* Intension/Extension von ‚Rappe', sondern dann ginge es um die Intension/Extension von ‚Pferd' bzw. ‚schwarz'.

0-3-3-2 SUBJEKTIVE UND OBJEKTIVE THEORIE

Bisher habe ich Extension und Intension als etwas *Objektives* behandelt. Auch wenn ich von *Sprachzeichen* ausging, so wurden die Extension / Intension letztlich doch über die *Objekte* bestimmt. So ergab sich:

– die *Intension* sind die wesentlichen Eigenschaften, die ein Individuum bzw. die Mitglieder einer Klasse objektiv bzw. real bestimmen

– die *Extension* sind das Individuum bzw. die Klassen-Elemente mit samt ihren wesentlichen Eigenschaften

Es gibt aber auch einen alternativen Ansatz, so dass wir folgende Unterscheidung treffen: (wobei wir zunächst nur die *Intension* betrachten):

• *objektiver* Ansatz (*Ontologie*- Ansatz)

Die Intension sind die wesentlichen Eigenschaften, die ein Individuum bzw. die Mitglieder einer Klasse *objektiv* bestimmen. Dieser Ansatz ist rein *ontologisch.*

• *subjektiver* Ansatz (*Definitions*-Ansatz)

Die Intension sind die wesentlichen Eigenschaften, die wir einem Individuum bzw. den Mitgliedern einer Klasse durch eine *Definition zuschreiben*. D. h. aber, es geht nicht notwendig um die tatsächlich wesentlichen Eigenschaften, sondern um die, die wir *subjektiv* für wesentlich *halten*. Das „wir" meint in erster Linie die *Wissensgemeinschaft.*

Diesen Unterschied können wir formal so kennzeichnen, dass wir bei einer *Definition* das Kürzel ‚df' verwenden, z. B.: Intension^2(‚Rappe') $=_{df}$ E(Pferd) $\cap$ E(schwarz)

Der subjektive Ansatz ist primär *handlungs-theoretisch*, weil eine Definition eine Handlung bzw. Sprachhandlung ist. Trotzdem bleibt auch der subjektive Ansatz insofern *realistisch*, dass es primär um *Eigenschaften von Objekten* geht, nicht um semantische Merkmale von Zeichen oder um psychische Deutungen. (Für die Extension gilt Entsprechendes.)

Man kann (subjektiv) auf *beiden Stufen* von einer *Definition* sprechen. Für die *1. Stufe* von Extension / Intension ist die Unterscheidung subjektiv – objektiv allerdings wenig relevant, weil es sich dabei um *Festsetzungen* handelt. Dass die Intension von ‚Sokrates' der Begriff „Sokrates" ist, beruht auf einer Festlegung, damit ist das *quasi objektiv* und es macht keinen Sinn zu fragen, ob dies real wahr ist oder nur für wahr gehalten wird. Für die 2. Stufe ist es aber m. E. sinnvoller, Intension und Extension über den *subjektiven Ansatz* zu bestimmen als über den *objektiven Ansatz.* Das wird im Folgenden begründet.

Wir haben schon erläutert: Intension und Extension sind *abstrakt*, denn es geht nicht um *alle* Eigenschaften, sondern nur um die *wesentlichen* – denn wir können nie alle Eigenschaften kennen; außerdem wären sonst alle Aussagen über Objekte redundant.

Aber wir können meistens auch *nicht sicher wissen*, welches die *wesentlichen* Eigenschaften der Objekte sind. Wir können das nur vermuten. Daher bietet sich der *subjektive* Ansatz an.

Dabei müssen wir aber eine weitere *Einschränkung* machen: Wir können *nicht für alle* Objekte die vermuteten wesentlichen Eigenschaften angeben, es sind nicht alle Objekte definiert.

Dies lässt sich leicht erläutern: Angenommen, wir nehmen einen beliebigen Menschen, der nur in seiner Familie, in seinem Freundeskreis und an seinem Arbeitsplatz bekannt ist, sonst aber nicht, d. h. er ist in der Gesellschaft unbekannt. Nennen wir ihn ‚Hans Müller'. Sicherlich besitzt dieser Hans *wesentliche Eigenschaften*, die ihn, die seine Identität bestimmen. Aber der Hans ist nicht von der Wissensgemeinschaft definiert. Wenn man im *Lexikon* nachschlägt, findet man nichts über ihn. Anders dagegen, wenn wir über den *berühmten* Philosophen Sokrates nachlesen, über den finden wir genaue Einträge. Wir können sagen, Sokrates ist als Person *öffentlich definiert*. Vereinfacht gesagt: Objekte, die wichtig und bekannt sind in einer Gemeinschaft, sind definiert, die anderen nicht. Die meisten Objekte (z. B. Steine am Wegesrand) sind nicht öffentlich, nicht gesellschaftlich definiert.

0-3-3-3 SUBJEKTIVER ANSATZ

Wir unterscheiden dabei zwischen *subjektiver Intension* und *subjektiver Extension*.

1) Subjektive Intension

Verwenden wir hier ein klassisches Beispiel des Logikers Gottlob Frege: ‚Abendstern' und ‚Morgenstern'. Nach Frege gilt:

– Die Intension der Wörter ‚Abendstern' und ‚Morgenstern' („Sinn" nach Frege) soll *unterschiedlich* sein.

– Die Extension („Bedeutung" nach Frege) dieser Zeichen soll aber *gleich* sein, in beiden Fällen handelt es sich um die Venus; zur Extension kommen wir im nächsten Punkt.

Zunächst ist es fraglich, ob die Intension der beiden Wörter sich wirklich unterscheidet, denn es geht um die *wesentlichen* Eigenschaften von Abendstern und Morgenstern; auch wenn wir diese Eigenschaften nicht ganz sicher angeben können, nach der in den vorigen punkten dargestellten *objektiven*, *ontologischen* Theorie müssen sie gleich sein.

Gehen wir aber von der *subjektiven* Theorie aus, kommen wir zu einem anderen Ergebnis.

Präzisieren wir die reale Intension; dabei können wir wieder *2 Stufen* unterscheiden:

> *1*. Stufe: die Intension des Wortes ‚Morgenstern' ist der *Begriff* "Morgenstern",
> die Intension des Wortes ‚Abendstern' ist der *Begriff* "Abendstern".
> Damit ist aber noch nichts über die weiteren Eigenschaften ausgesagt. Dies geschieht in einer 2. Stufe.
> *2*. Stufe: *Definition* des Begriffs. Diese könnte hier lauten:
> „Morgenstern = der in der Morgendämmerung noch sichtbare Planet Venus, wenn er westlich von der Sonne steht"; im Gegensatz dazu:
> „Abendstern = der in der Abenddämmerung schon sichtbare Planet Venus".

Wir haben hier also *unterschiedliche Intensionen*. Das lässt sich folgendermaßen erklären: Die Intension bezieht sich primär auf die Eigenschaften, mit denen wir etwa ein Objekt *erfassen*, die wir bei ihm für wesentlich *halten*. Und die unterscheiden sich in der Tat bei Abendstern und Morgenstern. (Bzw. unterschieden sie sich früher, aber das ist ein anderes Problem).

Damit haben wir allerdings eine Veränderung der bisherigen Bestimmung von Intension vorgenommen. Ich spreche von *subjektiver* Intension. Und die ist in der Tat die primäre. Sie umfasst die als wesentlich *zugeschriebenen* Eigenschaften von Objekten.

Halten wir fest: Ich bestimme die Intension als *subjektiv*, sie erfasst die als wesentlich *zugeschriebenen* Eigenschaften von Objekten. Allenfalls könnte man unterscheiden:

> *primäre* Intension = *subjektive* Intension = für wesentlich gehaltene Eigenschaften
> *sekundäre* Intension = *objektive* Intension = die wesentlichen Eigenschaften

2) Subjektive Extension

Die – *real-subjektive* – Theorie der Intension betrifft auch die *Extension*. Insofern müssen wir die oben gemachten Aussagen zur Extension präzisieren. Wir erfassen in der Extension Objekte *nicht* mit ihren tatsächlichen, *objektiv* wesentlichen Eigenschaften, sondern mit den Eigenschaften, die wir ihnen *subjektiv* als wesentlich zuschreiben. Also entsprechend der subjektiven Intension.

Das ist von großer Wichtigkeit, denn wir müssen damit die seit Frege verbreitete These aufgeben, dass zwei Zeichen bei *gleicher Intension* eine *unterschiedliche Extension* besitzen können. Das heißt für das Beispiel von ‚Morgenstern' und ‚Abendstern': sie haben auch nicht dieselbe Extension, denn bei ‚Morgenstern' wird die Venus mit anderen Eigenschaften erfasst als bei ‚Morgenstern'. Nur wenn man von den *objektiven,* realen Eigenschaften ausgeht, besitzen ‚Morgenstern' und ‚Abendstern' dieselbe Extension. Es ist natürlich schwierig, eine so etablierte Unterscheidung wie die von Frege aufzugeben; eventuell könnte man sie retten, indem man – entsprechend wie bei der Intension – unterscheidet zwischen:

- *subjektive* Extension: Die *subjektive Extension* umfasst ein Objekt gemäß den ihm *als wesentlich zugeschriebenen* Eigenschaften – so unterscheiden sich ‚Morgenstern' und ‚Abendstern', sie haben eine unterschiedliche Extension.
- *objektive* Extension: hier wäre weiter zu differenzieren zwischen abstrakter und konkreter Extension (vgl. oben). Die *abstrakte (objektive) Extension* ist das Objekt mit allen seinen *wesentlichen* Eigenschaften. Die *konkrete (objektive) Extension* ist das konkrete, reale Objekt selbst, mit *allen seinen wesentlichen und unwesentlichen Eigenschaften.* In beiden Fällen besitzen ‚Abendstern' und ‚Morgenstern' dieselbe Extension – Freges Theorie wäre gerettet; allerdings, wenn man auch von der objektiven Intension ausgeht, wäre das wieder aufgehoben, denn dann wäre eben auch die Intension von ‚Abendstern' und ‚Morgenstern' gleich.

Folgende Grafik soll die Hauptunterschiede für das Beispiel „Abendstern – Morgenstern" *vereinfachend* veranschaulichen; dabei erfasse ich in der Intension aber nur *eine* unterscheidende Eigenschaft, die gesamte Intension umfasst natürlich weitere Eigenschaften:

	‚Morgenstern'		*‚Abendstern'*
Intension	in der Morgendämmerung noch sichtbar ↓		in der Abenddämmerung schon sichtbar ↓
abstrakte Extension	der Himmelskörper, der in Morgendämmerung noch noch sichtbar ist ↘		der Himmelskörper, der in Abenddämmerung schon sichtbar ist ↙
konkrete Extension (reales Objekt)		Venus	

In der *konkreten* Extension stimmen also ‚Morgenstern' und Abendstern' überein, dies ist das *konkrete Objekt*, mit allen seinen wesentlichen und unwesentlichen Eigenschaften.

Wir können jetzt die obige, allgemeine Grafik erweitern nzw. Modifizieren:

Wort/Zeichen
↓
abstraktes Objekt (Extension) = Träger + Intension
(Intension = Begriff = die für wesentlich gehaltenen Eigenschaften)
↓
konkretes Objekt = Träger + wesentliche Eigenschaften + kontingente Eigenschaften

0-3-3-4 VERHÄLTNIS VON EXTENSION UND INTENSION

Ich habe eben gezeigt, dass Extension und Intension weitgehend übereinstimmen, dass bei gleicher Intension zweier Zeichen auch deren Extension gleich ist und umgekehrt. Man kann daher fragen: Wozu benötigt man überhaupt den *Doppelansatz* von Extension und Intension? Jedenfalls stellt sich die Frage bei dem hier vorgelegten Modell, wonach gilt:

Extension: Objekt (bzw. Träger) einschließlich der definitorischen Eigenschaften.

Intension: die definitorischen Eigenschaften. Also: *Die Intension ist ein Teil der Extension*.

Die Gründe, dennoch an dieser Unterscheidung festzuhalten, sind vielfältig und können hier nicht im Einzelnen dargelegt werden. Beide Ansätze haben jedoch ihre Vor- und Nachteile.

Die Intension bestimmt das Objekt *wesentlich*. Z. B. „Ein Mensch ist definiert durch die Eigenschaften *Sinnenwesen* und *vernünftig"*. Die Extension braucht man, um *nicht wesentliche* Eigenschaften anzugeben, die etwa *nur für einen Teil* der Menschen gelten. Z. B. „viele Menschen sind Weintrinker".

Anders gesagt, die Intension bezieht sich nur auf *analytische*, definitorische Eigenschaften; die Extension erfasst analytische, aber auch *synthetische* Eigenschaften.

Wichtig ist folgendes Verhältnis zwischen Extension und Intension: Je *größer* die Extension, desto *kleiner* (i. allg.) die Intension – und umgekehrt. Z. B ist die Extension von ‚Blume' größer als die von ‚Rose': denn die Klasse der Rosen ist *Teilmenge* der Klasse der Blumen.

Andererseits ist die Intension von ‚Blume' kleiner als die von ‚Rose'. Dabei stellt sich man sich die Intension (vereinfacht) als eine *Menge von Eigenschaften* vor. Die Intension von ‚Rose' umfasst alle Eigenschaften von ‚Blume', aber zusätzlich die, welche eine Rose auszeichnen. Die Rose ist definiert als eine Blume, die besondere zusätzliche Eigenschaften besitzt. Somit sind die Eigenschaften von ‚Blume' eine Teilmenge der Eigenschaften von ‚Rose'.

Man kann ein Wort vor allem in zweierlei Weise bestimmen: am Beispiel von ‚Mensch' der traditionell als Sinnenwesen (animal) und Vernunftwesen (rationale) definiert ist; die folgenden Einteilungen gehen von der *Extension* aus.

1) *Schnitt-Menge* der *Ober-Klassen* (das ist zentral für die Definition)
   1. extensional: K(Mensch) = K(Sinnenwesen) $\cap$ K(Vernunftwesen)
   2. intensional: E(Mensch) = E(Sinnenwesen) $\cup$ E(Vernunftwesen)

2) *Vereinigungs-Menge* von (wesentlichen) Unter-Klassen
   1. extensional: K(Mensch) = K(Männer) $\cup$ K(Frauen)
   2. intensional: E(Mensch) = E(Männer) $\cap$ E(Frauen)

3) Kombination (manchmal wird folgendermaßen kombiniert, nur über Vereinigung)
   1. extensional: K(Mensch) = K(Männer) $\cup$ K(Frauen)
   2. intensional: E(Mensch) = E(Sinnenwesen) $\cup$ E(Vernunftwesen)

K = Klasse (der Objekte), E = Eigenschaft (ebenfalls als Menge aufgefasst)

Man sieht, dass sich die Mengen-Verknüpfungen extensional und intensional also immer gegensätzlich verhalten (außer bei der Kombination):

Extensional: Schnitt-Menge	Intensional: Vereinigungs-Menge
Extensional: Vereinigungs-Menge	intensional: Schnitt-Menge

0-3-3-5 NOMINAL-DEFINITION UND REAL-DEFINITION

Wie beschrieben, werden die (subjektive) *Intension* und *Extension* primär durch eine *Definition* bestimmt. Das gilt sowohl für die 1. wie für die 2. Stufe. Im strengen Sinn von Definition spricht man aber erst auf der 2. Stufe, also wenn man z. B. ‚Mensch' als „vernünftiges Sinnenwesen" definiert.

Ein wichtiger Unterschied, auf den bisher noch nicht eingegangen wurde, ist der zwischen *Real-Definition* und *Nominal-Definition*; dieser Unterschied soll im Folgenden erläutet werden, aber nur knapp, weil dieses Thema eher zur Sprachphilosophie gehört.

1) *Real-Definition*:
Sie ist eine *Wesens-Bestimmung*, sie gibt die *wesentlichen Eigenschaften* eines realen Objektes bzw. einer komplexen Eigenschaft an.

Diese Definition wird von der *Wissensgemeinschaft* (bzw. Wissenschaftlergemeinschaft) vorgenommen. Z. B.: Ein Lebewesen (bzw. der Begriff „Lebewesen") ist bestimmt durch die folgenden *essentiellen* Eigenschaften: Stoffwechsel, Informationsverarbeitung, Fortpflanzung, Immunabwehr, Homöostase u. a.

Real-Definitionen findet man vorrangig im Lexikon, verstanden als *Sach-Lexikon*. Wie gesagt, ich gehe davon aus, dass die Real-Definition eigentlich nur die Eigenschaften angibt, die wir *subjektiv* für wesentlich *halten*.

Die klassische Philosophie bestimmte den Menschen wie beschrieben als „vernünftiges Sinnenwesen" (*animal rationale*), gemäß der traditionellen Definitionslehre, und zwar wie folgt:

Ein *Artbegriff (species)*	hier: Mensch	wird definiert durch
– die *nächst höhere Gattung (genus proximum)*	hier: Sinnenwesen und	
– *Art-Differenz* (differentia specifica)	hier: vernünftig	

Realistischer wäre es wohl, 'rational' mit „vernunftbegabt" zu übersetzen.

Das heißt, es werden immer nur *2 (zwei)* Begriffe zur Definition herangezogen. Diese sind nicht gleichberechtigt, sondern der Gattungsbegriff ist *übergeordnet*: im Beispiel ist das ‚vernünftig' untergeordnet, denn es wird dem ‚Sinnenwesen' zugeordnet. Indem man immer höhere, abstraktere Gattungs-Begriffe angibt, erhält man so eine Hierarchie, die als Baum des Porphyrius berühmt ist.

2) *Nominal-Definition*
Sie ist eine *Bedeutungs-Bestimmung*, sie gibt die *Bedeutung* eines Zeichens an (bzw. sie gibt die Extension oder Intension eines Zeichens an).

Nominal-Definitionen findet man vorrangig im *Wörter-Buch*.
Obwohl man grundsätzlich sowohl für ‚Mensch' wie für ‚Rappe' eine Real-Definition und eine Nominal-Definition angeben kann, ergibt sich doch ein gewisser Unterschied:
– ‚Der Mensch ist ein vernünftiges Sinnenwesen' – das würde man eher als *Real*-Definition fassen, die eine Aussage über das *Wesen* des Menschen macht.
– ‚Der Rappe ist ein schwarzes Pferd' – das ist eher als *Nominal*-Definition zu fassen, bei der weniger eine Aussage über das Wesen das Rappen gemacht wird, sondern umgekehrt die beiden Wörter ‚Pferd' und ‚schwarz' zu dem Wort ‚Rappe' zusammengefasst werden.

Bisher wurden beide Definitionen verwandt. Da ich primär von der Extension und Intension von *Sprachzeichen* ausgegangen bin, erfolgte zuerst, auf der *1. Stufe*, eine Nominal-Definition. Z. B. die Intension des Wortes ‚Rappe' ist die Eigenschaft „Rappe". Auf der *2. Stufe*, auf der das Zeichen ‚Rappe' oder aber das Objekt *Rappe* durch die Eigenschafts-Verknüpfung „Pferd" und „schwarz" bestimmt wurde, erfolgte primär eine Real-Definition.

Man stellt die Nominal-Definition gerne der Real-Definition gegenüber, aber eigentlich gibt es *verschiedene* Nominal-Definitionen zu unterscheiden; um nur die wichtigsten zu nennen:

- Quasi-Real-Definition

Mit dem Wort ‚Rappe' bezeichnet man ein Wesen (Objekt), das als *wesentliche* Eigenschaften „Pferd" und „schwarz" besitzt.

- Angabe des Sprachgebrauchs

Wir *nennen* ein Objekt ‚Rappe', das die Eigenschaften „Pferd" und „schwarz" besitzt.

- sprach-interne Bestimmung

syntaktisch: das Wort ‚Rappe' ist durch folgende *Wörter* definiert: ‚Pferd' und ‚schwarz'.
semantisch: ‚Rappe' ist definiert durch die *semantischen Merkmale* „Pferd" und „schwarz".
Hier besteht allerdings die Notwendigkeit, doch noch einen *Bezug zur Realität* herzustellen, sonst bleibt die Nominal-Definition ein *geschlossenes Sprachsystem*.

- Benennung

Z. B.: Die Intension von ‚Rappe' ist per definitionem der Begriff „Rappe". Oder die Extension von ‚Rappe' ist per definitionem die Klasse der Rappen. Diese lassen sich als *Benennungen* umformulieren: Hiermit nenne ich die Intension von ‚Rappe': Begriff „Rappe".

Es besteht ein sehr kompliziertes Wechselverhältnis, eine *Dialektik* zwischen Nominal- und Real-Definition. Allerdings hat die Nominal-Definition Vorrang: Denn beim Definieren sind wir eben immer auf *Sprache* angewiesen.

Aber durch eine Definition werden *nicht alle* Eigenschaften erfasst. Erst eine *Beschreibung* oder *Theorie* zielt auf Erfassung *aller* Eigenschaften, kann allerdings auch nicht vollständig sein. Es ist also doch sehr nahliegend zu bestimmen, dass eine Definition nur die *wesentlichen* Eigenschaften erfassen soll. Wenn man den Begriff „wesentlich" kritisiert, welche Eigenschaften soll denn sonst die Definition erfassen, wenn nicht die essentiellen?

Abschließend zum Verhältnis von Extension und Intension zwei Übersichten:

- *Übersicht:* Objekte – und Extension versus Intension
- *Übersicht:* Arten von Extension und Intension

- *Übersicht:* Objekte – und Extension versus Intension

Formales Objekt	
⇓ + essentielle Eigenschaften	Intension eines Zeichens (Bedeutungs-Definition)
Abstraktes Objekt	Extension eines Zeichens (Bezeichnungs-Definition)
⇓ + kontingente Eigenschaften	Forschung, Untersuchung
Konkretes Objekt	Theorie, Beschreibung

Erläuterung: Ein *formales Objekt* (x) wird durch Hinzufügung der *wesentlichen Eigenschaften* zu einem *abstrakten Objekt*. Die *wesentlichen Eigenschaften* sind die (reale) *Intension* des Zeichens, das abstrakte Objekt ist die Extension des Zeichens. Beide beruhen auf *Definition*. Die Feststellung der *kontingenten, synthetischen Eigenschaften* des Objekts ist vor allem Aufgabe der *Forschung*. In einer wissenschaftlichen Theorie bzw. Gesamt-Beschreibung wird dann das *konkrete Objekt* mit essentiellen und kontingenten Eigenschaften dargestellt.

Übersicht: Arten von Extension und Intension

1) Intension

1. subjektiv (primär)	die für wesentlich gehaltenen Eigenschaften eines Objekts (als Teil einer Klasse)
2. objektiv (sekundär)	die wesentlichen Eigenschaften eines Objekts (als Teil einer Klasse)

2) Extension

1. subjektiv (primär)	das Objekt mit seinen für wesentlich gehaltenen Eigenschaften (als Teil einer Klasse)
2. objektiv (sekundär)	
– abstrakt	das Objekt mit allen seinen wesentlichen Eigenschaften
– konkret	das Objekt mit allen seinen – wesentlichen und unwesentlichen – Eigenschaften

Anmerkungen (wie im Text erläutert):

– Die Intension ist immer *abstrakt*, d. h. sie erfasst immer nur das Allgemeine; insofern gibt es keine konkrete Intension in der Tabelle.

– Die *subjektive* Intension bzw. Extension ist primär gegenüber der *objektiven*.

– Innerhalb der objektiven Extension gilt aber: Die *abstrakte* Extension ist primär gegenüber der *konkreten*.

0-3-4 Extensionaler und intensionaler Ansatz

0-3-4-1 SEMANTISCHE UND SYNTAKTISCHE ANALYSE

Man kann bei Extension und Intension zwei Aspekte unterscheiden:

1. Extension und Intension als *Bedeutung* (*semantischer* Aspekt)
2. Extension und Intension als *Sprachformen* (*syntaktischer* Aspekt)

Bisher habe ich mich vorwiegend mit dem *semantischen* (bzw. ontologischen) Aspekt beschäftigt, also z. B.: „die Extension eines Sprachzeichens ist ein Objekt“.

Im Folgenden wird es primär um die *syntaktische* Seite gehen, also um die Unterscheidung von *extensionaler* und *intensionaler Sprache*, z. B. „das *Adjektiv* ist eine *intensionale* Zeichenkategorie“.

Es wird sich im Einzelnen zeigen, dass eine Sprache grundsätzlich folgende Eigenschaften besitzen kann:

extensional bzw. intensional *neutral*
extensional bzw. intensional *festgelegt*

Hier ergeben sich wichtige Unterschiede zwischen der *normalen Sprache* und der *Logik-Sprache*.

0-3-4-2 NORMALE SPRACHE

Untersuchen wir zunächst kurz die normale – deutsche – Sprache, inwieweit sie extensional oder intensional ausgerichtet ist.

Bei den deskriptiven *Zeichen* (Wörtern) wird überwiegend extensional und intensional unterschieden, vor allem durch

Substantive: Objekt-Wörter (extensionale Zeichen), z. B. ‚Mensch'

Adjektive: Eigenschafts-Wörter (intensionale Zeichen), z. B. ‚rot'

Wichtig ist dabei:

Auch ein *extensionales* Zeichen besitzt eine *Intension*, aber es zielt *primär* auf die Extension.

z. B. ‚Mensch' (extensionales Zeichen)

primäre = extensionale Bedeutung: *Klasse* der Menschen

sekundäre = intensionale Bedeutung: *Eigenschaft* „menschlich"

Allerdings kann auch eine Eigenschaft *substantivisch* ausgedrückt werden, z. B. ‚Menschsein' bzw. ein Adjektiv *substantiviert* werden, z. B. ‚Menschlichkeit'.

Entsprechend: Auch ein *intensionales* Zeichen besitzt eine *Extension*, aber es zielt *primär* auf die Intension.

z. B. ‚rot' (intensionales Zeichen)

primäre = intensionale Bedeutung: *Eigenschaft* „rot"

sekundäre = extensionale Bedeutung: *Klasse* der roten Objekte

Bei *Sätzen* sieht es ähnlich aus. Auch hier trennt die *normale Sprache* überwiegend zwischen extensional und intensional; die folgenden Bedeutungen könnte man auch anders bestimmen:

z. B. ‚Sokrates ist ein Mensch' (extensionaler Satz)

extensionale Bedeutung: „das Objekt Sokrates ist Element der Klasse der Menschen"

intensionale Bedeutung: „der Begriff Mensch ist Teil des Begriffs Sokrates"

z. B. ‚rot sein heißt farbig sein' (intensionaler Satz)

intensionale Bedeutung: „der Begriff farbig ist Teil des Begriffs rot"

extensionale Bedeutung:„rote Objekte sind Elemente der Klasse der farbigen Objekte"

0-3-4-3 FORMALE SPRACHE

Anders als man vielleicht erwarten könnte, scheint die formale Sprache weniger klar in der Unterscheidung von extensional und intensional. Denn *Zeichen* wie die *Prädikatoren* ‚F' und ‚G' stehen gleichermaßen für *Objekte* wie „Menschen" oder *Eigenschaften* wie „weise". Das liegt aber daran, dass die formale Sprache von *formalen Objekten* x, y ausgeht, denen dann Eigenschaften zugeordnet werden, wobei „Mensch" und „weise" gleichermaßen als Eigenschaften gedeutet werden (vgl. oben). So gesehen findet doch eine klare Unterscheidung statt.

Außerdem kann man durch Hinzufügungen (wie ‚K' und ‚E') die Variablen präzisieren, z. B. extensional ‚K(F)' für ‚die Klasse F' und intensional ‚E(F)' für ‚die Eigenschaft F'.

In einem *Satz* wird zusätzlich oft durch den verwendeten *Relator* ausgedrückt, ob es sich um eine extensionale oder intensionale Darstellung handelt.

0-3-4-4 DREI ANSÄTZE

Wir können nun *3 Ansätze* unterscheiden (Ansätze, die sich in erster Linie *syntaktisch* definieren, aber entsprechend semantische Auswirkungen haben):

- *extensionaler* Ansatz: bezieht sich primär auf *Objekte*, Individuen und Klassen
- *intensionaler* Ansatz: bezieht sich primär auf *Eigenschaften*
- *extensional-intensional gemischter* Ansatz: bezieht sich auf *Objekte und* auf *Eigenschaften*

Zur Unterscheidung dieser Ansätze folgende vereinfachte Vergleiche mit Beispielen

Übersicht für *einfache*, atomare Sätze:
• extensional: $x_1 \in F$
„Sokrates ist ein Element der Klasse der Menschen".
• extensional – intensional: Fx_1
„Sokrates besitzt die Eigenschaft, Mensch zu sein".
Hier wird einem Objekt x_1 (extensional) eine Eigenschaft F (intensional) zugeordnet. Man kann das auch als „*gemäßigt intensional*" fassen.
• intensional: $E(F) \subset E(x_1)$
„Der Allgemein-Begriff Mensch ist im Individual-Begriff Sokrates enthalten".
(*Intensionale* Beziehungen sind *analytisch*, meist *per Definition*, daher müsste man eigentlich $E(F) \subset_{df} E(x_1)$ schreiben.)

Übersicht für *komplexe*, molekulare Sätze (es wären auch andere Formulierungen möglich):
• extensional: $x_1 \in F \rightarrow x_1 \in G$
„Wenn Sokrates ein Element der Klasse der Menschen ist, dann ist er auch ein Element der Klasse der Erdbewohner".
• extensional – intensional: $Fx_1 \rightarrow Gx_1$
"Wenn Sokrates die Eigenschaft Mensch zukommt, dann kommt ihm auch die Eigenschaft Erdbewohner zu".
• intensional: $E(F) \subset E(x_1) \rightarrow E(G) \subset E(x_1)$
„Wenn der Allgemein-Begriff Mensch im Individual-Begriff Sokrates enthalten ist, dann ist auch der Allgemein-Begriff Lebewesen im Individual-Begriff Sokrates enthalten".
(Streng genommen müsste auch hier der Definitions-Index $_{df}$ verwendet werden.)

0-3-4-5 FAZIT

• intensionaler Ansatz
Die *rein intensionale* Betrachtung wirft verschiedene Probleme auf. Ein solcher Ansatz ist im Grunde nur sinnvoll bei definitorisch-*analytischen* Beziehungen. Z. B.: „Der Begriff der Blume ist im Begriff der Rose enthalten". Dagegen ist sie bei *synthetischen* Aussagen wenig aussagekräftig oder sogar falsch. Z. B. der Satz: ‚Peter ist Philosoph'. Hier kann man nicht sagen: ‚Der Begriff *Peter* ist im Begriff *Philosoph* enthalten'. Und ebenso wenig: ‚Der Begriff *Philosoph* ist im Begriff *Peter* enthalten'. Man kann eben nur feststellen – die Begriffe *Peter* und *Philosoph* sind *nicht* ineinander enthalten, und das ist keine sehr gehaltvolle Information (würde man Sokrates anstelle von Peter nehmen, käme man eventuell zu einer anderen Beurteilung).

• extensionaler Ansatz
Die *rein extensionale* Betrachtung führt im Grunde zu einem Zirkel. Angenommen man nimmt wieder die Aussage „Peter ist Philosoph". Wenn man fragt, was bedeutet das, wäre extensional zunächst die Antwort: „Er gehört zur Klasse der Philosophen". Dies könnte man aber auch übersetzen in: „Peter gehört zur Klasse $x_1, x_2, \ldots, x_n$", wobei dies eine Auflistung aller Philosophen sein soll. Die Antwort wäre also z. B.: „Peter gehört zur Klasse Sokrates, Platon, Aristoteles, Anaximander , ... , Habermas". Dies wäre aber keine wirkliche Erklärung.

• gemischt extensional-intensionaler Ansatz
Daher ist die *gemischt extensional-intensionale* Betrachtung letztlich überlegen. Hier würde man z. B. erklären: „Peter ist Philosoph" bedeutet, er besitzt die *Eigenschaften* Weisheit, Besonnenheit, Vernunft (im Einzelnen wäre natürlich zu diskutieren, welche Eigenschaften einen Philosophen ausmachen).

Nach den obigen Ausführungen kann man folgende *extensionale* und *intensionale Komponenten* der Logik und ihre *Symbole* unterscheiden (ich verzichte auf Anführungszeichen):

Extensionen

1. Objekte
   – unspezifiziert: X, Y
   – spezifiziert
   - Individuen: x, y
   - Mengen: M, N
   - Klassen: F, G bzw. K(F), K(G)

   – Verknüpfungen: z. B. $M \cup N$, $M \cap N$

2. Relationen zwischen Objekten
   – unstrukturiert: X, Y
   konkret z. B. Aussagen: A, B
   (hier sind Relationen als ganze erfasst, ohne ihre Struktur)
   – strukturiert
   - *atomare* Relationen zwischen X und Y: X R Y
     werden aus Objekt-Zeichen und Relatoren formalisiert
     z. B. $x \in F$ (bzw. $X \in Y$)
   - *molekulare* Relationen: $(X_1 R_1 Y_1)$ R $(X_n R_n Y_n)$
     z. B. $x \in F \rightarrow y \in G$ (bzw. $X_1 \in Y_1 \rightarrow X_2 \in Y_2$)

Intensionen (Eigenschaften bzw. Begriffe)

1. Objekt-Eigenschaften: E(X), E(Y)
   - Individuelle Eigenschaften: E(x), E(y)
   - Mengen-Eigenschaften: E(M), E(N)
   - Klassen-Eigenschaften: E(F), E(G)

2. Relationen zwischen Eigenschaften
   (entsprechend der extensionalen Darstellung)

Generelle Komponenten (Extensionen oder Intensionen)
- unstrukturierte: X, Y
- beliebige: Φ (Phi), Ψ (Psi), Ω (Omega)

Erläuterungen:
• X und Y können für *unstrukturierte Objekte* (x, M, F usw.), aber auch für *unstrukturierte Relationen* A, B stehen.
• Die gemeinsame Bezeichnung von *Objekten* (wie x) und einer Untergruppe von *Relationen* (A, B) durch ‚X', ‚Y' usw. ist aus systematischen Gründen etwas unbefriedigend, aber (derzeit) doch die beste Lösung.
• *Strukturierte Relationen* wie z. B. $x \in F$ oder $A \wedge B$ darf man aber nicht unter X bzw. Y fassen, denn X und Y haben einen definierten *Wahrheitswerteverlauf*, der für *strukturierte* Relationen normalerweise nicht gilt.

• Ebenso dürfen *strukturierte Objekte* (Verknüpfungen) nicht einfach mit X und Y dargestellt werden.
• *Generelle Komponenten* wie Φ (Phi), Ψ (Psi), Ω (Omega). Φ, Ψ können (anders als X, Y) *strukturierte* Relationen sein, und zwar *synthetische* wie $X \rightarrow Y$ oder *analytische* wie $X \Rightarrow Y$.

0-3-5 Extension und Intension von Sätzen

0-3-5-1 EXTENSIONALE UND INTENSIONALE DEFINITION
Ich habe im bisherigen Text vor allem die Extension und Intension von *Zeichen* (Wörtern) dargestellt. Dabei ergab sich:

- Extension von Zeichen: Objekte (Individuen, Klassen)
- Intension von Zeichen: (wesentliche) Eigenschaften / Begriffe

Im Folgenden geht es vor allem um die Extension und Intension von *Sätzen*.
Allgemein habe ich schon bestimmt:

- die Extension eines Satzes ist ein *Sachverhalt* (Relation zwischen Objekten)
  genauer:
  die Extension eines *Atom*-Satzes ist ein *Sachverhalt*
  die Extension eines *Molekül*-Satzes ist eine Relation zwischen *Sachverhalten*
- die Intension eines Satzes ist ein *„Begriffsverhalt"* (Relation zwischen Begriffen)
  genauer:
  die Intension eines *Atom*-Satzes ist ein *Begriffsverhalt*
  die Intension eines *Molekül*-Satzes ist eine Relation zwischen *Begriffsverhalten*

Allgemeiner kann man festlegen: Sätze bezeichnen *Relationen zwischen Entitäten*.
Die Frage ist: Unterscheiden sich Extension und Intension auch über die *Relation*? Geht es z. B. logisch um eine andere Relation zwischen Objekten als zwischen Eigenschaften? Ich habe dieses Problem in dem Buch „Integrale Logik" ausführlich analysiert: Das Ergebnis ist:
Hier besteht kein wesentlicher Unterschied: Man kann Extension und Intension beide insbesondere durch folgende Relationen bestimmen:
• *Mengen-Relationen* (wie die Teilmengen-Relation), da sich nämlich auch Eigenschaften als Mengen auffassen – dies betrifft vor allem *Atom-Sätze*
• *Funktionale Relationen* (wie die Implikation) – dies betrifft vor allem *Molekül-Sätze.*

0-3-5-2 EXTENSION EINES SATZES
Die Extension eines Satzes ist ein *Sachverhalt*. Das ist die klassische Definition, die ich aber weiterhin für die beste halte.
Beginnen wir *aussagen-logisch*: Die Extension des Satzes ‚A' ist der Sachverhalt A.
Hier kann man im Grunde keine *normal-sprachliche* Entsprechung bzw. kein Beispiel angegeben. Denn typisch für die Aussagen-Logik ist gerade, dass ihre Sätze *unstrukturiert* sind.
Interessanter wird es daher erst bei *prädikaten-logischen* Sätzen: Ich werde hier vereinfachend folgende Satztypen unterscheiden:

1) Individual-Satz
Zunächst könnte man z. B. bestimmen: Die Extension des Satzes ‚Sokrates ist Philosoph' ist der Sachverhalt: Sokrates ist Philosoph.

Man sollte die Extension aber bei einer logischen Analyse auf die *logisch-semantische* Tiefen-Struktur beziehen (vgl. 0-1-5-3). Dann lautet die Extension für den obigen Satz:
Sokrates ist Element der Klasse der Philosophen.
Entsprechend ist dann die Extension des *formalen* Satzes ‚$x_i \in F$' der Sachverhalt $x_i \in F$.

2) Klassen-Satz
– *normal-sprachlicher* Satz: 'Alle Philosophen sind Erdbewohner'.
Extension ist der Sachverhalt:
Die Klasse der Philosophen ist eine Teilmenge der Klasse der Erdbewohner.
(Das ist eine *klassen*-logische Deutung, man könnte auch *quantoren*-logisch o.a. analysieren.)
– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$F \subset G$'
Extension ist der Sachverhalt: $F \subset G$ bzw.: Die Klasse F ist eine Teilmenge der Klasse G.

Man spricht bei Sätzen wie 'Alle Philosophen sind Erdbewohner' von Atom-Sätzen: Ein *Atom-Satz* (oder Atomar-Satz oder atomarer Satz) ist ein *einfacher Satz*, der keine weiteren Sätze bzw. Relationen enthält. Allerdings ist hier zu differenzieren: So ist der Satz „Alle Menschen sind sterblich" *normal-sprachlich* ein Atomar-Satz, *formal-sprachlich* (quantorenlogisch formalisiert) dagegen ein Molekular-Satz der Struktur: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$.

3) Molekular-Satz
Ein *Molekül-Satz* (Molekular-Satz oder molekularer Satz) ist aus zwei oder mehr Sätzen zusammengesetzt bzw. enthält zwei oder mehr Relationen. Die sind *verknüpft*. Als Verknüpfung dienen *normal-sprachlich* Bindewörter (Konjunktionen) wie ‚wenn – dann', ‚und', ‚oder' und andere. *Logisch* werden überwiegend aussagen-logische *Relatoren* verwendet, also beispielsweise $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$.
– *normal-sprachlicher Satz*: ‚Wenn Sokrates philosophiert, dann ist er ein Mensch'.
Extension ist der *Sachverhalt*: Wenn Sokrates Element der Klasse der Philosophierenden ist, dann ist er Element der Klasse der Menschen.
– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$x_i \in F \rightarrow x_i \in G$'. Extension: der Sachverhalt: $x_i \in F \rightarrow x_i \in G$

4) Analytischer Satz
Wir haben bisher *synthetische* Beispiel-Sätze verwendet, man kann sie allerdings auch als *material-analytisch*, d. h. definitorisch deuten (zur genauen Bestimmung von synthetischen und analytischen Sätzen vgl. 0-5). Bei streng *analytischen* Sätzen ergibt sich Entsprechendes:
– *normal-sprachlicher Satz*: ‚Alle Menschen sind Menschen'.
Extension ist der *Sachverhalt*: Die Klasse der Menschen ist (unechte) Teilmenge der Klasse der Menschen (bzw. ist gleich der Klasse der Menschen).
– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$F \subseteq F$'. Extension: der Sachverhalt: $F \subseteq F$ bzw. $F = F$

Ein Sachverhalt ist eine *Relation zwischen Objekten* (Individuen und Klassen). Diese Relation kann ganz unterschiedlich sein, sie kann auch *außer-logische*, z. B. kausale Elemente enthalten. Die *Logik* erfasst aber nur *logische* Strukturen. Wie ich in 0-3 gezeigt habe, gilt:
die *abstrakte* Extension eines Zeichens / Wortes ist ein *abstraktes* Objekt
die *konkrete* Extension eines Zeichens / Wortes ist ein *konkretes* Objekt
Die *primäre*, die eigentliche Extension eines Zeichens ist dabei die *abstrakte*: Bei ihr wird das Objekt nur mit seinen *wesentlichen* (bzw. für wesentlich gehaltenen) Eigenschaften erfasst.

Das Entsprechende gilt für Sätze:
die *abstrakte* Extension eines Satzes ist ein *abstrakter* Sachverhalt
die *konkrete* Extension eines Satzes ist ein *konkreter* Sachverhalt
Was ist ein *konkreter* Sachverhalt? Z. B. wenn ich den Sachverhalt „Der Mensch ist ein Säugetier" so erfasse, dass dabei *alle* Eigenschaften *jedes* Menschen und *alle* Eigenschaften *je-*

des Säugetiers miteingehen. Es wird sicher sofort deutlich, dass wir einen solchen Sacherverhalt nicht erfassen können. Man kann „Der Mensch ist ein Säugetier“ aber auch als *abstrakten* Sacherverhalt erfassen, dann werden nur die Eigenschaften berücksichtigt, die *allen* Menschen bzw. *allen* Säugetieren *gemeinsam* sind. Der abstrakte Sachverhalt betrifft die nicht die ganze, konkrete Realität, sondern nur das Wesentliche, er *abstrahiert* vom Kontingenten.

So gesehen kann man sagen: Die *primäre* Extension eines Satzes ist die *abstrakte* Extension, die sich auf einen *abstrakten Sachverhalt* bezieht.

0-3-5-3 IST DIE EXTENSION DER WAHRHEITSWERT?

Ich habe oben als *Extension eines Satzes* den von ihm bezeichneten *Sachverhalt* bestimmt.

In der neueren Logik (seit Frege) wird dagegen vielfach behauptet,
die Extension eines Satzes sei sein Wahrheitswert.

D. h. es gibt danach nur zwei *extensionale Bedeutungen* für einen Satz: *wahr* oder *falsch*.
Ich halte diese These für nicht überzeugend; sie hat zwar den Vorteil der *Einfachheit*, man erspart sich die ontologischen Probleme, einen Sachverhalt zu definieren u. ä., allerdings überwiegen die *Nachteile*:

– Es ist recht künstlich, ja *willkürlich*, als Extension eines Satzes seinen Wahrheitswert anzusetzen.
– Es besteht dann kaum mehr eine *Entsprechung* zwischen der Extension eines Wortes (Objekte) und der eines Satzes (Wahrheitswerte).
– Der Begriff des *Wahrheitswertes* ist ebenfalls nicht unproblematisch; man muss im Grunde zunächst den äußerst schwierigen Begriff ‚Wahrheit' klären.
– Der Begriff des *Sachverhaltes* ist letztlich kaum verzichtbar, auch die neuere Logik greift darauf zurück, etwa in der berühmten Definition der Wahrheit von Alfred Tarski; danach ist ein Satz dann wahr, wenn der Sachverhalt, den er bezeichnet, besteht.
– Vor allem hätten alle wahren bzw. alle falschen Sätze dann *dieselbe* extensionale Bedeutung, wahre (bzw. falsche) Sätze ließen sich extensional gar nicht mehr unterscheiden.

Fazit: Die These, dass die Extension eines Satzes sein *Wahrheitswert* ist, überzeugt nicht; in keinem Fall für einen Satz der normalen Sprache mit konkreter Bedeutung, aber auch für einen formalen Satz wie z. B ‚$x_i \in F$'. Ohnehin lässt sich ja für einen *formalen* Satz mit *Variablen* gar kein fester Wahrheitswert angeben; wie ich aber gezeigt habe, fungieren letztlich auch Konstanten in der formalen Sprache als Variablen.

Ich halte somit daran fest, dass die *Extension eines Satzes* ein *Sachverhalt* ist.

0-3-5-4 INTENSION EINES SATZES

Was ist die Intension eines Satzes? Hierzu gibt es verschiedene Theorien, vor allem:

• Aussage

Intension eines Satzes = die Aussage, die er macht.
Das klingt erst einmal plausibel, ist aber letztlich nichtssagend. Es besagt letztlich nur, dass ein Sachverhalt gegeben ist. Wie soll man eine Aussage semantisch von einem Sachverhalt unterscheiden (vor allem bei einer formalen Theorie)?

Eine Aussage ist im Grunde eine zusätzliche Funktion, die besagt, dass etwas wahr ist. Sie hat weniger einen semantischen Status, als vielmehr einen *pragmatischen*, nämlich den der (Wahrheits-)*Behauptung*, ähnlich wie *Frage*, *Auforderung* u. ä. Da wir aber die Intension als eine *semantische* Komponente verstehen, können wir dir nicht pragmatisch definieren.

• Wahrheitswerte
Intension eines Satzes = sein Wahrheitswert in allen möglichen Welten.
Das ist eine interessante These, die ich in 0-3-5-5 diskutieren werde.

• Begriffs-Relation
Intension eines Satzes = eine Relation zwischen Begriffen („Begriffsverhalt“) bzw. zwischen Begriffsverhalten. Diese Theorie werde ich vertreten, sie passt auch am besten zur Bestimmung der Intension von *Wörtern*, hat allerdings ihre Schwierigkeiten.

Zuweilen bezieht man den Terminus ‚Intension’ nicht generell auf den Satz, sondern auf *bestimmte* Sätze bzw. deren Analyse. Es heißt dann, das z. B. *Glaubens-Sätze* (‚x glaubt, dass F zutrifft’) nicht *extensional*, sondern nur *intensional* zu verstehen und zu analysieren sind. Damit meint man meistens, dass diese Sätze *nicht wahrheitswert-funktional* sind. M. E. ist dieses Kriterium aber wenig geeignet, die Intension eines Satzes zu definieren.

Wesentlich ist: Die Intension richtet sich nur auf *analytische* Beziehungen:
- bei *Atom*-Sätzen: auf analytische Beziehungen zwischen Subjekt und Prädikat
- bei Molekular-Sätzen: auf analytische Beziehungen zwischen den beiden Teilsätzen, zwischen Vordersatz und Nachsatz.

Die Intension eines (deskriptiven) *Zeichen/Wortes* habe ich bestimmt als *Begriff* (oder *Eigenschaft*), genauer als die Menge der *definierenden* Eigenschaften. Entsprechend wird hier festgelegt: Die Intension eines Satzes ist ein „Begriffsverhalt“, d. h. eine *Relation zwischen Begriffen* (oder *Eigenschaften*) bzw. zwischen einfacheren Begriffsverhalten. Der Terminus ‚Begriffsverhalt’ wurde analog zum extensionalen ‚Sachverhalt’ gebildet.
Das Konzept der Intension am tragfähigsten und überzeugendsten bei *material-analytischen* Sätzen, also Sätzen, die unmittelbar auf *Definitionen* beruhen (wie z. B. ‚alle Quadrate sind rechteckig’). Greifen wir wieder zurück auf die obige Satzeinteilung:

1) Individual-Satz
– *normal-sprachlicher* Satz: ‚Sokrates ist Philosoph’.
(material-analytisch verstanden, d. h. dass ‚Philosoph’ zur Definition von ‚Sokrates’ gehört)
Intension ist (der Begriffsverhalt): Der Allgemein-Begriff „Philosoph“ ist Teil(menge) des Individual-Begriffs „Sokrates“ (natürlich könnte man auch von ‚Eigenschaft’ sprechen).
– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$x_i \in_{df} F$’ (Index ‚df’, weil der Satz *per definitionem* gelten soll)
Intension ist: $E(F) \subset E(x_i)$ bzw.: Der Begriff F ist eine Teilmenge des Begriffs x_i.

2) Klassen-Satz
– *normal-sprachlicher* Satz: ’Alle Philosophen sind Erdbewohner’.
Intension ist: Der Begriff „Erdbewohner“ ist Teil des Begriffs „Mensch“.
– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$F \subset_{df} G$’ (Index ‚df’, weil der Satz *per definitionem* gelten soll)
Intension ist: $E(G) \subset E(F)$ bzw.: Der Begriff G ist eine Teilmenge des Begriffs F.

3) Molekular-Satz
– *normal-sprachlicher Satz*: ‚Wenn Sokrates philosophiert, dann ist Sokrates ein Mensch’.
(material-analytisch verstanden, d. h. dass ‚Mensch’ zur Definition von ‚Philosoph’ gehört)
Intension ist (der Begriffsverhalt): Wenn die Eigenschaft „Philosoph“ Teil der Eigenschaft „Sokrates“ ist, dann ist die Eigenschaft „Mensch“ Teil der Eigenschaft „Sokrates“ (weil eben die Eigenschaft „Mensch“ Teil der Eigenschaft „Philosoph“ ist).
– *formal-sprachlicher Satz*: ‚$x_i \in_{df} F \rightarrow_{df} x_i \in_{df} G$’.
Intension: $E(F) \subset E(x_i) \rightarrow E(G) \subset E(x_i)$

4) Synthetischer Satz
Von großer Bedeutung ist die Intension nur bei *analytischen* Sätzen, vor allem *material-analytischen* Sätzen. Bei *synthetischen* Sätzen ist die Extension ungleich wichtiger als die Intension, diese lässt sich auch nur sehr schwer bestimmen, wie ich gleich zeigen werde.

Nehmen wir als Beispiel den *synthetischen* Satz: ‚Einige Quadrate sind blau'.
Zunächst zum Vergleich einen *analytischen* Satz: ‚Alle Quadrate sind rechteckig'.
Zur Erinnerung, hier ist die Intension (der Begriffsverhalt):

Die Eigenschaft „rechteckig" ist Teil(menge) der Eigenschaft „quadratisch".

Kann man bei dem Satz ‚einige Quadrate sind blau' entsprechend die Intension bestimmen als: Die Eigenschaft „blau" ist Teil der Eigenschaft „quadratisch"? Offensichtlich nicht, denn die Intension soll ja die *definitorischen* (bzw. als wesentlich erachteten) Eigenschaften angeben. Für ein Quadrat ist es aber nicht definierend, dass es blau ist, es kann genau so gut rot, grün oder von jeder anderen Farbe sein. Was ist aber dann die Intension dieses Satzes?

Man könnte die Frage stellen, ob ein solcher synthetischer Satz *überhaupt eine Intension* hat, generell ob synthetische Sätze eine Intension besitzen oder nur extensional zu deuten sind. Aber die mögliche Lösung, synthetische Sätze haben keine Intension, wäre doch sehr unbefriedigend. Zunächst bietet sich nur eine *„negative" Intension* an, nämlich:

Intension(‚einige Quadrate sind blau') = die Eigenschaft „blau" ist *nicht* Teil der Eigenschaft „quadratisch".

Halb-formal wäre zu schreiben: E(blau) $\not\subset$ E(quadratisch).

Das könnte man übersetzen: *Einige* Teilbegriffe von „blau" sind nicht Teilbegriffe von „quadratisch". Aus M $\not\subset$ N folgt nicht automatisch N $\not\subset$ M, aber bei unserem Beispiel trifft beides zu. Man könnte also die Intension noch erweitern, als:

E(blau) $\not\subset$ E(quadratisch) $\wedge$ E(quadratisch) $\not\subset$ E(blau)

Nun ergibt sich ein Problem: M $\not\subset$ N heißt genau: *mindestens ein* Element von M ist *nicht* Begriff von N, also ist möglich, dass auch *alle* Elemente von M *nicht* Elemente von N sind.

Dieser Fall ist hier aber nicht gegeben: „quadratisch" und „blau" haben z. B. die Eigenschaft „materiell" gemeinsam, beide sind Eigenschaften von materiellen – und nicht von geistigen – Objekten, man kann also nicht postulieren: *alle* Teilbegriffe von „blau" sind *nicht* Teilbegriffe von „quadratisch" (und umgekehrt), man kann *keinen Ausschluss* zwischen ihnen feststellen. Es lässt sich sogar zeigen, dass es intensional im Grunde *gar keinen Ausschluss* gibt.

Korrekt ist vielmehr: *genau einige* Teile von „blau" sind Teilbegriffe von „quadratisch" – und umgekehrt. Nun trifft dies den Sachverhalt, den man *Überschneidung* nennt. Mit dem Konzept der Überschneidung wäre die Intension des Beispielsatzes wie folgt zu fassen:

Intension(‚einige Quadrate sind blau') = die Eigenschaft „blau" und die Eigenschaft „quadratisch" überschneiden sich.

So käme man also doch zu einer *positiven* Intension

Wir können die intensionalen Beziehungen auch mit *Modalbegriffen* kennzeichnen. Beim synthetischen Satz ‚einige Quadrate sind blau' wäre als Intension zunächst anzusetzen:

Die Eigenschaft „blau" ist *nicht notwendig* und *nicht unmöglich* (= möglich) in Bezug auf die Eigenschaft „quadratisch". Das ließe sich auch wie folgt ausdrücken:

Die Eigenschaft „blau" ist *kontingent* in Bezug auf die Eigenschaft „quadratisch".

0-3-5-5 IST DIE INTENSION DER WAHRHEITSWERT IN ALLEN WELTEN ?

Ich habe oben die Theorie kritisiert, nach der die *Extension* eines Satzes ein *Wahrheitswert* sei. Es gibt eine entsprechende Theorie, nach welcher die *Intension* eines Satzes sein *Wahrheitswert in allen möglichen Welten* sei. Manchmal wird auch differenziert: Die Intension eines Satzes ist eine *Funktion*, die ihm in jeder möglichen Welt einen Wahrheitswert zuweist. Aber dies ändert nichts Grundsätzliches an der Theorie.

Ich werde diese Theorie am Beispiel des aussagen-logischen Satzes ‚$X \rightarrow Y$' diskutieren. Dies könnte inhaltlich z. B. folgender Satz sein:
‚Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich'.

Die Intension von ‚$X \rightarrow Y$' wäre nach der obigen Theorie, gemäß der Wahrheitstafel:
wahr in der Welt $X \wedge Y$, falsch in der Welt $X \wedge \neg Y$
wahr in der Welt $\neg X \wedge Y$, wahr in der Welt $\neg X \wedge \neg Y$

Aber es ist recht kompliziert, immer anzugeben: Ein Satz ‚$X \rightarrow Y$' ist in dieser Welt wahr und in jener Welt falsch. Einfacher kann man *direkt* auf die *Welten* bzw. *Sachverhalte* Bezug nehmen und sie – wenn der Satz falsch ist – negieren. So ergibt sich für den Satz ‚$X \rightarrow Y$':
Intension von ‚$X \rightarrow Y$': $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$,
also eine Disjunktion der „wahren" Welten, der Welten, in denen ‚$X \rightarrow Y$' wahr ist.
Nun lassen sich folgende Einwände erheben:

Erstens ist zu sagen, dass diese Theorie letztlich nur für *Molekular-Sätze* gilt, die mit *aussagen-logischen* Junktoren wie $\rightarrow$, $\wedge$ oder $\vee$ verbunden sind. Ein Satz wie ‚Sokrates ist Philosoph' ist nur für *eine* Welt als „wahr" definiert. Bei solchen Atom-Sätzen greift die Intensions-Definition nicht, und das bedeutet natürlich eine erhebliche Einschränkung.

Zweitens, nach dieser Theorie sind alle *logisch äquivalenten* Sätze auch *intensional gleich*, z. B. $X \rightarrow Y \Leftrightarrow \neg X \vee Y$. Ich möchte aber die Behauptung der intensionalen Gleichheit von ‚$X \rightarrow Y$' (‚wenn X, dann Y') und ‚$\neg X \vee Y$' (‚nicht X oder Y') kritisieren, denn ‚$X \rightarrow Y$' und ‚$\neg X \vee Y$' haben verschiedene Bedeutung. Das würde auch folgendes Experiment zeigen: Die wenigsten Menschen (wenn nicht gerade Logiker) würden sicher ‚$X \rightarrow Y$' und ‚$\neg X \vee Y$' als bedeutungsgleich ansehen. Logische Äquivalenz ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend für intensionale Gleichheit. Sonst wären ja z. B. auch alle logischen Gesetze (Tautologien) bedeutungsgleich.

Drittens passen die geschilderte extensionale und die intensionale Satztheorie nicht wirklich zusammen.

Die *Extension* eines Satzes soll der Wahrheitswert sein, eine *empirische* Kategorie. Die Extension lässt sich somit auch nur bei einem *inhaltlichen* Satz bestimmen (Ausnahme: tautologische bzw. kontradiktorische Sätze, denn ein tautologischer Satz ist auch *empirisch* sicher wahr und ein kontradiktorischer Satz ist auch *empirisch* sicher falsch).

Die *Intension* eines Satzes – als Wahrheitswert in allen möglichen Welten – ist aber eine *theoretische* Kategorie. Die Intension eines Satzes ist dann ganz unabhängig von seiner Extension, die Intension z. B. vom Satz ‚$X \rightarrow Y$' bleibt gleich, unabhängig davon, ob der Satz ‚$X \rightarrow Y$' bzw. ein inhaltlicher Satz wie ‚Wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich' empirisch wahr ist oder nicht.

Ich bleibe also bei meinem Modell: *Extension* eines Satzes ist ein *Sachverhalt*, *Intension* ist ein *Begriffsverhalt*, parallel zur Extension und Intension von Zeichen bzw. Wörtern.

0 – 4 KOPULA

0-4-1 Die Bedeutung der Kopula

0-4-1-1 DEFINITION DER KOPULA

Als Inbegriff der *Kopula* dient sprachlich das ‚ist', dieses ‚ist' steht für eine logische *Relation*. Grundsätzlich können wir 2 Arten von logischen Relationen unterscheiden:

- *Kopula*-Relationen: Relationen der Form: X *ist* ein Y
- *Nicht-Kopula*-Relationen: z. B.: X *oder* Y, X *und* Y

Wir werden später noch diskutieren, inwieweit letztlich doch eine *Äquivalenz* zwischen *logischen* Kopula- und Nicht-Kopula-Relationen besteht.

Zu den Nicht-Kopula-Relationen gehören aber auch *hyper-logische* (bzw. *hyper-korrelative*) Relationen, z. B. X *weil* Y (Kausal-Relation), X *nach* Y (Zeit-Relation) u. ä.; allerdings enthalten die hyper-korrelativen Relationen als Teil auch eine Kopula-Relation.

Die *Kopula* bzw. Kopula-Relation ist die wohl wichtigste Relation, die *Basis-Relation*, in unserer Sprache, unserem Denken, vielleicht auch real. Sie entspricht sprachlich wie gesagt vor allem dem *„ist"* bzw. grammatischen Variationen wie „sind" usw. Wir verwenden sie wortwörtlich z. B. in Individual-Sätzen wie ‚Sokrates *ist* ein Philosoph'.

Prinzipiell wäre es auch möglich, die Kopula als *generelle* bzw. generalisierte Aussagenfunktion zu deuten und somit von dem „ist" zu lösen. Dann wäre *jeder* Satz letztlich ein Kopula-Satz, weil er eben eine Aussage macht. Allerdings möchte ich nicht so weit gehen.

0-4-1-2 ATOM- UND MOLEKÜL-SÄTZE

Eine wichtige Unterscheidung ist die von *Atom-Sätzen* und *Molekül-Sätzen*: Ein Atom-Satz enthält, anders als der Molekül-Satz, keine Untersätze. Die Unterscheidung wird an vielen Stellen dieses Buches thematisiert, muss allerdings, gerade in der Logik, auch relativiert werden. So ist z. B. der Satz der *Mengen-Logik* ‚$F \subset G$' ein Atom-Satz, während er, formuliert in *Quantoren-Logik,* als ‚$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$' ein Molekular-Satz ist. Gerade für die *Kopula* spielt die Unterscheidung von Atom-Sätzen und Molekül-Sätzen eine wichtige Rolle.

Ebenso ist es sinnvoll, zur Analyse der Kopula auf den Unterschied zwischen *Oberflächen-Struktur* und *Tiefen-Struktur* zurückzugreifen (vgl. 0-1-5-3). Als *Oberflächen-Struktur* eines Satzes zählt die Form, in der er geschrieben ist; die *Tiefen-Struktur* ist eine veränderte Form, welche die *logischen* bzw. *semantischen* Strukturen klarer und expliziter abbildet.

- Atom-Sätze

Atom-Sätze (bzw. Atom-Relationen) sind wie beschrieben *einfache* Sätze, die keine weiteren Sätze (Relationen) als Teile enthalten. Für sie ist die Kopula am einfachsten zu bestimmen, zunächst in der *Oberflächen-Struktur*: Z. B. ‚Sokrates ist Philosoph' oder ‚Sokrates ist weise'. Hier taucht das ‚ist' direkt im Satz auf. Wie man sieht, lässt sich die Kopula sowohl mit *Nomen* als auch mit *Adjektiven* (und auch mit Verben) verbinden.

Formal-logisch könnte man dafür schreiben: $x \in F$: x ist Element der Klasse F, das $\in$ symbolisiert die Kopula, das $\in$ bedeutet somit eine fast vollständige Übersetzung des ‚ist'.

Bei manchen Sätzen taucht in der Oberflächen-Struktur des Satzes das Wort ‚ist' nicht auf, aber man kann eine Tiefen-Struktur postulieren, in welcher die Kopula auftritt. Z. B. ‚Sokrates gehört zu den Philosophen'. Diese Tiefen-Struktur wäre dann zu formulieren als ‚Sokrates ist Philosoph' oder noch allgemeiner: ‚Sokrates ist Element der Klasse der Philosophen'. Denn dies entspricht der formal-logischen (extensionalen) Struktur $x \in F$. Und so würde man auch ‚Sokrates ist Philosoph' *und* ‚Sokrates gehört zu den Philosophen' beide formalisieren.

• Molekül-Sätze
Molekül-Sätze (bzw. Molekül-Relationen) sind wie beschrieben *komplexe* Sätze, die weitere Sätze (Relationen) als Teile enthalten. Für sie ist die Kopula sehr viel schwieriger zu bestimmen. Es gibt nämlich weder in der normalen Sprache, noch in der Logik Molekular-Sätze, bei denen die Kopula *in ihrer eigentlichen Form* in der *Oberflächen-Struktur* auftritt.

Eine typische Kopula-Struktur für Molekular-Sätze ist *wenn-dann*. Z. B. ‚*Wenn* Sokrates Philosoph ist, *dann* ist er Denker'. Als Kopula-Tiefenstruktur kann man ansetzen: „Sokrates ist Philosoph, *ist*, er ist Denker". Bei *formal-logischen* Molekular-Sätzen dient in erster Linie die *Implikation* $\rightarrow$ als Kopula: z. B. $x \in F \rightarrow x \in G$

Es gibt aber Sätze bei denen auch in der Tiefen-Struktur *keine Kopula* auftritt. Das sind einmal logische Sätze wie die *Konjunktion* $(x \in F) \wedge (x \in G)$.

Dies sind andererseits *außer-logische* Sätze wie z. B. der *Kausal-Satz*: ‚weil X, darum Y'. Dieser enthält aber als Komponente den Kopula-Satz ‚wenn X, dann Y'. Insofern X Ursache von Y ist, gilt eben auch: wenn X (als Ursache) auftritt, dann muss auch Y (als Wirkung) auftreten; nur sagt der Kausal-Satz darüber hinaus aus, dass Y von X *verursacht* wird.

0-4-1-3 KOPULA-DEUTUNG IN DER NORMALEN SPRACHE

Je nach Stufe (Element, Klasse, Relation) und je nach Ausrichtung werden in der *normalen Sprache* unterschiedliche Wörter und Konstruktionen zum Ausdruck der Kopula-Funktion verwendet, vor allem:

– *Konjugationen des Hilfsverbs ‚sein'*: ich bin, du bist, er/sie/es *ist*, wir sind, ihr seid, sie sind bzw. andere Zeitangaben: ‚ich war' usw.)
– *Zahlwörter*: ‚alle Menschen sind sterblich' (für: ‚der Mensch *ist* sterblich')
– *Vollverben*: ‚er denkt' (für: ‚er *ist* ein Denkender')
– *Satz-Konstruktionen*: ‚wenn er Durst hat, trinkt er' (für: ‚er hat Durst, *ist*, er trinkt') usw.

Obwohl manche Formulierungen mit ‚ist' ungewöhnlich oder sogar grammatisch falsch sind, kann man das ‚ist' doch als generelle, einheitliche und neutrale Form der Kopula auffassen.

Es erweist sich als schwierig, die Bedeutung dieser einheitlichen Kopula auf *einen* Begriff zu bringen; vielleicht ist die beste Deutung: *Teilhabe*, *partielle Identität* oder *partielle Gleichheit*. Z. B. „Sokrates ist Philosoph" wäre dann zu verstehen als „Sokrates hat Teil an der Philosophie". Allerdings kann das ‚ist' auch bereits für *vollständige* Gleichheit, Identität bzw. Äquivalenz stehen, aber das ist die Ausnahme.

0-4-1-4 KOPULA-DEUTUNG IN DER LOGIK

In der logischen Sprache sind die sprachlichen Darstellungen der Kopula viel geringer als in der normalen Sprache, weil eben die Logik nur einen bestimmten Bereich der Wirklichkeit thematisiert, nämlich nur korrelative Relationen zwischen Objekten bzw. Eigenschaften.

So gibt es in der Logik keine Differenzierung zwischen erster, zweiter und dritter *Person*, die logische Sprache kennt nur die dritte Person; entsprechend existiert keine Konjugation in der Logik, ein Kopula-Zeichen wie ‚$\in$' wird nicht konjugiert. Auch gibt es in der reinen Logik keine *Zeit*, die Kopula-Relation ist hier *zeitlos*; dies im Gegensatz zur natürlichen Sprache, in der verschiedenen Zeitstufen wie Präsens, Perfekt, Imperfekt, Futur auch für die Kopula unterschieden werden – entsprechend er *ist*, er *war*, er *ist gewesen*, er *wird sein* usw.

Dennoch findet man auch in der Logik verschiedene Darstellungen der Kopula, in Verbindung mit verschiedenen Logik-Kalkülen. Um nur die bekanntesten bzw. gebräuchlichsten Formalisierungen bzw. Deutungen aufzuführen:

- Individuen-Relationen (Atom-Relationen):
  – extensional: $x \in F$
  – gemischt extensional-intensional: Fx
- Mengen-Relationen (Atom- oder Molekül-Relationen, je nach Logik)
  – Klassen-Logik: $F \subset G$
  – Quantoren-Logik:
  extensional: $\Lambda x(x \in F \rightarrow x \in G)$
  gemischt: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
  – Prädikaten-Logik
  extensional: $(x_1 \in F \rightarrow x_1 \in G) \wedge ... \wedge (x_n \in F \rightarrow x_n \in G)$
  gemischt: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
- Struktur-Relationen (Molekular-Relationen):
  Implikations-Relation $A \rightarrow B$

Nur wird eben normalerweise nicht erkannt und nicht ausgewiesen, dass es sich hier prinzipiell um *dieselbe* Relation handelt, die *Kopula-Relation*. Die *extensionale* und die gemischte *extensionale-intensionale* Darstellung sind strukturell gleich, somit können wir zunächst die extensionale-intensionale Darstellung zurückstellen. Auch die hier nicht aufgeführte *intensionale* Darstellung lässt sich (wie ausführlich erläutert) mengentheoretisch darstellen und braucht nicht extra berücksichtigt zu werden. So ergibt sich nur folgende Unterscheidung:

- Individuen-Relationen: Element-Relation $\in$
- Mengen-Relationen: Teilmengen-Relation $\subset$
- Molekular-Relationen: Implikations-Relation $\rightarrow$

Man kann aber die *Element*-Relation ($\in$) und die *Teilmengen*-Relation ($\subset$) zusammenfassen, in beiden geht es um ein *Enthaltensein*, beide nutzen die Sprache der *Mengenlehre;* so kommt man hier mit dem *Teilmengen-Relator* $\subset$ aus. Dagegen nutzt man üblicherweise für *Molekular*-Relationen die *Aussagen-Logik*, und zwar den *Implikator* ($\rightarrow$).

0-4-1-5 ZWEI GRUND-DEUTUNGEN DER KOPULA

Es gilt also primär nur 2 Deutungen der Kopula zu unterscheiden:

1. *Mengen-Lehre*: Teilmengen-Relation ($\subset$)
   Die verwendet man bei *atomaren* Relationen (einfachen Sätzen):
   Individuen-Relationen wie $x \subset F$ oder Mengen-Relationen wie $F \subset G$.
   Diesen Ansatz nenne ich *mengen-relational* oder kurz *relational*.

2. *Aussagen-Logik*: *Implikation* ($\rightarrow$)
   Die verwendet man bei *molekularen* Relationen (komplexen Sätzen),
   zur Verknüpfung von atomaren Relationen, z. B.: $(F \subset G) \rightarrow (F \subset H)$.
   Diesen Ansatz nenne ich *wahrheits(wert)-funktional* oder kurz *funktional.*

Wichtig ist: Der *relationale* Ansatz muss nicht *extensional* ausgerichtet sein, d. h. sich auf *Objekte* bzw. *Objekt-Mengen* beziehen. Denn man kann – *intensional* – *Eigenschaften* auch als *Eigenschafts-Mengen* bestimmen, und zwischen solchen Eigenschafts-Mengen (intensionalen Mengen) können ebenfalls *Teilmengen-Relationen* bestehen. Nur für eine *extensional-intensional gemischte* Darstellung ist der relationale Ansatz nicht geeignet.

Ebenso ist der *funktionale* Ansatz offen für eine extensionale oder intensionale und auch für eine gemischte Deutung. Dabei muss er sich nicht notwendig auf *Mengen* beziehen.

Es geht in der Wissenschaft immer darum, möglichst eine *einheitliche* Darstellung und Deutung zu finden, und dies ist auch das besondere Ziel der *Integralen Logik.* Nach meinen Untersuchungen lässt sich zeigen: Bei der *Teilmengen-Relation* $\subset$ und der *Implikation* $\rightarrow$ (bzw. der Positiv-Implikation $*\!\rightarrow$) handelt es sich strukturell um *dieselbe* Relation. Und dann ist es wesentlich übersichtlicher, man verwendet auch nur *ein* Symbol hierfür.

Ich werde im Folgenden zwei Möglichkeiten durchspielen:

- erstens nur Verwendung der *Mengen-Theorie* (mit dem Symbol $\subset$)
- zweitens nur Verwendung der *Aussagen-Logik* (mit dem Symbol $\rightarrow$).

0-4-2 Kopula als Teilmengen-Relation

0-4-2-1 INDIVIDUEN-RELATIONEN

Individuen-Relationen können zwischen zwei oder mehreren Individuen bestehen, sind aber vorrangig *Relationen zwischen Individuen und Mengen* bzw. Klassen.

Normalerweise verwendet man bei *extensionalen* Individuen-Relationen das Symbol ‚$\in$'. Aber für die einheitliche Formalisierung kann man das Teilmengen-Symbol ‚$\subset$' verwenden, um so mehr, als sich ein Individuum auch als *ein-Element-Menge* auffassen lässt.

$x_i \subset F$ = x_i ist *Element* der Klasse F (bzw. eben x_i ist Teilmenge der Klasse F)

Beispiel: „Sokrates ist Philosoph" = „Sokrates ist Element der Klasse der Philosophen".

Streng extensional formuliert: „Das individuelle Objekt Sokrates ist Teilmenge der Objekt-Klasse der Philosophen".

Auf die *intensionale* (bzw. extensional-intensional gemischte) Darstellung der Kopula-Funktion verzichte ich hier wie gesagt. Man kann die Auffassung vertreten, dass auf der Ebene der *Individuen* überhaupt *nur* die Kopula-Relation im Sinne von „ist Element von" als logische Relation vorkommt, natürlich einschließlich der *Negation*: „ist nicht Element von", weil es nur diese 2 Möglichkeiten einer Beziehung eines Individuums zu einer Klasse gebe (so finden sich in der Mengenlehre für Individuen-Relationen auch nur die Zeichen $\in$ und $\notin$).

0-4-2-2 MENGEN-RELATIONEN / KLASSEN-RELATIONEN

Es geht hier um Relationen zwischen *Mengen* bzw. zwischen *Klassen.*

So wie man individuell sagt ‘Sokrates ist ein Philosoph’, kann man allgemein sagen ‘alle Philosophen sind Denker’. Oder, wenn man genau das ‘ist’ verwenden will: ‘Der Philosoph ist ein Denker’.

In der – tiefen-strukturellen – Sprache der extensionalen *Mengen-Lehre* heißt das: ‘Die Klasse der Philosophen ist eine Teilmenge der Klasse der Denker’. Streng: ‘Die Objekt-Klasse der Philosophen ist eine Teilmenge der Objekt-Klasse der Denker’.

$F \subset G$ = Die Klasse F ist Teilmenge der Klasse G

Die wichtigsten Relationen zwischen Klassen bzw. Mengen sind wiederum die Kopula-Relationen oder *Teilmengen*-Relationen, und zwar die folgenden:

$F \subset G$	Teilmenge F ist (echte) Teilmenge von G	*Alle F sind G, einige G sind F*
$F \not\subset G$	Nicht-Teilmenge F ist nicht Teilmenge von G	*Einige F sind nicht G*
$F = G$	Identität F ist Teilmenge von G, G ist Teilmenge von F *Alle F sind G, alle G sind F*	

Entsprechendes gilt für die *Umkehrung* der Teilmengen-Relation: $F \supset G$ (F enthält G als Teil) und deren Negation. Zwar sind auch andere logische Relationen zwischen Mengen möglich, z. B. *Überschneidung*. Aber sie spielen eine geringere Rolle, worauf schon verweist, dass es keine gebräuchlichen Zeichen dafür gibt.

0-4-2-3 MOLEKULAR-RELATIONEN – UNSTRUKTURIERT

Es geht hier um *Relationen zwischen Relationen*. Diese nenne ich *Molekular-Relationen*, im Gegensatz zu den *Atomar-Relationen* (Relationen zwischen Individuen bzw. Mengen).

Aber in der Logik werden diese Molekular-Relationen oft *ganzheitlich*, ohne ihre Struktur erfasst, in dem man ihnen die Buchstaben ‚A' und ‚B' zuordnet. So wird z. B. eine Relation $F \subset G$ gleich A gesetzt, ohne ihre Struktur zu berücksichtigen.

Dabei wird gerade hier die *sprachliche* Deutung herausgehoben, indem man ‚A' und ‚B' als „Aussagen" oder „Sätze" bezeichnet.

Der wohl wichtigste Relator zur Verbindung von Relationen ist der *Implikator* $\rightarrow$ (bzw. $*\rightarrow$). Es handelt sich hierbei um die *Kopula*. Nur ist die Kopula-Funktion oft nicht direkt erkennbar. Man spricht nicht: 'A ist B', stattdessen: 'A impliziert B'. Oder: 'Wenn A dann B'. Oder: 'Aus A folgt B'.

Formal schreibt man herkömmlich: $A \rightarrow B$

Heißt: „Die Aussage A impliziert die Aussage B" oder „Wenn die Aussage A wahr ist, ist auch die Aussage B wahr".

Nun geht es hier darum zu zeigen, dass sich auch für *Molekular-Relationen* eine Kopula-Deutung mit $\subset$ geben lässt, vereinfacht, dass man für $A \rightarrow B$ auch $A \subset B$ einsetzen kann.
Die *Mengen-Deutung* für $A \subset B$ ist allerdings ungewöhnlich. Angenommen es gilt:

A: Der Himmel regnet B: Die Strasse ist nass

Dann ist zu interpretieren: „Die Fälle, in denen der Himmel regnet, sind eine Teilmenge der Fälle, in denen die Strasse nass ist". (Statt von *Fällen* könnte man auch von *Welten* sprechen.) Exakter: „Die Klasse der Fälle, in denen der Himmel regnet, sind eine Teilmenge der Klasse der Fälle, in denen die Strasse nass ist". Denn die Strasse kann ja auch aus anderen Gründen nass werden, z. B. weil jemand seinen Wagen wäscht. Allgemeiner: „Die Klasse der Welten, in denen A gültig ist, ist eine Teilmenge der Klasse der Welten, in denen B gültig ist".

0-4-2-4 MOLEKULAR-RELATIONEN – STRUKTURIERT

Aus Sicht der Integral-Logik ist der Bezug auf *Aussagen* aber wie gesagt nicht notwendig. Es geht – strukturell – um *Molekular-Relationen*, z. B. der Form:

$F_1 \subset G \rightarrow F_2 \subset H.$

Wenn F_1 Teilmenge von G ist, dann ist F_2 Teilmenge von H.
Man setzt also $A = F_1 \subset G$ und $B = F_2 \subset H$.

Bei diesem Beispiel ist aber die eigentliche Struktur der Molekular-Relation nicht berücksichtigt, weil wir auf die Symbole ‚A' und ‚B' zurückgreifen. Nehmen wir daher ein genaueres Beispiel.

Zunächst formal: $(F \subset G) \subset (G \subset H)$.

Bedeutet: „Die Klasse der Relationen $F \subset G$ ist eine Teilmenge der Klasse der Relationen $G \subset H$".

Konkretes Beispiel: „Die Klasse der Relationen, dass die Klasse der Lehrer eine Teilmenge der Klasse der Zeitungsleser ist, ist Teilmenge der Klasse der Relationen, dass alle Zeitungsleser auch Kinogänger sind".

0-4-2-5 ZUSAMMENFASSUNG

Bei der *Teilmengen-Relation* $\subset$ geht es um ein *Enthaltensein*. Hierzu werden, je nach Anwendung auf Individuen oder Mengen/Klassen, 2 verschiedene Zeichen $\in$ und $\subset$ verwendet, was aber nicht notwendig ist. Ich wähle nur das Zeichen $\subset$ für die Teilmengen-Relation. Dann ergeben sich folgende (extensionale) Möglichkeiten:

- $x \subset F$: Das Individuum x ist Teilmenge der Klasse F
- $F \subset G$: Die Klasse F ist Teilmenge der Klasse G
- $A \subset B$: Die Relation A ist Teilmenge der Relation B

- $\Phi \subset \Psi$: Die Komponente Φ ist Teilmenge der Komponente Ψ

So wäre unter Absehung der speziellen Anwendung allgemein zu schreiben.

Will man die herkömmliche *Kopula-Formulierung* (mit ‚ist') verwenden, müsste man sagen:
• $x \subset F$: x ist ein F • $F \subset G$: Jedes F ist G • $A \subset B$: A ist (immer) B

0-4-3 Kopula als Implikation

0-4-3-1 WAHRHEITSWERT-FUNKTIONALE DEUTUNG

Bei dieser Deutung geht es darum, dass eine Relation eine andere Relation *impliziert*. Dabei ist die *Implikation* $\rightarrow$ neutral gegenüber extensionaler oder intensionaler Interpretation. Man kann sie durchaus auf Mengen und Klassen anwenden; nur bestimmt man keine Teilmengen-Relation zwischen diesen, sondern eben eine implikative Relation.

Allerdings ist ein wichtiger Unterschied zwischen der *Teilmengen-Relation* $\subset$ und der *Implikation* $\rightarrow$ zu beachten. Die Implikation ist, wie überhaupt alle Relatoren der Aussagen-Logik, *wahrheitswert-funktional* definiert. Das bedeutet: Der *Wahrheitswert* der Gesamtaussage $A \rightarrow B$ ist eine *Funktion* der Wahrheitswerte der Einzel-Aussagen A bzw. B. Oder kurz: Wenn A wahr ist und B wahr ist, dann ist auch $A \rightarrow B$ wahr. Formal: $(A \wedge B) \Rightarrow (A \rightarrow B)$. Man kann den *implikativen* Ansatz daher auch *wahrheits(wert)-funktionalen* oder kurz *funktionalen* Ansatz nennen.

Dies in Abgrenzung zum *mengen-relationalen* Ansatz. Dort wird eine solche Deutung nicht vorgenommen: Wenn die Mengen X und Y belegt („gefüllt") sind, heißt dies noch nicht, dass X Teilmenge von Y ist. Es gibt allerdings Ausnahmen: Wenn $\{X\} = \varnothing$, dann gilt $\{X\} \subset \{Y\}$, denn die leere Menge ist Teilmenge jeder anderen Menge.

Ich verwende hier zur Einfachheit zwar die *normale Implikation* $X \rightarrow Y$, aus Gründen der *Paradoxien* dieser Implikation wäre aber eigentlich die *Positiv-Implikation* $X \ast\!\!\rightarrow Y$ zu gebrauchen (vgl. 0-2-5-5), die eine wirkliche Parallele zur Mengen-Relation $X \subset Y$ darstellt.

Die Interpretation von *Atom-Sätzen* mittels der Implikation, z. B. einer *Wenn-dann-Relation*, ist und klingt ungewöhnlich, hat aber durchaus ihre Plausibilität und Eleganz, wenn man sich auf diese Formulierungen einlässt. Dagegen ist die Implikation bei *Molekular-Sätzen* die gewohnte Kopula-Deutung.

0-4-3-2 INDIVIDUEN-RELATION

Die Individuen-Relation wäre zu schreiben:

$x \rightarrow F$ bzw. $x_1 \rightarrow F$.

Oder wenn man herausstellen will, dass es sich bei F um eine *Klasse* (und nicht um eine *Eigenschaft* handelt): $x_1 \rightarrow K(F)$

Im Beispiel: „Sokrates → Philosoph".

Normale Sprache:

Mit Verwendung des Begriffs ‚impliziert' könnte man interpretieren:

„Sokrates impliziert die Klasse der Philosophen".

Aber andere Deutungen sind plausibler, z. B. mit „*wenn – dann*", womit die Implikation ja meistens wiedergegeben wird.

„Wenn Sokrates existiert, ist die Klasse der Philosophen belegt (nicht leer)".

„Wenn die ein-Element-Klasse Sokrates belegt ist, dann ist auch die Klasse der Philosophen belegt" u. ä.

Oder: „Es ist nicht wahr, dass Sokrates existiert und die Klasse der Philosophen leer ist".

Formale Sprache:

Formal ergeben sich entsprechende Deutungen, z. B. für $x_1 \rightarrow F$:

„Wenn das Individuum x_1 existiert, dann hat die Klasse F mindestens ein Element".

Hier sind auch extensional-intensional gemischte Deutungen möglich, z. B.:

„Wenn x_1 existiert, dann hat die Eigenschaft F mindestens einen Träger".

0-4-3-3 MENGEN-RELATION

Es geht hier um die Mengen-Relation / Klassen-Relation, z. B. $F \rightarrow G$ bzw. $K(F) \rightarrow K(G)$; dabei steht ‚K' für Klasse (da → ebenso für *intensionale* Deutungen steht, kann man durch Einfügen von ‚K' die *extensionale* Interpretation unterstreichen).

Dabei bieten sich folgende *Deutungen* an:

„Wenn die Klasse F belegt („gefüllt") ist, dann auch die Klasse G".

„Wenn die Klasse F mindestens ein Element besitzt, dann auch die Klasse G".

Im Beispiel: K(Philosoph) → K(Denker).

„Die Klasse der Philosophen impliziert die Klasse der Denker".

„Wenn die Klasse der Philosophen belegt ist, ist auch die Klasse der Denker belegt"

Auch *intensionale* Relationen sind so darzustellen, z. B. E(Blume) → E(Rose).

„Der Begriff der Blume impliziert den Begriff der Rose".

Allerdings sind hier Missverständnisse möglich. Normal-sprachlich würde man eher umgekehrt formulieren, also: ‚Der Begriff der Rose impliziert den Begriff der Blume'; aber das ist nicht wirklich intensional, denn intensional weist der Pfeil in die andere Richtung wie extensional. In der Sprache der *Mengen-Theorie* wäre wie folgt zu formulieren:

extensional:	K(Rose) → K(Blume).	Die Klasse der Rosen ist Teilmenge der Klasse der Blumen
intensional:	E(Blume) → E(Rose)	Die Eigenschafts-Klasse „Blume" ist Teilmenge der Eigenschafts-Klasse „Rose"

0-4-3-4 MOLEKULAR-RELATION

Für Molekular-Relationen ist die *Implikation* → wie gesagt die *übliche* Darstellung der Kopula-Funktion. Hier wählt man sprachlich meistens die *Wenn-dann-Form*.

Beispiele wurden bereits gebracht.

Formal-sprachlich:

$A \rightarrow B$ in der Aussagen-Logik oder in der Quantoren-Logik $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

Halb-Formal:

Die Sonne scheint → Das Wasser ist warm

Normal-sprachlich:

‚Wenn die Sonne scheint, ist das Wasser warm' usw.

Nun sind neben der Implikation $A \rightarrow B$ andere *implikative* Beziehungen zu unterscheiden, die eine Kopula-Funktion haben können, insbesondere:

Implikation	$A \rightarrow B$
Verneinte Implikation	$A \rightarrow \neg B$
Replikation	$A \leftarrow B$
Verneinte Replikation	$\neg A \leftarrow B$

(Mit Einschränkung auch die *Äquivalenz* $A \leftrightarrow B$ oder verneinte Äquivalenz $A \leftrightarrow \neg B$.)

0-4-3-5 ZUSAMMENFASSUNG

Mit dem Implikator → ergeben sich folgende Möglichkeiten:

- Individuen-Relation: $x \rightarrow F$
- Klassen-Relation: $F \rightarrow G$ bzw. $M \rightarrow N$
- Molekular-Relation: $A \rightarrow B$

Wie gesagt abstrahiert die Integral-Logik wo möglich von diesen Unterschieden und schreibt allgemein $X \rightarrow Y$ bzw. noch allgemeiner: $\Phi \rightarrow \Psi$, mit der Bedeutung:

„Wenn Φ (positiv) ist, dann ist auch Ψ (positiv)“

„Φ und Ψstehen in der Relation der Implikation“

„Φ impliziert Ψ“

Die Implikations-Deutung ist bei *Relationen* (Sätzen) üblich, aber bei *Objekten* (Wörtern) ungewöhnlich. Sie wird hier dennoch auch auf Individuen und Mengen angewandt, die durch den Relator quasi *relationiert* werden, also selbst in eine Relation umgewandelt werden.

Aus „Sokrates“ wird „Sokrates existiert“.

Aus „Klasse Mensch“ wird „Die Klasse Mensch hat Elemente“.

0-4-4 Probleme der Kopula

0-4-4-1 KOPULA- UND NICHT-KOPULA-RELATIONEN

Allerdings kann hier folgender Einwand gemacht werden: Es ist nicht berechtigt, den *Kopula-Relator* Implikation und andere implikative Relationen bzw. Relatoren von den übrigen logischen Relatoren als *Nicht-Kopula-Relatoren* abzugrenzen.

Diese übrigen Relatoren wie z. B. ∧ oder ∨ lassen sich *in die Implikation umformen* (jedenfalls mit Verwendung der Negation oder anderer Relatoren). Z. B.:

$A \wedge B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow \neg B)$

Umgekehrt lässt sich die Implikation in andere Junktoren umformen, z. B.

$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ oder $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

$\neg(A \wedge \neg B)$ übersetzt man hier am besten mit: „Es ist nicht wahr, dass A wahr ist und B falsch ist“; $\neg A \vee B$ mit „A ist falsch oder B ist wahr“.

Die These ist also: Es gibt letztlich keinen relevanten Unterschied zwischen Kopula-Relationen und nicht Kopula-Relationen, sie sind *logisch äquivalent.* Man könnte höchstens sagen, dass sich die *Kopula-Funktion* zwar am direktesten durch die Implikation ausdrücken lässt, indirekt aber auch durch Umformungen der Implikation.

Gegen diesen Einwand ist Folgendes zu erwidern:

Erstens, die entsprechenden Ausdrücke wie $A \rightarrow B$ und $\neg(A \wedge \neg B)$ sind zwar *logisch äquivalent*, aber nicht *bedeutungsgleich*. Dies wurde schon im Punkt 0-3-5 genauer begründet.

Zweitens, der normal-sprachlichen Kopula entspricht sehr viel besser die *Positiv-Implikation* $A^{*}\!\rightarrow B$ als die Implikation $A \rightarrow B$. Und die Positiv-Implikation lässt sich nicht in eine Konjunktion, Disjunktion oder eine andere Relation umformen; denn die Positiv-Implikation $A *\!\rightarrow B$ ist nur für 2 Welten definiert, dagegen sind $A \wedge B$, $A \vee B$ usw. jeweils für 4 Welten definiert. Ich werde zwar im Folgenden zunächst die *normale* Implikation weiter verwenden (weil sie besser eingeführt ist), man muss aber bedenken, dass sich die Aussagen oft besser auf die Positiv-Implikation beziehen lassen.

0-4-4-2 ATOM- UND MOLEKULAR-RELATIONEN

Insbesondere ist es berechtigt, betreffend Kopula- versus Nicht-Kopula-Relationen einen *Unterschied* zwischen *Atomar-Relationen* und *Molekular-Relationen* zu konstatieren:

Bei den *Atomar*-Relationen geht es vorrangig um die *Kopula-Relation.* Man könnte sogar die konsequente These vertreten, dass bei Atomar-Relationen *nur* die Kopula Sinn macht, nicht dagegen Relatoren wie Konjunktor $\wedge$, Disjunktor $\vee$ u. a.

Z. B. ist K(Philosoph) $\rightarrow$ K(Mensch) implikativ recht unproblematisch zu interpretieren, nämlich: „Wenn die Klasse der Philosophen belegt ist, dann auch die Klasse der Menschen“.

Schwieriger ist dagegen die Deutung eines *Atom*-Satzes wie ‚K(Philosoph) $\wedge$ K(Mensch)’.

In erster Linie betrifft dieses Problem aber Atom-Relationen, in denen ein *Individuum* vorkommt (bzw. Atom-Sätze mit Individuumszeichen). Ob ein *Individual-Satz* mit *Konjunktion* – – wie $x \wedge F$, z. B. ‚Sokrates $\wedge$ Mensch’ – sich plausibel interpretieren lässt, kann man in Frage stellen. Die Konjunktion ‚Sokrates $\wedge$ Mensch’ (nur in 1 Welt wahr) ist ja noch stärker als die Äquivalenz ‚Sokrates $\leftrightarrow$ Mensch’ (in 2 Welten wahr) – und schon die macht wenig Sinn.

Allerdings hatten wir ’Sokrates ist ein Mensch’ auch übersetzt mit: ‚Es ist nicht wahr, dass Sokrates existiert, aber kein Mensch existiert’. Dieser Satz besitzt aber die logische Struktur $\neg(x \wedge \neg F)$; hier wird also doch die Konjunktion in einem *Individual*-Satz verwendet, wenn auch in *negierter* Form (damit in 3 Welten wahr).

Bei den *Molekular*-Relationen sind dagegen *alle* Relatoren bzw. Junktoren sinnvoll anzuwenden und gebräuchlich.

$A \wedge B$, $A \vee B$, $A \mid B$, $A >\!< B$, $A >\!- B$, $A -\!< B$ usw.

0-4-4-3 WÖRTER VERSUS SÄTZE

Ich habe oben die *implikative* oder funktionale Interpretation bei *Wörtern* (bzw. Objekten) eingeführt. Diese Überlegungen könnten dazu führen, den Unterschied zwischen Wörtern und Sätzen (bzw. Objekten und Relationen / Sachverhalten) generell zu relativieren. Man sagt nicht nur von Sätzen, sondern auch von Wörtern, dass sie „wahr“ oder „falsch“ sind. Man geht davon aus, dass sich grundsätzlich für alle Entitäten angeben lässt, ob sie positiv („wahr“) oder negativ („falsch“), besser „belegt“ oder „nicht belegt“ (= „leer“) sind.

Das lässt sich folgendermaßen begründen:

Wörter (Zeichen) haben wie Sätze eine *Doppelfunktion*:

- *Bezeichnung*
- *Existenz-Behauptung* (bzw. Wahrheits-Behauptung).

0-4-4-4 DOPPELFUNKTION VON SÄTZEN

Bei einem *Satz* geht man zunächst davon aus, dass er wahr ist; er enthält *implizit* eine *Wahrheits-Behauptung*. So ist der Satz ‚Sokrates ist ein Mensch’ zu verstehen als: ‚Es ist wahr, dass Sokrates ein Mensch ist’. Natürlich kann der Satz auch falsch sein, dann kennzeichnet man das normalerweise durch eine *Negation*: ‚Sokrates ist *kein* Mensch’ oder mit Verwendung von ‚falsch’: ‚Es ist falsch, dass Sokrates ein Mensch ist’. Für diesen Satz gilt dann allerdings wiederum die implizite Wahrheitsbehauptung: ‚Es ist wahr, dass es falsch ist, dass Sokrates ein Mensch ist’.

In der Wahrheitstafel der Logik wird einem Satz entsprechend als *möglicher* Wert sowohl „wahr“ wie „falsch“ zugeordnet. Man kann also sagen, dass ein Satz einerseits einen Sachverhalt *bezeichnet*, andererseits eine *Wahrheits-Behauptung* vornimmt, nämlich dass der Sachverhalt besteht.

0-4-4-5 DOPPELFUNKTION VON WÖRTERN

Entsprechend kann man bei *Wörtern* diese *Doppelfunktion* feststellen: z. B. der Name ‚Sokrates’: Er *bezeichnet* einerseits die Person Sokrates, andererseits behauptet er *implizit* auch die *Existenz* von Sokrates. Man könnte ‚Sokrates’ daher verstehen als ‚Sokrates existiert’. Damit würde ein Wort quasi bereits zu einem Satz. Eine Aussage wie ‚Sokrates ist Philosoph’ wäre dann zu verstehen als: ‚Sokrates existiert und ist Philosoph’. Will man ausdrücken, dass Sokrates nicht existiert, müsste man ein ‚nicht’ vor den Namen setzen: ‚nicht Sokrates’, im Sinne: „es ist nicht wahr, das Sokrates existiert“; allerdings ist diese Schreibweise in der normalen Sprache nicht üblich.

Genauso wie man für einen Satz eine *Wahrheitstafel* aufstellt, so könnte man dies auch für ein Wort tun. Man kann auch hier die *möglichen Welten* unterscheiden: das Wort ist „wahr“, d. h. es bezeichnet etwas Existierendes, oder es ist „falsch“, seine Extension ist leer.

Es ist im Grunde nicht einzusehen, warum man diesbezüglich eine strikte Abgrenzung von Sätzen und Zeichen/Wörtern vornehmen soll: Sätze bezeichnen etwas (oder sagen etwas aus) und behaupten Wahrheit, Wörter dagegen bezeichnen nur etwas – nein, man kann Wörter auch so verstehen, dass sie Existenz behaupten. Natürlich geht es hier nicht um alle Wortklassen, nicht um Partikel usw. Man könnte allerdings einschränken und sagen, dass Wörter nur *im Kontext einer Relation*, also innerhalb eines Satzes, eine Existentbehauptung besitzen und nicht eigenständig als Satz fungieren.

Ähnlich wird auch in der herkömmlichen *Quantoren-Logik* verfahren: Aus „Alle Menschen sind sterblich“ der normalen Sprache macht die Logik: „Für alle x gilt: wenn sie Menschen sind, dann sind sie sterblich“. Formal: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$. D. h. das Zeichen/Wort ‚Mensch’ wird in einen *Konditional-Satz* umgewandelt ‚wenn sie Menschen sind’. Betrachtet man die vollständige Konstruktion, wird aus ‚Mensch’ sogar ein *Satzgefüge*: ’Für alle x gilt’(Hauptsatz): ‚wenn sie Menschen sind...’ (Nebensatz).

Diese Überlegungen leiten über zum Modell einer einheitlichen *funktionalen Logik*.

0-4-5 Funktionale Logik

0-4-5-1 GENERELLER FUNKTIONALER ANSATZ

Ich habe zwei *einheitliche* Ansätze zur Interpretation der Kopula diskutiert:

- Kopula als *Teilmengen-Relation* (Mengen-Lehre)
- Kopula als *Implikations-Relation* (Aussagen-Logik)

Ich halte das *implikative Modell* für überlegen. Man kann es, wie schon oben bemerkt, auch das *funktionale Modell* nennen, weil hier der Wahrheitswert einer Relation (eines Satzes oder einer Struktur) eine *Funktion* der Wahrheitswerte der Relata ist, natürlich einschließlich der Definition der Relation. Eine solche *wahrheitswert-funktionale Semantik* ist in der Aussagen-Logik bekannt, man kann z. B. aus der Wahrheit der Sätze ‚A' und ‚B' auf die Wahrheit von ‚A $\rightarrow$ B' als Gesamtsatz schließen.

Mein Ansatz geht aber weiter. Ich kann auch bei dem Satz ‚Sokrates ist Philosoph' ($x_1 \rightarrow F$) aus der „Wahrheit" von ‚Sokrates' und ‚Philosoph' auf die Wahrheit des Gesamtsatzes schließen. Allgemein: Man vermag aus der *Gültigkeit/Ungültigkeit* der Relata die Gültigkeit/Ungültigkeit des Relationssystems ableiten. Ich verwende den Begriff der Gültigkeit (Ungültigkeit) also nicht eingeschränkt auf logische Schlüsse, wie dies sonst häufig vorgenommen wird. Im Speziellen lässt sich für *Gültigkeit* bzw. *Ungültigkeit* festlegen:

- *Abstrakte Entitäten*
  - Klasse: hat Elemente (+), hat keine Elemente, ist leer (–)
  - Individuum: ist definiert (+), ist nicht definiert (–)
  - Relation: ist positiv (+), ist negativ (–)
- *Real*
  - Ding: existiert (+), existiert nicht (–)
  - Sachverhalt: besteht (+), besteht nicht (–)
- *Sprachlich*
  - Wort: hat eine Extension (+), hat keine Extension (–)
  - Satz: ist wahr (+), ist falsch (–)
- *Psychisch*
  - Begriff: hat Träger (+), hat keinen Träger (–)
  - Urteil: ist richtig (+), ist falsch (–)

Allerdings sind verschiedene *Einwände* gegen dieses Modell denkbar, von denen ich jetzt drei im Einzelnen diskutieren werde.

0-4-5-2 EINWAND: SINNLOSIGKEIT VON NICHT-EXISTENZ-AUSSAGEN

Ich habe gesagt, dass man dem Wort ‚Sokrates' zwei Werte zuweisen kann: „gültig" oder „nicht gültig": Sokrates existiert – Sokrates existiert nicht. Nun könnte man einwenden: Eine Aussage wie ‚Sokrates existiert nicht' ist unsinnig. Denn wenn Sokrates nicht existiert, lässt sich ja keine Aussage über ihn machen, nicht einmal die Aussage seiner Nicht-Existenz – man gerät in eine *Paradoxie*. Man könnte andererseits ‚Sokrates existiert' als Tautologie bezeichnen, denn man könne eben nur etwas über ihn aussagen, wenn er existiert.

Dieser Einwand ist, wenn man es genau sieht, korrekt, allerdings betrifft er nicht nur den funktionalen Ansatz; sondern es geht um ein bekanntes Problem in der Philosophie, z. B. wird ja auch von „*leeren Mengen*" gesprochen wird, was letztlich die gleichen Probleme aufwirft.

Eine entsprechende Situation besteht bei *negativen* oder *nicht bestehenden Sachverhalten* (z. B. „Sokrates ist kein Mensch"). Man könnte die Problematik auch weiter ausdehnen und sagen: Es gibt keine *negativen* Sachverhalte – also alle Sachverhalte der Art „x ist kein F", „alle F sind keine G" usw. sind unsinnig.

Man kann sich diesen Problemen aber leicht entziehen durch einen Rückgriff auf die *sprachliche* Ebene, die *Meta-Ebene*. Denn es ist sehr wohl sinnvoll zu sagen:

Das Wort (der Name) ‚Sokrates' hat *eine* Extension.

Oder eben: Das Wort (der Name) ‚Sokrates' hat *keine* Extension.

Bzw.: Es gibt nichts, das von dem Wort ‚Sokrates' bezeichnet wird.

Dies lässt sich auch durch eine Relation fassen: Das Wort ‚Sokrates' steht zu keinem realen Objekt in der Relation der Bezeichnung.

Auch um solchen Schwierigkeiten zu entgehen, hat sich die neuere Logik überwiegend von der *realen* Objekt-Ebene zur *sprachlichen* Meta-Ebene orientiert, insbesondere von den *Sachverhalten* abgewandt und den *sprachlichen* Relationen, *Aussagen* oder *Sätzen* zugewandt. Ich halte dieses Problem aber insgesamt für vernachlässigbar.

0-4-5-3 EINWAND: DYSFUNKTIONALE ÜBERSETZUNG

Wird durch die funktionale Umformung die Aussage wirklich inhaltlich getroffen? Kann man wirklich folgendermaßen übersetzen?

„Sokrates ist Philosoph" in:

„Wenn Sokrates existiert, dann ist die Klasse der Philosophen belegt" oder:

„Wenn (der Eigenname) ‚Sokrates' eine Extension besitzt, dann besitzt auch (der Prädikator) ‚Philosoph' eine Extension".

Zunächst kann man denken, diese Übersetzung bzw. Analyse wird der ursprünglichen Struktur prinzipiell gar nicht gerecht. Denn wenn im ersten Fall Sokrates existiert und es Philosophen gibt, heißt das denn schon, dass Sokrates ein Philosoph ist? Aber wenn Sokrates und die Klasse der Philosophen eben in bestimmter Weise *zusammen* belegt oder nicht belegt sind, dann drückt dies offensichtlich genau die Kopula-Bedeutung „ist" aus.

Oder drückt „Sokrates ist Philosoph" eine (partielle) *Identität* aus, die Übersetzung dagegen nur eine *Korrelation*, die auch zufällig sein könnte? Man könnte postulieren, „Sokrates ist weise" sagt eben aus, dass die Weisheit *an* der Person Sokrates auftritt, z. B. an der gleichen *Raum-Zeit-Stelle*.

Ob die Aussage durch die *funktionale Umformulierung* wirklich *vollständig* erfasst wird, das wäre in weiteren Untersuchungen zu klären. Eventuell müsste man unterscheiden zwischen einer *rein funktionalen*, korrelativen Kopula-Aussage und einer *hyper-korrelativen* Kopula-Aussage, die noch zusätzliche Eigenschaften besitzt; aber die Basis ist in jedem Fall die korrelative Aussage, die sich auch durch Implikation darstellen lässt.

Eine ähnliche Problematik ergibt sich auch bei *Molekül-Sätzen*:

z. B. ‚Wenn es regnet, ist die Strasse nass'.

Bei diesem Wenn-dann-Satz liegt offensichtlich nicht nur eine *Korrelation* vor, sondern auch eine *Kausalbeziehung*. Dagegen:

z. B. ‚Wenn ein Mensch groß ist, ist er besonders klug'.

Dieser Zusammenhang mag stimmen oder auch nicht, aber wenn, wäre er nach unserem Wissen rein *zufällig*, keine Kausalrelation.

0-4-5-4 EINWAND: KEINE EXISTENZ-BEHAUPTUNG

Der dritte Einwand hängt speziell mit der *Implikation* zusammen. Er besagt: Die Implikation $X \rightarrow Y$ ist so definiert, dass sie auch wahr ist, wenn X falsch ist.

Im Beispiel: Der Satz ‚Sokrates → Philosoph' wäre demnach auch wahr, wenn ‚Sokrates' falsch ist, also Sokrates nicht existiert. Dies entspricht nun in der Tat gar nicht dem normal-sprachlichen Satz. Aber dieses Problem ergibt sich nicht durch das funktionale Modell, sondern durch die Definition der Implikation (die Problematik der Implikation beschäftigt uns an vielen Stellen in diesem Buch).

Man kann der Schwierigkeit entgehen, wenn man die *Positiv-Implikation* X *→ Y verwendet, denn die ist wie beschrieben nur für die Fälle definiert, in denen X wahr ist, im Beispiel, wenn Sokrates existiert.

0-4-5-5 FAZIT

1. Ich halte den *Implikations-Ansatz* (funktionales Modell) zur Darstellung der Kopula für überlegen, auch im Hinblick auf Wörter/Zeichen bzw. Objekte. Es ist ein Modell mit großer Kompetenz zur *Vereinheitlichung*. Man kann es sowohl auf Extensionen wie Intensionen beziehen. Und es wirkt – technisch – eleganter.

2. Allerdings hat das implikative Modell auch Nachteile: So ist die Darstellung als *Teilmengen-Relation* (z. B. „die Klasse der Mathematiker ist eine Teilmenge der Klasse der Wissenschaftler“) *ontologisch* unproblematischer als die implikative Darstellung „wenn jemand Mathematiker ist, dann ist er auch Wissenschaftler“ oder in der konjunktiven Umformung „es ist nicht möglich, dass jemand Mathematiker, aber nicht Wissenschaftler ist“); denn es ist fraglich, wie eine *Konditional-Beziehung* (wenn – dann) oder ein ausgeschlossener, *negativer Sachverhalt* ontologisch einzuordnen sind. Allenfalls die Formulierung mit ‚impliziert’ ist ontologisch einigermaßen unproblematisch, aber gerade bei Klassen ungewöhnlich, z. B. „die Klasse der Mathematiker impliziert die Klasse der Wissenschaftler“. Auch verbindet man mit dem Begriff der *Extension* eines (kopulativen) Satzes eher eine *Mengen*-Relation als eine *Wenn-dann*-Relation. Hier ist der *Mengen-Ansatz* überlegen.

Auch *partikuläre* (oder statistische) Aussagen wie ‚*einige* F sind G’ lassen sich durch Mengen-Relationen einfacher darstellen. *Funktional* müsste man z. B. formulieren: ‚Wenn F realisiert ist, dann ist in *einigen* Fällen auch G realisiert’.

3. Obwohl ich das Implikations-Modell dennoch insgesamt für überlegen halte, werde ich im Wesentlichen an der *üblichen* Darstellung festhalten,

- dass man nämlich bei *Wörtern* (bzw. *Atom-Relationen*) den Mengen-Ansatz verwendet, also die Kopula als *Teilmengen-Relation* darstellt (z. B. $x_i \subset F$) und
- dass man nur bei *Sätzen* (bzw. *Molekül-Relationen*) die Kopula als Implikation darstellt (z. B. $A \rightarrow B$).

Diese Differenzierung kann man als ‚*kombiniertes Modell*’ bezeichnen.

Der primäre Grund für diese Wahl ist: Ich möchte mich möglichst weitgehend in den bekannten Logikbahnen bewegen, um meinen Text nicht unnötig schwierig zu gestalten.

0 – 5 SYNTHETISCH UND ANALYTISCH

0-5-1 Gegenüberstellung

Der Unterschied zwischen *synthetisch* und *analytisch* wurde schon mehrfach angesprochen, soll aber erst jetzt systematisch und ausführlich erläutert werden.

Ich bin bisher überwiegend von *synthetischen* Relationen (bzw. Sätzen) ausgegangen. Doch die Logik zielt primär auf die *analytischen* Relationen, vor allem auf *Schlüsse* oder *Folgen*. Man bezeichnet auch die ganze Logik als „Lehre von der Folgerichtigkeit“.

Der Unterschied zwischen synthetischen und analytischen Relationen (bzw. Sätzen, Aussagen, Urteilen, Sachverhalten) ist von großer Bedeutung, in der Logik, in der Sprachphilosophie, aber im Grunde in der gesamten Philosophie. Diese Unterscheidung spielt auch im vorliegenden Buch eine wesentliche Rolle, sie ist sogar maßgeblich in die *inhaltliche* Unterteilung des Buches eingegangen. Allerdings ist es kompliziert und umstritten, wie man „analytisch“ und „synthetisch“ am besten definiert. Ich möchte hier zunächst fünf Möglichkeiten diskutieren. Dabei wählt man am günstigsten einen s*prachlichen* Ansatz, d. h. man geht von *Sätzen / Aussagen* aus und nicht neutral von *Relationen* (und auch nicht von Sachverhalten).

Folgende Parameter dienen zur *Unterscheidung* von synthetischen und analytischen Sätzen:

- enthalten sein / neu hinzukommen
- zerlegen / zusammenfügen
- sichere Wahrheit / unsichere Wahrheit
- vollständige theoretische Wahrheit / partielle theoretische Wahrheit
- theoretische Wahrheitsprüfung / empirische Wahrheitsprüfung

Dabei konzentriere ich mich in diesem einführenden Punkt 0-5-1 auf *einfache* (atomare) sowie *inhaltlich* bestimmte analytische / synthetische Sätze der *normalen Sprache*.

0-5-1-1 ENTHALTEN SEIN ODER NEU HINZUKOMMEN

Bezüglich dieser Dichotomie ergibt sich folgender Unterschied zwischen analytischen und synthetischen Sätzen:

– *analytischer* Satz: das Prädikat ist im Subjekt bereits *enthalten*.

Z. B. der Satz ‚alle Ehemänner sind verheiratet’. Hier ist der Begriff „verheiratet“ schon im Begriff „Ehemann“ enthalten.

– *synthetischer* Satz: das Prädikat ist im Subjekt *nicht enthalten*, fügt ihm Neues hinzu.

Z. B.: ‚alle Ehemänner sind glücklich’. Hier ist das Prädikat nicht im Subjekt enthalten, das zeigt sich auch schon daran, dass dieser Satz offensichtlich falsch ist.

Genauer geht es hier aber nicht um das Prädikat (z. B. ‚sind verheiratet’), sondern um den Prädikat-*Begriff* (‚verheiratet’), man spricht auch von ’Prädikatsnomen’ oder ‚Prädikativum’.

Entsprechend geht es um den Subjekt-*Begriff*. Präzise können wir dann sagen:

- *synthetischer* Satz: der Prädikat-Begriff ist *nicht* im Subjekt-Begriff enthalten.
- *analytischer* Satz: der Prädikat-Begriff ist im Subjekt-Begriff schon enthalten.

0-5-1-2 ZERLEGEN ODER ZUSAMMENFÜGEN

Die obige Definition hat eine Schwäche. Man betrachtet nämlich nicht nur einen Satz wie ‚alle Ehemänner sind verheiratet' als *analytisch*, sondern auch den Satz ‚alle Ehemänner sind unverheiratet'. Hier ist der Prädikat-Begriff „unverheiratet" aber gerade *nicht* im Subjekt-Begriff „Ehemänner" *enthalten*, sondern vielmehr *ausgeschlossen*. Im ersten Fall liegt eine *Tautologie* vor, im zweiten Fall eine *Kontradiktion*.

Wir unterscheiden somit:

analytisch-*tautologische* Sätze
analytisch-*kontradiktorische* Sätze

Um auch solche kontradiktorischen Fälle zu erfassen, könnte man modifiziert formulieren:

• *analytischer* Satz: das Prädikat kann durch *Zerlegung* des Subjekts gefunden werden.

Dies passt auch deswegen, weil *Analyse* ja wörtlich Zerlegung bedeutet. Durch Analyse des Begriffs „Ehemann" kann man sowohl den *notwendigen* Begriff „verheiratet" wie den *unmöglichen* Begriff „unverheiratet" finden.

• *synthetischer* Satz: das Prädikat wird nur durch Hinzufügung, Zusammenfügung gefunden.

Auch dies passt besonders gut, weil das Wort ‚Synthese' wörtlich *Zusammenfügung* bedeutet. Im Begriff „Ehemann" findet man nicht den Begriff „glücklich", dieser verhält sich zufällig zum Begriff „Ehemann". Sondern der Prädikatbegriff wird hinzugefügt.

0-5-1-3 SICHERE ODER UNSICHERE WAHRHEIT

Man betrachte folgende zwei Beispiel-Sätze:

– ‚Dieser Junggeselle ist blond'.
– ‚Dieser Junggeselle ist unverheiratet'.

Der erste Satz kann wahr sein oder falsch, seine Wahrheit ist somit *ungewiss*, nicht sicher. Der zweite Satz ist dagegen *mit Sicherheit* wahr, ein Falschsein ist ausgeschlossen.

Man kann diese Unterschiede mit Hilfe der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* genau angeben. Die theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = r/n$ gibt an: erstens, die Anzahl der logisch möglichen Welten (= n), zweitens, in wie vielen dieser Welten der Satz wahr ist (= r). Anders gesagt, die theoretische Wahrscheinlichkeit gibt an, wie sicher die Wahrheit eines Satzes ist. Diese Wahrscheinlichkeit wird im Punkt 0-5 nur informell eingeführt und verwendet, eine genaue und systematische Darstellung erfolgt in Kap. 3 und Kap. 4.

Wir bestimmen nun die *Sicherheit* mittels der theoretischen Wahrscheinlichkeit:

– Zum Satz ‚Dieser Junggeselle ist blond':

Er hat eine Chance von 50%, wahr zu sein (bzw. falsch zu sein), seine theoretische Wahrscheinlichkeit beträgt somit 0,5. Dieser Satz ist *synthetisch*.

– Zum Satz ‚Dieser Junggeselle ist unverheiratet':

Da er sicher wahr ist, hat er eine theoretische Wahrscheinlichkeit von 1,0. Dieser Satz ist *analytisch-tautologisch*.

Wir können festhalten:

• *synthetischer* Satz: er hat eine theoretische Wahrscheinlichkeit < 1 und > 0
• *analytisch-tautologischer* Satz: er hat eine theoretische Wahrscheinlichkeit von 1

Kontradiktionen sind weniger bedeutsam als Tautologien. Sie haben eine theoretische Wahrscheinlichkeit von 0. Wir können zusammenfassend sagen: Analytische Sätze haben eine *deterministische* theoretische Wahrscheinlichkeit, d. h. den Wert 1 oder den Wert 0.

0-5-1-4 VOLLSTÄNDIGE ODER PARTIELLE THEORETISCHE WAHRHEIT

Dieser Punkt knüpft am vorausgegangenen an. Wir können unterscheiden zwischen einer *empirischen* und einer *theoretischen* Wahrheit. Die theoretische Wahrheit nenne ich auch *Tautologie*. Es geht es hier in erster Linie um Wahrheit *innerhalb eines Systems*. Man nennt die theoretische Wahrheit oft auch *‚logische Wahrheit'*, etwas missverständlich, denn all diese Bestimmungen finden im Rahmen der Logik statt, sind also gewissermaßen „logisch".

Nun lässt sich *quantitativ* gleichsetzen:

theoretische Wahrscheinlichkeit = theoretische Wahrheit

Der theoretischen Wahrscheinlichkeit entspricht somit quantitativ ein Grad an theoretischer Wahrheit, man kann auch sagen ein *Tautologie-Grad*.

Auch wenn die theoretische *Wahrscheinlichkeit* und die theoretische *Wahrheit* quantitativ *den gleichen Wert* haben, können wir doch *semantisch* unterscheiden:

– für den synthetischen Satz: ‚Dieser Junggeselle ist blond' gilt:
er ist *mit* 50 % (theoretischer) Wahrscheinlichkeit (empirisch) wahr
er ist *zu* 50% (theoretisch) wahr, zu 50% tautologisch

– für den analytischen Satz: ‚Dieser Junggeselle ist unverheiratet' gilt:
er ist *mit* 100 % (theoretischer) Wahrscheinlichkeit (empirisch) wahr
er ist *zu* 100% (theoretisch) wahr, zu 100% tautologisch

Zwar lassen sich auch interessante Aussagen über die *empirische* Wahrheit von synthetischen und analytischen Sätzen machen, z. B. ist ein *tautologischer* Satz auch immer *empirisch wahr* und ein *kontradiktorischer* Satz immer *empirisch falsch*. Dennoch, zur Abgrenzung von analytischen und synthetischen Sätzen dient nur die *theoretische* Wahrheit. Es gilt also:

• analytischer Satz

– Tautologien sind *theoretisch* vollständig wahr (100%)

– Kontradiktionen sind *theoretisch* gar nicht wahr bzw. vollständig falsch (0%)

• synthetischer Satz

Synthetische Sätze sind theoretisch partiell wahr, sie haben einen partiellen *Grad von theoretischer Wahrheit* (zwischen 0% und 100% bzw. zwischen 0 und 1).

0-5-1-5 THEORETISCHE ODER EMPIRISCHE WAHRHEITSPRÜFUNG

Wir können auch anstatt vom *Wahrheitsstatus* des Satzes selbst auszugehen, die Notwendigkeit einer (empirischen) *Prüfung* des Satzes als Kriterium der Unterscheidung von synthetisch und analytisch verwenden.

Dies ist eine fünfte, mehr *pragmatische* Bestimmung. Hier gilt:

• *analytischer* Satz: seine Wahrheit kann durch *theoretische Analyse* bestimmt werden – bzw. bedarf es gar keiner Untersuchung.

Um zu beurteilen, ob eine analytische Relation (ein analytischer Satz) *empirisch* wahr ist, muss ich keine empirischen Untersuchungen vornehmen. Dass der Satz ‚Jeder Ehemann ist verheiratet' wahr ist, weiß ich *a priori*, ich muss dazu nicht Ehemänner untersuchen, sondern nur die *Definitionen* meiner Sprache kennen. Ebenso weiß ich, dass der Satz ‚jeder Ehemann ist unverheiratet' falsch ist. Allerdings wäre es *möglich*, einen solchen Satz auch empirisch zu *prüfen*: Ich muss dann eben alle Ehemänner z. B. befragen, ob sie verheiratet sind.

Für die Ermittlung der *theoretischen* Wahrheit muss ich einen Satz natürlich ohnehin nicht empirisch untersuchen, sondern eine theoretische Analyse vornehmen, obwohl es normalerweise evident ist, ob ein Satz tautologisch bzw. kontradiktorisch ist oder nicht.

• *synthetischer* Satz: seine *empirische* Wahrheit muss durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden. Z. B. der Satz: ‚Jeder Ehemann ist glücklich'.

Um zu beurteilen, ob dieser synthetischer Satz wahr ist, muss ich empirische Untersuchungen anstellen: Beobachtung, Befragung, Experiment usw. Ich kann die Wahrheit oder Falschheit des Satzes nur *a posteriori* feststellen. Denn dieser Satz kann offensichtlich wahr oder falsch sein (real dürfte er wie gesagt falsch sein); um die Richtigkeit herauszufinden, muss ich Ehemänner befragen und statistische Methoden verwenden. Aber auch bei einem *synthetischen* Satz muss / kann ich die *theoretische* Wahrheit durch theoretische Analyse feststellen.

Im vorliegenden Punkt haben wir uns auf *einfache*, *normal-sprachliche, material-analytische (bzw. synthetische)* Sätze als Beispiele konzentriert. Im Folgenden geht es primär um *formal-logische*, *molekulare* Sätze, d. h. aussagen-logische Sätze wie ‚$X \rightarrow Y$'.

0-5-2 Synthetische Relationen

0-5-2-1 BESTIMMUNG

Zur zusammenfassenden Definition von „synthetisch" greife ich zunächst auf die in 0-5-1 vorgestellten Ansätze zurück.

Für einen *synthetischen* Satz gilt:

- das Prädikat(snomen) ist im Subjekt *nicht enthalten*
- das Prädikat wird *nicht durch Analyse* gefunden
- seine empirische Wahrheit ist *nicht sicher*, er kann wahr sein oder falsch
- er ist *theoretisch* nicht vollständig wahr (und nicht vollständig falsch)
- seine (empirische) Wahrheit muss durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden.

0-5-2-2 SYNTAKTISCHE BESTIMMUNG

Ich habe bisher nur *logisch-semantische* Kriterien angegeben. Man kann aber auch *syntaktische* Kriterien zur Abgrenzung von synthetisch und analytisch verwenden. Für einen synthetischen Satz gilt, *syntaktisch* betrachtet:

Rechts und *links* von der *Kopula* ‚ist' (oder einem entsprechenden Ausdruck) stehen nur unterschiedliche deskriptive Zeichen, z. B. ‚Sokrates – ist – Philosoph'.

Speziell für aussagen-logische Relationen kann man formulieren:

Rechts und *links* vom *Relator* stehen *nur unterschiedliche* deskriptive Zeichen.

Also z. B. $X \rightarrow Y$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$ usw.

Man kann das allerdings auch *semantisch* deuten:

Bei einer synthetischen Relation sind die *Relata* unterschiedlich, d. h. es werden unterschiedliche *Objekte (*bzw. Eigenschaften) miteinander in Beziehung gebracht.

0-5-2-3 MATERIAL UND FORMAL

Man unterscheidet normalerweise nur zwischen material-analytisch und formal-analytisch, aber man kann entsprechend auch zwischen *material-synthetisch* und *formal-synthetisch* unterscheiden. Zu Erklärung müssen wir am besten auf die Bestimmungen von *material*-analytisch und *formal*-analytisch vorgreifen (vgl. 0-5-3-4).

Material

- Material-analytisch ist ein Satz, dessen Wahrheit (oder Falschheit) auf *Definitionen* beruht, z. B. ‚alle Junggesellen sind unverheiratet'. Ein Junggeselle ist definiert als ‚unverheirateter Mann', insofern ist der Beispielsatz laut Definition wahr.
- *Material-synthetisch* ist daher ein Satz, dessen Wahrheit (oder Falschheit) *nicht* auf Definitionen beruht, z. B. ‚alle Junggesellen sind blond'; denn der Begriff ‚blond' gehört nicht zur Definition von ‚Junggeselle'.

Formal

- Formal-analytisch ist ein Satz, dessen Wahrheit allein auf *logischen Gesetzen* beruht, z. B. ‚alle Junggesellen sind Junggesellen' oder $X \Rightarrow X$. (Und $X \Rightarrow X$ ist ein logisches Gesetz.)

• *Formal-synthetisch* ist daher ein Satz, dessen Wahrheit nicht allein auf logischen Gesetzen beruht. Somit ist z. B. auch der material-analytische Satz ‚alle Junggesellen sind unverheiratet' ein formal-synthetischer Satz, entsprechend $X \rightarrow Y$.

0-5-2-4 ATOMAR UND MOLEKULAR

Ein *Atom-Satz* ist wie beschrieben ein *einfacher* Satz, ein *Molekular-Satz* dagegen ein *komplexer*, aus mehreren Teilsätzen zusammengefügter Satz, wobei die genaue Abgrenzung jedoch schwierig ist.

• Atom-Satz

Ein *synthetischer* Atomsatz ist z. B. ‚Peter ist Weinliebhaber' (*prädikaten-logisch*: $x \in F$). Wir hatten synthetisch u. a. definiert: Man kann aus dem Subjekt nicht auf das Prädikat schließen, das Prädikat ist nicht im Subjekt enthalten. Im Beispiel: Aus ‚Peter' können wir nicht auf ‚(ist) Weinliebhaber' schließen. *Aussagen-logisch* wird ein Atom-Satz *ohne Struktur* dargestellt, also z. B. als ‚X'. ‚X' könnte *material*-analytisch sein, aber nicht *formal*-analytisch – und darauf kommt es hier an, daher können wir ‚X' als *synthetisch* bestimmen.

• Molekular-Satz

Im Beispiel: ‚Wenn Peter Weinliebhaber ist, dann ist Peter auch Zigarrenliebhaber'. Dies ist offensichtlich ein synthetischer Satz. Hier liegt logisch gesehen eine Implikation vor, formal $X \rightarrow Y$. Wiederum: ‚$X \rightarrow Y$' könnte *material*-analytisch sein, aber nicht *formal*-analytisch.

Die *Implikation* $X \rightarrow Y$ hat bekanntlich folgende *Wahrheitstafel*:

	$X \rightarrow Y$	
1.	+ + +	$X \wedge Y$
2.	+ – –	$X \wedge \neg Y$: in dieser Welt ist $X \rightarrow Y$ falsch
3.	– + +	$\neg X \wedge Y$
4.	– + –	$\neg X \wedge \neg Y$

Daraus können wir erstens sehen: Entsprechend wie wir oben sagten, der Prädikat-Begriff ist nicht (semantisch) im Subjekt-Begriff enthalten, gilt hier: das *Folgeglied* Y ist nicht im *Vorderglied* X enthalten.

Anders gesagt: Man kann die Gültigkeit von Y (Folgeglied) nicht erkennen, in dem man X (Vorderglied) analysiert. In der vertrauten Sprache der Aussagenlogik: Man kann die Wahrheit von Y (Nachsatz) nicht erkennen, in dem man X (Vordersatz) analysiert.

Wie die Wahrheitstafel zeigt: Wenn ich weiß, dass X wahr ist, weiß ich noch nichts über die Wahrheit von Y – wenn mir nicht bekannt ist, ob der Gesamtsatz $X \rightarrow Y$ wahr ist; Y kann wahr sein (1. Zeile) oder falsch (2. Zeile).

0-5-2-5 TAUTOLOGIE-GRAD

Man kann aber nicht nur angeben, ein synthetischer Satz ist *nicht (ganz) tautologisch* und ist *nicht (ganz) kontradiktorisch*, sondern genauer den *Grad der Tautologie* bzw. den Grad der Kontradiktion bestimmen. Denn wie schon beschrieben, gebe ich auch für synthetische Sätze einen Tautologie-Grad an, der auf der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* beruht.

Z. B. $X \rightarrow Y$ kann empirisch wahr sein oder falsch, je nachdem, wofür X und Y stehen. Bei synthetischen Sätzen hängt die Wahrheit also von der *Bedeutung* ab, man kann für einen *formalen* Satz wie $X \rightarrow Y$ nicht vorab sagen, ob er empirisch wahr ist, man muss zunächst wissen, was ‚X' und ‚Y' bedeuten; so kann man z. B. für den *inhaltlich bestimmten* Satz ‚Es regnet → die Strasse ist nass' angeben, dass er wahr ist.

Allerdings ist es a priori *wahrscheinlicher*, dass der formale Satz X → Y wahr ist. Denn wie man in der Wahrheitstafel sieht: in 3 von 4 möglichen Fällen gilt X → Y als wahr. Anders gesagt: Obwohl die Relation X → Y synthetisch ist, ist sie zu 3/4 *tautologisch*. Diese Bestimmung dürfte ungewohnt sein, weil man normalerweise davon ausgeht, dass synthetische Sätze keinen oder jedenfalls nicht einen so hohen Tautologiegrad haben.

Man kann den *Grad der Tautologie* berechnen nach dem *Wahrheitswertverlauf*, konkret:

$$\frac{\text{Anzahl der +}}{\text{Anzahl der + und –}}$$

D. h. man berechnet die Anzahl der Welten, in denen die Relation *positiv* (+) ist, in Relation zu der *Gesamtanzahl* der Welten (+ und –).

0-5-3 Analytische Relationen

0-5-3-1 BESTIMMUNG

Analytische Relationen sind 1) *Tautologien* oder 2) *Kontradiktionen*.

Für eine *Tautologie* gilt:
- das Prädikat ist im Subjekt *enthalten*, fügt ihm nichts Neues hinzu
- das Prädikat wird nur durch *Analyse* des Subjekts gefunden
- ihre (empirische) Wahrheit ist *vollständig sicher*
- sie ist theoretisch *vollständig wahr*, ist in allen möglichen Welten wahr
- ihre (empirische) Wahrheit muss *nicht* durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden

Für eine *Kontradiktion* gilt:
- das Prädikat ist im nicht Subjekt *enthalten*, wird vielmehr von ihm ausgeschlossen
- das Prädikat wird durch Analyse des Subjekts, nämlich dessen Verneinung gefunden
- ihre (empirische) Falschheit ist *vollständig sicher*
- sie ist theoretisch *vollständig falsch*, ist in allen möglichen Welten falsch
- ihre (empirische) Falschheit muss *nicht* durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden

0-5-3-2 SYNTAKTISCH

Sowohl für Tautologien wie für Kontradiktionen gilt: *links* und *rechts* von der *Kopula*, dem Junktor, dem Relator o. ä. finden sich *(partiell) gleiche* Zeichen.

z. B. Tautologie: $X \Rightarrow X$, $(X \wedge Y) \Rightarrow X$, $X \vee \neg X$

z. B. Kontradiktion: $(X \vee \neg X) \nRightarrow (X \wedge \neg X)$

(Allerdings gibt es hier Ausnahmen, Pseudo-Tautologien wie $X \Rightarrow Y \vee \neg Y$, vgl. später.)

0-5-3-3 TAUTOLOGIE VERSUS KONTRADIKTION

- *Tautologien*

Wir hatten ursprünglich (für einen *Atom-Satz*) bestimmt: Ein Satz ist *analytisch*, wenn der Prädikats-Begriff im Subjekt-Begriff enthalten ist. Z. B.: ‚Jeder Junggeselle ist unverheiratet'.

Bei einem logischen *Molekular-Satz*, einer *Implikation,* kann man entsprechend sagen: Eine Implikation ist analytisch-tautologisch, wenn das *Nachglied* im *Vorderglied* enthalten ist.
Als Beispiel die *Abtrennungs-Regel*:

(X	$\wedge$	Y)	$\Rightarrow$	Y
+	+	+	+	+
+	−	−	+	−
−	−	+	+	+
−	−	−	+	−

Bei diesem Beispiel ist es – schon syntaktisch – besonders deutlich: Y ist Teil von $X \wedge Y$. Aber *logisch-semantisch* gilt auch bei: $X \Rightarrow X \vee Y$; $X \vee Y$ ist Teil von X.
Anders gesagt: Wenn das Vorderglied $X \wedge Y$ positiv ist, dann ist auch das Nachglied Y positiv, mit Sicherheit (denn es gibt nur *einen* derartigen Fall, die erste Zeile der Wahrheitstafel). Dabei ist die Gesamtrelation *immer*, *in jeder möglichen Welt* positiv, sie ist zu 4/4 tautologisch, besitzt also einen Tautologiegrad von 1. Man kann also aus der *Analyse* der Prämissen die Gültigkeit des *Schluss-Satzes* erkennen, deshalb heißen solche Relationen *analytisch*.
Noch einmal in der Sprache der Aussagenlogik gesagt: Bei einer analytischen Implikation (logischen Folge) ist der *Informationsgehalt* des Schluss-Satzes (Y) in der Konjunktion der Prämissen ($X \wedge Y$) enthalten.
Aber man kann auch wieder Bezug auf den *Gesamtsatz*, z. B. $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$ nehmen.
Dann lässt sich definieren:
– *Tautologie:* ist in *jeder* möglichen Welt wahr
hat in der Wahrheitstafel nur + (plus) unter dem *Zentral-Relator*
– *Kontradiktion*: ist in *keiner* möglichen Welt wahr, also in jeder möglichen Welt falsch
hat in der Wahrheitstafel nur – (minus) unter dem *Zentral-Relator*
Man kann hier noch einen weiteren Aspekt hinzufügen: Bei einem analytisch-tautologischen Satz wie $X \Rightarrow X$ kann man *unabhängig von der Bedeutung* sagen, dass er wahr ist; ein tautologischer Satz ist allein von seiner *Form* her wahr, hier brauche ich nicht zu wissen, wofür ‚X' und ‚Y' stehen, ich muss diese Variablen nicht interpretieren.

• *Kontradiktion*
Auch *Kontradiktionen,* d. h. logisch widersprüchliche Relationen, rechnet man zu den *analytischen* Relationen. Ein *atomare* Kontradiktion ist: ‚Alle Junggesellen sind verheiratet'.
Bei der – *molekularen* – *Implikation* gilt: Eine Kontradiktion ist nur gegeben, wenn das *Vorderglied tautologisch* und das *Nachglied kontradiktorisch* ist. Zur Symbolisierung verwende ich den durchgestrichenen Doppelpfeil.

(X	$\vee$	$\neg$	X)	$\not\Rightarrow$	(X	$\wedge$	$\neg$	X)
+	+	−	+	−	+	−	−	+
+	+	−	+	−	+	−	−	+
−	+	−	+	−	−	−	+	−
−	+	−	+	−	−	−	+	−

0-5-3-4 FORMAL-ANALYTISCH / MATERIAL-ANALYTISCH
Wie schon angesprochen, muss man genau unterscheiden zwischen:
- *material-analytischen* Relationen (beruhen auf *Definitionen:*„material")
- *formal-analytischen* Relationen (beruhen nur auf logischen Gesetzen)

• material-analytisch: Z. B. „Jeder Junggeselle ist unverheiratet“
Um die Wahrheit dieser Relation zu erkennen, muss man keine Untersuchungen machen, man muss nur die *Bedeutungen* und *Definitionen* kennen, also wissen: Ein *Junggeselle* ist definiert als *unverheirateter Mann*. Insofern ist die Aussage „Jeder Junggeselle ist unverheiratet“ laut Definition wahr. Material-analytische Relationen bzw. Sätze spielen in der *formalen* Logik keine große Rolle, weil hier eben normalerweise *vom Inhalt abstrahiert* wird.

• formal-analytisch: Z. B. „Jeder Junggeselle ist ein Junggeselle“
Um die Wahrheit dieser Relation festzustellen, muss man nicht einmal die Bedeutung von ‚Junggeselle' kennen, man muss nur um das *logische Gesetz* $X \Leftrightarrow X$ wissen: „Jedes Objekt ist mit sich selbst identisch bzw. logisch äquivalent“. $X \Leftrightarrow X$ ist dann natürlich selbst auch formal-analytisch. Es mag irritieren, dass ich hier einen *normal*-sprachlichen Satz wie ‚Jeder Junggeselle ist ein Junggeselle' als Beispiel für *formal*-analytisch nennen. Aber ‚formal' meint hier eben nicht, dass der Satz *formalisiert* ist, sondern nur, dass seine Analyzität allein auf *formalen* Gesetzen beruht. Ich beschränke ich mich nachfolgend in erster Linie auf *formal* analytische Relationen, denn nur diese sind wirklich logisch relevant.

0-5-3-5 TAUTOLOGIE-GRAD
Wir haben schon vom Tautologie-Grad bei *synthetischen* Relationen gesprochen. Selbstverständlich lässt sich auch bei *analytischen* Relationen – mittels der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* – ein Tautologie-Grad bestimmen. Allgemein können wir festlegen:

	Tautologie-Grad
synthetisch	$< 1 \wedge > 0$
analytisch	
– tautologisch	1
– kontradiktorisch	0

0-5-4 Semi-analytische Relationen

0-5-4-1 BESTIMMUNG
Diese Unterscheidung zwischen synthetisch und analytisch ist grundlegend. Ich vertrete aber die These, dass man dazwischen als drittes *partiell analytische* Relationen bzw. Strukturen unterscheiden kann. Anstelle von ‚partiell analytisch' kann man auch ‚semi-analytisch' sagen.

Z. B. *material*: ‚Dieser Junggeselle ist unverheiratet (analytisch) und glücklich (synthetisch)'. Der Satz ist *semi-analytisch*, weil der Begriff ‚unverheiratet' zur *Definition* von ‚Junggeselle' gehört, der Begriff ‚glücklich' aber nicht.

Oder *formal* die Relation $(X \vee Y) \longrightarrow Y$. Sie hat folgende Wahrheitstafel:

(X	∨	Y)	⟶	Y
+	+	+	+	+
+	+	–	–	–
–	+	+	+	+
–	–	–	+	–

Diese Relation ist, wie $X \rightarrow Y$, in 3 von 4 Welten positiv, sie ist also auch zu 3/4 tautologisch. Sie hat sogar den gleichen Wahrheitswerte-Verlauf wie $X \rightarrow Y$ (+ – + +).

Dennoch liegt hier *keine synthetische* Relation vor. Im Gegensatz zum synthetischen $X \rightarrow Y$ kommt Y schon in dem Vorderglied $X \vee Y$ vor. D. h. man kann durch *Analyse* des Vordergliedes etwas über die Wahrheit von Y erfahren. Wenn ich weiß, dass $X \vee Y$ positiv ist, weiß ich mit gewisser *Wahrscheinlichkeit* (nämlich 2/3), dass Y positiv ist, ohne die Gültigkeit der Gesamt-Relation zu kennen. Allerdings erhält man keine *sichere* Information.

$(X \vee Y) \longrightarrow Y$ kann man auch einen *induktiven* Schluss nennen, im Gegensatz zu einem (streng) *deduktiven* Schluss wie z. B. $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$.

Auch anders lassen sich *synthetische* und *semi-analytische* Relationen unterscheiden. Z. B. hat die *synthetische* Implikation $X \rightarrow Y$ grundsätzlich den Wahrheitsverlauf + – + +; dagegen kann eine *semi-analytische* Implikation $\Phi \longrightarrow \Psi$ jeden möglichen Wahrheitsverlauf annehmen, mit Ausnahme von + + + + (Tautologie) oder – – – – (Kontradiktion). vollständig analytischen Relationen wie *Tautologie* und *Kontradiktion* sind *Grenzfälle* der semi-analytischen Relationen.

Generell können wir für *semi-analytische* Relationen (bzw. Sätze) festlegen:
- das Prädikat ist *partiell* im Subjekt *enthalten*, fügt ihm partiell Neues hinzu
- das Prädikat wird *partiell* durch *Analyse des Subjekts* gefunden
- die empirische Wahrheit ist nicht vollständig sicher
- sie ist theoretisch *partiell* wahr – nicht vollständig wahr und nicht vollständig falsch
- ihre empirische Wahrheit muss *partiell* durch *empirische Untersuchung* bestimmt werden.

Die *partiell analytische Implikation* (semi-analytische Implikation) kennzeichne ich durch den *langen Pfeil* $\longrightarrow$ im Gegensatz zum *kurzen Pfeil* $\rightarrow$ der synthetischen Implikation.

Herkömmlicherweise werden *semi-analytische* Relationen den *synthetischen* gleichgesetzt oder – falls man sie als Schluss ausgibt – als falscher, *ungültiger Schluss* interpretiert. Ich meine aber, dass sie eine Sonderrolle besitzen.

Ich halte die Annahme semi-analytischer Relationen für wesentlich. Allerdings kann man verschiedene *Einwände* dagegen erheben. Darauf will ich hier kurz eingehen.

0-5-4-2 ÄQUIVALENZ-EINWAND

1. Einwand: *Semi-analytische* Relationen sind logisch analytisch äquivalent mit *synthetischen* Relationen, z. B. gilt:

$$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y \;\Leftrightarrow\; (X \vee Y)$$

Antwort: Hier zeigt sich, dass *Wahrheitswerte* nicht ausreichen, um unterschiedliche Relationen bzw. Sätze zu unterscheiden. Wahrheitswerte sind zwar ggf. *notwendig*, um die Bedeutung eines Satzes zu bestimmen, aber nicht *hinreichend*. $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ und $X \vee Y$ sind jedenfalls nach meiner Definition jedenfalls extensional nicht gleich (vgl. 0-3-4-5).

Denn es wäre absurd zu behaupten, alle Strukturen mit *gleichem* Wahrheitswerteverlauf seien ganz *gleichbedeutend*, so hätten z. B. alle logischen Gesetze (Werteverlauf + + + +) dieselbe Bedeutung, wozu brauchte man dann überhaupt mehr als *ein* Gesetz?

Die beiden Relationen

$$X \vee Y \text{ und } (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$$

haben zwar denselben Wahrheitswerteverlauf (+ + + –), aber nur $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ ist *partiell analytisch*. $X \vee Y$ ist dagegen *synthetisch*. Bei $X \vee Y$ wird eine Relation zwischen zwei (vorher) *unabhängigen* Sätzen X und Y konstatiert, bei $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ ist der Satz Y ja bereits *Teil* von $X \rightarrow Y$, die beiden Relata $X \rightarrow Y$ und Y sind also logisch voneinander *abhängig*.

0-5-4-3 ZWISCHENGLIED-EINWAND

2. Einwand: Es gibt *kein Zwischenglied* von synthetischen und analytischen Relationen. So gilt: $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg X)$

Fügt man nun noch $(X \wedge \neg Y)$ disjunktiv hinzu, so erhält man eine *Tautologie*, denn $(X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg X)$ ist tautologisch.

D. h. es gibt quasi einen *fließenden Übergang* von einem synthetischen Satz wie $X \rightarrow Y$ zu einem analytischen Satz, einer Tautologie. Wo ist hier Platz für ein Zwischenglied, wo ist Platz für partiell-analytische Relationen?

Antwort: Das mit dem *fließenden Übergang* ist richtig, und aus diesem Grund habe ich eine andere neuartige Definition von ‘synthetisch’ vorgenommen (die später noch genauer erläutert werden wird). Synthetische Sätze können nämlich „beinahe“ tautologisch oder auch „beinahe“ kontradiktorisch sein. Darin stimmen sie mit semi-analytischen Sätzen überein.

Das bedeutet aber nicht, dass synthetische und semi-analytische Relationen identisch sind. Sie werden eben auf andere Weise, syntaktisch und semantisch, voneinander unterschieden.

0-5-4-4 MODAL-LOGIK-EINWAND

3. Einwand: Semi-analytische Relationen widersprechen der *Modal-Logik*.
In der Modal-Logik gilt: notwendig $\Rightarrow$ möglich

Nun könnte man definieren:

tautologisch = notwendig, semi-analytisch = möglich

Müsste demnach nicht gelten: tautologisch $\Rightarrow$ semi-analytisch?

Dies stimmt aber nicht, denn: Eine Tautologie kann keine semi-analytische Relation logisch implizieren, eine Tautologie impliziert logisch *nur* wiederum eine Tautologie: Tautologie $\Rightarrow$ Tautologie; somit kann aus einer Tautologie keine semi-analytische Relation logisch folgen.

Faktisch gilt das Umgekehrte:
semi-analytisch $\Rightarrow$ tautologisch

z. B. $[(X \vee Y) \longrightarrow Y] \Rightarrow [(X \wedge Y) \Rightarrow Y]$

Das hieße aber: Semi-analytische Relation (= möglich) $\Rightarrow$ Tautologie (= notwendig), also:

möglich $\Rightarrow$ notwendig

Somit widerspricht das Konzept der semi-analytischen Relationen der Modal-Logik.

Antwort: Hier liegt eine unzulässige Übertragung vor: „notwendig $\Rightarrow$ möglich“ bezieht sich auf *dieselbe* Relation. Wenn eine Relation $R(\Phi, \Psi)$ notwendig ist, dann ist sie auch möglich. $(X \vee Y) \longrightarrow Y$ und $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$ sind aber unterschiedliche Relationen, für die das Gesetz „notwendig $\Rightarrow$ möglich“ nicht gilt. Außerdem lässt sich dieses Gesetz, wie überhaupt eine vollständige Modal-Logik, ohnehin nur im Rahmen der *Quantoren-Logik* begründen, nicht innerhalb der *Aussagen-Logik* (wie später noch zu erläutern ist).

0-5-4-5 TERMINOLOGIE

Begrifflich variiere ich zwischen folgenden *Termini*, um mich nicht immer zu wiederholen:

- *(synthetische) Implikation*
  = nicht analytische Implikation = Wenn-Dann-Relation = Wenn-Dann-Satz
  (dagegen ist der Begriff ‚empirische Implikation’ problematisch)
- *Analytische Implikation*
  = streng analytische Implikation = strenger Schluss = vollständig analytischer Schluss = vollständiger Schluss = tautologischer Schluss = logische Folge = Deduktion u. ä.
  (Von Kontradiktionen sehe ich hier ab.)

- *Semi-analytische Implikation*
  = partiell analytische Implikation = semi-analytischer Schluss = partieller Schluss = partiell tautologischer Schluss = induktiver Schluss = partielle logische Folge u. ä.

Abschließend sei aber durchaus zugegeben, dass beim Ansatz der *semi-analytischen* Relationen noch Fragen offen sind, dass es noch ungelöste Probleme gibt. Im *quantitativen* Bereich ist das Konzept der semi-analytischen Relationen allerdings relativ unproblematisch (vgl. später). Das Konzept *partiell analytischer Relationen*, z. B. Implikationen, ist zwar wichtig für die vorliegende Arbeit, aber keinesfalls entscheidend für mein logisches Gesamtmodell. Die meisten Aussagen behielten auch dann ihre Berechtigung, wenn man – in herkömmlicher Weise – nur zwischen synthetisch und analytisch unterscheidet.

0-5-5 Symbole

0-5-5-1 IMPLIKATIVE RELATIONEN
Für die *Implikation* bzw. *implikative* Relationen verwende ich folgende Pfeil-Symbole:

- synthetisch $X \rightarrow Y$
- semi-analytisch $X \vee Y) \longrightarrow Y$
- tautologisch $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$
- kontradiktorisch $(X \vee \neg X) \nRightarrow (X \wedge \neg X)$

Zur besseren Veranschaulichung bringe ich auch noch einmal *materiale,* inhaltliche Beispiele (obwohl die in der Logik im engeren Sinn keine Rolle spielen):

- synthetisch Dieser Junggeselle ist Porschefahrer
- semi-analytisch Dieser Junggeselle ist ein lediger Professor
- tautologisch Dieser Junggeselle ist ein Junggeselle
- kontradiktorisch Dieser Junggeselle ist seit 10 Jahren verheiratet

„Dieser Junggeselle ist ein lediger Professor“ ist ein semi-analytischer Satz, weil „verheiratet“ ein analytisches Merkmal ist, „Professor“ aber ein synthetisches.

Zwar könnte man aussagen-logisch auch in jedem der vier *formalen* Fälle immer nur dasselbe Symbol $\rightarrow$ verwenden, es würde scheinbar zu einfacheren Formeln führen. Aber ich finde es wichtig, den *logischen Status* einer Relation sofort sichtbar herauszustellen. Meistens schreibt man die Formeln ohne Wahrheitstafel, so dass ihr logischer Status, ohne unterschiedliche Pfeile, nicht immer unmittelbar zu erkennen wäre.

Implikation, *Replikation* und *Äquivalenz* kann man als *implikative Relationen* zusammenfassen, obwohl das etwas willkürlich ist, weil sich auch andere Relationen in Implikationen umformen lassen (vgl. 0-4).

Für die *Replikation* $X \leftarrow Y$ und die *Äquivalenz* $X \leftrightarrow Y$ gilt Entsprechendes wie für die Implikation und ich verwende entsprechende Symbole, also für die Äquivalenz-Tautologie $\Leftrightarrow$ bzw. für die Replikation-Tautologie $\Leftarrow$.

0-5-5-2 POSITIV-IMPLIKATION
Hier gibt es die entsprechenden Relationen: Ich verwende wie beschrieben jeweils das Symbol der *normalen* Implikation mit Stern * davor.

- synthetisch $X *\!\!\rightarrow Y$
- semi-analytisch $X \vee Y) *\!\!\longrightarrow Y$
- tautologisch $(X \wedge Y) *\!\!\Rightarrow Y$
- kontradiktorisch $(X \vee \neg X) *\!\!\not\Rightarrow (X \wedge \neg X)$

Zu den Besonderheiten komme ich später.

0-5-5-3 ANDERE RELATOREN

Bisher habe ich nur die *Implikation* behandelt. Auch bei anderen Relatoren bzw. Junktoren wie der *Konjunktion* oder der *Disjunktion* gibt es prinzipiell die gleichen 4 Arten von Relationen, obwohl die semi-analytischen Relationen besonders bei den implikativen Relationen von Bedeutung sind. Nun ist das Problem, dass es – anders als bei der Implikation – keine verbreiteten Symbole für die verschiedenen Möglichkeiten gibt.

Ich verwende folgende Symbole (als Beispiel Konjunktion):

- ohne Zusatz: für synthetische Relation: $X \wedge Y$
- mit + + für Tautologie: $X\ {}^{+}\!\wedge^{+}\ Y$
- mit – – für Kontradiktion: $X\ {}^{-}\!\wedge^{-}\ Y$
- mit + – für semi-analytische Relation: $X\ {}^{+}\!\wedge^{-}\ Y$

Das + – schreibe ich aber nur, wenn die semi-analytische Relation die *Hauptrelation* eines Relationssystems ist, weil es optisch sonst stört.

Insofern müsste der o. g. kontradiktorische Ausdruck korrekt wie folgt geschrieben werden:

$(X\ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X\ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$

So ist sofort zu erkennen, dass vorne eine Tautologie und hinten eine Kontradiktion steht.

Diese Symbole + (plus) und – (minus) sind quasi *selbsterklärend*, sie beziehen sich unmittelbar auf die Wahrheitstafel:

bei einer *Tautologie* gibt es nur +
bei einer *Kontradiktion* nur –
bei der *semi-analytischen* Relation + –.

0-5-5-4 ÜBERSICHT ÜBER ANALYTISCHE SYMBOLE

Ich habe oben verschiedene *Notationen* für Relatoren eingeführt und erläutert, fasse hier aber noch einmal die Symbole für *(semi-)analytische* Relationen zusammen.

Implikative Relationen formalisiere ich immer durch einen Pfeil (wie weit verbreitet):

Tautologien durch einen *Doppelpfeil*,
Kontradiktionen durch den *durchgestrichenen Doppelpfeil*
semi-analytische Relationen durch den *verlängerten Pfeil*.

- *Implikation*

Tautologie: $\Rightarrow$

Kontradiktion: $\not\Rightarrow$

Semi-analytisch: $\longrightarrow$

- *Äquivalenz*

Tautologie: $\Leftrightarrow$

Kontradiktion: $\not\Leftrightarrow$

Semi-analytisch: $\longleftrightarrow$

• *Replikation*
Tautologie: $\Leftarrow$
Kontradiktion: $\not\Leftarrow$
Semi-analytisch: $\longleftarrow$

Für a*ndere*, nicht implikative Relationen gilt wie gesagt:
Tautologien formalisiere ich durch + + über dem Junktor, z. B. ${}^{+}\vee^{+}$
Kontradiktionen durch – – über dem Junktor, z. B. ${}^{-}\wedge^{-}$
semi-analytische Relationen durch + – über dem Junktor, z. B. ${}^{+}{>}{<}^{-}$.

Allerdings verzichte ich bei semi-analytischen Relationen ggf. auch auf die Kennzeichnung durch $^{+\,-}$, denn aus der Struktur ist normalerweise direkt erkennbar, ob ein Ausdruck synthetisch ist oder (semi-)analytisch ist, und Tautologien und Kontradiktionen werden eben ausgewiesen.
Die Kennzeichnung von tautologisch, kontradiktorisch und semi-analytisch durch hochgestellte + +, – –, + – ist nicht üblich, aber sie hat, wie schon erläutert, große Vorteile.

Konjunktion
Tautologie: ${}^{+}\wedge^{+}$
Kontradiktion: ${}^{-}\wedge^{-}$
Semi-analytisch: ${}^{+}\wedge^{-}$

Disjunktion
Tautologie: ${}^{+}\vee^{+}$
Kontradiktion: ${}^{+}\vee^{-}$
Semi-analytisch: ${}^{-}\vee^{-}$

Analytische Relationen kürze ich ggf. mit 'A' ab (*A-Relation*), also z. B. *A-Implikation* für die analytische Implikation. Wenn man die *synthetischen* Relationen hervorheben will, kann man sie mit ‚S' kennzeichnen, also als S-Relationen.

0-5-5-5 BEDEUTUNG DER SYMBOLISIERUNG

Die Wahl geeigneter *Symbole* ist sehr wichtig. Denn man verwendet Symbole ja schließlich dazu, einen Sachverhalt klarer, präziser und übersichtlicher darzustellen. Wenn die Symbole das nicht leisten, sind sie fehl am Platz. Insofern sind bei der Wahl der Symbole verschiedene Aspekte zu berücksichtigen:
Bekanntheit, optische Prägnanz, Verwechslungsmöglichkeiten, Systematik, Schreibtechnik und andere. So wäre es aus *systematischen* Gründen z. B. optimal, auch die implikativen Relationen (inklusive der Positiv-Implikation) mit der +/– Symbolik darzustellen, also die Implikation $\rightarrow$ mit ${}^{+}\!\rightarrow^{+}$ und ${}^{-}\!\rightarrow^{-}$ und ${}^{+}\!\rightarrow^{-}$. Da aber der Doppelpfeil $\Rightarrow$ und der durchgestrichene Doppelpfeil $\not\Rightarrow$ gut eingeführt sind, habe ich sie beibehalten. Auch für die *Positiv-Implikation* habe ich viele Symbole ausprobiert, um möglichst geeignete zu finden, aber es bleibt immer ein Kompromiss.

1 LOGIK SYNTHETISCHER RELATIONEN

ÜBERSICHT

1-1 Aussagen-Logik

Hier wird die Aussagen-Logik als *2-wertige* Logik vorgestellt, die keineswegs auf *Aussagen* limitiert werden darf. Von besonderer Bedeutung sind die Analyse der *Paradoxien der Implikation* und die genaue Darstellung der *Positiv-Implikation* als Alternative zur herkömmlichen Implikation.

1-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

Die Quantoren-Logik wird als *4-wertige* Logik vorgestellt, welche die Werte „alle“, „alle nicht“, „einige“, „einige nicht“ behandelt. Sie schließt die Aussagen-Logik mit ein. Es wird das Verhältnis zwischen *Quantoren-Logik* und *Prädikaten-Logik* erläutert, welches man als Äquivalenz oder Definition deuten kann. Als Erweiterung wird u. a. eine auf der Quantoren-Logik basierende *Modal*-Logik präsentiert.

1-3 Quantitative Logik

Die Vorstellung einer *∞-wertigen Quantitäts-Logik* ist der wichtigste Teil in diesem Kapitel 1. *Logische* Ausdrücke werden in *mathematische* Formeln übersetzt, so dass man z. B. sagen kann, welche *empirische Wahrscheinlichkeit* eine Implikation ausdrückt. M. W. sind diese Formeln bisher noch von niemandem aufgestellt oder publiziert worden.

1-4 Quantitative Aussagen-Logik

Die Aussagen-Logik mit ihren 2 Werten erweist sich als *Grenzbereich* der quantitativen Logik, sie beinhaltet (implizit) nur die Werte $p = 1$ oder $p = 0$.

1-5 Quantitative Quantoren-Logik

So wie die quantitative Aussagen-Logik die 2 Werte der Aussagen-Logik numerisch bestimmt, so werden in der quantitativen Quantoren-Logik die 4 Werte der Quantoren-Logik in Zahlenwerte übersetzt. Sie arbeitet mit den Größen: 1, < 1, 0 und > 0.

Wie schon erläutert, gehe ich im Kapitel 1: „Synthetische Relationen“ – wie in den nächsten Kapiteln 2, 3 und 4 – in den *Unter-Kapiteln* (also von 1-1 bis 4-5) immer nach der gleichen *Inhaltsstruktur* vor, um möglichst eine gute Übersichtlichkeit bzw. Vergleichbarkeit zu gewährleisten:

Das bedeutet z. B. in der Zählung für Kapitel 1:

1-1 Aussagen-Logik
1-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik
1-3 Quantitative Logik
1-4 Quantitative Aussagen-Logik
1-5 Quantitative Quantoren-Logik

Auch die *Unter-Kapitel* (der Kap. 1 bis 4) sind *gleich unterteilt*, in folgende *Unter-Unter-Kapitel*:

1 Einführung	z. B. für 1-1:	1-1-1 Einführung
2 Implikation		1-1-2 Implikation
3 Positiv-Implikation		1-1-3 Positiv-Implikation
4 Systematik		1-1-4 Systematik
5 Erweiterungen		1-1-5 Erweiterungen

Insgesamt ergibt sich (normalerweise) eine Hierarchie über *vier* Ebenen, von 1-1-1-1 bis 4-5-5-5.

Ich verwende auch schon hier, im synthetischen Teil, *analytische* Relationen, nämlich vor allem die analytische *Implikation* $\Rightarrow$ und die analytische *Äquivalenz* $\Leftrightarrow$. Aber dies geschieht im Wesentlichen nur zur Definition der Junktoren bzw. Relatoren. Im Einzelnen werden die analytischen Relationen erst im Kapitel 2 dargestellt.

1 – 1 AUSSAGEN-LOGIK

1-1-1 Einführung

1-1-1-1 TERMINOLOGIE
Die herkömmliche Aussagen-Logik arbeitet nur mit:

1. *Aussagen* wie A, B bzw. $A_1, A_2, \dots, A_n$
2. *Junktoren* wie $\rightarrow, \wedge, \vee$
3. *Negator* $\neg$

Mittels dieser drei Komponenten werden Aussagen-*Modifikationen* wie $\neg$A sowie Aussagen-*Verknüpfungen* wie A $\wedge$ B erzeugt. Man kann dabei zwischen *synthetischen* Verknüpfungen wie A $\rightarrow$ B und *analytischen* Verknüpfungen wie A $\wedge$ B $\Rightarrow$ B unterscheiden.

Natürlich lässt sich dies auch *meta-sprachlich* darstellen, man spricht dann von Aussagen-*Zeichen* wie ‚A', ‚B' u. ä. (bei den Junktoren ist es unbestimmt, ob sie objekt- oder meta-sprachlich zu verstehen sind, beides ist möglich).

Die Aussagen-Logik hat im wesentlichen die Funktion, Aussagen-Verknüpfungen aufzustellen bzw. zu beschreiben, ihre *Wahrheitsbedingungen* zu analysieren und – bei den analytischen Verknüpfungen – nachzuweisen, ob sie *allgemein-gültig* sind oder nicht, genauer, ob es *Tautologien*, *Kontradiktionen* oder nicht streng gültige Verknüpfungen sind.

Erweiterung der Aussagen-Logik
Man kann die sogenannte Aussagen-Logik aber *erweitern* bzw. aufzeigen, dass (wie schon beschrieben) das Wesentliche an ihr gar nicht die *Aussagen* sind. Dies sei hier erläutert:

• Erstens, charakteristisch ist nicht für die Aussagen-Logik, dass es sich um *Aussagen* o. ä. handelt, sondern dass diese *als ganze* – ohne Darstellung ihrer inneren Struktur – verwendet werden. Denn auch z. B. in der Prädikaten-Logik werden Aussagen, allerdings mit ihrer Subjekt-Prädikat-Struktur verwendet.

• Zweitens, man könnte – anstatt Aussagen – genauso gut *Sätze*, *Sachverhalte*, *Urteile* oder *Ereignisse* (wie in der Statistik) zur Grundlage machen und z. B. von einer *‚Ereignis-Logik'* sprechen. Das Gemeinsame an all diesen ist, dass es sich um *Relationen* handelt – dieser Begriff ist für die generelle Verwendung geeigneter als der *Verknüpfungs*-Begriff (vgl. 0-2-5-3). A $\rightarrow$ B muss man nicht als *Aussagen-Relation* sehen, man kann es z. B. auch als *Sachverhalt*-Relation begreifen. Komplexe Relationen zwischen einfacheren Relationen nenne ich, wie schon erläutert, *Molekular-Relationen*.

• Drittens, man kann aber die Variablen ‚A' und ‚B' sowie die Junktoren – auch über Relationen hinaus – auf *Mengen*, *Individuen* und *Begriffe* (oder Eigenschaften) anwenden. Ich bevorzuge hier allerdings, allgemein die Variablen ‚X' und Y' zu verwenden sowie statt von ‚Junktoren' von *‚Relatoren'* zu sprechen. Z. B. ‚X $\rightarrow$ Y' kann also u. a. stehen für:

eine Relation zwischen den Aussagen ‚X' und ‚Y'
eine Relation zwischen den Sachverhalten X und Y
eine Relation zwischen den Mengen X und Y oder Individuum X und Menge Y
eine Relation zwischen eine Relation zwischen den Begriffen X und Y

Wenn man auch Relationen zwischen *strukturierten* Relationen, z. B. $(X \to Y) \to (X \vee Y)$ erfassen will, darf man die Einzelrelationen allerdings nicht mit ‚X' und ‚Y' bezeichnen, weil es nicht sicher ist, dass diese logisch voneinander unabhängig sind. Hier schreibt man, wenn man die Einzel-Relationen nicht nennt, generell ‚$\Phi \to \Psi$' bzw. noch genereller ‚Φ R Ψ'.

• Viertens, und das ist entscheidend: Es geht bei der Aussagen-Logik letztlich allein darum, dass man nur zwischen *2 Werten* unterscheidet, bei Aussagen zwischen *wahr* und *falsch*.
Man spräche daher besser von ‚*zwei-wertiger Logik*' und nicht von ‚Aussagen-Logik'. Die Aussagen-Logik im engeren und eigentlichen Sinn ist nur ein kleiner Teil einer *generellen 2-wertigen Logik.*

Belegung
Ich unterscheide primär nicht zwischen *wahr* und *falsch*, sondern allgemein zwischen *positiv* (+) und *negativ* (–) bzw. zwischen *belegt* und *nicht belegt* oder *gültig* und *ungültig*; ich beschränke also ‚(un)gültig' nicht wie sonst häufiger auf logische *Schlüsse*. Die Termini 'positiv' und 'negativ' sind etwas missverständlich, denn unter einem *positiven Satz* kann man auch einen *bejahten Satz* verstehen, aber auch ein *bejahter* Satz kann *falsch* sein. „Negativ" könnte auch missverstanden werden als < 0, aber Werte < 0 kommen hier grundsätzlich nicht vor. Als *Quantitätsstufen* geht es um die Unterscheidung von 1 = alle und 0 = keiner.

Markierung
In der normalen Sprache wie in der Logik ist die *Negation markiert* (logisch durch ¬), die *Position* (Bejahung) aber nicht. Dies erklärt sich so, dass der *wahre Satz* als *Normalfall* gilt, der nicht gesondert *markiert* sein muss. Systematischer wäre aber:

Neutral:	Sachverhalt X	formal: (X)
Bejaht:	Sachverhalt X besteht	formal, z. B. !(X)
Verneint:	Sachverhalt X besteht nicht	formal: ¬(X)

Um aber so weit wie möglich bei den eingeführten Begriffen zu bleiben, schreibe ich für „Sachverhalt X besteht" bzw. für „die Aussage ‚X' ist wahr" einfach ‚X' und verwende auch vorrangig den eigentlich unglücklichen Terminus 'Aussagen-Logik'.

1-1-1-2 WAHRHEITSTAFEL

Die Zeichen der Aussagen-Logik wurden schon vorgestellt, es sind vor allem die *deskriptiven Variablen* und die *Relatoren*. Zu den deskriptiven Variablen zählen (im engeren Modell) ‚A', ‚B' usw., im weiteren Modell ‚X', ‚Y' bzw. generell ‚Φ', ‚Ψ'. Am wichtigsten sind dabei die *Relatoren*; sie sind keine Variablen, sondern *Konstanten*. Logische *Relatoren* bzw. *Junktoren* – das ist gleichbedeutend – werden durch die *Wahrheitstafel* definiert (vgl. 0-2-5-4: Logik-Komponenten / Relationen). Diese sei noch einmal am Beispiel der *Implikation* dargestellt:

	X	→	Y
1.	+	+	+
2.	+	–	–
3.	–	+	+
4.	–	+	–

Man kann die oberste Zeile *unterstreichen* und / oder den *Wahrheitsverlauf* unter dem Relator *fett* schreiben (siehe unten).

Ich kürze die Wahrheitstafel einer logischen Formel oft mit einer *waagerechten* Aufzählung der entscheidenden Wahrheitswerte ab.

Für $\underline{X \to Y}$ z. B. schreibe ich auch kurz: X → Y: + – + +

+ + +
+ – –
– + +
– + –

D. h. es werden hier nur die Wahrheitswerte, die *unter dem Relator* stehen, angeführt.
Diese können auch in *Klammern* gesetzt sein: X → Y (+ – + +)

1-1-1-3 ALTERNATIVE WAHRHEITSTAFELN

Man kann die Wahrheitstafel auch wie folgt darstellen, speziell zur *Definition* eines Relators.

X	Y	X → Y
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	–	+

oder kürzer:

X	Y	→
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	–	+

Diese Darstellungsweise zeigt, wie die Wahrheitstafel von X → Y *primär* zu deuten ist: nämlich als X ∧ Y ⇒ X → Y (in der 1. Zeile, die anderen Zeilen entsprechend). Da hier aus der *Konjunktion* von Vorder-Glied (X) und Nach-Glied (Y) auf die Gesamt-Relation (X → Y) geschlossen wird, spreche ich von *‚konjunktiver Deutung'*. Hierfür lassen sich drei alternative *konjunktive Wahrheitstafeln* aufstellen:

• vollständige Wahrheitstafel

	X ∧ Y	⇒	X → Y
1.	+ + +	+	+ + +
2.	+ – –	+	+ – –
3.	– – +	+	– + +
4.	– – –	+	– + –

Hier werden von allen *Variablen* (X, Y) und von allen *Relatoren* (∧, ⇒, →) die Wahrheitswerte (+, –) genannt.

• tafel-orientierte Wahrheitstafel

	X ∧ Y	⇒	X → Y
1.	+	+	+
2.	–	+	–
3.	–	+	+
4.	–	+	+

Hier werden nur von den *Relationen* (∧, ⇒, →) die Wahrheitswerte genannt. Es ist eine *verkürzte* Wahrheitstafel, die aber legitim ist, weil die Werte von X (+ + – –) und Y (+ – + –)

stets gleich sind und als bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Letztlich kommt es in der *Wahrheitstafel* nur auf die Wahrheitswerte der Relationen an. Und diese werden in der obigen Darstellung besonders deutlich. Man sieht z. B. in der 1. Zeile auf einen Blick: wenn die Konjunktion (Prämisse) $X \wedge Y$ gültig (+) ist und die Implikation (Konklusion) $X \rightarrow Y$ gültig (+) ist, dann ist die Gesamtrelation gültig (+).

• zeilen-orientierte Wahrheitstafel

	X	∧ Y	⇒	X → Y
1.	+	+	+	+
2.	+	−	+	−
3.	−	+	+	+
4.	−	−	+	+

Auch hier liegt eine *verkürzte* Darstellung vor. Es werden jetzt bei $X \wedge Y$ die Wahrheitswerte der *Variablen* X und Y genannt, aber nicht die der Konjunktion $\wedge$. Das hat folgenden Grund: Man kann die einzelnen *Zeilen* der Wahrheitstafel wiederum als *Relationen* schreiben. Dabei sind aber nur die Werte von X und Y relevant, nicht der Gesamtwert der Konjunktion $X \wedge Y$. Bei $X \rightarrow Y$ dagegen interessiert nur die Gesamtrelation, nicht die Werte von X und Y.

Die Zeilen sind:

1. $X \wedge Y \quad \Rightarrow \quad X \rightarrow Y \qquad + - - - \;\Rightarrow\; + - + +$
2. $X \wedge \neg Y \quad \Rightarrow \quad \neg(X \rightarrow Y) \qquad - + - - \;\Rightarrow\; - + - -$
3. $\neg X \wedge Y \quad \Rightarrow \quad X \rightarrow Y \qquad - - + - \;\Rightarrow\; + - + +$
4. $\neg X \wedge \neg Y \quad \Rightarrow \quad X \rightarrow Y \qquad - - - + \;\Rightarrow\; + - + +$

Diese Zeilen geben die *primäre Interpretation* der Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$ wieder.

1-1-1-4 SPEZIELLE DARSTELLUNGEN

Man kann die Wahrheitstafel auch in einer *Tabelle* darstellen:

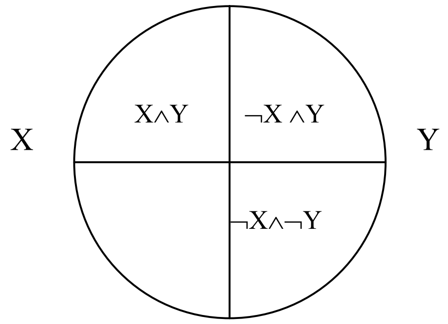
$X \rightarrow Y$

	X	¬X
Y	X ∧ Y	¬X ∧ Y
¬Y		¬X ∧ ¬Y

Hier werden nur die Felder ausgefüllt, die in der Wahrheitstafel ein + aufweisen.
Eine alternative Darstellung ist noch die folgende Tabellenform:

X	→	Y
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	+	−

Kreis-Darstellung
Man kann die Wahrheitstafel graphisch auch durch *Kreise* symbolisieren, z. B. *Euler-Kreise* oder *Venn-Diagramme*. Eine bessere Kreisdarstellung für $X \rightarrow Y$ ist die folgende:



1-1-1-5 WAHRHEITSTAFEL UND RELATION
Wir müssen bezüglich Wahrheit oder Falschheit klar unterscheiden zwischen:
1) einer *Relation* (bzw. einem Satz) und 2) der *Wahrheitstafel* dieser Relation

1) Relation / Satz
Wir unterscheiden *bejahte* und *negierte* Sätze.
• bejahter Satz, z. B. $X \rightarrow Y$
Ein Satz wie $X \rightarrow X$ enthält eine *Wahrheits- bzw. Gültigkeits-Behauptung*. Diese ist eben nur *implizit* bzw. *unmarkiert*. Bei einem Satz in der *normalen Sprache* ist es selbstverständlich, dass er (normalerweise) mit Wahrheitsbehauptung geäußert wird, aber man sollte auch in der Logik davon ausgehen. Der Satz ‚$X \rightarrow Y$' lässt sich somit formulieren als: „'$X \rightarrow Y$' ist wahr“ oder „es ist wahr, dass $X \rightarrow Y$“. Die Wahrheitsbehauptung kann allerdings falsch sein.
• negierter Satz, z. B. $\neg(X \rightarrow Y)$
Der *negierte* Satz wird dagegen durch die *Negation* gekennzeichnet, also *explizit* und *markiert*: $\neg(X \rightarrow Y)$. Ihm entspricht die Behauptung „'$X \rightarrow Y$' ist falsch“.
Insofern Sätze ihre Wahrheit oder Falschheit implizieren, kann man z. B. auch sagen, der Satz ‚$X \rightarrow Y$' macht die *Aussage* $X \rightarrow Y$. Ansonsten würde es nahe liegen, nur zu sagen: Wie ein *Wort* eine Sache o. ä. *bezeichnet*, so *bezeichnet* ein *Satz* einen Sachverhalt. Aber da der Satz eben darüber hinaus ausdrückt, dass der Sachverhalt *besteht* (oder nicht), macht er eine Aussage. Allerdings kann man auch eine *Wort*-Bezeichnung so begreifen, dass sie bereits implizit eine Aussage über *Existenz / Nicht-Existenz* beinhaltet, denn man kann nur etwas *bezeichnen*, das irgendwie existent ist (vgl. 0-4-4: Kopula / Funktionale Logik).

2) *Wahrheitstafel / Wahrheitsbedingungen*
Anders in der Wahrheitstafel: Hier bleibt notgedrungen offen, ob der Satz *wahr* oder *falsch* ist, denn es geht ja gerade darum, die *Bedingungen* anzugeben, unter denen ein Satz wahr oder falsch ist. Dabei gibt es drei Stufen zu unterscheiden:
• Einzelne Wahrheitsbedingung
Es lassen sich einzelne Wahrheitsbedingungen z. B. für $X \rightarrow X$ angeben. So gilt:
Wenn X falsch ist, dann ist $X \rightarrow Y$ wahr: $\neg X \Rightarrow X \rightarrow Y$. Und:
Wenn Y wahr ist, dann ist $X \rightarrow Y$ wahr: $Y \Rightarrow X \rightarrow Y$
• Vollständige, kombinierte Wahrheitsbedingungen
Diese werden von der Wahrheitstafel geliefert, die für *alle* Welten angibt, ob $X \rightarrow Y$ darin wahr ist oder falsch, z. B.: Wenn X und Y wahr sind, dann ist $X \rightarrow Y$ wahr.

• Konkrete Wahrheit
Bei einem *formalen* Satz lässt sich aber erst angeben, ob er empirisch wahr ist, wenn man die *Variablen* ‚X' und ‚Y' durch konkrete Begriffe ersetzt. So ist $X \rightarrow Y$ bei folgender Einsetzung wahr: ‚Wenn es regnet, wird die Strasse nass'. Und bei folgender Einsetzung falsch: ‚Wenn es regnet, wird die Strasse blau'. Anders sieht es bei einer Tautologie aus wie $X \Rightarrow X$. Sie ist immer – logisch – wahr, unabhängig davon, ob X empirisch wahr ist.

Wir müssen aber auch die *Deutung* der *Wahrheitstafel* und die eines *Satzes* unterscheiden.
Die *primäre* Deutung der Wahrheitstafel ist die *konjunktive*, für $X \rightarrow Y$ die Ableitungen aus den *Konjunktionen*: $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$, $\neg X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$, $\neg X \wedge \neg Y \Rightarrow X \rightarrow Y$.
Aber die *primäre* Deutung für einen (implikativen) Satz ist die *implikative*. Mit dem Beispiel-Satz $X \rightarrow Y$ wollen wir ja vorrangig nicht sagen: ‚wenn X und Y wahr sind, dann ist auch $X \rightarrow Y$ wahr', ‚wenn X falsch und Y wahr ist, dann ist auch $X \rightarrow Y$ wahr' usw. Sondern wir wollen sagen: ‚Wenn X wahr ist, dann ist auch Y wahr'. Dies entspricht der *zentralen*, normalerweise der *ersten Zeile* der Wahrheitstafel.

1-1-2 Implikation

1-1-2-1 DEFINITION DER IMPLIKATION
Die *Implikation* $X \rightarrow Y$ steht wie beschrieben für die *Kopula*-Struktur, auch wenn sie normalerweise nicht mit der klassischen Kopula-Formulierung „X ist ein Y" ausgedrückt wird.
Im Punkt „Implikation" behandle ich nicht nur die eigentliche Implikation, sondern alle *implikativen Relationen*, d. h. solche, die mit einem *Pfeil* symbolisiert werden; das sind neben der Implikation vor allem die *Replikation* $\leftarrow$ und die *Äquivalenz* $\leftrightarrow$. Ein häufig verwendeter, einfacher Beispielsatz für die Implikation ist:

‚Wenn es regnet, ist die Straße nass'. Dabei gilt:
X: es regnet
Y: die Straße ist nass
$\rightarrow$: wenn – dann.

Eine Basis-Relation bzw. ein Relator wird wie gesagt durch eine *Wahrheitswertetafel* dargestellt bzw. definiert. Man kann auch kurz von '*Wahrheitstafel*' sprechen (korrekter und neutraler wäre in meinem Sinne allerdings der Begriff '*Gültigkeitstafel*').

	$X \rightarrow Y$	äquivalent: $\neg(X \wedge \neg Y)$
1.	+ + +	
2.	+ – –	
3.	– + +	
4.	– + –	

Die Implikation $X \rightarrow Y$ ist nur dann *ungültig*, wenn X belegt ist und Y nicht belegt ist (2. Zeile). In allen anderen Fällen ist sie *gültig*. Die Hauptdeutung ist: „(Immer) wenn X gültig ist, dann ist auch Y gültig". Diese Deutung ist wie beschrieben (wahrheitswert-)*funktional*.

Allgemeine, funktionale Deutungen von $X \rightarrow Y$ sind:
• X impliziert Y / Wenn X belegt ist, dann ist auch Y belegt.
• Wenn X, dann Y / Nur wenn Y, dann X (möglicherweise).
• X ist *hinreichende* Bedingung für Y / Y ist *notwendige* Bedingung für X.

Spezielle, funktionale Deutungen von $X \rightarrow Y$ bzw. $\Phi \rightarrow \Psi$ sind:

• *Individuell*: $x_i \rightarrow F$. Allgemeine Deutung: „x_i impliziert F“ bzw. „Wenn x_i, dann F“.
Beispiel: „Sokrates ist ein Philosoph“. Funktional (z. B.): „Wenn Sokrates existiert, ist die Klasse der Philosophen belegt“.

• *Klasse*: $F \rightarrow G$. Allgemeine Deutung: „F impliziert G“ bzw. „Wenn F, dann G“.
Beispiel: „Alle Menschen sind sterblich“. Funktional (z. B.): „Wenn die Klasse der Menschen Elemente besitzt, dann besitzt auch die Klasse der Sterblichen Elemente“.

• *Aussage*: $A \rightarrow B$. Allgemeine Deutung: „A impliziert B“ bzw. „wenn A, dann B“.
Beispiel: „Mensch sein heißt sterblich sein“. Funktional (z. B.): „Wenn jemand ein Mensch ist, dann ist er sterblich“.

1-1-2-2 PROBLEME DER IMPLIKATION

Die Implikation $X \rightarrow Y$ ist wie gesagt nur dann *ungültig*, wenn *X belegt* ist und *Y nicht belegt* ist. In allen anderen Fällen ist sie *gültig*.

Dies führt erstens zu *logischen Paradoxien*, z. B. sind folgende Sätze – unerwartet – *nicht kontradiktorisch*: $X \rightarrow \neg X$: ‚wenn X, dann nicht X’. $\neg X \rightarrow X$: ‚wenn nicht X, dann X’. Oder $(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg(X \rightarrow Y)$. Die Implikation ist *nur* kontradiktorisch, wenn man aus einer Tautologie auf eine Kontradiktion schließt. Zweitens weicht die Implikation vom *normalen Sprachgebrauch* ab, dort versteht man eine *Wenn-dann* Beziehung als nur für die Fälle definiert, in denen *X gültig* (wahr) ist, also die ersten beiden Zeilen der Wahrheitstafel.

Von daher kann man die Implikation mit Recht kritisieren und eine veränderte Implikation einführen, die nur für die Welten definiert ist, in denen X gültig (+) ist. Ich habe hierfür die *Positiv-Implikation* $X \ast\!\!\rightarrow Y$ eingeführt. Allerdings kann und soll die Positiv-Implikation die normale Implikation nur *ergänzen*, nicht ersetzen. Denn es gibt auch gute Gründe für die zunächst befremdliche Definition der Implikation. Hier wichtige Diskussionspunkte:

• Zunächst ist zu fragen, warum man nicht, wie bei der Positiv-Implikation, einfach nur die *2* Welten berücksichtigt, in denen das Vorderglied X gültig ist, also $X \wedge Y$ und $X \wedge \neg Y$. Wie aber auch alle anderen Relatoren für *alle möglichen* (hier 4) Welten definiert sind, so benötigt man auch bei der Implikation eine Form, die *vollständig* ist, für *alle möglichen* Welten.

Dies ist gerade auch für *wissenschaftliche* Aussagen notwendig, die oft mittels der Implikation formuliert werden. Man will dabei *alle* Variablenwerte erfassen, also X, $\neg X$, Y und $\neg Y$.

• Die weitere Frage ist: Wenn man $X \rightarrow Y$ für 4 Welten definiert, warum soll denn $X \rightarrow Y$ gültig sein, wenn X ungültig ist, also: $\neg X \Rightarrow (X \rightarrow Y)$? Warum soll $X \rightarrow Y$ nicht in diesen Fällen *ungültig* sein, warum soll nicht gelten $\neg X \Rightarrow \neg(X \rightarrow Y)$?

Hier ist Verschiedenes anzuführen. Zunächst sei klargestellt: Aus $\neg X$ folgt nicht, dass Y gültig ist. Es folgt daraus nur, dass $X \rightarrow Y$ gültig ist. Wie man aus der Wahrheitstafel in 1-1-2-1 leicht ersehen kann, gilt $\neg X \Rightarrow (X \rightarrow Y)$ unabhängig davon, ob Y gültig oder ungültig ist. Das bedeutet aber, dass man aus $\neg X$ nichts über Y schließen kann. Der klassische Satz „ex falso quodlibet sequitur“ (aus dem Falschen folgt Beliebiges) bedeutet hier also nicht, dass man aus $\neg X$ z. B. Y bzw. $\neg Y$ ableiten könnte. Anders sieht es allerdings aus, wenn man aus *analytisch* Falschem, d. h. aus einer *Kontradiktion*, Schlüsse zieht. Aus einer Kontradiktion kann man in der Tat *alles* ableiten, z. B.: $(X \wedge \neg X) \Rightarrow Y$, $(X \wedge \neg X) \Rightarrow \neg Y$. Das zeigt allerdings auch die Problematik der Implikation, denn ein solcher Schluss ist wenig plausibel.

In der 2-wertigen Aussagen-Logik gibt es nach herkömmlicher Auffassung nur die Werte wahr/gültig (+) und falsch/ungültig (–).

Man muss sich also entscheiden, ob man $X \rightarrow Y$ bei $\neg X$ als gültig oder ungültig definiert. (man könnte es auch in *einem* Fall als gültig definieren, z. B. bei gültigem Y, im *anderen* Fall als negativ – aber das führt nicht weiter). Und wenn es nur 2 Möglichkeiten gibt, dann spricht einiges dafür, $X \rightarrow Y$ als *gültig* zu bestimmen. Angenommen, man definierte beide Fälle als ungültig (–), dann bekäme die Implikation den Wahrheitsverlauf + – – –, das ist aber genau der Wahrheitsverlauf der *Konjunktion*, der *Und-Verknüpfung*; man könnte dann nicht mehr unterscheiden zwischen Implikation und Konjunktion, was indiskutabel wäre.

• Öfters hört man auch folgendes, allerdings etwas fragwürdiges Argument: Da man aus einer *falschen* Aussage durch logisch korrektes Schließen sowohl zu *wahren* als auch zu *falschen* Aussagen kommen kann, ist es akzeptabel, den Wahrheitswert von $X \rightarrow Y$ immer als wahr = gültig zu bestimmen, wenn der Wahrheitswert von X falsch = ungültig ist.

• Kommen wir noch einmal zu *wissenschaftlichen* Aussagen zurück: Ein wissenschaftliches *Gesetz* (vereinfacht $X \rightarrow Y$) sollte auch gelten, wenn die *Randbedingungen* (hier X, genauer X_i) nicht erfüllt sind; jedenfalls wäre es nicht überzeugend, es dann einfach *falsch* zu nennen.

• $X \rightarrow Y$ ist logisch äquivalent $\neg X \vee Y$, $\neg(X \wedge \neg Y)$ u. a. Greifen wir uns hier $\neg(X \wedge \neg Y)$ heraus. Man könnte argumentieren, dies sei die Definition, die primäre Bedeutung der Relation $X \rightarrow Y$, also: „Es ist nicht wahr, dass zugleich X wahr ist und Y falsch ist“. Insofern man sich also von der „*Wenn-Dann*-Interpretation“ verabschiedet, lösen sich viele, eventuell alle der genannten Probleme auf. Allerdings hat es sich andererseits durchgesetzt und bewährt, die Relation $X \rightarrow Y$ vorrangig als „Wenn X, dann Y“ zu bestimmen – und überhaupt sind *Wenn-dann-Sätze* unverzichtbar in der Sprache wie in der Wissenschaft.

Trotz allem bleiben *berechtigte Zweifel an der Implikation*, wie wir noch oft in diesem Buch sehen werden. Eine Lösungsmöglichkeit ist wie gesagt zur Ergänzung die *Positiv-Implikation* $X *\!\!\rightarrow X$ einzuführen, die für $\neg X$ *undefiniert* ist.

Diese Thematik hängt zusammen mit der Frage: Besteht bei $X \rightarrow Y$ ein *inhaltlicher* Zusammenhang zwischen X und Y?

In der *normalen Sprache* versteht man sogenannte *Konjunktionen* (Bindewörter) wie ‚und', ‚oder' vor allem aber ‚wenn – dann' so, dass sie einen *inhaltlichen*, nicht zufälligen Zusammenhang ausdrücken. Z. B. ‚wenn es regnet, ist bzw. wird die Straße nass'. In diesem Fall ist ein *Kausal-Zusammenhang* (oder jedenfalls *Konditional*-Zusammenhang) ausgedrückt.

In der *formalen Logik* liegen die Verhältnisse anders und komplizierter. Grundsätzlich ist zu berücksichtigen, dass es in der Logik nur um *korrelative, funktionale* Relationen geht. Betrachten wir zunächst *synthetische* Relationen, hier vor allem die Implikation $X \rightarrow Y$. In Logik-Büchern wird oft darauf hingewiesen, dass auch eine *zufällige*, sogar für uns sinnlose Beziehung durchaus mit der Implikation ausgedrückt werden kann, z. B.: ‚Wenn Weihnachten an 25. Januar ist, dann ist Kennedy deutscher Bundeskanzler'. Und diese Implikation ist sogar wahr, weil die Implikation eben als wahr gilt, wenn Vordersatz und Nachsatz falsch sind.

Allerdings: Bei einer gesetzmäßigen Relation der Art ‚*immer* wenn – dann' (mit $p = 1$) besteht statistisch eine *absolute positive Korrelation*; dann ist es kaum denkbar, dass es sich um eine *zufällige* Beziehung handelt. Insofern ist es doch berechtigt, bei den logischen Relatoren *inhaltliche* Zusammenhänge anzunehmen.

Eine andere Lösung wäre, zwischen *materialer* (inhaltlicher) und *formaler* Implikation zu unterscheiden. Die bisher behandelte Implikation $X \rightarrow Y$ ist *formal*, d. h. zwischen X und Y muss *keinerlei inhaltlicher* Zusammenhang bestehen. Dagegen bestände bei einer *materialen Implikation* ein *inhaltlicher* Zusammenhang (ich weise darauf hin, dass die Begriffe ‚materiale Implikation' bzw. ‚formale Implikation' zuweilen in entgegengesetzter Bedeutung verwendet werden).

1-1-2-3 NEGATIONEN DER IMPLIKATION

Es gibt vor allem folgende Negationen:

	X	$\rightarrow$	$\neg$	Y	äquivalent $X \mid Y$
1.	+	–	–	+	
2.	+	+	+	–	
3.	–	+	–	+	
4.	–	+	+	–	

	$\neg($	X	$\rightarrow$	$Y)$	äquivalent $X \wedge \neg Y$
1.	–	+	+	+	
2.	+	+	–	–	
3.	–	–	+	+	
4.	–	–	+	–	

Die doppelte Negation $\neg(X \rightarrow \neg Y)$: + – – – ist äquivalent der Konjunktion $X \wedge Y$.

Hier ergibt sich die Gelegenheit, die *zentrale Zeile* der Wahrheitstafel zu erklären. Die zentrale Zeile ist diejenige, welche die Relation *definiert* bzw. welche der *Bezeichnung* der Relation entspricht. Diese zentrale Zeile wird bei den Beispielen *unterstrichen*.

Bei einer *positiven* Relation ist normalerweise die 1. Zeile *zentral.*

	X	$\rightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	+	–	–
3.	–	+	+
4.	–	+	–

Bei einer *negativen* Relation ist das anders, z. B.: $X \rightarrow \neg Y$. Die Relation besagt ja primär: Wenn X gültig (+) ist, dann ist Y nicht gültig (–). Y ist nicht gültig, bedeutet ja aber: $\neg Y$ ist gültig, also muss unter dem Negationszeichen $\neg$ ein + stehen. Somit ist hier die 2. Zeile die *zentrale*. Auch bei $\neg(X \rightarrow Y)$ ist die 2. Zeile die zentrale Zeile.

1-1-2-4 REPLIKATION

Die *Replikation* $X \leftarrow Y$ ist die *Umkehrung* der Implikation. Von daher ist es berechtigt, sie als Unterpunkt der Implikation zu behandeln.
Hauptdeutung: „Nur wenn X, dann auch Y (möglicherweise)“. Zu den anderen möglichen Deutungen verweise ich auf die Implikation.

X	$\leftarrow$	Y	ist äquivalent $\neg X \rightarrow \neg Y$
+	+	+	
+	+	–	
–	–	+	
–	+	–	

1-1-2-5 ÄQUIVALENZ

Die *Äquivalenz* bedeutet die Verbindung (Konjunktion) von *Implikation und Replikation*.
Das wird später genauer gezeigt werden.
Hauptdeutung: Wenn X, dann Y, und wenn Y, dann X.
Im Sinne der *Kopula* deutet man: X ist ein Y, und Y ist ein X, also X = Y.

X	↔	Y
+	+	+
+	–	–
–	–	+
–	+	–

ist äquivalent (X → Y) ∧ (X ← Y)

1-1-3 Positiv-Implikation

1-1-3-1 BEGRÜNDUNG DER POSITIV-IMPLIKATION

Die Positiv-Implikation A *→ B wurde schon in 0-2-5-5 eingeführt. In der *normalen Sprache* versteht man einen *Wenn-Dann-Satz* so, dass er nur eine Aussage macht über die Fälle, in denen der Wenn-Satz *wahr* ist. Ebenso in der *Wissenschaft* versteht man eine Hypothese meist in diesem Sinne (wenn sie eben nicht mit der Implikation formalisiert ist). Auch in der mathematischen *Wahrscheinlichkeitstheorie* wird eine Aussage p(A|B) = r/n über *bedingte Wahrscheinlichkeit* so interpretiert, dass sie sich nur auf die Fälle bezieht, in denen B wahr ist (A und B sind hier vertauscht). Dies bedeutet nicht zwangsläufig, dass man nicht *alle* Möglichkeiten berücksichtigt, denn man kann A *→ B ja ergänzen durch: ¬A *→ B.

Die *normale* Implikation A → B berücksichtigt dagegen automatisch auch die Fälle, in denen der Wenn-Satz falsch ist. Daher habe ich zur Ergänzung die *Positiv-Implikation* eingeführt. Sie berücksichtigt wie gesagt nur die beiden Welten, in denen das Vorderglied gültig (positiv) ist. Die Positiv-Implikation entspricht also viel mehr unserem üblichen Denken und der normalen Sprache, allerdings gibt es auch Nachteile: vor allem ist die Positiv-Implikation im analytischen Bereich, bei logischen Folgen, viel komplizierter als die normale Implikation.

1-1-3-2 ZWEI VARIANTEN DER POSITIV-IMPLIKATION

Die *Positiv-Implikation*, auch *Implikation, wird durch ein * über dem Pfeil gekennzeichnet: *→, also X *→ Y. Relation X *→ Y ist nur für die Welten *definiert*, in denen X gültig ist.

Im Beispiel: Ein Satz ‘Wenn es regnet, ist die Straße nass’ sagt nur etwas aus für den Fall, dass es regnet. Was mit der Straße geschieht, wenn es *nicht* regnet, ist *nicht definiert*.

Man kann die Positiv-Implikation durch zwei verschiedene Wahrheitstafeln darstellen:

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–

X	*→	Y
+	+	+
+	–	–
–	□	+
–	□	–

Im ersten Fall werden nur die 2 Welten aufgeführt, in denen das Vorderglied (der Vordersatz) X positiv ist. Ich verspreche hier von ‚verkürzter Positiv-Implikation’.

Im zweiten Fall ist die Implikation zwar für alle 4 Welten ausgeführt, aber in den 2 Welten, in denen der Wenn-Satz falsch ist (also das X ein – hat), steht das Symbol □ unter dem Relator. □ hat die Bedeutung ‘*nicht definiert’*. Diese Lösung der vollständigen Wahrheitstafel, mit 4 Welten, ist jedenfalls für die Individuen-Relation und die Klassen-Relation plausibler, in manchen Fällen ist sie sogar unverzichtbar.

1-1-3-3 NEGATIONEN DER POSITIV-IMPLIKATION
Es sollen vor allem folgende Negationen erwähnt werden:

X *→ ¬Y : − + □ □ ¬X *→ Y : □ □ + −
¬X *→ ¬Y : □ □ − + ¬ (X *→ Y) : − + □ □

Ich möchte auf ¬X *→ Y etwas genauer eingehen:

	¬X	*→	Y
1.	− +	□	+
2.	− +	□	−
3.	+ −	+	+
4.	+ −	−	−

Die *negative* Relation ¬X *→ Y ist für die Welten definiert, in denen X *ungültig* ist, also nicht für die Welten, in denen X gültig ist. In der Wahrheitstafel bedeutet das: ¬X *→ Y ist für die 3. und 4. Zeile definiert, in denen das Negationszeichen ¬ ein + hat und X ein −.

Ein Satz wie ‘Wenn es nicht regnet (¬X), bleibt die Straße trocken (Y), sagt bei Verwendung von *→ also nur etwas über das Fall aus, dass X ungültig und nicht X gültig ist.

1-1-3-4 POSITIV-REPLIKATION

X	←*	Y
+	+	+
+	□	−
−	−	+
−	□	−

1-1-3-5 POSITIV-ÄQUIVALENZ

X	↔*	Y
+	+	+
+	−	−
−	−	+
−	□	−

Man könnte kritisieren, dass die Äquivalenz in der 2. und 3. Zeile gar nicht definiert ist, weil auch von − (also negativem X oder negativem Y aus) geschlossen werden kann; ich werde aber später erläutern, warum diese Wahrheitstafeln doch korrekt sind.

1-1-4 Systematik

Die Relatoren und die Wahrheitswertetafel wurden bereits erläutert. Bei 2 Variablen gibt es $2^4 = 16$ ($4 = 2^2$) mögliche Verläufe der Wahrheitswerte-Tafel, von + + + + bis zu − − − −. Bei 3 Variablen gäbe es $2^8 = 256$ ($8 = 2^3$) mögliche Verläufe usw.

Gerade diese beiden letzten Verläufe stehen aber für *analytische* Relationen, für die *Tautologie* oder die *Kontradiktion*. Daher sollte man ihnen nicht (synthetische) Relatoren zuordnen Es gäbe demnach nur 14 Relatoren. Der Vollständigkeit halber zähle ich aber doch – wie es üblich ist – 16 Relatoren auf.

1-1-4-1 GESAMTÜBERSICHT

Name	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y	*Symbol*	*(mögliche) Bedeutung*
1) Tautologie	+	+	+	+	$X \top Y$	X oder nicht X und Y oder nicht Y
2) Disjunktion	+	+	+	–	$X \vee Y$	X oder Y (oder beide)
3) Replikation	+	+	–	+	$X \leftarrow Y$	nur wenn Y, auch X
4) Präpension	+	+	–	–	$X \rfloor Y$	jedenfalls X (vielleicht Y)
5) Implikation	+	–	+	+	$X \rightarrow Y$	immer wenn X, dann Y
6) Postpension	+	–	+	–	$X \lfloor Y$	jedenfalls Y (vielleicht X)
7) Äquivalenz	+	–	–	+	$X \leftrightarrow Y$	X ist äquivalent Y
8) Konjunktion	+	–	–	–	$X \wedge Y$	X und Y
9) Exklusion	–	+	+	+	$X \mid Y$	X oder Y (aber nicht beide)
10) Kontravalenz	–	+	+	–	$X >< Y$	entweder X oder Y
11) Postnonpension	–	+	–	+	$X \lceil Y$	keinesfalls Y
12) Postsektion	–	+	–	–	$X >- Y$	X und nicht Y
13) Pränonpension	–	–	+	+	$X \rceil Y$	keinesfalls X
14) Präsektion	–	–	+	–	$X -< Y$	Y und nicht X
15) Rejektion	–	–	–	+	$X \nabla Y$	nicht X und nicht Y
16) Antilogie	–	–	–	–	$X \perp Y$	X und nicht X und Y und nicht Y

Die hier genannten Bedeutungen sind zwar die wichtigsten, aber es lassen sich auch andere Bedeutungen angeben. Wenn man z. B. eine *mengentheoretische Semantik* wählt, ergeben sich ggf. ganz andere Interpretationen, z. B. für $X \rightarrow Y$: X ist Teilmenge von Y (vgl. 0-4).

Grundsätzlich lassen sich *alle* diese Relationen auf *eine einzige* zurückführen, z. B. auf die *Exklusion* X | Y (auch ‘nand’ für non-and genannt) und auf die *Rejektion* $X \nabla Y$ (auch ‘nor’ für non-or genannt). ‘nand’ und ‘nor’ spielen bei der *Computer-Logik* eine besondere Rolle.

1-1-4-2 ÜBERSICHT ÜBER DIE WICHTIGSTEN RELATOREN

Die wichtigsten Relatoren sind wie schon beschrieben:

• *Konjunktion*	und	formal: $\wedge$	$X \wedge Y$
• *Disjunktion*	oder/und (inklusiv)	formal: $\vee$	$X \vee Y$
• *Kontravalenz*	entweder - oder (exklusiv)	formal: $><$	$X >< Y$
• *Exklusion*	oder (nicht beide)	formal: $\mid$	$X \mid Y$
• *Implikation*	wenn – dann	formal: $\rightarrow$	$X \rightarrow Y$
• *Äquivalenz*	nur wenn – dann	formal $\leftrightarrow$	$X \leftrightarrow Y$

Die Wahrheitstafeln sind:

X Y	$\wedge$	$\vee$	$><$	$\mid$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
+ +	+	+	–	–	+	+
+ –	–	+	+	+	–	–
– +	–	+	+	+	+	–
– –	–	–	–	+	+	+

Eine weitere Möglichkeit ist die Einteilung der Relatoren nach *Anzahl der gültigen Welten*:

- 4-Welt-Relator: $\top$
- 3-Welt-Relatoren: $\rightarrow$ $\leftarrow$ $\vee$ $\mid$
- 2-Welt-Relatoren: $\leftrightarrow$ $><$ $\rfloor$ $\lfloor$ $\rceil$ $\lceil$
- 1-Welt-Relatoren: $\wedge$ $-<$ $>-$ ∇
- 0-Welt-Relator: $\perp$

1-1-4-3 KONJUNKTION

Ich will die Konjunktion $\wedge$ besonders hervorheben, weil sie sich an besten für die Einführung einer *partiellen Wahrheit* eignet.

	X	$\wedge$	Y
1.	+	+	+
2.	+	–	–
3.	–	–	+
4.	–	–	–

Man könnte folgendermaßen argumentieren: Wenn X und Y beide falsch (–) sind (4. Zeile), dann ist der *Gesamtsatz falsch*. Wenn aber nur *entweder* X *oder* Y falsch sind (2. bzw. 3. Zeile), dann ist der Gesamtsatz *halb wahr und halb falsch*, man könnte sagen *1/2 wahr*. Als Symbol könnte man wählen: ±. Man hätte ein *3-wertiges System*, mit der Wahrheitstafel:

	X	$\wedge$	Y
1.	+	+	+
2.	+	±	–
3.	–	±	+
4.	–	–	–

Dabei ist es zu bedenken: Man kann mit der Konjunktion und der Negation die anderen Relatoren definieren, das wird im Kap. 2 über analytische Relationen genauer erläutert.

Wenn man z. B. die Implikation $X \rightarrow Y$ mittels Konjunktion darstellt, nämlich als $\neg(X \wedge \neg Y)$, dann ergibt sich als Wahrheitswerteverlauf $\pm - + \pm$ (wenn man $\pm$ negiert, erhält man offensichtlich wiederum $\pm$). Diese Deutung der Implikation ist allerdings nicht sehr plausibel, am besten ließe sich das *Modell der partiellen Wahrheit* nur bei eindeutigen Konjunktionen anwenden, besser allerdings noch in einer quantitativen Theorie (vgl. 1-3-1-2).

1-1-4-4 RELATIONS-KETTEN

Es lassen sich beliebig lange *Ketten* von Relationen herstellen, d. h. *Molekular-Relationen*.

Dabei ist zu unterscheiden:

- Molekular-Relationen mit mehreren, mindestens drei Variablen, wobei jede Variable nur *einmal* vorkommt. Sie sind *synthetisch*.
  z. B.: $(X_1 \leftrightarrow Y_1) \wedge (X_2 \vee Y_2)$.
- Molekular-Relationen mit mehreren Variablen, wobei mindestens eine Variable *mehr als einmal* vorkommt. Es handelt es sich um *(partiell) analytische* Relationen:
  analytisch: z. B. $X \wedge Y \;\Rightarrow\; X \vee Y$
  teil-analytisch : z. B. $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$

Für die Wahrheitstafel gilt:
Bei 2 Variablen: $2^2 = 4$ Reihen bzw. 4 mögliche Welten
Bei 3 Variablen: $2^3 = 8$ Reihen bzw. 8 mögliche Welten usw.
Bei 4 Variablen: $2^4 = 16$ Reihen bzw. 16 mögliche Welten
Bei n Variablen: 2^n Reihen bzw. mögliche Welten.

Beispiel: die Wahrheitstafel einer *synthetischen* Molekular-Relation mit *3* Variablen X, Y, Z

	$(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$
1.	+ + + + +
2.	+ + + – –
3.	+ – – + +
4.	+ – – + –
5.	– + + + +
6.	– + + – –
7.	– + – + +
8.	– + – – –

1-1-4-5 REFLEXIVITÄT, SYMMETRIE UND TRANSITIVITÄT VON RELATOREN

Es gibt verschiedene Kriterien, nach denen man Relatoren (Junktoren) einteilen kann.

- Reflexivität
  - *reflexiv* bedeutet: $X\ {}^{+}R^{+}\ X$, z. B. $X \Rightarrow X$, die Relation ist tautologisch
  - *irreflexiv* bedeutet: $X\ {}^{+}R^{-}\ X$, z. B. $X \wedge X$ (+ + – –), ist nicht tautologisch (man kann irreflexiv auch so interpretieren, dass gilt: $X\ {}^{-}R^{-}\ X$, also eine *Kontradiktion* besteht, aber einen entsprechenden Relator gibt es nicht, wenn man vom problematischen Antilogator absieht)
- Symmetrie
  - *symmetrisch*: $X\ R\ Y \Leftrightarrow Y\ R\ X$, also z. B. : $X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X$
    für symmetrische Relatoren gilt somit das *Vertauschungsgesetz*

symmetrisch sind z. B.: $\wedge$ $\vee$ $><$ $\mid$ $\leftrightarrow$

- *asymmetrisch*: X R Y $\neg\Leftrightarrow$ Y R X
  asymmetrisch sind z. B.: $\rightarrow$ $\leftarrow$
  Für asymmetrische Relatoren gilt das Vertauschungsgesetz nicht,
  z. B. $(X \rightarrow Y) \longleftrightarrow (X \leftarrow Y)$, aber eben *nicht*: $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \leftarrow Y)$
  $X \rightarrow Y$ und $X \leftarrow Y$ sind nur partiell analytisch äquivalent.

• Transitivität

- *transitiv*: $(X\ R\ Y) \wedge (Y\ R\ Z) \Rightarrow (X\ R\ Z)$
  z. B.: $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \Rightarrow (X \rightarrow Z)$: $\rightarrow$ ist transitiv
- *intransitiv*: $(X\ R\ Y) \wedge (Y\ R\ Z) \neg\Rightarrow (X\ R\ Z)$
- z. B.: $(X \vee Y) \wedge (Y \vee Z) \neg\Rightarrow (X \vee Z)$: $\vee$ ist intransitiv

Folgende Symbole wurden hier verwendet, die erst später genauer erklärt werden:

$\Leftrightarrow$ (tauto)logisch äquivalent $\neg\Leftrightarrow$ nicht logisch äquivalent
$\Rightarrow$ (tauto)logisch implikativ $\neg\Rightarrow$ nicht logisch implikativ

Die *Symmetrie* behandle ich ausführlicher, weil sie von besonderer Bedeutung ist.

Die *asymmetrischen* Relatoren sind *dyadisch*, sie sind nur für 2 Variablen definiert (wenn man natürlich auch mehr Variablen damit verbinden kann). Die *symmetrischen* Relatoren sind dagegen für beliebig viele Variablen zu definieren.

Praktisch zeigt sich das folgendermaßen: Für eine *asymmetrische* Implikation mit 3 Variablen $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ ist die Wahrheitstafel nicht unmittelbar ersichtlich.

Auch ergibt sich für $(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$ eine andere Wahrheitstafel als für $X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$.

Dagegen ist bei den *symmetrischen* Relatoren wie $\wedge$ $\vee$ $><$ $\mid$ $\leftrightarrow$ die Wahrheitstafel für 3 (und beliebig viele) Variablen sofort zu bestimmen:

X	Y	Z	$\wedge$	$\vee$	$><$	$\mid$	$\leftrightarrow$
+	+	+	+	+	–	–	+
+	+	–	–	+	+	+	–
+	–	+	–	+	+	+	–
+	–	–	–	+	+	+	–
–	+	+	–	+	+	+	–
–	+	–	–	+	+	+	–
–	–	+	–	+	+	+	–
–	–	–	–	–	–	+	+

1-1-5 Erweiterungen

Man kann die Aussagen-Logik, generell die Logik, auf Bereiche anwenden, die zwar eine logische Struktur haben, andererseits aber über die Logik hinausreichen, die *hyper-logisch* sind. Ich möchte hier folgende Bereiche kurz besprechen:

• Modalität
• Kausalität
• Identität
• Zeit
• Raum

1-1-5-1 MODALITÄT

Die primäre Modalität ist die sogenannte *alethische* Modalität: sie hat es mit Begriffen wie *Notwendigkeit*, *Möglichkeit* und *Unmöglichkeit* zu tun. Modalität kann man so verstehen, dass sie auch *außer-logische* Komponenten enthält, z. B. wenn man die Modalität auf *Kausalität* bezieht: *notwendig* ist dann eine *Wirkung* in Bezug auf ihre *Ursache*.

Modalität kann man aber auch allein *innerhalb* der Logik definieren. Einige modal-logische Begriffe, nämlich „notwendig" (N) und „notwendig nicht" (N¬) lassen sich dabei rein *aussagen-logisch* ausdrücken, in erster Linie durch die *Implikation*.

Das sei kurz für einen *synthetischen* Ansatz erläutert (an späterer Stelle werden wir den – wichtigeren – analytischen Ansatz besprechen). Beim synthetischen Ansatz geht es um *empirische* Modalitäten, nicht um *logische*. ‚Y ist notwendig in Bezug auf X' bedeutet also: „Y ist empirisch notwendig in Bezug auf X".

1) Notwendigkeit

„Y ist *notwendig* in Bezug auf X" kann man *aussagen-logisch* durch $X \rightarrow Y$ (bzw. $X *\!\!\rightarrow Y$) ausdrücken. *Modal-Logisch* schreibt man dann, bei N = Notwendigkeit: $N(Y, X) =_{df} X \rightarrow Y$. Lies: ‚Y ist notwendig in Bezug auf X' ist definiert als: $X \rightarrow Y$.

2) Unmöglichkeit

Die Frage ist, wie man „nicht Y ist notwendig in Bezug auf X" („wenn X, dann notwendig nicht Y") ausdrückt. Dies setzt man modal-logisch gleich mit „Y ist *unmöglich* in Bezug auf X". Ich will zwei Modelle vorstellen:

• $X \rightarrow \neg Y$: – + + +

Man könnte zunächst durch $X \rightarrow \neg Y$ formalisieren. Es ließe sich argumentieren: wenn X nicht-Y impliziert, dann ist es unmöglich, dass X auch Y impliziert. Aber dies ist logisch durchaus möglich: denn $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \neg Y)$ ist *keine Kontradiktion*, sondern hat den Wahrheitsverlauf – – + +. Beide Ausdrücke können zugleich wahr sein. Doch es darf ja nicht zugleich gelten: „Y ist n*otwendig* in Bezug auf X" und „Y ist *unmöglich* in Bezug auf X".

Allerdings könnte man sich mit der *Positiv-Implikation* $X *\!\!\rightarrow Y$ behelfen, die ja nur für die Welten definiert ist, in denen X wahr ist. Entsprechend gibt diese hier eine *Kontradiktion* an, nämlich: $(X *\!\!\rightarrow Y) \,^{-}\!\wedge^{-} (X *\!\!\rightarrow \neg Y)$.

• $\neg(X \rightarrow Y)$: – + – –

Alternativ mag man „Y ist *unmöglich* in Bezug auf X" durch die Negation $\neg(X \rightarrow Y)$ formalisieren. Dann ist die gewünschte Kontradiktion zwischen *notwendig*: $X \rightarrow Y$ und *unmöglich*: $\neg(X \rightarrow Y)$ gewährleistet. Die Formalisierung $\neg(X \rightarrow Y)$ mag zunächst verwundern, man würde das eher übersetzen mit „es ist nicht wahr, dass Y notwendig ist in Bezug auf Y". Aber $\neg(X \rightarrow Y)$ hat den Wahrheitsverlauf – + – –, es ist nur in dem *einen* Falle wahr, dass X wahr und Y falsch ist; das passt also zu: „wenn X, dann unmöglich Y". Außerdem ist in einem *2-wertigen* System „unmöglich" die Negation von „notwendig". Auch wenn $\neg(X \rightarrow Y)$ als Lösung nicht völlig überzeugen mag, in der synthetischen Modal-Logik dürfte es keine bessere geben. Modal-logisch schreibt man (bei U = Unmöglich): $U(Y, X) =_{df} \neg(X \rightarrow Y)$.

3) Möglichkeit

Meine These ist, dass sich „möglich" nicht rein *aussagen-logisch* darstellen lässt. Die Frage ist, ob sich Gegenmodelle finden. Ich will hier nur $\neg(X \rightarrow \neg Y)$: + – – – diskutieren.

„Y ist möglich in Bezug auf X", formal M(Y, X), wird hier durch die *doppelte Negation* der Implikation gebildet, mit der Bedeutung: „Es ist nicht wahr, dass nicht-Y notwendig auf X folgt". Aber hier ergibt sich folgendes Problem: Ein wesentliches Gesetz der Modal-Logik ist:

notwendig $\Rightarrow$ möglich bzw. notwendig (X) $\Rightarrow$ möglich (X). Ein strenger Schluss von „notwendig" auf „möglich" ist aber nicht gegeben: $(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg(X \rightarrow \neg Y)$: + + – –. Es handelt sich also nur um einen *semi-analytischen* Schluss. Schlimmer, umgekehrt ergibt sich ein *strenger* Schluss: $\neg(X \rightarrow \neg Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$. Dies hieße aber: möglich $\Rightarrow$ notwendig, und das ist inakzeptabel. Generell gilt: $X \rightarrow Y$ impliziert logisch ($\Rightarrow$) überhaupt nur sich selbst, also $(X \rightarrow Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$, oder Tautologien. Auch andere *Gegenmodelle* scheitern.

Fazit: Genau so, wie sich „einige" und „einige nicht" nicht *aussagen-logisch* ausdrücken lassen, so auch nicht „möglich" und „möglich nicht", welche dieselbe quantitative Struktur besitzen: „möglich" entspricht „einige", „möglich (dass) nicht" entspricht „einige nicht". „Möglich" (M) und „möglich nicht" ($M\neg$) sind nur durch *Quantoren-Logik* bzw. eine höhere Logik darzustellen – gleichgültig, ob in einem *synthetischen* oder einem *analytischen* Ansatz.

1-1-5-2 KAUSALITÄT

Hier sollen die *logischen Strukturen* von *Kausal-Beziehungen* kurz angegeben werden. Zur Kausalität gehört natürlich mehr als die logische Struktur – so geht die Ursache der Wirkung *zeitlich* voraus –, aber eine bestimmte logische Struktur ist notwendige Bedingung für die spezielle Kausalbeziehung.

Bei einer sogenannten *Kausal-Erklärung* gibt man normalerweise ein *Gesetz* an, *quantoren-logisch* ein *All-Satz*, aus dem mit einer zusätzlichen Prämisse (*Randbedingung*) ein singulärer Satz bzw. ein singuläres Ereignis erklärt wird.

Ich beschränke mich hier aber auf die aussagen-logischen Grundstrukturen.

• *Mono-Kausalität*

$X \leftrightarrow Y$ Wahrheitsverlauf : + – – +

‚Mono-Kausalität' bedeutet: es gibt nur *eine* Ursache X für die Wirkung Y. Mono-Kausalität kommt in der Wirklichkeit kaum vor, es bedeutet meistens eine Abstraktion oder Ignorierung von anderen Faktoren. Logisch entspricht dem die Äquivalenz $X \leftrightarrow Y$: Wenn X realisiert ist, muss auch Y gültig sein. Und umgekehrt. X ist *notwendig und hinreichend* für Y und umgekehrt.

• *Multi-Kausalität*

$X \rightarrow Y$ Wahrheitsverlauf: + – + +

Bedeutet: X ist *hinreichend* für Y (aber nicht notwendig). Es kann auch andere Ursachen für Y geben (man kann Multi-Kausalität allerdings auch im Sinne von *Konditionalität* verstehen d. h. dass mehrere Faktoren zusammen auftreten müssen, um die Wirkung Y hervorzubringen). Dies wird am besten durch die Implikation $X \rightarrow Y$ wiedergegeben, wobei man allerdings die Positiv-Implikation $X \mathbin{*\!\!\rightarrow} Y$ vorziehen könnte.

• *Konditionalität*

$X \leftarrow Y$ Wahrheitsverlauf: + + – +

X ist eine Bedingungen von *mehreren* für Y. X ist also *notwendig* für Y (aber nicht hinreichend). Dies wird durch die Replikation $X \leftarrow Y$ ausgedrückt.

1-1-5-3 IDENTITÄT

Auch bei der Identität läst sich die logische Struktur angeben.

1. *Identität*	$X \leftrightarrow Y$	Wahrheitsverlauf: + – – +
2. *Teilhaftigkeit* (X ist Teil von Y)	$X \rightarrow Y$	Wahrheitsverlauf: + – + +
3. *Nicht-Identität*	$X \rightarrow \neg Y$	Wahrheitsverlauf: – + + +
bzw.	$\neg X \leftarrow Y$	Wahrheitsverlauf: – + + +

1-1-5-4 ZEIT

Zeit ist keine Komponente der Logik, bei logischen Relationen wird gerade von Zeit *abstrahiert*. Dennoch kann man die Logik auf die Zeit anwenden, z. B. von „immer“ auf „manchmal“ schließen, wie später noch gezeigt wird. Aber Zeit ist eine Komponente von *Kausalität*, hier besteht ein *Zeitverlauf*, die Ursache geht der Wirkung zeitlich voraus.

Von daher kann man eine Formel wie die folgende aufstellen:

$$X/t_i \rightarrow Y/t_j$$

’t’ steht für Zeit, i und j sind bestimmte Werte, wobei: $i < j$, d. h. der Zeitpunkt i geht dem Zeitpunkt j *voraus*. Die Formel wäre also zu lesen: ‚Wenn X zum Zeitpunkt t_i gültig ist, dann ist Y zum Zeitpunkt t_j gültig’. Aber die Bestimmungen von ‚t’ gehören dabei nicht zur Logik im eigentlichen Sinn.

1-1-5-5 RAUM

Raum ist ebensowenig wie Zeit eine Komponente der Logik, obwohl sich die Logik auch auf die Dimension Raum anwenden lässt: Z. B. kann man logisch feststellen, es ist unmöglich, dass etwas *überall* (an *allen* Orten) und *nirgends* (an *keinem* Ort) gilt.

Aber *Kausalbeziehungen* – zwischen materiellen Objekten – sind auf den Raum angewiesen. Bei der eigentlichen *Verursachung* wird Materie, Energie oder Information in der Zeit und *durch den Raum übertragen*.

Auch bei der *Identität* – von materiellen Objekten – spielen *Raum* und *Zeit* eine Rolle. Identität setzt nämlich die *Gleichheit* von Ort und Zeit voraus. Im Grunde kann man ein Objekt nur virtuell von sich selbst unterscheiden.

So könnte man eine Formel wie die folgende aufstellen:

$$X/t_i,o_i \leftrightarrow Y/t_i,o_i$$

Dabei steht ‘o’ für Ort. Die Formel wäre zu lesen: ‚Wenn X zum Zeitpunkt t_i, am Ort o_i gültig bzw. realisiert ist, dann ist Y ebenfalls zum Zeitpunkt t_i, am Ort o_i gültig bzw. realisiert’ (und umgekehrt). Aber auch hier gilt, dies ist keine rein logische Formel mehr.

1 – 2 QUANTOREN- UND PRÄDIKATEN-LOGIK

1-2-1 Einführung

1-2-1-1 TERMINOLOGIE

In diesem Kapitel wird die synthetische *Quantoren-Logik*, aber auch die mit ihr verbundene *Prädikaten-Logik* dargestellt. Der Terminus *Quantoren-Logik* bezieht sich auf die sogenannten *Quantoren*, das sind Quantitäts-Ausdrücke, in erster Linie:

1. „*alle*", formal Λ: *All-Quantor* oder *Generalisator*
2. „*einige*", formal V: *Partikulär-Quantor* oder *Partikularisator*

Mit diesen Quantoren werden Relationen bzw. Strukturen oder Sätze gebildet.
Man kann also unterscheiden:

• *All-Relationen (All-Sätze)*
Sie werden mit dem *All-Quantor* Λ gebildet. Λ bedeutet: „für alle gilt".
Z. B. Λx(Fx): „für alle x gilt, sie haben die Eigenschaft F". Genauer:
„für alle *Individuen* (individuellen Objekte) x gilt, sie haben die Eigenschaft F".

• *Partikulär-Relationen (Partikulär-Sätze)*
Partikulär-Strukturen werden mit dem *Partikulär-Quantor* V gebildet.
V bedeutet: „für einige gilt" oder „für mindestens ein/e/n gilt".
Z. B. Vx(Fx): „für einige x gilt, sie haben die Eigenschaft F".
Statt von *Partikulär-Quantor* spricht man häufiger von *Existenz-Quantor* und statt von Partikulär-Strukturen von Existenz-Strukturen bzw. Existenz-Sätzen.
‚V' bedeutet dann: „Es gibt einige ..." oder „es gibt mindestens ein/e/n ..."
Diese *Existenz-Deutung* ist aber sehr problematisch (wie später noch ausführlich gezeigt werden wird).

1-2-1-2 ABGRENZUNG VON DER AUSSAGEN-LOGIK

Vor allem durch die Unterscheidung von *4* Werten unterscheidet sich die Quantoren-Logik von der *Aussagen-Logik*. Die Aussagen-Logik ist eine 2-wertige Logik. Sie differiert gewissermaßen nur zwischen *alle* (= positiv) und *alle nicht* (= negativ). So gesehen wird in der Aussagen-Logik der All-Quantor *implizit* auch verwendet. Denn es steht:

$X \rightarrow Y$ für „Alle X sind Y"
$\neg(X \rightarrow Y)$ für „Alle X sind nicht Y"

Darauf (und auch auf Probleme bei dieser Bestimmung) werde ich noch eingehen.

In der *Quantoren-Logik* wird dagegen zwischen folgenden 4 Größen unterschieden:
1. *alle* 2. *alle nicht* 3. *einige* 4. *einige nicht*

Zwar wären auch andere Begriffe möglich, z. B. „nicht alle" statt „einige nicht" (dazu später).

Es sind also hier zu dem 2 Werten der Aussagen-Logik „alle“ und „alle nicht“ noch die Werte „einige“ und „einige nicht“ hinzugekommen. Entsprechend kann man Sätze/Relationen mit „alle“, „einige“ usw. unterscheiden. Die Aussagen-Logik ist also gewissermaßen Teil (oder ein Grenzfall) der Quantoren-Logik.

Man könnte hier einwenden: Die klassische *Aussagen-Logik* behandelt nur *nicht analysierte* Aussagen (‚A'/‚B'), während die *Quantoren-Logik* sich auf Individuen (x, y) und deren Eigenschaften (F, G) bezieht – und dies sei der wesentliche Unterschied zwischen beiden.

M. E. ist dieser Unterschied aber nicht fundamental – ich habe ja bereits gezeigt, dass sich die aussagen-logischen Relatoren durchaus auch auf Individuen, Mengen bzw. Eigenschaften anwenden lassen. Entscheidend ist viel mehr: Bei der Quantoren-Logik liegt eine *mehrwertige* Logik vor, normalerweise eine *4-wertige* Logik.

Der Begriff ‚*Quantoren-Logik*' ist wenig glücklich – genau so, wie der Ausdruck ‚*Aussagen-Logik'* nicht überzeugt. Wesentlich ist, dass bei der Quantoren-Logik normalerweise 4 Größen unterschieden werden; dass diese Unterscheidung mit *Quantoren* geschieht, ist er sekundär. Besser würde man daher den Ausdruck *4-wertige Logik* nutzen. Ich verwende aber dennoch überwiegend den Begriff ‚Quantoren-Logik', weil er eben eingeführt ist.

1-2-1-3 STRUKTUR-EBENEN

Wie die 2-wertige „Aussagen-Logik“ kann sich die 4-wertige Logik („Quantoren-Logik“) prinzipiell auf alle 3 Ebenen bzw. Relationen beziehen. Als Beispiel nehme ich „alle“:

- *Individuen-Relation*: x ist in *allen* Fällen ein F.
- *Klassen-Relation*: *Alle* Elemente von F sind auch Elemente von G.
- *Molekular-Relation*: Wenn die Relation A positiv ist, dann ist in *allen* Fällen bzw. allen Welten auch die Relation B positiv.

Nun ist es aber so, dass in der Quantoren-Logik überwiegend die *Klassen-Relationen* behandelt werden, d. h. Relationen zwischen Klassen F, G usw. (bzw. ihren Elementen, den Individuen). Man kann daher von *Klassen-Logik* sprechen.

1-2-1-4 DARSTELLUNGSFORMEN DER KLASSEN-LOGIK

Um Klassen-Relationen darzustellen, gibt es in der Logik vor allem 3 *Darstellungsmöglichkeiten*. In Klammern nenne ich jeweils die herkömmlichen Bezeichnungen; sie sind wie gesagt nicht sehr sinnvoll, aber da sie eingeführt sind, benutze ich sie auch.

1. *Ganzheits-Darstellung* (‚Mengen-Logik')
   Die Klasse bzw. Menge als ganze wird dargestellt.
2. *Kollektiv-Darstellung (*‚Quantoren-Logik')
   Die Klasse wird durch Quantoren und Individuen dargestellt.
   Man könnte auch von ‚Allgemein-Darstellung' sprechen.
3. *Individual-Darstellung* (‚Prädikaten-Logik')
   Die Klasse wird durch Individuen mit Zahl-Indizes und Relatoren dargestellt.

Genauer:

1. *Ganzheits-Darstellung (Mengen-Logik)*

Die Ganzheitsdarstellung arbeitet mit Mengen-Symbolen wie F, G bzw. Relations-Symbolen aus der *Mengenlehre* wie $\subset$ $\supset$ $\subseteq$ $\not\subset$.

2. *Kollektiv-Darstellung (Quantoren-Logik)*

Die herkömmliche Logik verwendet in erster Linie *Quantoren*, um diese Ausdrücke zu formalisieren, den *All-Quantor* Λ und den sogenannten *Existenz-Quantor* V, außerdem Prädikatoren wie ‚F', ‚G' und Individuenvariablen wie ‚x', ‚y'.

3. *Individual-Darstellung (Prädikaten-Logik)*
Auch der Terminus 'Prädikaten-Logik' ist sehr unglücklich. Ich spreche hier z. B. von Individual-*Darstellung* und nicht von Individual-*Logik*. Denn der Terminus ‚Individual-Logik' bezieht sich nur auf *singuläre* Individuen-Relationen wie Fx. Es geht hier aber um die Individual-Darstellung einer Klassen-Logik, wobei *Zahl-Indizes* verwendet werden, z. B. $Fx_1, \dots, Fx_n$.

Ich bringe als Beispiel jeweils den Fall „alle".

1. Ganzheits-Darstellung / Mengen-Logik
   $F \subset G$
   Die Klasse F ist Teilmenge der Klasse G.

2. Kollektiv-Darstellung / Quantoren-Logik
   $\Lambda x\ (x \in F \rightarrow x \in G)$
   Alle Elemente der Klasse F sind auch Elemente von G (vereinfacht)

3. Individual-Darstellung / Prädikaten-Logik
   $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \dots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$ bzw.
   $(x_1 \in F \rightarrow x_1 \in G) \wedge (x_2 \in F \rightarrow x_2 \in G) \wedge \dots \wedge (x_n \in F \rightarrow x_n \in G)$
   Element x_1 der Klasse F ist auch Element von G usw. bis zum Element x_n

1-2-1-5 MENGEN-LOGIK / GANZHEITS-DARSTELLUNG

Die Mengen-Logik spielt eine untergeordnete Rolle, ich behandele sie nur hier etwas genauer. Es geht um das Verhältnis zweier Klassen oder Mengen (F, G) als ganzer:

• alle	F ist Teilmenge von G	$F \subset G$
• nicht alle	F ist nicht Teilmenge von G	$F \not\subset G$
• einige	F schneidet G	$F \sqcap G$
• nicht einige	F schneidet nicht G	$F \neg\sqcap G$

• alle / F ist Teilmenge von G
(„alle Elemente von F sind Elemente von G", kürzer: „alle F sind G" bzw. „alle Fs sind Gs").
Genauer unterscheidet man:
– F ist *echte* Teilmenge von G: $F \subset G$
  In diesem Fall ist G nicht auch Teilmenge von F, d. h. es gibt mindestens ein Element von G, das nicht Element von F ist: $G \not\subset F$.
  Somit gilt auch: $F \subset G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \not\subset F$. Oder: $F \subset G \Rightarrow G \not\subset F$
– F ist (*unechte*) Teilmenge von G : $F \subseteq G$
  $F \subseteq G$ bedeutet: $F \subset G \vee F = G$
  F ist gleich G, $F = G$, setzt voraus, dass G auch (unechte) Teilmenge von F ist: $G \subseteq F$.
  Es gilt also: $(F \subseteq G \wedge G \subseteq F) \Leftrightarrow (F = G)$
Es gibt auch eine Möglichkeit, solche Relationen zu kennzeichnen, ohne auf Mengen-*Relatoren* wie $\subset$ oder $\subseteq$ Bezug zu nehmen. Z. B. kann man für $F \subset G$ auch sagen: „Die Differenzmenge F \ G ist leer"): $F \setminus G = \varnothing$. Die *leere Menge* symbolisiert man durch $\varnothing$ oder { }.

• nicht alle = einige nicht / F ist nicht Teilmenge von G

Die *übliche* Deutung von F $\not\subset$ G ist:„einige F sind nicht G“ bzw. „mindestens ein Element von F ist nicht Element von G“. Bei dieser Deutung ist über G damit noch nichts festgelegt: Es können alle Elemente von G, einige oder kein Element von G auch Elemente von F sein.

- einige / F schneidet G

Für „F schneidet G“ verwende ich das Zeichen $\sqcap$, also F $\sqcap$ G. Denn $\cap$ ist schon vergeben für die Verknüpfung „Schnittmenge“. F $\sqcap$ G darf also nicht verwechselt werden mit F $\cap$ G für „die Schnitt-Menge F $\cap$ G“. Bei F $\sqcap$ G besteht eine *Relation*, bei F $\cap$ G wird nur eine *Menge* genannt. Es ist bezeichnend, dass es hier kein eingebürgertes Zeichen gibt. Denn genau wie sich in der Aussagen-Logik kein Relator findet, der „einige F sind G“ ausdrückt, so auch nicht in der Mengenlehre für das entsprechende „F schneidet G“, da die Mengenlehre, entsprechend der *Aussagen-Logik*, ursprünglich *2-wertig* aufgebaut ist.

Auch hier ist es möglich, auf die *Relatoren* zu verzichten. Indem man nämlich angibt, die *Schnitt-Menge* von F und G ist gefüllt bzw. ist nicht leer. Man würde dann formal schreiben:

F $\sqcap$ G bedeutet: F $\cap$ G $\neq \varnothing$ (somit ist eine Relation formuliert).

- nicht einige = alle nicht / F schneidet nicht G

„F schneidet nicht G“ ist die Verneinung von „F schneidet G“, sowie „nicht einige F sind G“ die Verneinung von „einige F sind G“ ist. Für diese Relation gibt es leider kein vorgegebenes Symbol; in Anlehnung an $\sqcap$ verwende ich $\neg\sqcap$, also mit davor geschriebenem *Negator*. Für „F schneidet nicht G’“, also: F $\neg\sqcap$ G.

F $\neg\sqcap$ G heißt „alle Elemente von F sind nicht Elemente von G“. Daraus folgt aber: „alle Elemente von G sind nicht Elemente von F“. $\sqcap$ und entsprechend $\neg\sqcap$ sind *symmetrische* Relatoren. D. h. es gilt: F $\sqcap$ G $\Leftrightarrow$ G $\sqcap$ F bzw. F $\neg\sqcap$ G $\Leftrightarrow$ G $\neg\sqcap$ F

Auch hier kann man statt Relatoren *Verknüpfungsoperatoren* ($\cap$) verwenden. Indem man nämlich angibt: „die Schnittmenge von F und G ist leer“. F $\sqcap$ G bedeutet: F $\cap$ G = $\varnothing$.

1-2-2 Implikation

Hier geht es nicht nur um die Verwendung der Implikation $\rightarrow$, sondern generell um *Kopula*-Strukturen der Form: X ist (ein) Y, wobei *einfache* und *komplexe* Relationen vorkommen.

1-2-2-1 EINFACHE UND KOMPLEXE RELATIONEN

Man kann *einfache* = atomare und *komplexe* = molekulare *Relationen* bzw. *Strukturen* bzw. *Aussagen* bzw. *Sätze* (ich wechsle diese Begriffe ab) unterscheiden:

- *einfache Relationen* (atomar)
  In einfachen Relationen kommt nur *ein* Prädikator (F) vor. Also z. B.:
  Λx(Fx) oder Vx$\neg$(Fx).
  Man schreibt den Prädikatausdruck mit implizitem Relator Fx (gemischt extensional-intensional) oder x $\in$ F (extensional); so wird der Aussage nur *ein* Wert zugeordnet, wahr oder falsch. Im Sinne einer einheitlichen, *funktionalen* Logik würde man allerdings die Implikation bzw. (Positiv-Implikation) einsetzen. Man schriebe also:
  Λx(x $\rightarrow$ F) oder Vx$\neg$(x $\rightarrow$ F).

Hier wird dann der (Wahrheits-)Wert von x → F als *Funktion* der Werte für x und für F ermittelt.

- *komplexe Relationen* (molekular)
Bei komplexen Strukturen kommen 2 oder mehr *Prädikatoren* (F, G. usw.) vor. Die einzelnen Prädikate werden meist durch die Implikation →, aber auch die Konjunktion o. a. verbunden.
Implikation, z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$, Konjunktion z. B. $Vx(Fx \wedge Gx)$.
Wie ich allerdings nachher zeigen werde, ist die *Positiv-Implikation* überlegen.
Höher-komplex sind Relationen, bei denen zwei oder mehr *Individuen-Variablen* x, y verwendet werden, es handelt sich um *mehr-stellige* Prädikate, z. B.:
$\Lambda x \Lambda y(F(x,y))$: für alle x, alle y gilt: x steht zu y in der Relation F.
$\Lambda x Vy(F(x,y))$: für alle x gilt, es gibt mindesten ein y, so dass x zu y in der Relation F steht.

Prädikaten-Logik
Die *Quantoren-Logik* setzt die *Prädikaten-Logik* voraus. Der Begriff ‚Prädikaten-Logik' rührt daher, dass man hier nicht mehr Aussagen *als ganze* betrachtet, sondern sie zerlegt in *Subjekt* und *Prädikat* bzw. in Individuatoren und Prädikatoren. Der Begriff ist aber unglücklich, denn es geht darum, dass hier *Individuen* Eigenschaften zugeordnet werden bzw. ihnen das Enthaltensein in einer Klasse zugesprochen wird. Man spräche besser von *‚Individuen-Logik'* bzw. von ‚Individual-Darstellung der Klassen-Logik'. Ich verwende aber vorwiegend die eingeführte Bezeichnung ‚Prädikaten-Logik'.

Zum *Verhältnis von Quantoren- und Prädikaten-Logik*: Man kann einerseits die Quantoren-Logik als aussagestärker ansehen, quasi als Prädikaten-Logik + Quantoren. Wenn man aber in der Prädikaten-Logik anstatt Quantoren *Zahl-Indizes* (1, 2, n) verwendet, so erhält man *implizit* mehr Präzision als in der Quantoren-Logik. Man könnte das auch so deuten, dass die Quantoren-Logik *Mengen*, die Prädikaten-Logik aber *Folgen* (geordnete Mengen) behandelt.

Quantoren-logische und prädikaten-logische Formeln lassen sich als logisch *äquivalent* (⇔) interpretieren. Aber es dürfte präziser sein, hier von *Definitionen* auszugehen. Für 'ist definiert' kann man schreiben: ‚$=_{df}$' (oder auch ‚$\leftrightarrow_{df}$').

So kann man die quantoren-logische All-Relation wie folgt in Prädikaten-Logik übersetzen:

- *Einfache Relation*
$\Lambda x(Fx) =_{df} Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge ... \wedge Fx_n$
- *Komplexe Relation*
$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) =_{df} (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Man beachte die graphische *Ähnlichkeit* von *Quantoren* und *Junktoren:* V und ∨, Λ und ∧. Diese Ähnlichkeit ist natürlich gewollt. Denn der All-Quantor Λ wird prädikaten-logisch durch die *Konjunktion* ∧ ausgedrückt, der *Partikulär-Quantor* V dagegen durch die Disjunktion ∨. Die Ähnlichkeit zeigt sich allerdings nicht, wenn man die gebräuchlichsten Symbole verwendet. Denn die häufigsten Symbole sind:

∀ für den All-Quantor
∃ für den Existenz-Quantor (Partikulär-Quantor).

1-2-2-2 EINFACHE RELATIONEN
Zunächst eine Übersicht über die beiden positiven Relationen $\Lambda x(Fx)$ und $Vx(Fx)$:

• *All-Relationen (bzw. All-Sätze)*
Alle x sind F
- Intensional
  formal: $\Lambda x(Fx)$ „Für alle x gilt: sie haben die *Eigenschaft* F"
- Extensional
  formal: $\Lambda x(x \in F)$ „Für alle x gilt: sie sind Elemente der *Klasse* F"
- Funktional
  formal: $\Lambda x(x \rightarrow F)$ „Für alle x gilt: wenn x *belegt* ist, dann ist auch F belegt"

• *Partikulär-Relationen (bzw. Partikulär-Sätze)*
einige x sind F
- Intensional
  formal: $Vx(Fx)$ „Für einige x gilt: sie haben die *Eigenschaft* F"
- Extensional
  formal: $Vx(x \in F)$ „Für einige x gilt, sie sind Elemente der *Klasse* F"
- Funktional
  formal: $Vx(x \rightarrow F)$ „Für einige x gilt: wenn x *belegt* ist, dann ist F belegt"

Was hier als „*intensional*" angegeben wird, ist streng gesehen „*gemischt extensional-intensional*", weil Objekten (extensional) Eigenschaften (intensional) zugesprochen werden.

Um möglichst *einfache Formalisierungen* zu verwenden, schreibe ich auch:

Normal	Vereinfacht
$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda(X)$
$Vx(Fx)$	$V(X)$
$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$\Lambda(X \rightarrow Y)$
$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$V(X \rightarrow Y)$

Nur bei bestimmten komplexen Aussagen muss man *Individuenvariablen* verwenden und die *Klassenzeichen* ‚F' und ‚G' verwenden.

Übersicht über alle 4 Strukturen der Quantoren-Logik, auch in Prädikaten-Logik

	Intensional	Extensional	Kurz-Form
1. alle x sind F			
Quantoren-Logik:	$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda x(x \in F)$	$\Lambda(X)$
Prädikaten-Logik	$Fx_1 \wedge ... \wedge Fx_n$	$x_1 \in F \wedge ... \wedge x_n \in F$	$X_1 \wedge ... \wedge X_n$
2. alle x sind nicht F			
Quantoren-Logik	$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Lambda x(x \notin F)$	$\Lambda\neg(X)$
Prädikaten-Logik	$\neg Fx_1 \wedge ... \wedge \neg Fx_n$	$x_1 \notin F \wedge ... \wedge x_n \notin F$	$\neg X_1 \wedge ... \wedge \neg X_n$
3. einige x sind F			
Quantoren-Logik:	$Vx(Fx)$	$Vx(x \in F)$	$V(X)$
Prädikaten-Logik	$Fx_1 \vee ... \vee Fx_n$	$x_1 \in F \vee ... \vee x_n \in F$	$X_1 \vee ... \vee X_n$
4. einige x sind $\neg$F			
Quantoren-Logik:	$Vx\neg(Fx)$	$Vx(x \notin F)$	$V\neg(X)$
Prädikaten-Logik	$\neg Fx_1 \vee ... \vee \neg Fx_n$	$x_1 \notin F \vee ... \vee x_n \notin F$	$\neg X_1 \vee ... \vee \neg X_n$

Für “alle x gilt: sie sind nicht Elemente von F” könnte man auch $\Lambda x \neg(x \in F)$ statt $\Lambda x(x \notin F)$ schreiben – und entsprechend.

1-2-2-3 KOMPLEXE RELATIONEN

• *All-Strukturen (All-Sätze)*
alle x, die F sind, sind auch G (kurz: alle F sind G)
- intensional
  formal: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
  „Für alle x gilt: wenn sie die Eigenschaft F haben, haben sie auch die Eigenschaft G“
- extensional
  formal: $\Lambda x(x \in F \rightarrow x \in G)$
  „Für alle x gilt: wenn sie Elemente der Klasse F sind, sind sie auch Elemente von G“
- funktional (einheitliche Logik)
  formal: $\Lambda x((x \rightarrow F) \rightarrow (x \rightarrow G))$
  “Für alle x gilt: wenn x F impliziert, dann impliziert x auch G“

Die Negationen sind keineswegs trivial: z. B. wäre zwischen $\Lambda x \neg(Fx \rightarrow Gx)$ oder $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ zu wählen (vgl. dazu die spätere Diskussion).

• *Partikulär-Strukturen (Partikulär-Sätze)*
einige x, die F sind, sind auch G / bzw.: *es gibt* einige x ... (kurz: einige F sind G)
- intensional
  formal: $Vx(Fx \wedge Gx)$
  „Es gibt einige x, für die gilt: sie besitzen die Eigenschaft F und die Eigenschaft G“
- extensional
  formal: $Vx(x \in F \wedge x \in G)$
  „Es gibt einige x, für die gilt: sie sind Elemente der Klasse F und Elemente der Klasse G“
- funktional (einheitliche Logik)
  formal: $Vx((x \rightarrow F) \rightarrow (x \rightarrow G))$
  “Für einige x gilt: wenn x F impliziert, dann impliziert x auch G“

Die obigen Formalisierungen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $Vx(Fx \wedge Gx)$ für komplexe Strukturen sind die gängigsten. Danach werden *All-Relationen* mit dem *Implikator* $\rightarrow$ und *Partikulär-Relationen* mit dem *Konjunktor* $\wedge$ geschrieben (zur Kritik: u. a. 1-2-2-5: Existenz-Problem).

1-2-2-4 WAHRHEITS-TAFELN

Wie überprüft man die *Wahrheitsbedingungen* einer quantoren-logischen Relation? Der sicherste Weg wäre die *Wahrheitstafel*. Die Frage ist aber: Lassen sich in der Quantoren-Logik Wahrheitstafeln aufstellen? Damit verbunden: Sind quantoren-logische Relationen streng *wahrheitswert-funktional*?

Ich werde nachfolgend die verschiedenen Möglichkeiten durchspielen, vor allem für Experten. Eins ist aber klar: Es lassen sich für *quantoren-logische* Relationen nicht so einfach Wahrheitstafeln aufstellen wie für *aussagen-logische*. Ich werde mich hier zur Demonstration auf $\Lambda x(Fx \to Gx)$ beschränken, für $Vx(Fx \to Gx)$ bzw. $Vx(Fx \wedge Gx)$ ergäben sich grundsätzlich ähnliche, aber durchaus auch abweichende Ergebnisse.

• *quantoren-logische Analyse*

Für $\Lambda x(Fx \to Gx)$ lässt sich nicht ohne weiteres eine Wahrheitstafel aufstellen. Denn wie soll man den Quantor behandeln, ihm einen *eigenen* Wahrheitswert geben?

Es ließe sich aber sehr gut eine Wahrheitstafel aufstellen, wenn man $\Lambda x(Fx \to Gx)$ umformte in $\Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$. Dann ergibt sich:

$\Lambda x(Fx)$	$\to$	$\Lambda x(Gx)$	*(Tafel 1)*
+	+	+	
+	−	−	
−	+	+	
−	+	−	

Hier lässt sich z. B. schließen: $\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$

Aber sind $\Lambda x(Fx \to Gx)$ und $\Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$ gleichzusetzen, sind sie logisch äquivalent? Man kann diese Aussagen folgendermaßen übersetzen (andere Übersetzungen sind möglich):

$\Lambda x(Fx \to Gx)$: „Für alle x gilt: wenn sie F sind, dann sind sie auch G"

$\Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$: „Wenn für alle x gilt, sie sind F, dann gilt für alle x auch, sie sind G".

Offensichtlich liegt *keine Äquivalenz* $\Leftrightarrow$ vor, denn es gilt nur $\Rightarrow$:

$\Lambda x(Fx \to Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx) \to \Lambda x(Gx)$, vgl. unten die prädikaten-logische Analyse.

Wir wollen dennoch mit $\Lambda x(Fx \to Gx)$ weiterarbeiten, da uns dieser Ausdruck vor allem interessiert, denn so formalisiert man normalerweise All-Sätze. Allerdings ist es problematisch, $\Lambda x(Fx \to Gx)$ in der Wahrheitstafel auf $\Lambda x(Fx)$ und $\Lambda x(Gx)$ zurückzuführen.

Dazu wählen wir aber besser eine *andere*, schon eingeführte Form der Wahrheitstafel:

	$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda x(Gx)$	$\Lambda x(Fx \to Gx)$	*(Tafel 2)*
1.	+	+	+	
2.	+	−	−	
3.	−	+	+	
4.	−	−	+	

Die 4 Zeilen sind in einem ersten Schritt – konjunktiv – wie folgt zu deuten (das – in der Wahrheitstafel wird hier durch den Negator $\neg$ ersetzt):

1. $\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$
2. $\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x\neg(Gx) \Rightarrow \Lambda x\neg(Fx \to Gx)$
3. $\Lambda x\neg(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$
4. $\Lambda x\neg(Fx) \wedge \Lambda x\neg(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$

Da es sich aber um eine *quantoren-logische* Wahrheitstafel lautet, ist es adäquater, für + das Zeichen Λ und für – das Zeichen $\neg\Lambda$ einzusetzen (käme der Partikulär-Quantor V vor, würde man den in der Wahrheitstafel einsetzen). Somit ergibt sich folgende Wahrheitstafel:

	$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda x(Gx)$	$\Lambda x(Fx \to Gx)$	*(Tafel 3)*
1.	Λ	Λ	Λ	
2.	Λ	$\neg\Lambda$	$\neg\Lambda$	
3.	$\neg\Lambda$	Λ	Λ	
4.	$\neg\Lambda$	$\neg\Lambda$	Λ	

Die Zeilen der Wahrheitstafel 3 werden primär folgendermaßen interpretiert:

1. $\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \quad \Rightarrow \quad \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
2. $\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \quad \Rightarrow \quad \neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
3. $\neg\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \quad \Rightarrow \quad \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
4. $\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

Zwischen Tafel 2 und Tafel 3 bestehen folgende Unterschiede:

In Tafel 3 wird Λ durch $\neg\Lambda$ negiert (*kontradiktorische* Negation), und das ist die primäre, korrekte *quantoren-logische Negation*. In diesem Fall besteht aber in der 4. Zeile nur ein *semi-analytischer*, d. h. *partieller* Schluss; bei der obigen konjunktiven Interpretation der *Wahrheitstafel* verlangt man jedoch für *alle* Zeilen *strenge* Schlüsse der Form $\Phi \Rightarrow \Psi$.

In Tafel 2 wurde Λ (entsprechend +) durch $\Lambda\neg$ (entsprechend –) negiert (*konträre* Negation). Das entspricht der *Aussagen-Logik*. Hier gelten in allen 4 Zeilen *strenge* Schlüsse.

Die Frage ist, ob man daraus folgenden Schluss ziehen könnte (wie es häufig behauptet wird): Dass nämlich die Wahrheitstafel im engeren Sinn nicht für die *Quantoren-Logik*, sondern nur für die *Aussagen-Logik* konzipiert ist und nur dort volle Gültigkeit erreicht. Das hieße aber auch, dass der *wahrheitswert-funktionale* Ansatz quantoren-logisch nur bedingt verwendbar ist; nicht bei Sätzen mit mehrfachem $\neg\Lambda$ (entsprechend V oder V$\neg$).

Nun zeigt sich aber, wenn man den alternativen Ausdruck $\Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$ verwendet, sind *alle* Zeilen der Wahrheitstafel korrekt, auch die letzte (4.). Hier gilt der *strenge* Schluss:

$$\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$$

D. h. aber, wenn die *Prämissen* ganz *genau* der *Konklusion* entsprechen, erhält man vollständig richtige Resultate. Wie Wahrheitstafel ist also offensichtlich doch in der Quantoren-Logik ohne Einschränkungen einzusetzen.

• *prädikaten-logische Analyse*

Die beste Möglichkeit, in der Quantoren-Logik Wahrheitstafeln aufzustellen, ist aber, auf die *Prädikaten-Logik* zurückzugreifen, den *quantoren-logischen* in einen *prädikaten-logischen* Ausdruck übersetzen: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$.

Eine *vollständige* Wahrheitstafel lässt sich hier zwar normalerweise nicht aufstellen (weil n dafür zu groß oder sogar unendlich groß ist), aber um nur die Wahrheits-*Struktur* der Relation zu erkennen genügt es, von n = 2 auszugehen, also von: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$.

Wir können *prädikaten-logisch* jetzt auch nachweisen, dass die 4. Zeile in der obigen Wahrheitstafel kein *strenger* Schluss ist. Ich will allerdings nicht die gesamte Wahrheitstafel darstellen, sondern nur den entscheidender Werteverlauf (für n = 2):

Quantoren-logisch: $\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-logisch: $\neg(Fx_1 \wedge Fx_2) \wedge \neg(Gx_1 \wedge Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$
Werteverlauf (unter dem Zentral-Relator $\longrightarrow$): + + + + + + – – + – + – + + + +

Dagegen ergibt sich für $\Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$ ein strenger Schluss:

Quantoren-logisch: $\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx) \rightarrow \Lambda x(Gx)$
Prädikaten-logisch: $\neg(Fx_1 \wedge Fx_2) \wedge \neg(Gx_1 \wedge Gx_2) \Rightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2) \rightarrow (Gx_1 \wedge Gx_2)$
Werteverlauf (unter dem Zentral-Relator $\Rightarrow$): + + + + + + + + + + + + + + + +

Die Prädikaten-Logik lässt sich *strukturell* weitgehend auf die Aussagen-Logik reduzieren. Daher kann man für $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$ strukturell äquivalent auch schreiben (ohne Prädikatoren und Individuen-Zeichen): $(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge (X_2 \rightarrow Y_2)$. Oder noch einfacher, *rein aussagen-logisch*: $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$.

Allerdings gibt es *keine vollständige strukturelle Reduzierbarkeit* von *Prädikaten-Logik* auf *Aussagen-Logik*. Denn mit den *Indizes* 1, 2, ... , n kann man *explizit* „alle“ und insbesondere auch „einige“ ausdrücken, was in der reinen Aussagen-Logik nicht möglich ist.

1-2-2-5 EXISTENZ-PROBLEM

Bei der Quantoren-Logik stellt sich das *Existenz-Problem*, und zwar in doppelter Weise:

Erstens, wir kennen es bereits von der *Implikation* in der *Aussagen-Logik*: Die Implikation ist auch dann gültig, wenn ihr Vorderglied nicht gültig (falsch) ist.

Das bedeutet hier in der *Quantoren-Logik*: Der *All-Satz* $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ ist auch wahr, wenn $\Lambda x(Fx)$ falsch ist. Es geht um die *konträre* Negation $\Lambda x\neg(Fx)$, nicht um die *kontradiktorische* Negation $\neg\Lambda x(Fx)$. $\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $\neg Fx_1 \wedge ... \wedge \neg Fx_n \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$. Im Beispiel: Der Satz Λx(Mensch x $\rightarrow$ sterblich x) – ‘alle Menschen sind sterblich’ – ist auch dann wahr, wenn es gar keinen Menschen gibt.

Zweitens, noch komplizierter wird die Sache aber dadurch, dass vielfach behauptet wird, *Partikulär*-Sätze beinhalteten sehr wohl eine *Existenz-Behauptung*, anders als *All*-Sätze. Denn ein Satz wie z. B. ‘einige Lehrer sind klug’ gilt nur als wahr, wenn es auch Lehrer gibt.

Zugespitzt, nach der üblichen Darstellung der Quantoren-Logik gilt:

- ‚Alle Lehrer sind klug’: setzt *keine* Existenz von Lehrern voraus.
- ‚Einige Lehrer sind klug’: setzt die Existenz von Lehrern voraus.

Um das zu betonen, formuliert man: ‚Es gibt einige Lehrer, die klug sind’.

Diese behauptete *Existenz-Asymmetrie* von All- und Partikulär-Sätzen ist m. E. zu kritisieren. Es ist schon problematisch, wenn die Implikation so interpretiert wird, dass sie auch wahr ist, wenn der Vordersatz falsch ist. Dass dies aber auch bei einem All-Satz gelten soll, widerspricht völlig unserer Intuition und dem normalsprachlichen Gebrauch von All-Sätzen (eine mögliche Lösung ist die Positiv-Implikation, vgl. später). Gar nicht einzusehen ist aber zunächst die *Asymmetrie*, dass Sätze mit „einige“ die Existenz voraussetzen sollen. Einige wichtige Punkte hierzu werden nachfolgend diskutiert.

- „Alle“ entspricht 100%, es ist eine *relative Größe*. „Einige“ kann aber in der normalen Sprache sowohl eine *absolute* wie eine *relative* Größe sein. Quantitativ kann „einige“ sowohl 0 wie 0 % bedeuten (was äquivalent ist). Der Unterschied zeigt sich z. B. wie folgt: Man kann sagen: „Es gibt *einige* Lehrer, die klug sind“. Man kann aber nicht sagen: „Es gibt *alle* Lehrer, die klug sind“. Solche Zufälligkeiten der normalen (deutschen) Sprache dürfen aber nicht dazu dienen, eine folgenschwere Unterscheidung in der Logik zu treffen.
- Ein wesentlicher Schluss in der Quantoren-Logik ist der *Schluss von „alle“ auf „einige*“: was für alle x gilt, soll auch für (mindestens) einige x gelten. Setzt man bei Partikulär-Sätzen Existenz voraus, bei All-Sätzen aber nicht, dann ist dieser zentrale Schluss ungültig.
- Ein große Rolle spielt dabei, dass man üblicherweise *All-Sätze* mit der *Implikation* $\rightarrow$ formalisiert werden, z. B. $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$, und *Partikulär-Sätze* mit der *Konjunktion* $\wedge$, z. B. $Vx(Fx \wedge Gx)$, eine unterschiedliche Strukturierung, die sehr problematisch ist. Denn die Konjunktion setzt, anders als die Implikation, die Wahrheit / Existenz beider Glieder voraus.

1-2-3 Positiv-Implikation

Eine mögliche *Lösung des Existenz-Problems* ist, dass man die *Positiv-Implikation* verwendet, und zwar sowohl bei den All-Relationen wie bei den Partikulär-Relationen.

1-2-3-1 ALLGEMEIN

Das Problem mit der Implikation $X \rightarrow Y$, dass sie bei falschem Vordersatz ($\neg X$) als wahr gilt, ist letztlich unabhängig von All-Sätzen- und Partikulär-Sätzen.

Und ich habe schon hingewiesen, dass man dieses Problem der Implikation $X \rightarrow Y$ vermeiden kann, wenn man die *Positiv-Implikation* $X \ast\!\!\rightarrow Y$ verwendet. Denn die Positiv-Implikation berücksichtigt nur die Welten, in denen der Vordersatz X wahr ist.

1-2-3-2 ALL-RELATIONEN

Bei All-Relationen bzw. All-Sätzen ergeben sich wichtige Änderungen durch die Ersetzung der Implikation durch die *Positiv-Implikation*, konkret für den All-Satz $\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$:

$$\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \ast\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \ast\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \ast\!\!\rightarrow Gx_n)$$

Wenn die Einzelsätze $Fx_1 \wedge Fx_2, \wedge \ldots \wedge Fx_n$ falsch sind, dann ist der obige Satz *nicht definiert*. Umgekehrt, wenn $\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$ wahr ist, müssen alle Einzel-Sätze $Fx_1 \wedge Fx_2, \wedge \ldots \wedge Fx_n$ wahr sein; eventuell muss auch nur $Fx_1 \vee Fx_2, \vee \ldots \vee Fx_n$ wahr sein (das wird im quantitativen Teil diskutiert). Somit enthält $\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$ jedenfalls eine *Existenz-Behauptung*, es wird ausgesagt, dass F existiert, dass die Klasse F nicht leer ist; dies gilt ebenso für die Klasse G.

1-2-3-3 PARTIKULÄR-RELATIONEN

Man kann den *Partikulär-Satz* ebenfalls unproblematisch mit dem Positiv-Implikator formalisieren: $Vx(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$. Daraus folgt: $Fx_1 \vee Fx_2, \vee \ldots \vee Fx_n$ müssen wahr sein, d. h. es reicht, dass *einer* von diesen Sätzen wahr ist, und das wird ja genau durch ‘mindestens einer’ ausgedrückt. Auch hier besteht eine *Existenz-Garantie*: Die Klasse F ist „gefüllt“, sie hat mindestens 1 Element. Somit ist die gewünschte *Symmetrie* zu All-Sätzen gegeben.

1-2-3-4 NEGATIONEN

Wie ist ein negierter Satz der Form $\neg X \ast\!\!\rightarrow Y$ zu interpretieren? Ich habe erläutert, die Positiv-Implikation berücksichtigt nur die Welten, in denen das Vorderglied (der Vordersatz) gültig bzw. wahr ist. Das ist hier folgendermaßen zu verstehen: $\neg X$ muss wahr sein, also muss X falsch sein. Es werden also nur die Welten berücksichtigt, in denen $\neg X$ wahr ist.

Entsprechend bedeutet das für All- und Partikulär-Sätze:
Bei $\Lambda x(\neg Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$ muss $\neg F$ wahr sein, F also falsch. Bei $Vx(\neg Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$ gilt dasselbe.

1-2-3-5 MODELL POSITIV-IMPLIKATION

Nachfolgend wird ein Modell der Positiv-Implikation vorgestellt.

1. alle F sind G	Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
2. alle F sind nicht G	Quantoren-Logik: $\Lambda x\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
3. einige F sind G	Quantoren-Logik: $Vx(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
4. einige F sind nicht G	Quantoren-Logik: $Vx\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$

1-2-4 Systematik

Man kann die *Quantoren* natürlich auch auf andere Relationen anwenden, z. B. auf die *Disjunktion* $Vx(Fx \vee Gx)$, auf $\Lambda\neg(Fx \mid Gx)$ usw. Aber das wichtigste ist die *Kopula*-Funktion, die überwiegend mittels der *Implikation* oder auch mittels der *Konjunktion* realisiert wird.

Und hierfür werde ich jetzt verschiedene Modelle vorführen und diskutieren (wobei ich die *gemischt extensional-intensionale* Form wähle, also z. B. ‚Fx' und nicht ‚x ∈ F' schreibe).

1-2-4-1 MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

Ein besonders *systematisches* Modell ist das folgende: dabei werden *alle* Strukturen mit der *Implikation* formalisiert; die *Negation der Implikation* wird durch Setzung des Negators ¬ vor der Klammer vorgenommen.

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $Vx(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee \ldots \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee \ldots \vee \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Diskussion
Hier ergeben sich folgende Verhältnisse:
- $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ setzt keine Existenz von F (oder G) voraus.
- $\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$: diese Struktur ist äquivalent mit $\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$.
  Das wird später genauer erläutert. Die Konjunktion ist nur wahr, wenn beide (alle) Glieder wahr sind. Insofern wird die Existenz von F vorausgesetzt (aber nicht von G).
- $Vx(Fx \rightarrow Gx)$: diese Struktur setzt wiederum keine Existenz voraus.
- $Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$ ist äquivalent der Konjunktion $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$. Somit wird hier wieder die Existenz von F vorausgesetzt.

Dieses Ergebnis ist unbefriedigend. Es ist wenig plausibel, dass gelten soll:
„Alle F sind G" impliziert nicht die Existenz von F. Aber:
„Alle F sind nicht G" impliziert die Existenz von F.
(Entsprechendes gilt bei den partikulären Strukturen.) Auch dieses fast paradoxe Ergebnis geht auf die Definition der Implikation zurück.

1-2-4-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee \ldots \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \vee \ldots \vee (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$

Diskussion
Dieses Modell bietet sich zunächst einmal an, weil es ebenfalls sehr systematisch ist. Es wird immer *derselbe Relator*, der Implikator $\rightarrow$ verwendet. Aber man stößt wie schon angedeutet auf das *Existenz-Problem*, hier allerdings gleichermaßen für All-Relationen und Partikulär-Relationen, für beide wird *keine Existenz-Behauptung* aufgestellt.

1-2-4-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \wedge Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \wedge (Fx_2 \wedge Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \wedge Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik:$(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \wedge Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee \ldots \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \wedge \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \vee \ldots \vee (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$

Diskussion
Bei diesem Modell gibt es *bei allen 4 Fällen* eine Existenz-Behauptung (für F).Das Modell ist aber sehr unplausibel. So würde „alle F sind G“ übersetzt als „alle x sind F und G“. Im Beispiel: „Alle Menschen sind sterblich“ würde übersetzt in: „Alle Objekte sind Menschen und sterblich“. Das wäre absurd, denn dann wären ja alle Dinge auf der Welt sterbliche Menschen.

1-2-4-4 MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

Dieses Modell ist am weitesten verbreitet. Danach werden All-Sätze und Partikulär-Sätze unterschiedlich formalisiert, *All-Sätze mit Implikation* und *Partikulär-Sätze mit Konjuktion*.

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \wedge Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \wedge \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$

Diskussion
Hier ergibt sich das anfangs genannte Ergebnis. Die *All-Strukturen* behaupten *keine Existenz*, die *Partikulär-Strukturen* dagegen *ja*. Wie ich erläutert habe, ist das wenig überzeugend.

1-2-4-5 MODELL 5: (NEGIERTE) POSITIV-IMPLIKATION

1. alle F sind G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$

2. alle F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\Lambda x\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$

3. einige F sind G
   Quantoren-Logik: $\vee x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$

4. einige F sind nicht G
   Quantoren-Logik: $\vee x\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee \neg(Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)$

Diskussion
Dieses Modell ist ohne Zweifel das überzeugendste und eleganteste: es ist systematisch, macht bei All-Sätzen wie Partikulär-Sätzen eine *Existenz-Behauptung*, und es erfüllt – wie später gezeigt werden wird – auch die gewünschten *analytischen Relationen*. Man könnte dem Modell allenfalls vorwerfen, dass es nicht *alle möglichen Welten* mit einbezieht.

1-2-5 Erweiterungen

1-2-5-1 INKLUSIV - EXKLUSIV
Ich habe die Unterscheidung von *inklusiv* vs. *exklusiv* (*einschließend* vs. *ausschließend*) schon eingeführt, aber bezogen auf die *oder*-Konjunktion. Es wurde unterschieden zwischen:
- der *Disjunktion* $\vee$ als inklusivem „oder“
- der *Kontravalenz* $><$ als exklusivem „oder“

Daneben gibt es wie beschrieben die sogenannte Exklusion | bzw. (X | Y).

Die Disjunktion X ∨ Y heißt *inklusiv*, weil sie die Möglichkeit *einschließt*, dass auch X und Y beide gültig sind (also X ∧ Y gültig ist). Das *exklusive* „entweder – oder" *schließt* X ∧ Y dagegen *aus*, es kann nur *entweder* X *oder* Y gültig sein.

Entsprechend kann man in der *Quantoren-Logik* zwischen *inklusiv* und *exklusiv* unterscheiden. Und zwar geht es hier um den Partikulär-Quantor „einige". Das inklusive „einige" schließt auch die Möglichkeit ein, dass „alle" gültig ist. Der Satz (bzw. die Relation) „einige Menschen sind neugierig" schließt die Möglichkeit ein, dass gilt: „Alle Menschen sind neugierig". Dagegen schließt das exklusive „einige" aus, dass auch „alle" richtig sein kann.

Als Symbole wähle ich:

- inklusives „einige": V
- exklusives „einige": ∃

Z. B. ∃x(Fx) oder ∃x(Fx ∧ Gx) oder ∃x(Fx → Gx) oder ∃x(Fx *→ Gx).

Die Unterscheidung „inklusiv – exklusiv" bezieht sich nur auf den *Partikulär-Quantor* V, der All-Quantor Λ bleibt davon unberührt.

Die Verbindung zwischen „oder" und „einige" zeigt sich auch dadurch, dass man das inklusive „einige" prädikaten-logisch mit dem inklusiven „oder" ∨ formalisiert, das exklusive „einige" dagegen mit dem exklusiven „oder" (><).

	inklusiv	*exklusiv*
oder	oder: ∨	entweder – oder: ><
einige	mindestens einer: V	genau einige: ∃

Die *inklusive* Quantoren-Logik führt wie beschrieben zu *4* Größen: Λ, Λ¬, V, V¬.

In der exklusiven Quantoren-Logik gilt aber: ∃x ⇔ ∃x¬, z. B. ∃x(Fx) ⇔ ∃x¬(Fx).
So kommt man hier zu einer 3-fachen Unterscheidung: Λ, Λ¬, ∃x (⇔ ∃x¬)

Aber die (inklusiven) Quantitätsstufen bzw. die Werte „alle / alle nicht / einige / einige nicht" lassen sich noch ergänzen, vor allem durch:

- *die meisten*
- *die meisten nicht (bzw. die wenigsten)*

Man käme auf diese Weise zu einer *6-wertigen* Logik (inklusiv) bzw. zu einer *5-wertigen* Logik (exklusiv). Allerdings gibt es in der herkömmlichen Logik für die (normalsprachlichen) Ausdrücke ‘*die meisten*’ und *‘die meisten nicht’* keine Quantoren. Man könnte zusätzliche Quantoren einführen. Aber ich verzichte darauf, weil im Rahmen der nachfolgend vorgestellten *quantitativen* Logik „die meisten" usw. gut darzustellen sind und überhaupt viel genauere quantitative Abstufungen vorgenommen werden können.

1-2-5-2 DIMENSIONEN

Man kann die Quantoren „alle" und „einige" auf andere *Dimensionen* wie *Raum* oder *Zeit* beziehen. So ergibt sich z. B. „alle"/Raum: *überall*, „einige"/Raum: *mancherorts*. Systematisch:

	Zeit	*Raum*
alle	immer	überall
die meisten	meistens	meistenorts
einige	manchmal	manchenorts
die wenigsten	selten	(seltenenorts)
alle nicht	niemals	nirgendwo

Aber dies führt aus der Logik im engeren Sinn hinaus.

Die *Quantifizierung von Zeit* darf nicht so verstanden werden, als beinhalte eine logische Relation selbst einen Zeitfaktor, Entsprechendes gilt für den *Raum*.

1-2-5-3 MODAL-LOGIK

Im Gegensatz zu einer Raum- oder Zeit-Logik lässt sich eine sogenannte *alethische Modal-Logik* im streng logischen Sinn aufbauen. Dabei wird unterschieden zwischen *notwendig* (nicht) und *möglich* (nicht). Zwar kann man die Modal-Logik *über-logisch*, z. B. in Bezug auf *Kausalität* definieren, aber die Modalbegriffe sind auch in *rein logische* Begriffe zu übersetzen. Dabei gibt es folgende Entsprechungen (Einteilung wie in der Quantoren-Logik):

alle	notwendig	N	$\Leftrightarrow$	$\neg$M$\neg$	nicht möglich nicht
alle nicht	notwendig nicht	N$\neg$	$\Leftrightarrow$	$\neg$M	unmöglich
einige	möglich	M	$\Leftrightarrow$	$\neg$N$\neg$	nicht notwend. nicht
einige nicht	möglich nicht	M$\neg$	$\Leftrightarrow$	$\neg$N	unnotwendig

Man könnte auch *nur* vom Begriff „notwendig“ ausgehen und dessen Variationen als *Basis* nehmen (bzw. nur vom Begriff „möglich“ ausgehen). Aber es bewährt sich, jeweils die *einfachsten* Formen zu nehmen, und dann erhält man als Ausgangsbasis eine *Kombination* von Notwendigkeits-Begriffen und Möglichkeits-Begriffen. Entsprechend habe ich bei der *Quantoren*-Logik „alle“ und „einige“ als Basis-Begriffe verwendet. Ich gebe in der obigen Übersicht rechts aber auch die *alternativen* Notwendigkeits- bzw. Möglichkeits-Begriffe an; genauer wird deren Verhältnis aber erst im Teil über *analytische* Modal-Logik erörtert.

Wenn man *vier verschiedene* Begriffe verwendet, erhält man:

notwendig – möglich – unnotwendig – unmöglich.

Anstatt *unnotwendig* wird häufig *zufällig* oder *kontingent* angegeben, aber besser definiert man *zufällig* anders: zufällig (x) $\Leftrightarrow$ unnotwendig (x) $\wedge$ möglich (x). Denn *unnotwendig* schließt auch Unmöglichkeit als Grenzfall ein, was für den Zufallsbegriff nicht erwünscht ist.

Für *einfache Relationen* ergibt sich quantoren-logisch (im analytischen Teil, Kapitel 2, wird das weiter differenziert):

$\Lambda x(Fx)$	$N(Fx_i)$	‘Fx_i ist notwendig’	‚nicht-Fx_i ist unmöglich’
$\Lambda x\neg(Fx)$	$N\neg(Fx_i)$	‚nicht-Fx_i ist notwendig’	‚Fx_i ist unmöglich’
$Vx(Fx)$	$M(Fx_i)$	‘Fx_i ist möglich’	‚nicht-Fx_i ist unnotwendig’
$Vx\neg(Fx)$	$M\neg(Fx_i)$	‚nicht-Fx_i ist möglich’	‘Fx_i ist unnotwendig’

Wenn *alle* x (als Klasse) die Eigenschaft F haben, bedeutet dies also: Es ist *notwendig*, dass jedes individuelle x die Eigenschaft F hat. Hier bieten sich zwei Alternativen an:

– logische *Äquivalenz*: $\Lambda x(Fx) \Leftrightarrow N(Fx_n)$.
  Hier sind beide Ausdrücke analytisch äquivalent bzw. definieren sich wechselseitig.
  Man verwendet dann am besten x_n, das für *jedes beliebige* x steht.

– logische *Folge*: $\Lambda x(Fx) \Rightarrow N(Fx_i)$
  Hier folgt ein Ausdruck aus dem anderen.
  Man verwendet am besten x_i, das für ein *bestimmtes x* steht.

Bzw. für „möglich“:

– logische Äquivalenz: $Vx(Fx) \Leftrightarrow M(Fx_i)$

– logische Folge: $Vx(Fx) \Rightarrow M(Fx_i)$

1-2-5-4 ERWEITERTE QUANTOREN-VERWENDUNG

Ich habe mich in diesem Punkt 1-2 bisher auf quantoren-logische Ausdrücke mit nur *einer* Individuen-Variable ‚x' beschränkt. Denn wie schon erläutert: Mir geht es primär darum, die *fundamentalen, wesentlichen Strukturen* der Logik darzustellen, diese aber ausführlich, detailliert und mit vielen Erweiterungen und Erneuerungen. Dazu reichen die *einfachen* quantoren-logischen Sätze aus, ja man kann an ihnen sogar am besten und übersichtlichsten die Grundstrukturen erklären.

Natürlich ist es aber auch möglich, *komplexere* quantoren-logische Ausdrücke zu bilden:

- mit mehreren Individuen-Variablen

  z. B. $\Lambda x\ \Lambda y(Fx \rightarrow Gy)$

  „Für alle x, alle y gilt: Wenn x die Eigenschaft F hat, dann hat y die Eigenschaft G"

- mit Identität

  z. B. $\Lambda x(x = x)$

  „Für alle x gilt: x ist identisch mit x"

Dabei wird die *Identität* normalerweise mit dem ‚=' ausgedrückt. Die Identität wird in vielen quantoren-logischen Darstellungen als etwas Besonderes und Kennzeichen einer höheren Quantoren-Logik herausgestellt. Man kann aber i. allg. das ‚=' durch den Äquivalenz-Relator ‚$\leftrightarrow$' ersetzen. Es geht also um eine ganz normale logische Relation $\Phi \leftrightarrow \Psi$, die durchaus im Rahmen der einfachen Quantoren-Logik abgehandelt werden kann. Einmal davon abgesehen, dass Identität eigentlich auch *raum-zeitliche* Übereinstimmung verlangt, die Logik abstrahiert aber von Raum und Zeit, sie kann also Identität gar nicht vollständig abbilden.

- Anwendung der Quantoren auf Eigenschaften bzw. Klassen

  z. B. $VF(Fx_i)$

  „Für einige Eigenschaften F gilt: x_i besitzt diese Eigenschaften"

  oder:

  z. B. $VF(x_i \in F)$

  „Für einige Klassen F gilt: x_i ist Element dieser Klassen"

Dies darf nicht mit der *intensionalen Quantifizierung*, der Angabe des *Grades* einer Eigenschaft verwechselt werden, wie sie im folgenden Punkt 1-2-5-5 beschrieben wird.

- Kombinationen

Selbstverständlich gibt es auch Kombinationen der obigen Ansätze:

  z. B. $\Lambda x\ \Lambda y[x = y \leftrightarrow \Lambda F(x \in F \rightarrow y \in F)]$

1-2-5-5 INTENSIONALE QUANTOREN-LOGIK

Ich habe bisher nur eine *extensionale* Quantoren-Logik dargestellt, die sich auf *Klassen* oder Mengen bezieht, wie dies auch der gängigen Darstellung entspricht. Man kann aber auch eine *intensionale* Quantoren-Logik formulieren, die *Eigenschaften* quantifiziert, also die Quantoren auf Eigenschaften anwendet. Aber nicht in der in 1-2-5-4 beschriebenen Weise: „Für alle Eigenschaften gilt ...", sondern so, dass der *Grad* einer Eigenschaft angeben wird.

Zunächst sei auf die *Prädikaten-Logik* zurückgegriffen. Sie unterscheidet nur zwischen:

- x kommt eine Eigenschaft F zu: Fx
- x kommt die Eigenschaft F *nicht* zu: $\neg$Fx

Die *Prädikaten-Logik* ist also intensional *2-wertig*, es wird nur zwischen „ja" und „nein" unterschieden: z. B: ‚x ist klug' versus ‚x ist nicht klug'.

Die normale extensionale *Quantoren-Logik* knüpft daran an, sie unterscheidet intensional z. B. nur zwischen $\Lambda x(Fx)$ versus $\Lambda x(\neg Fx)$: allen x kommt die Eigenschaft F zu – oder nicht.

Man kann aber entsprechend den extensionalen Quantoren weiter differenzieren und so eine intensionale Quantoren-Logik konstruieren; dabei teilt man folgendermaßen ein.

Alle	x besitzt die Eigenschaft F *vollständig*
Alle nicht	x besitzt die Eigenschaft F *überhaupt nicht*
Einige	x besitzt die Eigenschaft F *partiell*
Einige nicht	x besitzt die Eigenschaft F *partiell nicht*

„x besitzt die Eigenschaft F *vollständig*" ist zu verstehen als „x besitzt *alle* Einheiten von F". Wenn die maximale Intelligenz, also der maximale Intelligenz-Quotient I.Q. z. B. 180 beträ-ge, dann wäre x vollständig intelligent, wenn es einen I. Q. von 180 besäße.

Man kann diese *intensionale* Größenangabe formal so schreiben, dass man dieselben Quantoren Λ und V verwendet: z. B. ΛFx, im Sinne von: „x kommt die Eigenschaft F vollständig zu". Allerdings besteht hier eine Verwechslungsgefahr mit: „Für alle Eigenschaften F gilt, x besitzt diese Eigenschaften". Besser schreibt man intensional mit hochgestelltem V: $^{\Lambda}Fx$.

Natürlich lassen sich die extensionale und intensionale Quantoren-Logik verbinden, z. B.:

„alle x besitzen die Eigenschaft F vollständig": $\Lambda x(\Lambda Fx)$ oder $\Lambda x(^{\Lambda}Fx)$

„kein x besitzt die Eigenschaft F partiell: $\neg Vx(VFx)$ oder $\neg Vx(^{V}Fx)$

Fuzzy Logik

Gegen die Theorie einer *intensionalen Quantoren-Logik* lässt sich allerdings einwenden: Man kann eine *intensionale* Quantifizierung wie „x besitzt die Eigenschaft F *vollständig*" auch *extensional* umdeuten, als: „x gehört der Klasse F *vollständig* an". Hier wird gewissermaßen der *Grad* angegeben, zu dem ein Objekt x Element der Klasse F ist, somit eine extensionale Kennzeichnung vorgenommen. Diese Deutung wird in der *Fuzzy-Logik* vorgenommen (vgl. zur Fuzzy Logik u. a. 1-3-5-5).

Grundsätzlich besteht eine gewisse Verwandtschaft der intensionalen Quantoren-Logik zur Fuzzy Logik. Denn erstens überschreitet auch die Fuzzy-Logik die *2-Wertigkeit* der Prädikaten-Logik, gehört zu den *mehr-wertigen* Logiken. Zweitens ist die Fuzzy Logik aber normalerweise nicht als streng quantitative Logik, mit genauen Zahlenwerten konzipiert. Typisch ist vielmehr für die Fuzzy Logik, dass sie mit Zwischenstufen arbeitet, z. B. *groß*, *sehr groß*; *ein bisschen groß*, *klein*, *sehr klein* usw.; wenn man diese Begriffe streng quantifiziert, entsprechen sie eher einem *Intervall* von Werten.

Allerdings verweisen diese Abstufungen doch eher auf *absolute* Werte, nicht auf *relative* Werte wie bei der intensionalen Quantoren-Logik; so entspricht z. B. „vollständig" genau 100%, einer relativen Größe. Und kritisch ist zu fragen: Kann ich z. B. einen (intensional quantifizierten) Satz wie ‚Peter ist vollständig intelligent' wirklich gleichsetzen mit der extensionalen Form ‚Peter gehört vollständig der Klasse der Intelligenten an'?

1 – 3 QUANTITATIVE LOGIK

1-3-1 Einführung

Die *Quantifizierung* gehört nicht zur Logik im eigentlichen Sinne, aber es gibt heute verschiedene *quantitative* bzw. *mehrwertige* Ansätze zur Weiterentwicklung der Logik. Der bekannteste ist sicher die *Fuzzy Logik*, die aber völlig anders strukturiert ist als mein Modell.

Ich habe den vorliegenden Ansatz schon während des Studiums zu entwickeln begonnen, dann über Jahre weiter ausgebaut. Es wird sich noch zeigen, wie fruchtbar diese Theorie ist. Durch Quantifizierung gerät die Logik in die Nähe von *Statistik* und *Mathematik*, aber die Logik wird so dennoch nicht zur Statistik, sondern behält ihre Eigenständigkeit. In der Statistik werden *spezialisierte* und *hochkomplexe* quantitative Methoden entwickelt, aber den Methoden haftet teilweise eine gewisse Willkürlichkeit an. Die Logik behandelt dagegen primär die *fundamentalen Strukturen unseres Denkens und Schlussfolgerns*. Andererseits intendiert mein Ansatz der *Integralen Logik* eine Verbindung von Logik und Statistik, wobei er sich in eine *deduktiv-deterministische* und eine *induktiv-statistische* Logik differenziert.

Jede Relation beinhaltet auch eine *quantitative* Struktur, obwohl diese oft *implizit* ist. Die quantitative Logik beschreibt zum einen neue Quantifizierungen logischer Strukturen. Aber sie zeigt auch die verborgene, *implizite* Struktur von herkömmlicher logischen Relationen oder von normal-sprachlichen Sätzen auf, macht sie *explizit*.

1-3-1-1 ABSOLUTE QUANTITÄT

Angenommen, ich formuliere die Relation: „50 Menschen sind Genies“. 50 ist dann die *absolute Quantität* (oder *absolute Häufigkeit*) der Relation. Es wird einer solchen Relation eine *natürliche Zahl* n bzw. r zugewiesen. Ich verwende für die *absolute Quantität* das Symbol ‚q'.

Beispiel: 50 F haben die Eigenschaft G. Formal: $q(F \rightarrow G) = 50$

Man kann allgemein schreiben: $q(X \rightarrow Y) = r$

Ich lasse dabei die *Individuenvariable* ‚x' weg, weil sie nicht notwendig ist.

Mit einer *Individuenvariablen* ‚x' kann man schreiben: $q(Fx \rightarrow Gx) = 50$.

Oder mehr in Anlehnung an die Quantoren-Logik: $50x(Fx \rightarrow Gx)$.

Zu lesen: ‚Für 50 x gilt: wenn sie die Eigenschaft F haben, dann haben sie auch die Eigenschaft G'. Man kann auch sagen: Es wird die *Anzahl* der Genies oder die *Mächtigkeit der Menge* der Genies angegeben (vorausgesetzt, nur Menschen können Genies sein).

Den *Wert der absoluten Quantität* berechnet man nach der *Wahrheitstafel*, indem man die Anzahl der *Fälle* in den verschiedenen *logischen Welten* angibt bzw. addiert, in denen die Relation (der Satz) gültig ist, also ein + hat.

	$\underline{X \rightarrow Y}$		
1.	+ + +	$q(X \wedge Y)$	= a
2.	+ – –	$q(X \wedge \neg Y$	= b
3.	– + +	$q(\neg X \wedge Y)$	= c
4.	– + –	$q(\neg X \wedge \neg Y)$	= d

Bei $X \rightarrow Y$ gibt es in der 1., 3. und 4. Welt ein + (plus), in der 2. Welt ein – (minus). So ergibt sich: $q(X \rightarrow Y) = a + c + d$

Zurück zum Beispiel: 50 Menschen sind Genies.
Man könnte das halb-formal schreiben: q(Mensch → Genie) = 50
Beispielzahlen: a = 10, b = 15, c = 18, d = 32. Dann: $q(X \rightarrow Y) = 10 + 18 + 32 = 50$.
Diese Zahlen ganz unrealistisch (vor allem d), aber so lässt sich der Fall besser darstellen.

Nun zeigt sich hier wieder die *Paradoxie der Implikation*, von der wir schon mehrfach gesprochen haben. Wenn wir sagen, 50 Menschen sind Genies, dann erwarten wir, dass a = 50, denn a ist die Anzahl der Objekte, die Mensch und zugleich Genie sind. Aber $q(X \rightarrow Y) = 50$ ist z. B. auch wahr, wenn a + b + d = 0, nur c = 50; das hieße allerdings, es gäbe gar keine Menschen. Ja, $q(X \rightarrow Y) = 50$ ist sogar wahr, wenn a + b + c = 0, nur d = 50, das hieße aber, es gäbe weder Menschen noch Genies. Für die *normale Sprache* würden wir so eine Quantifizierung als untauglich ablehnen, aber für die logische Implikation ist sie adäquat, sie entspricht genau der Aufteilung der Wahrheitstafel. Allerdings muss man berücksichtigen, dass die Implikation primär durch eine *relative Quantität* bestimmt ist, wie gleich gezeigt wird.

1-3-1-2 RELATIVE QUANTITÄT

Die Logik im eigentlichen Sinn bezieht sich aber nicht auf die *absolute,* sondern primär auf die relative *Häufigkeit (*bzw. *Quantität)* oder *Wahrscheinlichkeit*. Man berechnet also wie üblich die Anzahl der *günstigen Fälle* im Vergleich zu *allen Fällen*. Die relative Quantität symbolisiert man mit p (für *probability* = Wahrscheinlichkeit).

Allgemein kann man sagen: Es geht um die Struktur $p(X) = r/n$ oder noch allgemeiner um $p(\Phi) = r/n$. Dabei gilt: r = Anzahl der *günstigen* Fälle, n = Anzahl *aller* Fälle.

Grundsätzlich kann man $p(X) = r/n$ so lesen: ‚Die Wahrscheinlichkeit von X ist r/n'.
Für die *Implikation* schreibt man: $p(X \rightarrow Y) = r/n$. Nehmen wir als Beispiel $p(X \rightarrow Y) = 7/10$.
Bedeutung: „Die Wahrscheinlichkeit, dass X auch Y ist, beträgt 7/10".

Genauer kann man, neben anderen, vor allem folgende, spezielle und allgemeine *Deutungen* für die Implikation (bzw. entsprechend für andere logische Relationen) unterscheiden:

1) *relative Quantität* bzw. *relative Häufigkeit*
   – Beispiel: 7 von 10 X implizieren Y / 70% der X sind Y
   – allgemein: r von n X implizieren Y / r von n X sind auch Y
2) *Wahrscheinlichkeit*
   – Beispiel: die Wahrscheinlichkeit, dass ein X auch ein Y ist, beträgt 0,7
     wenn X, dann mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% auch Y
   – allgemein: die Wahrscheinlichkeit, dass ein X auch ein Y ist, beträgt r/n
3) *relative Wahrheit*
   – Beispiel: die Relation $p(X \rightarrow Y) = 10/10$ ist zu 70% wahr.
   – allgemein: Die Relation $p(X \rightarrow Y) = 1{,}0$ ist mit einem Grad von r/n wahr

• *Relative Quantität bzw. relative Häufigkeit*

Relative Quantität: Ausgang sei eine bestimmte, reale V*erteilung*. Man untersucht z. B. alle Bücher eines Autors (n = 10) und stellt fest, dass 2 von ihnen autobiographisch sind. Die relative Quantität ist dann: 2 von 10. Also 2 von 10 Büchern sind autobiographisch (p = 2/10).

Relative Häufigkeit: Davon spricht man eher bei *Ereignissen*. Man stellt z. B. fest, dass John bei 8 Kinobesuchen 4mal zu spät kommt (p = 4/8). Man kann allerdings auch allgemein von ‚relativer Häufigkeit' bzw. ‚Häufigkeitsverteilung' sprechen.

• *Empirische und theoretische Wahrscheinlichkeit*
Es ist zu unterscheiden zwischen *empirischer* und *theoretischer* Wahrscheinlichkeit. Daneben gibt es auch eine *subjektive* Wahrscheinlichkeit, von der ich aber hier absehe.

Erstens, die *empirische Wahrscheinlichkeit:* Sie richtet sich nach *empirischen Verteilungen.* Dabei wird die *relative Häufigkeit* auf den *Einzelfall* übertragen. Am obigen Beispiel:
– *Menge/relative Häufigkeit*: 2 von 10 Büchern (= 20%) eines Autors sind autobiographisch.
– *Individuum/Wahrscheinlichkeit*: Ich habe ein (beliebiges) Buch des Autors vorliegen, dann ist es mit einer *Wahrscheinlichkeit* von 2/10 = 1/5 = 0,2 (oder 20%) autobiographisch.

Diese Wahrscheinlichkeit nennt man auch *statistische* oder *faktische* Wahrscheinlichkeit. In der Statistik wird normal zwischen *relativer Häufigkeit* und *Wahrscheinlichkeit* unterschieden und es werden dafür auch unterschiedliche Symbole verwendet, für die *relative Häufigkeit* (einer Stichprobe) z. B. h_r und für die *Wahrscheinlichkeit* p. Ich verwende hier jedoch gleichermaßen für relative Häufigkeit und (empirische) Wahrscheinlichkeit das *Symbol* ‚p'. Das scheint mir aus Gründen der Vereinfachung legitim, zumal in diesem Text auch keine statistischen Untersuchungen vorgenommen werden.

Zweitens die *theoretische Wahrscheinlichkeit* (oder *Zufalls-Wahrscheinlichkeit*):
Sie bezieht sich auf *Zufallsverteilungen* wie z. B. beim Glücksspiel: Bei einem Würfel mit 6 Seiten gibt es eine Wahrscheinlichkeit von $p^T = 1/6$, dass ich mit einem Wurf z. B. die Zahl 3 würfele. Wenn ich nur 6mal würfele, ist keinesfalls sicher, dass dann 1mal die Zahl 3 darunter ist. Doch je größer die Anzahl der Würfe, desto mehr ist zu erwarten, dass die 3 zu 1/6 auftritt. Und wenn man *unendlich* mal würfeln würde, dann träte die 3 genau zu 1/6 = 16,7 % auf; bzw. 1/6 ist der *Grenzwert* der relativen Häufigkeit, wenn n gegen *unendlich* geht.

So oder so ähnlich wird es jedenfalls oft behauptet. Aber erstens ist der Ausgleich bei *großen Zahlen* ein *relativer, prozentualer* Ausgleich, es muss damit nicht ein Ausgleich in *absoluten* Zahlen verbunden sein. Und zweitens, um es ganz klar zu sagen: Es ist *extrem unwahrscheinlich* (die Wahrscheinlichkeit geht gegen 0), aber *nicht unmöglich*, dass bei einer Folge von *unendlichen* Würfen die Zahl 3 keinmal oder sogar ausschließlich die Zahl 5 auftritt.

Auch beim Würfeln kann man *die relative Häufigkeit* berechnen. Man macht z. B. eine Serie von Würfen und gibt dann *empirisch* an, wie oft die 1, 2, 3, 4, 5 und 6 aufgetreten sind. Aber die theoretische Wahrscheinlichkeit wird nicht aus der relativen Häufigkeit empirisch ermittelt, sondern nach Gesetzen der *Kombinatorik* berechnet. Die theoretische Wahrscheinlichkeit ist somit *analytisch* und wird deshalb hier nicht weiter behandelt. Vor allem diese *theoretische* Wahrscheinlichkeit kommt in Kapitel 3 und 4 noch ausführlich zur Sprache.

• *Gesamtheit und Stichprobe*
Hier ist eine weitere wichtige Unterscheidung zu treffen: zwischen *Gesamtheit* (All-Menge) und *Stichprobe* (Teilmenge). Wenn man eine empirische Untersuchung macht, kann man normalerweise nur eine *Teilmenge* untersuchen; eine *unendliche* Menge ist prinzipiell nicht vollständig zu untersuchen, eine *endliche*, aber große Menge aus praktischen Gründen nicht.

Angenommen, man macht eine Untersuchung über die Lehrer in Deutschland. Nehmen wir weiter an, es gäbe 100.000 Lehrer. Es wäre viel zu aufwendig, diese *alle* zu untersuchen. Man macht nur Untersuchungen einer *repräsentativen Stichprobe*, sagen wir: 1.000 Lehrer. Man stellt z. B. fest: 700 von den 1.000 Lehrern sind Zeitungsleser. Dieser Wert 700/1000 lässt sich die *relative Häufigkeit* der Stichprobe nennen. Ich schreibe dafür:

p/Stichprobe(Lehrer → Zeitungsleser) = 700/1000.

Nun kann man aber nicht voraussetzen, dass sich in der *Gesamtheit* aller Lehrer genau dieselbe Häufigkeitsverteilung findet. Wenn die Stichprobe nicht ganz repräsentativ ist, könnte für die Gesamtheit z. B. gelten: von 100.000 Lehrern sind 80.000 Zeitungsleser. Es wäre zu schreiben: p(Lehrer → Zeitungsleser) = 80.000/100.000 = 0.8 = 80 %. Die *Dezimalangabe* (0,8) bzw. die *Prozentangabe* (80%) darf man streng genommen allgemein nur verwenden, wenn man die *Gesamtheit*, also *alle* Elemente der Menge untersucht hat. Und auch nur dann darf man allgemein sagen: ‚Die *Wahrscheinlichkeit*, dass ein *beliebiger* Lehrer auch Zeitungsleser ist, beträgt 80%'. Ansonsten muss man immer die Einschränkung auf die Stichprobe vornehmen. Von daher wird in der Statistik genau zwischen Stichprobe und Gesamtheit unterschieden, was ich aber hier bei meinen Beispielen vernachlässigen kann.

- *Wahrheitsgrad*

Hier soll zunächst auf das Verhältnis von *Wahrheit* und *Wahrscheinlichkeit* eingegangen werden. Etwas ist *wahr-scheinlich* heißt wörtlich: „es *scheint* wahr zu sein". „Es ist wahrscheinlich, dass A" heißt im Grunde soviel wie „es ist wahrscheinlich, dass A *wahr* ist". Man könnte daher annehmen, dass Wahrscheinlichkeit und Wahrheit strukturell übereinstimmen. Es sind aber wesentliche Unterschiede zu konstatieren:
– Die Wahrscheinlichkeit wird meist *quantitativ* angegeben, z. B. in Prozent: „Es ist zu 75% wahrscheinlich, dass A" heißt: „Es ist zu 75% wahrscheinlich, dass A wahr ist". Die Wahrheit wird dagegen normalerweise *qualitativ* (2-wertig) angegeben: wahr oder falsch.
– Die Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die *Objekt-Ebene*, z. B. auf einen realen Sachverhalt. Wahrheit bezieht sich auf eine *Meta-Ebene*, man gibt an, ob ein Satz (oder ein Urteil, ein Gedanke usw.) mit der Realität übereinstimmt (= wahr) oder nicht übereinstimmt (falsch).
– Damit hängt zusammen: Die Wahrscheinlichkeit (als relative Häufigkeit) ist erst einmal ein *objekt-sprachlich,* z. B: 75% aller F sind G; man kann das allerdings auch *meta-sprachlich* ausdrücken: ‚Der Satz A hat eine Wahrscheinlichkeit von 75%'. Dagegen wird Wahrheit überwiegend *meta-sprachlich* verwendet, bezogen auf *Sätze*.

Obwohl man also bei der Wahrheit normalerweise nur wahr und falsch unterscheidet, lässt sich aber doch ein *Wahrheitsgrad* konstruieren. Dieser ist klar von der Wahrscheinlichkeit abzugrenzen, wird aber aus ihr hergeleitet. Genauso wie es hier um *empirische* Wahrscheinlichkeit geht, geht es hier auch um *empirische* Wahrheit.

Mit dem Wahrheitsgrad wird der *Grad* angegeben, zu dem ein Satz *mit der Wirklichkeit übereinstimmt*. Ich schreibe den Wahrheitsgrad mit ‚w'. Zwei unterschiedliche Fälle:

<u>Reale p: 1, ausgesagte p: r/n, Wahrheitsgrad w: r/n (bzw. Dezimal- oder Prozentwerte)</u>

Angenommen die *Realität* sei: 100 % aller Menschen sind sterblich. (Sachverhalt: p = 1)
Jemand macht aber die *Aussage*: ‚40% aller Menschen sind sterblich'. (Satz: p = r/n)
Dann ist seine Aussage zu 40% (0,4) wahr bzw. zu 60% (0,6) falsch. (Wahrheit: w = r/n)
Man berechnet also einen *Wahrheitsgrad* w, für den gilt (wie für ‚p'): $0 \leq w \leq 1$.
Hier gilt ganz einfach: w = *ausgesagte* p. Allgemein: $p(\Phi) = 1 \Rightarrow w[,p(\Phi) = r/n'] = r/n$.

<u>Reale p: r/n, ausgesagte p: 1, Wahrheitsgrad w: r/n</u>:

Z. B.: Real: 60% aller Sportler sind gesund. Satz: ‚100% aller Sportler sind gesund'.
Wahrheitsgrad des Satzes: 60%. Allgemein: $p(\Phi) = r/n \Rightarrow w[,p(\Phi) = 1'] = r/n$.

Dies gelingt nicht bei *individuellen* Sätzen. Angenommen, es gilt: 70% aller x sind klug. Ich betrachte nun ein beliebiges Individuum x_i. Dann darf ich sagen: Der Satz ‚x_i ist klug' gilt *mit* 70 % Wahrscheinlichkeit. Aber ich kann nicht sagen: Der Satz ‚x_i ist klug' ist *zu* 70% wahr'.

Allgemein lässt sich am Beispiel der Implikation $X \rightarrow Y$ definieren:

$w(X \rightarrow Y) = 1$ Bedeutet: $X \rightarrow Y$ ist (vollständig) wahr
$w(X \rightarrow Y) = 0$ Bedeutet: $X \rightarrow Y$ ist (vollständig) falsch
$0 < w(X \rightarrow Y) < 1$ Bedeutet: $X \rightarrow Y$ ist partiell wahr bzw. partiell falsch.

Auf der *empirischen* Ebene gilt also:
Der *Wahrheitsgrad* ist nicht identisch mit der *Wahrscheinlichkeit*, aber aus ihr abzuleiten.

Wir werden später sehen, dass dagegen auf der *theoretischen* Ebene gilt:
theoretischer Wahrheits-Grad (Tautologie-Grad) = *theoretische Wahrscheinlichkeit*.

Die Wahrheits-Interpretation stelle ich aber einmal zurück, sie trifft nicht wirklich die Intention der logischen Relationen.

1-3-1-3 BERECHNUNG DER RELATIVEN QUANTITÄT

Die konkrete Berechnung soll am Beispiel der *Implikation* p(X → Y) = r/n erläutert werden. p(X → Y) = r/n ist z. B. zu lesen als: ‚Die Wahrscheinlichkeit von p(X → Y) beträgt r/n'. Die Berechnung von ‚p' vollzieht sich anhand der *Wahrheitstafel:*

	X → Y			
1.	+ + +	$q(X \wedge Y)$	=	a
2.	+ – –	$q(X \wedge \neg Y)$	=	b
3.	– + +	$q(\neg X \wedge Y)$	=	c
4.	– + –	$q(\neg X \wedge \neg Y)$	=	d

• *Zähler*: man nimmt die Anzahl der *Fälle* in den *belegten* Welten, d. h. in den +*Welten*, in denen + unter dem Relator → steht. Im Beispiel: a + c + d.
• *Nenner*: man nimmt die Anzahl der *Fälle* in *allen* Welten, d. h. in den +*Welten* und –*Welten*. Der Nenner ist (bei 2 Variablen) immer: a + b + c + d.
• *Wahrscheinlichkeit p*: Zur Berechnung von p dividiert man also (vereinfacht) die günstigen Fälle durch alle Fälle.

$$\frac{\textit{Fälle}:(+)\textit{Welten}}{\textit{Fälle}:(+)\textit{Welten} + \textit{Fälle}:(-)\textit{Welten}}$$

Für die (relative Häufigkeit der) Implikation ergibt sich daher folgende Formel:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

Bei der Quantifizierung von solchen Relationen gilt grundsätzlich:
a + b + c + d > 0. Denn mit a + b + c + d sind eben alle möglichen Welten erfasst.
r = 0, 1, ... , n. Anders formuliert: $0 \leq r \leq n$
n = 1, 2, ... Und: n = a + b+ c + d
$0 \leq p \leq 1$

Die Herleitung der Formel für die Implikation soll noch ausführlicher erläutert werden. Es gibt dabei zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

• Bezug auf die *absoluten* Größen $q(X \wedge Y) = a$, $q(X \wedge \neg Y) = b$ usw.

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{q(X \wedge Y) + q(\neg X \wedge Y) + q(\neg X \wedge \neg Y)}{q(X \wedge Y) + q(X \wedge \neg Y) + q(\neg X \wedge Y) + q(\neg X \wedge \neg Y)}$$

Den Nenner kann man einfacher schreiben:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{q(X \wedge Y) + q(\neg X \wedge Y) + q(\neg X \wedge \neg Y)}{q(X) + q(\neg X)}$$

Mit Verwendung von a, b, c, und d lässt sich die Formel aber noch einfacher schreiben:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

• Bezug auf die *relativen* Größen $p(X \wedge Y)$, $p(\neg X \wedge Y)$ und $p(\neg X \wedge \neg Y)$

$$p(X \to Y) = \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

Zur Erläuterung folgendes Beispiel (die Zahlen sind willkürlich gewählt):
„70 von 90 deutschen Apfelsorten schmecken süß“, halbformal:
$p(X \to Y)$: p(deutsche Apfelsorte $\to$ schmeckt süß) = 70/90 = 7/9 = 0,78

X = deutsche Apfelsorte, Y = schmeckt süß
a = Anzahl der deutschen Apfel, die süß schmecken: 25
b = Anzahl der deutschen Äpfel, die nicht süß (sauer) schmecken: 20
c = Anzahl ausländischer Äpfel, die süß schmecken: 15
d = Anzahl ausländischer Äpfel, die nicht süß schmecken: 30

• *Absolute Quantität*
Beispiel: „70 deutsche Apfelsorten schmecken süß“
z. B.: a = 25, b = 20, c = 15, d = 30 (n = 90)
Die absolute Quantität der Beispiel-Relation ist hier a + c + d = 70

• *Relative Quantität*
Beispiel: „70 von 90 deutschen Apfelsorten schmecken süß“.
Hierbei werden auch die nicht-deutschen Apfelsorten im Nenner wie im Zähler hinzugezählt (also c + d). Das mag unserer Intuition widersprechen, dieses Resultat ergibt sich aber eben aus der logischen Definition der *Implikation*. Die Problematik wird also nicht erst durch die *Quantifizierung* erzeugt; genauso erscheint es unserem normalen Sprachverständnis wenig plausibel, dass ein Wenn-dann-Satz auch als wahr gilt, obwohl der Wenn-Satz falsch ist.

Es ergibt sich also der Satz: „x_i ist eine deutsche Apfelsorte $\to$ x_i schmeckt mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 7/9 süß“.

Dieser Satz ist auch wahr, wenn es gar keine deutschen Apfelsorten gibt (a + b = 0), er schließt eben nur aus, dass deutsche Apelsorten zu einem anderen Prozentsatz süß schmecken.

Man kann diese Problematik umgehen, wenn man die *Positiv-Implikation* verwendet (dazu später); der Vorteil der normalen Implikation ist allerdings, dass sie alle *möglichen* Welten mit einbezieht und eindeutige Gültigkeits-Zuordnungen vornimmt. Besondere Probleme für die Implikations-Formel entstehen bei Relationen, die sich auf *unendliche* Mengen beziehen, wie im nächsten Punkt gezeigt werden wird.

• *Zahlentheorie*
Zur numerischen Darstellung *absoluter* Größen seien nur *natürliche* Zahlen (n = 0, 1, 2, ...) verwendet.

Bei der numerischen Darstellung *relativer* Größe bzw. Wahrscheinlichkeit sind folgende Möglichkeiten zu unterscheiden:
- *Bruchdarstellung*: Die hier verwendeten Brüche sind *rationale Zahlen*. Rationale Zahlen sind Quotienten aus ganzen Zahlen, d. h. alle *positiven und negativen Brüche* ± r/n, wobei r und n *natürliche Zahlen* sind. Die Menge der natürlichen Zahlen N ist eine Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen Q, also: $N \subset Q$. Andererseits sind die beiden Mengen N und Q äquivalent. Somit ist auch die Menge der rationalen Zahlen *abzählbar unendlich*. Die in der quantitativen Logik verwendeten Brüche sind aber nur eine *Teilmenge* der rationalen Zahlen, weil hier nur positive Brüche ($r \geq 0$) vorkommen und nur Brüche ≤ 1, d. h. $r \leq n$.
- *Dezimaldarstellung*: Bei der Dezimaldarstellung bzw. den Dezimalbrüchen muss differenziert werden. Einem Bruch wie 1/2 entspricht eine *endliche* Dezimalzahl, hier 0,5. Dagegen entspricht z. B. dem Bruch 1/3 eine *unendliche* Dezimalzahl, nämlich 0,333333 ... = $0,\overline{3}$. Wir

können aber auch 1/2 als unendliche Dezimalzahl schreiben, nämlich als 0,499999 ... = $0,\overline{49}$. Alle diese unendlichen Dezimalzahlen sind *periodisch*, d. h. es tauchen in Folge oder im Wechsel immer dieselben Zahlen auf. Solche unendlichen periodischen Dezimalbrüche gelten als rationale Zahlen. Davon zu unterscheiden sind unendliche *nicht-periodische* Dezimalzahlen, die sich nicht als Bruch darstellen lassen, z. B. $\sqrt{5}$ = 2,2360679 ... (hier gibt es keine periodische Zahlenwiederholung). Diese Zahlen nennt man *irrational*, die rationalen und die irrationalen Zahlen zusammen bilden die (überabzählbar unendlichen) *reellen* Zahlen.

Man könnte die *rationale* Dezimalzahl 1 als 1,00 (mit 2 Stellen hinterm Komma) schreiben, um sie deutlich von der *natürlichen* Zahl 1 abzugrenzen, der Einfachheit halber verzichte ich aber normalerweise darauf. Entsprechendes gilt für 0,00 vs. 0.

Wichtig ist, dabei folgendes im Blick zu halten: Auch wenn die *absoluten* Größen r und n *infinite* Werte sein können, die relative Größe (Wahrscheinlichkeit) einer Relation oder Aussage ist immer *finit*, denn es gilt wie gesagt: $0 \leq p \leq 1$, p hat maximal den Wert 1. Obwohl der Wertebereich 0 bis 1 also *abgeschlossen* ist, gibt es dennoch innerhalb dieses Wertebereichs *unendlich* viele rationale Zahlen.

1-3-1-4 ENDLICHKEIT UND UNENDLICHKEIT

• *Arten von Unendlichkeit*

Die Quantität einer Relation / eines Satzes kann *finit* sein (endlich) oder *infinit* (unendlich).

Im Einzelnen unterscheidet man bei *unendlich* zwischen:

– *abzählbar* unendlich (z. B. die Menge der *natürlichen* Zahlen)
– *überabzählbar* bzw. *nicht abzählbar* unendlich (z. B. die Menge der *reellen* Zahlen).

Des Weiteren unterscheidet man zwischen

– *aktual* unendlich, d. h. unendlich *seiend* (z. B. die Menge der natürlichen Zahlen)
– *potentiell* unendlich, d. h. unendlich *werdend* (z. B. Zahlenfolgen oder Funktionen), wie es vom *Grenzprozess* bzw. Grenzwert bekannt ist.

Genauer kann auf die verschiedenen Unendlichkeitsbegriffe hier nicht eingegangen werden.

Die Unterscheidung zwischen *endlich* und *unendlich* ist durchaus auch für die Logik von Bedeutung. Quantoren- bzw. prädikaten-logisch kann man z. B. zwischen *finiten* und *infiniten* All-Relationen folgendermaßen unterscheiden:

– endlich: $\Lambda x(Fx) = Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n$
– unendlich : $\Lambda^{\infty} x(Fx) = Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots$
oder: $= Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n \wedge \ldots$

Diese Schreibweise erklärt sich wie folgt: Auch wenn die Menge der natürlichen Zahlen *unendlich* ist, steht das *n* doch dafür, dass eine *letzte* natürliche Zahl als Index eingesetzt wird, also eine *endliche Folge* vorliegt. Bei einer *unendlichen Folge* gibt man gar *keine letzte Zahl* an (allerdings wäre eine andere Notation wohl überzeugender). In der Mathematik hat man es vor allem mit *Zahlen-Folgen* zu tun: $a_n = a_1, a_2, \ldots , a_n$. In der Logik haben wir es vor allem mit Verknüpfungen (z. B. Konjunktionen) von *Aussagen-Folgen* zu tun.

• *Probleme infiniter Relationen*

Ich bin bisher stillschweigend von *finiten* (*endlichen*) Mengen bzw. Relationen ausgegangen. Denn *infinite* Relationen oder Aussagen werfen besondere Probleme auf. So kann man infinite All-Aussagen nicht *verifizieren*, da man nicht eine unendliche Anzahl von Objekten überprüfen kann. Und aus einer unendlichen Menge kann man auch keine *Stichprobe* ziehen. Dies ist allerdings primär ein Problem der Wissenschaftstheorie, weniger der Logik.

Die Unendlichkeit spielt aber auch in der Logik, vor allem in der *quantitativen Logik* eine Rolle. Dabei ergibt sich folgendes Problem: Wenn man den Objektbereich von logischen Re-

lationen nicht einschränkt, so beziehen sie sich (und entsprechend auch die Formeln) auf *alle Objekte der Welt*. Nehmen wir zur Analyse die Implikation X → Y:
Z. B. „Alle Menschen sind Erdbewohner“, also: Mensch (=X) → Erdbewohner (=Y).
Es gibt folgende 4 Möglichkeiten bzw. Welten:

q(Mensch ∧ Erdbewohner) = a
q(Mensch ∧ Nicht-Erdbewohner) = b
q(Nicht-Mensch ∧ Erdbewohner) = c
q(Nicht-Mensch ∧ Nicht-Erdbewohner) = d

Wir prüfen das auf *endlich* oder *unendlich*:

– Menschen: vermutlich gibt es (zu allen Zeiten) nur *endlich* viele Menschen
– Erdbewohner: gibt es zwar ein Vielfaches von der Anzahl der Menschen (nämlich alle irdischen Lebewesen), aber wohl *endlich* viele Erdbewohner
– Nicht-Menschen: das sind alle Objekte, die keine Menschen sind, dies könnte durchaus eine *unendliche* Menge sein (wenn das Universum räumlich oder zeitlich unendlich ist)
– Nicht-Erdbewohner: das könnte auch eine *unendliche* Menge sein, wenn es z. B. auf unendlich vielen anderen Planeten andere Lebewesen gibt

Dann lassen sich daraus die Un-/Endlichkeits-*Vermutungen* für die Konjunktionen ableiten:

q(Mensch ∧ Erdbewohner)	a	finit
q(Mensch ∧ Nicht-Erdbewohner)	b	finit
q(Nicht-Mensch ∧ Erdbewohner)	c	finit
q(Nicht-Mensch ∧ Nicht-Erdbewohner)	d	infinit

Bei ‚c’ kommt man zu der Einschätzung „finit“, obwohl die Menge der Nicht-Menschen infinit sein mag; denn wenn die Menge der Erdbewohner finit ist, kann die Größe der Konjunktion q(Nicht-Mensch ∧ Erdbewohner) auch nur finit sein; entsprechendes gilt für ‚b’.

Dies bedeutet (vermutlich) für die Formel der Implikation:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a(finit) + c(finit) + d(\neg finit)}{a(finit) + b(finit) + c(finit) + d(\neg finit)} = \frac{r}{n}$$

Dann steht im Zähler wie im Nenner eine *infinite* ’Zahl’, nämlich ‚d’. ‚d’ steht wie gesagt für q(¬X ∧ ¬Y). Damit sind die endlichen Werte vernachlässigbar, weil jeder endliche Wert verschwindend gering ist im Vergleich zu einer infiniten ‘Zahl’. Man könnte vermuten, dass der Wert der Gleichung nahe 1 oder auch genau 1 ist; denn zwei unendliche Mengen gelten als *gleich groß*, es sei denn, eine ist *abzählbar* unendlich, die andere aber *überabzählbar*, somit größer. Dies würde bedeuten, dass für alle derartigen Formeln, bei fast jeder Implikation, sich ein Wert von (annähernd) 1 ergibt. Das ist natürlich ganz unerwünscht. Man erfährt nichts über das *Verhältnis des spezifischen X zu dem spezifischen Y.*

• Mathematische Behandlung der Unendlichkeit
Nun gilt aber ein Bruch ∞/∞ in der Mathematik als *nicht definiert*. Stattdessen verwendet man *Grenzwert*-Berechnungen.

Für die Implikation $p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$ gibt es 2 Möglichkeiten:

1. Möglichkeit: r = n, b = 0. Hier könnte man folgende Formel aufstellen:

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$ oder $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \to 1$ Auf diese Weise erhält man auch den Wert 1.

2. Möglichkeit: r < n, b > 0. Diese Möglichkeit ist interessanter; wir können aber nicht generell angeben, wie groß b und damit r genau ist. Nehmen wir hier nur folgendes Beispiel:
$r = \sqrt{n}$. Dann können wir schreiben: $\lim_{n\to\infty} \frac{r}{n} = 0$ bzw. allgemein $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$
Mit der Grenzwertberechnung erhalten wir also ein anderes Ergebnis als oben angegeben: Dort hatten wir gesagt, der Größenunterschied zwischen zwei unendlichen Mengen ist vernachlässigbar, danach erhielte man immer: ∞/∞ = 1. Hier haben wir es mit zwei unendlichen Mengen n und n^2 zu tun, es ergibt sich aber als Grenzwert für den Quotienten n/n^2 aber nicht der Wert 1, sondern der Wert 0. Wie erklärt sich das? Dazu müssen wir etwas ausholen:
Wir haben es hier mit 2 Mengen zu tun:

der Menge der *natürlichen Zahlen*: N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}
die Menge der *Quadratzahlen* X^2 = {1, 4, 9, 16, 25, ...}

Wenn man diese beiden Mengen einander zuordnet, ergibt sich:

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16 ...
n^2:	1			4					9							16 ...

Dabei zeigt sich einerseits: Die Menge der Quadratzahlen ist *Teilmenge* der Menge natürlichen Zahlen: $X^2 \subset N$; andererseits: Die Menge N und X^2 besitzen die *gleiche Mächtigkeit*, beide sind *abzählbar unendlich*; das erscheint zunächst paradox, ist aber mathematisch beweisbar. Außerdem sieht man, dass n^2 viel schneller steigt als n, eben in der Potenz.

Bei der obigen Rechnung: ∞/∞ = 1 waren wir vom Begriff *aktual unendlich* ausgegangen (vgl. oben): zwei unendliche *Mengen* wurden als Quotient dargestellt (was aber wie gesagt mathematisch als nicht definiert gilt). Bei der Grenzwertrechnung geht man vom Begriff *potentiell unendlich* aus. Zwei Zahlen-*Folgen*, nämlich n und n^2, tendieren in Richtung unendlich. Es ist unmittelbar einleuchtend, dass dies auf den Grenzwert 0 zuläuft, wenn man sich die Quotienten-Folge veranschaulicht:

1/1 (= 1,0), 2/4 (= 0,5), 3/9, 4/16, 5/25, 6/36, 7/49, 8/84, 9/81, 10/100 (= 0,1) usw.

Hier werden also nicht zwei *abgeschlossene* unendliche Mengen in Beziehung gesetzt, sondern es geht um die Entwicklung des Größenverhältnisses von n/n^2.

Weiter werde ich auf diese Problematik nicht eingehen, ohnehin möchte ich nur eine *informelle* Unendlichkeits-Darstellung geben, ich kann hier nicht in die höchst komplizierte *Mathematik der Unendlichkeit* einsteigen. In jedem Fall zeigt sich, dass ein Bruch mit einem *unendlichen* Wert im Zähler und Nenner oder auch nur im Nenner für die uns hier interessierende Berechnung ungeeignet ist.

1-3-1-5 LÖSUNGEN DES UNENDLICHKEITS-PROBLEMS

Ich möchte nachfolgend zwei Lösungen für das *Unendlichkeits-Problem* vorstellen: *Festlegung eines Definitionsbereichs* und *Limitierung der Negation*.

• *Festlegung eines Definitionsbereichs*
Hier wird der *Anwendungsbereich*, der 'universe of discourse', auf eine bestimmte Klasse eingegrenzt, es wird ein *Definitionsbereich* festgelegt, d. h. die Relation bezieht sich nicht mehr auf *alle* Objekte des Universums. Z. B. die Aussage: Λx(Mensch(x) → sterblich(x)). In der normalen Sprache würde dieser Satz lauten: ‚Alle Menschen sind sterblich', es ist eine Aussage nur über *alle* Menschen. Durch die Struktur der logischen *Implikation* ergibt sich

aber ein anderes Ergebnis: Es ist eine Aussage über *alle x*, also alle Objekte des Universums, auch über die Nicht-Menschen. Mag die Menge der Menschen *endlich* sein, wenn die Menge aller Objekte des Universums (also aller x) *unendlich* ist, dann handelt es sich dennoch um eine *infinite* Aussage. Mit der *normalen Implikation* gibt es hier kein Entkommen.

Wie sieht es mit der *Positiv-Implikation* aus? Die besagt ja nur: „*Wenn* ein X ein Mensch ist, dann ...“ – und wenn das falsch ist, gilt sie als *undefiniert*. Dies könnte also eine Lösung sein: Man muss hier *nur* die Menschen erfassen, also (vermutlich) eine *endliche* Menge.

Noch sicherer geht man jedoch, wenn ein *Definitionsbereich* festgelegt wird: Man bezieht eine Aussage nicht mehr auf *alle* Objekte des Universums, sondern direkt auf eine *finite Menge* (Definitionsbereich). Im Beispiel legt man fest: x = Mensch. So gilt z. B.:

$\Lambda x = \text{Mensch}(Fx \rightarrow Gx)$ lies: ‚für alle x = Mensch gilt ...’

Dies ist nur eine Aussage über die Menschen, also eine *endliche* Menge. Das hebelt die Struktur der Quantoren-Logik zwar etwas aus, muss aber erlaubt sein.

Allerdings könnte man eventuell weiterfragen: Muss man, um die x, die Menschen sind, von den anderen abzutrennen, zunächst doch *alle* Objekte untersuchen, also eine *infinite* Menge?

• *Limitierung der Negation*

Auch wenn wir x (auf die Menge der Menschen) *eingeschränkt* haben, bleibt ein weiteres Problem bestehen. Betrachten wir den Satz: ‚Alle Männer sind klug’, halb formal:

$\Lambda x = \text{Mensch}(\text{Mann}\ (x) \rightarrow \text{klug}\ (x))$

„Klug“ ist normal-sprachlich eine *Eigenschaft*. Was ergibt sich, wenn man „klug“ *verneint*, also „¬klug“ angibt? Bei *Prädikatoren*, die in der normalen Sprache *Eigenschaften* ausdrücken, also *Adjektive*n, ergibt sich normal-sprachlich automatisch, dass die *Negation* sich nur auf die *betreffende Eigenschaft* bezieht. Wenn man von jemand sagt, er ist nicht klug, dann meint man *nicht*, er ist z. B. groß, dick, reich oder gesund, sondern man meint, er ist dumm. Auch logisch wird dies normalerweise so interpretiert.

Streng betrachtet kann aber „nicht klug“ jede mögliche andere Eigenschaft meinen, also prinzipiell eine *infinite* Menge. Um das Problem zu lösen, müssen wir uns klarmachen, “klug“ und „dumm“ sind nur zwei *Ausprägungen* auf der *Merkmalsdimension* „Intelligenz“. Genauer werden wir auf die quantitativen Ausprägungen noch eingehen, aber man kann sagen: Innerhalb der Dimension „Intelligenz“ bedeutet „dumm“ die Verneinung von „klug“ und umgekehrt. Und wenn wir eine Aussage über kluge Männer machen, dann wollen wir sie eben unterscheiden von dummen Männern, aber nicht von reichen, kleinen oder alten Männern.

Es ist also zunächst zu fragen, ob etwas überhaupt eine Ausprägung von Intelligenz haben kann, z. B. ein Stein ist weder klug noch dumm, diese Begriffe lassen sich nicht auf ihn anwenden. Man könnte sagen, er besitzt keine „Intelligenzfähigkeit“. Man kann festlegen:

intelligenzfähig $\leftrightarrow$ klug >< dumm, als *Definition*: intelligenzfähig $\leftrightarrow_{df}$ klug >< dumm.

Dann bedeutet: ¬klug = dumm, ¬dumm = klug.

Zusammenfassung

Ich gebe noch einmal eine Übersicht über *absolute* und *relative* Quantität:

p(Klasse) = 1, es sei denn q(Klasse) = 0, dann auch p(Klasse) = 0

p(Teilklasse) $\geq$ 0

p(Teilklasse) $\leq$ 1, da q(Teilklasse) $\leq$ q(Klasse)

bei einer *echten* Teilmenge bzw. Teilklasse gilt:

p(Teilklasse) < 1, da q(Teilklasse) < q(Klasse)

A) absolute Quantität q

1) der Klasse	q(Klasse)	z. B.	800
2) einer Teilklasse	q(Teilklasse)	z. B.	200

B) relative Quantität p

1) der Klasse $\frac{q(Klasse)}{q(Klasse)}$ z. B. 800/800 = 1

2) der Teilklasse $\frac{q(Teilklasse)}{q(Klasse)}$

a) echte relative Quantität z. B. 200/800

b) rechnerische relative Quantität

- Bruchdarstellung
  - beliebiger Bruch z. B. 225/900
  - maximal gekürzter Bruch (mit natürlichen Zahlen) z. B. 1/4
- Prozentdarstellung z. B. 25%
- Dezimaldarstellung z. B. 0,25

1-3-2 Implikation

1-3-2-1 IMPLIKATION

Die Formel für die Implikation wurde bereits in 1-3-1-3 vorgestellt. Es sei daran erinnert, dass man die Implikation als die beste Repräsentation der *Kopula* ansehen kann. Insofern gilt diese Formel auch für die Kopula. Andererseits wurde auf die Probleme hingewiesen, die sich durch Verwendung der normalen Implikation als Kopula ergeben.

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d}$$

1-3-2-2 NEGATIONEN

Es lassen sich verschiedene *Negationen* der Implikation angeben. Die wichtigsten sind die folgenden drei; deren Formeln werden wie beschrieben aus den *Wahrheitstafeln* abgeleitet:

$$p(X \rightarrow \neg Y) = \frac{b+c+d}{a+b+c+d} \qquad p\neg(X \rightarrow Y) = \frac{b}{a+b+c+d} \qquad p\neg(X \rightarrow \neg Y) = \frac{a}{a+b+c+d}$$

Ganz korrekt müsste man schreiben: $p(\neg(X \rightarrow Y))$ u. ä., aber die Schreibung ohne *zweite Klammer* ist übersichtlicher. Normalerweise verwende ich die vereinfachte Schreibung.

1-3-2-3 REPLIKATION

$$p(X \leftarrow Y) = \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$$

1-3-2-4 ÄQUIVALENZ

$$p(X \leftrightarrow Y) = \frac{a+d}{a+b+c+d} \qquad \text{Doppelte Negation: } p(\neg X \leftrightarrow \neg Y) = \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

1-3-2-5 KOMPLEXERE FORMELN

Bisher sind wir von *2 (zwei)* Variablen X, Y ausgegangen; bei denen ergeben sich $2^2 = 4$ Kombinationsmöglichkeiten. Mit *3 (drei)* Variablen X, Y, Z ergeben sich $2^3 = 8$ Möglichkeiten und damit *komplexere Formeln*.

Ich bringe unten eine Übersicht über die möglichen *Kombinationen* der 3 Variablen. Dabei gibt es 2 zwei Möglichkeiten, die *absoluten Größen* mit Buchstaben zu bezeichnen: entweder man verwendet 8 unterschiedliche Buchstaben (a bis h) oder man verwendet wie bisher 4 Buchstaben, gibt ihnen aber jeweils 2 unterschiedliche Indizes, also:

a_1, a_2, b_1, b_1, c_1, c_2, d_1,,d_2

X	Y	Z		
+	+	+	a	a_1
+	+	–	b	a_2
+	–	+	c	b_1
+	–	–	d	b_2
–	+	+	e	c_1
–	+	–	f	c_2
–	–	+	g	d_1
–	–	–	h	d_2

Das Modell mit *unterschiedlichen* Buchstaben scheint auf den ersten Blick übersichtlicher als die Kennzeichnung mit *Indizes* (unten), aber das Modell mit Indizes ist systematischer, bietet eine viel bessere Vergleichbarkeit mit 2-Variablen-Relationen und soll deshalb hier bevorzugt werden. Ich notiere also: $q(X \wedge Y \wedge Z) = a_1$, $q(X \wedge Y \wedge \neg Z) = a_2$ usw.

Dann ergibt sich z. B. folgende Formel für die *Implikation* $X \rightarrow Y$:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Die eigentliche Funktion der komplexeren Formeln ergibt sich aber erst, wenn man 3 Variablen in *einem* Implikationsausdruck verwendet. So erhält man aus der Wahrheitstafel z. B.:

$$p((X \rightarrow Y) \rightarrow Z) = \frac{a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

1-3-3 Positiv-Implikation

Ich habe – zuerst in Kapitel 0 – die modifizierte *Positiv-Implikation* X *→ Y eingeführt. Mit der lassen sich Relationen so formalisieren, dass sie näher an unserer Alltagsaufassung bzw. an unserer Alltagssprache sind. Denn ein *Wenn-dann-Satz* ‚Wenn X, dann Y' wird normal-sprachlich so aufgefasst, dass er nur die Fälle berücksichtigt, in denen der Wenn-Satz ‚X' *wahr* ist. Oder ein *Kopula-Satz*: ‚X ist ein Y' wird so aufgefasst, dass die *Existenz* von X vorausgesetzt wird. Wie das *quantitativ* umgesetzt wird, sei im Folgenden erläutert.

1-3-3-1 FORMEL

Auch hier kann man zunächst wieder von der *Wahrheitstafel* ausgehen:

X	*→	Y	
+	+	+	$q(X \wedge Y) \quad = a$
+	−	−	$q(X \wedge \neg Y) = b$

$$p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = \frac{q(X \wedge Y)}{q(X \wedge Y) + q(X \wedge \neg Y)} = \frac{q(X \wedge Y)}{q(X)} = \frac{a}{a+b} = \frac{r}{n}$$

Die Werte der Positiv-Implikation entsprechen im Wesentlichen der Berechnung der Wahrscheinlichkeit in der *Statistik*.

Die Formeln des *quantitativen* Ansatzes beziehen sich aber ausschließlich auf die + und – in der Wahrheitstafel, □ und ? werden nicht berücksichtigt; d. h. auch, die Formeln beziehen sich auf die *verkürzte* Wahrheitstafel. Andererseits ist für manche Analysen die *vollständige* Wahrheitstafel überlegen oder notwendig, hier gibt es eine noch nicht geklärte Diskrepanz.

Zwei Modelle der Positiv-Implikation

Es gilt aber, noch eine weitere Unterscheidung zu treffen: Bei der *normalen Implikation* bzw. überhaupt den 4-Welten-Relatoren hatte ich festgelegt: $a + b + c + d > 0$

Begründung: a + b + c + d umfasst *alle* Fälle in *allen* möglichen Welten (bei 2 Variablen X, Y), die Summe kann daher nicht gleich 0 sein, denn dies wäre ein logischer Widerspruch. Damit ist aber nicht die *Existenz* (d. h. $q > 0$) von X: $q(X) = a + b$ oder Y: $q(Y) = a + c$ gesichert, denn es kann gelten: $q(X) = a + b = 0$ und $q(Y) = a + c = 0$, wenn nämlich nur $d > 0$.

Wesentlich ist: Soll man bei der *Positiv-Implikation* entsprechend fordern $a + b > 0$? *Dagegen* spricht: a + b umfasst ja *nicht* die Fälle in allen möglichen Welten, es könnte ja gelten: $a + b = 0$, aber $c + d > 0$. *Dafür* spricht: Die Positiv-Implikation wird so verstanden, dass sie von der Gültigkeit des Vordergliedes X ausgeht. D. h. aber, es muss gelten $a + b > 0$, denn wenn $a + b = 0$, dann gäbe es gar kein X bzw. X wäre ungültig. Also $a + b > 0$ oder $a + b \geq 0$?

Es lassen sich aus diesen beiden Möglichkeiten *zwei verschiedene Modelle* einer Logik der Positiv-Implikation aufbauen: 1) das *Existenz-Modell*: hier ist die Existenz von X gesichert, da $q(X) > 0$. Und 2) das *Nicht-Existenz-Modell*, hier kann auch gelten: $q(X) = 0$, nämlich wenn $a + b = 0$. Im analytischen Teil werden die beiden Modelle ausführlich dargestellt.

1-3-3-2 NEGATIONEN

Hier werden die Formeln für die wichtigsten *Negationen* der Positiv-Implikation genannt:

$p(X \ast\!\!\rightarrow \neg Y)$	$p(\neg X \ast\!\!\rightarrow Y)$	$p(\neg X \ast\!\!\rightarrow \neg Y)$
$\frac{b}{a+b}$	$\frac{c}{c+d}$	$\frac{d}{c+d}$

$p\neg(X \ast\!\!\rightarrow Y)$ hat dieselbe Formel wie $p(X \ast\!\!\rightarrow \neg Y)$, also $\frac{b}{a+b}$.

1-3-3-3 REPLIKATION

p(X ←* Y) $\frac{a}{a+c}$ Nachfolgend wichtige Negationen:

p(¬X ←* Y) p(X ←* ¬Y) p(¬X ←* ¬Y)

$\frac{c}{a+c}$ $\frac{b}{b+d}$ $\frac{d}{b+d}$

1-3-3-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

$$p(X \mathrel{*\!\leftrightarrow} Y) = \frac{a}{a+b+c}$$

1-3-3-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION
Zur Übersicht ein Vergleich einiger Formeln von *Implikation* und *Positiv-Implikation*:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} \qquad p(X \mathrel{*\!\rightarrow} Y) = \frac{a}{a+b}$$

$$p(X \rightarrow \neg Y) = \frac{b+c+d}{a+b+c+d} \qquad p(X \mathrel{*\!\rightarrow} \neg Y) = \frac{b}{a+b}$$

$$p\neg(X \rightarrow Y) = \frac{b}{a+b+c+d} \qquad p\neg(X \mathrel{*\!\rightarrow} Y) = \frac{b}{a+b}$$

1-3-4 Systematik

Wir kommen jetzt zu Formeln für andere *Junktoren* bzw. *Relatoren*. Zur Erinnerung: die Aufstellung der jeweiligen Formel erfolgt aus den *Wahrheitstafeln*. Man dividiert die Anzahl der Fälle in den positiven Welten (+) durch die Anzahl der Fälle in allen Welten (+/–).

1-3-4-1 KONJUNKTION

Es ergibt sich für die *Konjunktion* X ∧ Y: $p(X \wedge Y) = \frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$

X ∧ Y	
+ + +	a
+ – –	b
– – +	c
– – –	d

Da die Konjunktion zu den wichtigsten Relationen gehört, wird sie hier genauer dargestellt.

- *Absolute* Quantität: q(X ∧ Y) = r oder spezieller: q(Fx ∧ Gx) = r.
  Beispiel: q(Fx ∧ Gx) = 50, zu lesen: ‚für 50x gilt: sie haben die Eigenschaften F *und* G'.
- *Relative* Quantität: p(X ∧ Y) = r/n oder spezieller: p(Fx ∧ Gx) = r/n
  Beispiel: p(Fx ∧ Gx) = 50/100, zu lesen: ‚für 50 von 100 x gilt: sie haben die Eigenschaften F *und* G'.

Negationen der Konjunktion

X ∧ ¬Y	X >– Y	$\frac{b}{a+b+c+d}$
¬X ∧ Y	X –< Y	$\frac{c}{a+b+c+d}$
¬X ∧ ¬Y	X ∇ Y	$\frac{d}{a+b+c+d}$

1-3-4-2 GESETZE DER KONJUNKTION

Man kann durch eine Formel ausdrücken, wie sich die Wahrscheinlichkeit p einer Konjunktion (bzw. der ihr entsprechenden Relation) aus den Wahrscheinlichkeiten der zwei Glieder der Konjunktion berechnen läst.

Beispiel: (X ↔ Y) ⇔ p(X → Y) ∧ p(X ← Y)

Die Wahrscheinlichkeit der Konjunktion (X → Y) ∧ (X ← Y) bzw. der äquivalenten Relation (X ↔ Y) wird berechnet, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Konjunktions-Glieder addiert und den Wert 1 subtrahiert.

p(X ↔ Y) = p(X → Y) + p(X ← Y) – 1

$$\frac{a+d}{a+b+c+d} = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} + \frac{a+b+d}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} =$$

$$\frac{2a+b+c+2d}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$$

Dieses Gesetz gilt allerdings nicht uneingeschränkt. Das zeigt folgendes Beispiel:

X >< Y ⇔ (X >< Y) ∧ (X ∨ Y) p(X >< Y) = $\frac{b+c}{a+b+c+d}$

Dies müsste also aus der Berechnung herauskommen. Real ergibt sich aber:

$$\frac{b+c}{a+b+c+d} + \frac{a+b+c}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} =$$

$$\frac{a+2b+2c}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = \frac{b+c-d}{a+b+c+d}$$

Man kann die oben genannte Rechenregel aber folgendermaßen ergänzen: *negative Summanden werden gestrichen*. So wird also in dem Bruch $\frac{b+c-d}{a+b+c+d}$ das ‚d' gestrichen, womit das gewünschte Ergebnis herauskommt.

1-3-4-3 ANDERE RELATIONEN

Diese Relationen entsprechen X und Y bzw. ¬X und ¬Y.

Präpension (Präpensor) $\quad p(X \rfloor Y) = p(X) = \frac{a+b}{a+b+c+d}$

Postpension (Postpensor) $\quad p(X \rceil Y) = p(Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d}$

Pränonpension (Pränonpensor) $\quad p(X \lfloor Y) = p(\neg X) = \frac{c+d}{a+b+c+d}$

Postnonpension (Postnonpensor) $\quad p(X \lceil Y) = p(\neg Y) = \frac{b+d}{a+b+c+d}$

1-3-4-4 TAUTOLOGIE UND ANTILOGIE

Ich habe schon darauf hingewiesen, dass m. E. der *Tautologator* ⊤ und der *Antilogator* ⊥ nicht als normale Relatoren aufgefasst werden dürfen. Da der Tautologator alles zu einer *Tautologie* verbindet und der Antilogator alles zu einer *Kontradiktion*, gehören sie ohnehin in den analytischen und nicht in den synthetischen Bereich. Dennoch seien ihre möglichen Formeln hier genannt:

$p(X \top Y) = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1 \qquad p(X \perp Y) = \frac{0}{a+b+c+d} = 0$

1-3-4-5 QUANTITATIVE WAHRHEITSTAFEL

Erst jetzt sind die Informationen vorhanden, um ein Thema anzugehen, was eigentlich schon vorher einen Platz verdient hätte: die *quantitative Wahrheitstafel*. Und zwar wollen wir 2 Fälle, am Beispiel der Implikation, unterscheiden:

1) *Gesamt-Ausdruck* / 1fache Quantifizierung: p(X → Y) = m/n

2) *Getrennte Komponenten* / 2fache Quantifizierung: p(X) = r/n → p(Y) = s/n

Untersuchen wir diese 2 Fälle gesondert (das ist vor allem für Spezialisten gedacht):

1) *1fache Quantifizierung*: p(X → Y) = m/n

Die zentrale Frage lautet: Lässt sich eine Wahrheitstafel für p(X → Y) = m/n angeben?

Man könnte zunächst meinen, man übernimmt den Wahrheitsverlauf der *qualitativen Implikation* X → Y. Dies wäre eine einfache und elegante Lösung. Hier gilt:

	X	Y	X → Y		
1.	+	+	+	X ∧ Y	⇒ X → Y
2.	+	–	–	X ∧ ¬Y	⇒ ¬(X → Y)
3.	–	+	+	¬X ∧ Y	⇒ X → Y
4.	–	–	+	¬X ∧ ¬Y	⇒ X → Y

Gilt dann entsprechend für $p(X \rightarrow Y) = m/n$?

	$p(X) = r/n$	$p(Y) = s/n$	$p(X \rightarrow Y) = m/n$
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	−	+	+
4.	−	−	+

Nach genauer Analyse ist diese Darstellung aber nicht haltbar. Aus folgenden Gründen:
Bei einer Wahrheitstafel wird der Wert einer Relation aus den Werten ihrer *Komponenten* abgleitet, als deren Funktion: d. h. die Relation ist *wahrheitswert-funktional.*

Die *Komponenten* im Beispiel sind offensichtlich X und Y, im quantitativen Modell als p(X) und p(Y) zu fassen. Für p(X) und p(Y) sind allerdings keine Werte ausgewiesen. Wir können ihnen aber welche zuweisen und wählen: $p(X) = r/n$ und $p(Y) = s/n$ (damit wir haben allerdings indirekt keine 1fache, sondern eine 3fache Quantifizierung).

Es zeigt sich, dass keine strengen, *genauen* Schlüsse von $p(X) \wedge p(Y)$ auf $p(X \rightarrow Y)$ möglich sind. Man findet nur *partielle, semi-analytische* Schlüsse wie:

$$p(X) = r/n \wedge p(Y) = s/n \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = m/n.$$

Anders als im *qualitativen* Modell, wo aus X und Y bzw. deren Negationen *strenge* Schlüsse auf $X \rightarrow Y$ möglich sind (vgl. die obige Wahrheitstafel).

Für $p(X \rightarrow Y) = m/n$ lässt sich keine Wahrheitstafel und entsprechend kein Wahrheitsverlauf angeben. Wir müssen $p(X \rightarrow Y)$ als *nicht weiter zerlegbare* Einheit betrachten, entsprechend p(X) und p(Y). $p(X \rightarrow Y) = m/n$ ist nicht wahrheitswert-funktional.

Wichtig ist aber: In der quantitativen *Aussagen-Logik*, in der nur die Werte $p = 1$ und $p = 0$ vorkommen, sind die Verhältnisse völlig anders. Für $p(X \rightarrow Y) = n/n = 1$ lässt sich nämlich sehr wohl eine Wahrheitstafel angeben, denn wir können $p(X \rightarrow Y) = 1$ bzw. $p(X \rightarrow Y) = 0$ in Abhängigkeit von p(X) und p(Y) angeben (vgl. Punkt 1-4).

Und anders sieht es auch aus für den Ausdruck mit *zwei getrennt quantifizierten* Komponenten, nämlich: $p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$. Dafür lässt sich ebenfalls eine Wahrheitstafel aufstellen, wie ich im Folgenden zeigen werde.

2) *2fache Quantifizierung*: $p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$
Wir folgen wieder der *aussagen-logischen* Wahrheitstafel für die Implikation (vgl. oben).
Entsprechend stellen wir dann eine *quantitative* Wahrheitstafel auf:

	$p(X) = r/n$	$p(Y) = s/n$	$p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	−	+	+
4.	−	−	+

Nun müssten auch die entsprechenden Relationen gelten, also:
1. $p(X) = r/n \wedge p(Y) = s/n \Rightarrow p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$
2. $p(X) = r/n \wedge \neg[p(Y) = s/n] \Rightarrow \neg[p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n]$
3. $\neg[p(X) = r/n] \wedge p(Y) = s/n \Rightarrow p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$
4. $\neg[p(X) = r/n] \wedge \neg[p(Y) = s/n] \Rightarrow p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$

Es mag erstaunen, dass diese Schlüsse gelten sollen, vor allem z. B. in der 4. Zeile mit 2 negativen Prämissen. Aber man geht hier quasi nach einer *logischen Mechanik* vor, die sich aus der *Definition der Implikation* ergibt. Und danach ist eine Implikation eben grundsätzlich wahr bzw. ein Schluss gültig, wenn die Vordersätze negiert bzw. falsch sind.

Allerdings werden hier p(X) und p(Y) quasi *entquantifiziert*, sie werden einfach wie X und Y behandelt. So sind die obigen Schlüsse *mathematisch* gesehen unplausibel oder sogar sinnlos. Das zeigt sich, wenn man eine modifizierte *quantitative Wahrheitstafel* aufstellt. Hierfür sind das X+ (wahr) und X– (falsch) in *Zahlenwerte* zu übersetzen (für Y entsprechend).

qualitativ:	quantitativ:	
X (+)	$p(X) = r/n$	
X (–) bzw. $\neg X$	$\neg[p(X) = r/n]$	$p(X) \neq r/n$

Somit ergibt sich die folgende *quantitative* Wahrheitstafel:

	p(X)	p(Y)	$p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$
1.	r/n	s/n	+
2.	r/n	≠s/n	–
3.	≠r/n	s/n	+
4.	≠r/n	≠s/n	+

Schon die Werte r/n und s/n, aber vor allem die *negierten* Werte ≠r/n und ≠s/n sind völlig *unbestimmt*. Sie können, je nach Interpretation der Negation, für (unendlich) viele Werte stehen. Es ist daher keine Methode erkennbar, mit der man *mathematisch* beweisen könnte, dass hier ein strenger Schluss vorliegt. Fazit: Die Wahrheitstafel ist generell sinnvoll nur in der (*quantitativen*) *Aussagen-Logik*, aber nicht in einer *allgemeinen quantitativen Logik*. Sie ist gar nicht verwendbar bei Gesamt-Ausdrücken wie $p(X \rightarrow Y) = r/n$, und logisch verwendbar, aber mathematisch unplausibel bei getrennten Komponenten wie $p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$.

1-3-5 Erweiterungen

Hier soll die *intensionale Quantität* behandelt werden. Ich habe bisher nur die *extensionale* Quantität von Objekten bzw. Relationen dargestellt:

- *absolute* Anzahl bzw. absolute Häufigkeit (q)
- *relative* Anzahl bzw. relative Häufigkeit (p)

Denn wie schon gesagt: die Logik geht im Wesentlichen von der extensionalen Quantität aus. Man kann aber auch die *intensionale* Quantität von *Eigenschaften* (*Intensität*) angeben.

Die intensionale Qualität ist der *Grad*, zu dem eine Eigenschaft einem Objekt zukommt. Beispiel: „Peter ist intelligent". Man könnte nun *quantitativ* angeben, *wie* intelligent er genau ist. Im Einzelnen unterscheidet man in der Statistik bzw. der Wissenschaftstheorie verschiedene *Skalen*: *Nominal-Skala, Ordinal-Skala, Intervall-Skala* und *Ratio-Skala*.

1-3-5-1 NOMINAL-SKALA

Hier wird nur unterschieden, ob jemand eine Eigenschaft zukommt oder nicht.
Man spricht von *qualitativen* Eigenschaften oder Merkmalen. Z. B.:

„Fritz ist klug"
„Fritz ist nicht klug (= dumm)"

Auf die Probleme dieser qualitativen Unterscheidung gehe ich noch später ein.
Dies lässt sich im Rahmen der normalen (Prädikaten-)Logik ausdrücken. Fx_i oder $\neg Fx_i$.

1-3-5-2 ORDINAL-SKALA

Auf der *Ordinal-Skala* werden *Größenunterschiede* festgestellt. Dies entspricht grammatisch dem *Komparativ*. Z. B.:

„Fritz ist klüger als Peter“
„Fritz ist dümmer als Peter“
„Fritz ist gleich intelligent wie Peter, nicht klüger und nicht dümmer“

Um das logisch zu schreiben, formuliert man am besten um:

„Die Intelligenz von Fritz ist größer als die Intelligenz von Peter“
halb-formal: q[Intelligenz[Fritz]] > q[Intelligenz[Peter]]
formal: $q[F[x_1]] > q[F[x_2]]$

Zur Abgrenzung von der *extensionalen* Schreibweise kann man z. B. *eckige* Klammern statt *runder* Klammern verwenden.

1-3-5-3 INTERVALL-SKALA

Auf der *Intervall-Skala* arbeitet man mit *Zahlenwerten* bzw. quantitativen Eigenschaften, man verwendet also eine „Messlatte“. Z. B.:

„Fritz hat einen I. Q. von 150“

Das obige Beispiel betrifft die *absolute* Quantität. Man kann aber auch die *relative* Quantität angeben. Dies ist allerdings bei der Intelligenz von Menschen nicht ganz unproblematisch. Man könnte etwa festlegen: 180 I. Q ist die *maximale* Intelligenz eines Menschen, und gibt davon die konkrete Intelligenz eines Menschen in Relation zu dieser Maximalgröße an. Z. B.:

„Fritz hat einen I. Q. von 150/180, d. h. er ist zu ca. 83% intelligent“

Eine solche Aussage über die Intelligenz ist aber problematisch, weil es keine natürliche Obergrenze der Intelligenz gibt (oder sie uns jedenfalls nicht bekannt ist).

Anders wäre dagegen z. B. eine Aussage über den geometrischen Winkel zu beurteilen. Ein normaler Winkel (sehen wir vom überstumpfen Winkel usw. ab) kann einen beliebigen Wert > 0° und < 180° einnehmen. Gehen wir der Einfachheit halber davon aus, dass wir 180° als obersten Winkelwert festlegen. Dann wäre es unproblematisch (wenn auch nicht üblich) zu sagen: ‚Ein Winkel von 90° besitzt 90/180 = 50% Winkelgröße’.

Zurück zum Beispiel mit der Intelligenz:

Halb-formal könnte man schreiben:

q[Intelligenz[Fritz]] = 150 bzw. p[Intelligenz[Fritz]] = 150/180 = 0,83

Formal:

$q[F[x_1]] = 150$ bzw. $p[F[x_1]] = 150/180 = 0{,}83$

Denkbar wäre auch: $0{,}83F[x_1]$

1-3-5-4 RATIO-SKALA

Eine Ratio-Skala ist auch eine metrische Skala, aber im Gegensatz zur Intervall-Skala gibt es bei ihr einen *natürlichen 0-Punkt*. Dies ist bei der Körpergröße der Fall, aber z. B. bei der Temperatur-Skala gibt es keinen natürlichen 0-Punkt. Innerhalb einer Ratio-Skala sind erweiterte mathematische Operationen möglich.

1-3-5-5 FUZZY LOGIK

Die *Fuzzy-Logik* ist auch eine *quantitative* Logik. Nach meiner Auffassung ist das, was in der Fuzzy Logik vollzogen wird, eine *intensionale* Quantifizierung. Nur deutet man das in der Fuzzy Logik quasi extensional, nämlich als den *Grad, in dem ein x einer Menge angehört*.

Dies besagt aber nicht anderes als den *Grad*, mit dem eine *Eigenschaft* einem Objekt x zukommt. So gesehen findet keine echte extensionale Quantifizierung in der Fuzzy Logik statt (vgl. zur Fuzzy Logik vor allem 1-2-5-5 und 1-4-1-1).

Mein Ansatz berücksichtigt zwar auch die *intensionale* Quantifizierung, also die Quantität von Eigenschaften bzw. den Grad der Relation, in dem eine Eigenschaft einem Objekt zukommt. Aber im Vordergrund steht bei meinem Ansatz die *extensionale* Quantifizierung, nämlich die Angabe der Anzahl der Individuen, die Elemente einer Klasse sind oder denen eine Eigenschaft zukommt.

Um den Unterschied noch einmal am Beispiel zu verdeutlichen:

- *extensional*: „70% aller Menschen sind egoistisch“
- *intensional*: „Der (bzw. dieser) Mensch ist zu 70% egoistisch (zum Grad von 70%)“

Auf einer höheren Ebene kann man das kombinieren oder integrieren:

2fach: „70% der Menschen sind zu 60% intelligent“
3fach: „70% der Menschen, die zu 60% intelligent sind, sind zu 90% hilfsbereit“

Allgemein: 3fach: „r/n aller x, die zu s% Eigenschaft F haben, haben zu t% Eigenschaft G“.
Z. B.: $p(s*F \rightarrow t*G) = r/n$

In der Mathematik und vor allem *Statistik* sind solche und noch komplexere quantitative Verknüpfungen durchaus üblich; anstatt reiner Prozentangaben können dabei auch Formeln stehen. In der Logik ist aber die *Quantifizierung* bis heute eher noch die Ausnahme. Ich versuche in meinem Modell, die Vorteile der Quantifizierung in die Logik einzubeziehen, ohne dabei die Stärken und Eigenständigkeiten der Logik aufzugeben.

1 – 4 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

1-4-1 Einführung

Aussagen-logische Relationen scheinen nicht *quantitativ* bestimmt zu sein, anders als in der *Quantoren-Logik* gibt es keine Quantitäts-Zeichen, wenn man nicht die Negation als Quantitäts-Zeichen interpretiert. Wie ich aber schon angemerkt habe, ist *jede* Relation notwendig auch quantitativ (sieht man einmal ab von einer metaphysisch-spekulativen Wirklichkeitssphäre, in der es keine Quantität geben mag). Eine aussagen-logische Relation wie $X \rightarrow Y$ enthält eine verborgene, *implizite Quantität.* Auch jede Aussage der normalen Sprache wie z. B. 'Der Mensch ist sterblich' enthält implizit eine quantitative Struktur, obwohl kein Zahlwort o. ä verwendet wird. Die *quantitative Aussagen-Logik* hat erstens die Funktion, diese implizite Quantität *explizit* zu machen, zweitens, aussagen-logische Relationen zu *quantifizieren.*

Zur ersten Erläuterung der quantitativen Aussagen-Logik bleiben wir zur Einfachheit bei der *Implikation*, die – wie aufgezeigt – eine besonders wichtige Rolle spielt. In der *2-wertigen* Logik gilt für die Implikation: Sie kann *positiv* (gültig) sein und *negativ* (ungültig).

1-4-1-1 QUANTIFIZIERUNG QUALITATIVER KENNZEICHNUNGEN

Ich vertrete also die Auffassung, dass die *qualitativen* Kennzeichnungen „positiv" und „negativ" *implizit* quantitativ sind. Zumindest lassen sie sich quantitativ interpretieren bzw. darstellen, und zwar gilt:

$X \rightarrow Y$ bedeutet quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = 1$
$\neg(X \rightarrow Y)$ bedeutet quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = 0$

Man kann das (u. a.) folgendermaßen übersetzen:
$p(X \rightarrow Y) = 1$ alle X sind Y
$p(X \rightarrow Y) = 0$ alle X sind nicht Y
(Auf Probleme dieser Deutung bzw. mögliche andere Deutungen gehe ich noch ein.)

Es ist also zu unterscheiden:
- $X \rightarrow Y$ als Struktur in der Aussagen-Logik mit (implizitem) Wert von $p = 1$ (Konstante)
- $X \rightarrow Y$ in $p(X \rightarrow Y) = r/n$ in der quantitativen Logik als Struktur mit unbestimmten Wert (Variable), der erst durch p ein Wert zugesprochen wird.

In der quantitativen Form nenne ich eine Relation mit $p = 1$ oder $p = 0$ *deterministisch.* Alle anderen Werte, also $0 < p < 1$, sind *statistisch.* Man kann die Werte $p = 1$ und $p = 0$ somit als statistische *Grenzfälle* ansehen.

Anders gesagt, lässt sich die (quantitative) Aussagen-Logik insgesamt als *Grenzfall* der Quantitäts-Logik betrachten, welche *alle* Werte $0 \leq p \leq 1$ umfasst. Damit ergibt sich:

$p = 1$ deterministisch-positiv
$0 < p < 1$ statistisch
$p = 0$ deterministisch-negativ („nullistisch“)

Es sind natürlich auch andere semantische Deutungen als „alle X sind Y“ für $X \rightarrow Y$ bzw. $p(X \rightarrow Y) = 1$ möglich; vor allem lassen sich folgende quantitative Deutungen bzw. Anwendungen für $X \rightarrow Y$ unterscheiden:

– *rein aussagen-logisch*: wenn die Aussage ‚X’ wahr ist, dann ist *in allen Fällen* auch die Aussage ‚Y’ wahr
– *funktional*: wenn X, dann *in allen Fällen* (immer) auch Y
– *extensional*: *alle* X sind Y, die Klasse X ist *Teilmenge* der Klasse Y
– *intensional*: (ein) X ist *vollständig* Y

Natürlich kann man sich auch von der *Implikation* lösen und allgemein bestimmen:

$p(\Phi) = 1$: Φ gilt *generell*, d. h. für *alle*, *immer* oder *vollständig*
$p(\Phi) = 0$: Φ gilt *generell nicht*, d. h. für *keinen*, *niemals* oder *gar nicht*

Die *extensionale* Deutung erweist sich aber als besonders praktikabel und anschaulich. Daher werde ich sie auch im Folgenden bevorzugen. Ebenso erweist sich die Implikation als besonders geeignet zur Demonstration, daher werde ich sie ebenfalls weiterhin bevorzugen.

Auch die *Fuzzy-Logik* ist quantitativ. Dies wird in der Fuzzy-Logik so interpretiert, dass damit die *2-wertige Logik* bzw. überhaupt die *2-Wertigkeit* überwunden ist. Ich halte eine andere Interpretation für sinnvoller. Die 2-Wertigkeit wird nur verschoben, bleibt aber erhalten. Das gilt gleichermaßen für eine extensionale wie eine intensionale Quantifizierung.

Es geht eben bei Quantifizierung nicht mehr darum, ob X oder nicht X, sondern stattdessen ob $p(X) = r/n$ oder $p(X) \neq r/n$. Im Beispiel: p(X) kann nicht *zugleich* 0,5 und nicht 0,5 sein, genauso wenig wie *zugleich* X und nicht X gelten kann. Damit ist der *Satz vom Widerspruch* $\neg(X \wedge \neg X)$ weiterhin gültig, man könnte ihn z. B. quantitativ formulieren:

$$\neg[p(X) = r/n \wedge p(X) \neq r/n]$$

Entsprechend gilt der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten* $X >\!< \neg X$ quantitativ:

$$p(X) = r/n \;>\!<\; p(X) \neq r/n.$$

1-4-1-2 DETERMINISTISCH POSITIV

Für eine *deterministische* Relation oder Struktur gilt wie gesagt p = 1. Wir hatten als Formel der relativen Größe der Implikation kennen gelernt:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

D. h. für $p(X \rightarrow Y) = 1$ ergibt sich: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ Somit r = n. Es zeigt sich:

Wenn $b = 0 \Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$. Man braucht hier nicht hinzuzufügen: $a + b + c > 0$.

Denn es gehört wie beschrieben zu den Grundvoraussetzungen, dass gilt: $a + b + c + d > 0$.

Somit: $b = 0 \Rightarrow a + b + c > 0$

1-4-1-3 WAHRHEITSTAFEL

Ich gebe im Folgenden die Wahrheitstafel für $p(X \rightarrow Y) = 1$ an. Man kann die Wahrheitstafel über *absolute* Werte (q) definieren, sinnvoller ist aber, von *relativen Größen* (p) auszugehen.

• Alternative Quantifizierung von $X \rightarrow Y$

Wir haben bisher $X \rightarrow Y$ als $p(X \rightarrow Y) = 1$ quantifiziert. Technisch gesehen, ist es zunächst schwierig, für $p(X \rightarrow Y) = 1$ eine Wahrheitstafel aufzustellen. Unproblematischer wäre es, für $p(X) = 1 \rightarrow p(Y) = 1$, eine Wahrheitstafel aufzustellen. $p(X) = 1 \rightarrow p(Y) = 1$, also doppelt quantifiziert, könnte man auch als eine Quantifizierung von $X \rightarrow Y$ ansehen. Beide Ausdrücke sind aber nicht äquivalent, es gilt: $p(X \rightarrow Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X) = 1 \rightarrow p(Y) = 1$. Für den Wahrheitsverlauf in der Wahrheitstafel ergeben sich allerdings keine Unterschiede, daher ziehe ich $p(X \rightarrow Y) = 1$ vor, das $X \rightarrow Y$ exakter quantifiziert als $p(X) = 1 \rightarrow p(Y) = 1$.

• Zunächst zur Erinnerung die *qualitative* Wahrheitstafel und ihre primäre Deutung:

	$X \rightarrow Y$	Deutung:
1.	+ + +	$X \wedge Y \;\Rightarrow\; X \rightarrow Y$
2.	+ − −	$X \wedge \neg Y \;\Rightarrow\; \neg(X \rightarrow Y)$
3.	− + +	$\neg X \wedge Y \;\Rightarrow\; X \rightarrow Y$
4.	− + −	$\neg X \wedge \neg Y \;\Rightarrow\; X \rightarrow Y$

• Normale, quantitative Wahrheitstafel

Übersetzen wir das in eine *quantitative* Wahrheitstafel mit *relativen* Größen (p), so werden die qualitativen Werte von X wie folgt interpretiert (für Y und $X \rightarrow Y$ entsprechend):

qualitativ	quantitativ
X +	$p(X) = 1$
X − (bzw. $\neg X$)	$p(X) = 0$

Manchmal werden von anderen Autoren auch in der herkömmlichen, qualitativen Tafel die Zeichen 1 und 0 eingesetzt, für „wahr“ bzw. „falsch“. Aber dort sind es nur *Symbole*, hier, in meinem Ansatz, geht es aber um konkrete *Zahlenwerte*; das ist nicht zu verwechseln.

	$p(X \rightarrow Y)$	Deutung:
1.	1 1 1	$p(X \wedge Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 1$
2.	1 0 0	$p(X \wedge \neg Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 0$
3.	0 1 1	$p(\neg X \wedge Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 1$
4.	0 1 0	$p(\neg X \wedge \neg Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 1$

• konjunktive Wahrheitstafel

Hier ergibt sich eine *getrennte* Erfassung von p(X) und p(Y):

	$p(X)$	$\wedge$ $p(Y)$	$\Rightarrow$ $p(X \rightarrow Y)$	Deutung:
1.	1	1	1	$p(X) = 1 \wedge p(Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 1$
2.	1	0	0	$p(X) = 1 \wedge p(Y) = 0 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 0$
3.	0	1	1	$p(X) = 0 \wedge p(Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 1$
4.	0	0	1	$p(X) = 0 \wedge p(Y) = 0 \;\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) = 1$

Wenn man das in *Formeln* übersetzt, ergibt sich:

	$\frac{a+b}{a+b+c+d}$	$\wedge$ $\frac{a+c}{a+b+c+d}$	$\Rightarrow$ $\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$
1.	1	1	1
2.	1	0	0
3.	0	1	1
4.	0	0	1

Diese konjunktive Wahrheitstafel muss aber letztlich *implikativ* gedeutet werden, sonst landet man in einem *unendlichen Regress*. Die Zeile 1 und 2 seien exemplarisch erläutert:

1. Zeile: $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$ d. h.: a + b > 0, c + d = 0

$\frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$ d. h. : a + c > 0, b + d = 0

Daraus ergibt sich: a > 0, b + c + d = 0. Somit folgt für die Konklusion:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{a}{a} = 1$$

2. Zeile: $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$ d. h.: a + b > 0, c + d = 0

$\frac{a+c}{a+b+c+d} = 0$ d. h. : a + c = 0, b + d > 0

Daraus ergibt sich: b > 0, a + c + d = 0. Somit folgt für die Konklusion:

$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{0}{b} = 0$ (denn b kommt als einziges nicht im Zähler vor)

Der Leser möge Zeile 3 und 4 bitte selbst analysieren. Er erhält dann ein beeindruckend systematisches Ergebnis. Und er erhält 4 *strenge logische Schlüsse*. Während man also bei der generellen *quantitativen Logik* Wahrheitstafeln kaum sinnvoll verwenden kann, so ist dies bei der quantitativen Aussagen-Logik sehr wohl möglich. Denn diese Tafeln entsprechen genau den Tafeln der Aussagen-Logik, was beweist, dass meine *Übersetzung der Aussagen-Logik in mathematische Formeln* berechtigt ist.

Damit wäre der *eine* Wert der 2-wertigen Logik abgehandelt. Der *zweite* Wert ergibt sich, wenn X → Y falsch bzw. negativ ist. Dafür verwendet man die *Negation* ¬. Also ¬(X → Y).

1-4-1-4 DETERMINISTISCH NEGATIV

Die *deterministisch-negative* Relation wird wie gesagt durch den Wert p = 0 ausgedrückt.

Somit ergibt sich: ¬(X → Y): p(X → Y) = 0 (Alternative: p(X) = 0 → p(Y) = 0)

Für die normale, qualitative Wahrheitstafel heißt das:

	$\neg(X \rightarrow Y)$	Deutung:
1.	$- + + +$	$X \wedge Y \Rightarrow \neg\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow X \rightarrow Y$
2.	$+ + - -$	$X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg(X \rightarrow Y)$
3.	$- - + +$	$\neg X \wedge Y \Rightarrow \neg\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow X \rightarrow Y$
4.	$- - + -$	$\neg X \wedge \neg Y \Rightarrow \neg\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow X \rightarrow Y$

Die *doppelte Negation* erklärt sich wie folgt: Wenn z. B. unter dem Negationszeichen $\neg$ in $\neg(X \rightarrow Y)$ ein $-$ (minus) steht, ist die Negation ihrerseits negiert. Nun gilt: $\neg\neg(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y)$. Übersetzen wir die *qualitative* wieder in eine *quantitative* Wahrheitstafel:

	$p\neg(X \rightarrow Y)$	Deutung:
1.	0 1 1 1	$p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p\neg(X \rightarrow Y) = 0$
2.	1 1 0 0	$p(X \wedge \neg Y) = 1 \Rightarrow p\neg(X \rightarrow Y) = 1$
3.	0 0 1 1	$p(\neg X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p\neg(X \rightarrow Y) = 0$
4.	0 0 1 0	$p(\neg X \wedge \neg Y) = 1 \Rightarrow p\neg(X \rightarrow Y) = 0$

Wie noch gezeigt werden wird, gilt: $p\neg(X \rightarrow Y) = 0 \Leftrightarrow p(X \rightarrow Y) = 1$

Ganz korrekt schriebe man mit *doppelter* Klammer: $p(\neg(X \rightarrow Y))$ statt $p\neg(X \rightarrow Y)$; aus Gründen der Vereinfachung wähle ich aber meistens die erste Schreibweise.

Will man die umständlichen Termini *deterministisch-positiv* und *deterministisch-negativ* vermeiden, kann man nur die Relationen mit p = 1 deterministisch nennen und die Relationen mit p = 0 *nullistisch* (in Ermangelung eines besseren Begriffs). Allerdings ist zu bedenken:

$$p(X \rightarrow Y) = 0 \Leftrightarrow p(X >\!\!- Y) = 1$$

D. h. einer *deterministisch-negativen* Struktur entspricht immer auch eine *deterministisch-positive* Struktur. Somit kann man prinzipiell *alle* deterministischen Relationen auch als deterministisch-*positiv* kennzeichnen und auf die Bestimmung „nullistisch" verzichten.

1-4-1-5 EINWÄNDE GEGEN DIE QUANTIFIZIERUNG

Ich habe hier für *aussagen-logische* Relationen oder Relatoren eine quantitative Interpretation bzw. eine Quantifizierung mittels der (empirischen) *Wahrscheinlichkeit* p vorgestellt.

Und zwar *Position*: p = 1, *Negation*: p = 0. Ich möchte mögliche Gründe gegen dieses Modell kurz anführen, ausführlich diskutiere ich das in meinem Buch „Integrale Logik".

1) *Wahrheitsgrad* w

Aussagen-logisch versteht man die Position $X \rightarrow Y$ als: ‚$X \rightarrow Y$' ist (empirisch) *wahr*; dagegen die Negation $\neg(X \rightarrow Y)$ als ‚$X \rightarrow Y$' ist (empirisch) falsch. Es geht also um Kategorien der *Wahrheit*. Von daher könnte man argumentieren, für eine Quantifizierung sei die *Wahrscheinlichkeit* nicht geeignet. Sinnvoller sei jedenfalls, mit einem *Wahrheitsgrad* w zu operieren. Es ergäbe sich dann:

$$X \rightarrow Y\text{: } w(X \rightarrow Y) = 1 \qquad \neg(X \rightarrow Y)\text{: } w(X \rightarrow Y) = 0$$

Sicher wäre es generell auch denkbar, eine Quantifizierung der Aussagen-Logik mit einem *Wahrheitsgrad* w durchzuführen. Aber die Verwendung der *Wahrscheinlichkeit* ist nicht nur legitim, sondern sogar überlegen. Dieser Wahrscheinlichkeits-Ansatz spielt eine wesentliche Rolle in der vorliegenden Arbeit und wird daher im Folgenden ausführlich erläutert:

Es ist berechtigt, die (empirische) aussagen-logische Wahrheit oder Falschheit mit der (empirischen) Wahrscheinlichkeit zu quantifizieren. In einem *2-wertigen* System wie der Aussagen-Logik gilt: wahr = vollständig wahr = in allen Fällen wahr; nicht wahr (falsch) = gar nicht wahr = in keinem Fall wahr. Der Bezug aus „alle" oder „keiner" wird aber gerade durch die *Wahrscheinlichkeit* p ausgedrückt. Natürlich kann der Satz p(X) = 1 auch falsch sein, dann gilt eben $p(X) = 0$. Und natürlich kann auch ein Satz wie $p(X \rightarrow Y) = 0{,}75$ wahr oder falsch sein, aber ein solcher Satz ist in der quantitativen *Aussagen-Logik* nicht definiert.

2) *absolute Häufigkeit* q
Auch wenn man einräumt, dass man aussagen-logische Relationen mittels der *Häufigkeit* quantitativ interpretieren kann, könnte man einwenden: Es geht nicht um die *relative* Häufigkeit p, sondern um die *absolute* Häufigkeit q. Dabei wären folgende Deutungen naheliegend:

$X \rightarrow Y$: $q(X \rightarrow Y) = 1$ $\neg(X \rightarrow Y)$: $q(X \rightarrow Y) = 0$
Oder :
$X \rightarrow Y$: $q(X \rightarrow Y) > 0$ $\neg(X \rightarrow Y)$: $q(X \rightarrow Y) = 0$

Das könnte man z. B. folgendermaßen begründen. Für eine *allgemeine* Aussage (wie „alle Menschen sind sterblich“), mag p angemessen sein, aber auch für eine *singuläre* Aussage wie „Peter geht ins Kino“?

Es lässt sich aber zeigen, dass wenn man von der *absoluten* Häufigkeit ausgeht, wichtige logische Gesetze wie der „Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch“ nicht gelten. Andererseits kann man auch singuläre Sätze adäquat mit mit der Wahrscheinlichkeit p erfassen. Man geht aus von $p(X) = r/n$, muss aber festlegen, dass $r = 1$ und $n = 1$. Es gilt eben generell:
$p(X) = n/n = 1$. n/n steht für *alle*, auch wenn „alle“ im Sonderfall nur *einer* ($q = 1$) ist.

3) *andere Wahrscheinlichkeit* p
Wir sind ausgegangen von: X: $p(X) = 1$, $\neg X$: $p(X) = 0$. Man kann zwar grundsätzlich an der Quantifizierung durch *Wahrscheinlichkeit* festhalten, aber andere Werte wählen. Es lässt sich nämlich ein wichtiger Einwand gegen die Interpretation mit $p = 1$ und $p = 0$ anbringen:

Positive und *negierte* Relationen sind in der Aussagen-Logik *kontradiktorisch*, also z. B.:

$(X \rightarrow Y)$	$^{+}{><}^{+}$	$\neg$	$(X \rightarrow Y)$
+	+	–	+
–	+	+	–
+	+	–	+
+	+	–	+

Die *Implikation* $X \rightarrow Y$ und ihre *Negation* $\neg(X \rightarrow Y)$ stehen aussagen-logisch in einem *kontradiktorischen* Verhältnis, was durch den *Kontravalenz*-Relator $><$ ausgedrückt wird.

Bei der Quantifizierung ergibt sich aber ein *konträres* Verhältnis:
$p(X \rightarrow Y) = 1$ und $p(X \rightarrow Y) = 0$ sind nicht *kontradiktorisch*, sondern *konträr.*
Generell sind $p = 1$ und $p = 0$ nicht *kontradiktorisch*, sondern *konträr*.

Bei einer Kontradiktion gilt: wenn X falsch ist, muss Y wahr sein und umgekehrt.
Dagegen ist es bei einem konträren Verhältnis möglich, dass *beide Aussagen falsch* sind.
Und dies ist ja bei $p = 1$ und $p = 0$ gegeben, denn es kann ja gelten: $0 < p < 1$.

Wenn z. B. $p = 0{,}5$ ist, dann sind $p = 1$ und $p = 0$ falsch.
Die *konträre* Relation wird durch den *Exklusor* | ausgedrückt. Es gilt:

$$p(X \rightarrow Y) = 1 \ ^{+}|^{+} \ p(X \rightarrow Y) = 0$$

Der *kontradiktorische* Gegensatz von $p = 1$ ist dagegen $p < 1$. Es gilt also:

$$p(X \rightarrow Y) = 1 \ ^{+}{><}^{+} \ p(X \rightarrow Y) < 1$$

Und entsprechend ist $p > 0$ der kontradiktorische Gegensatz von $p = 0$. Somit gilt:

$$p(X \rightarrow Y) = 0 \ ^{+}{><}^{+} \ p(X \rightarrow Y) > 0$$

Es ist natürlich zunächst unbefriedigend, dass *aussagen-logisch* zwischen $(X \rightarrow Y)$ und $\neg(X \rightarrow Y)$ eine *kontradiktorische* Relation besteht, dagegen zwischen den *Quantifizierungen* $p(X \rightarrow Y) = 1$ und $p(X \rightarrow Y) = 0$ nur eine *konträre*. So wäre zu fragen, ob man besser eine Quantifizierung wählt, bei der das kontradiktorische Verhältnis erhalten bleibt.

Naheliegend wäre zunächst das folgende Modell:

$(X \rightarrow Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) = 1$
$\neg(X \rightarrow Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) < 1$
$(X \rightarrow \neg Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) = 0$
$\neg(X \rightarrow \neg Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) > 0$

Hier wäre allerdings die *2-Wertigkeit* der Aussagen-Logik aufgehoben, man könnte mit der Aussagen-Logik 4 unterschiedliche Werte ausdrücken. Schon diese Aufhebung der 2-Wertigkeit ist problematisch, denn die Aussagen-Logik gilt allgemein als 2-wertiges System.

Vor allem aber führt dieser Ansatz zu großen logischen Problemen, ja zu Widersprüchen, wie hier jedoch nicht im Einzelnen gezeigt werden soll.

Ebenso nicht überzeugend sind folgende Definitionen:

$(X \rightarrow Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) > 0$
$\neg(X \rightarrow Y)$	bedeutet	$p(X \rightarrow Y) = 0$

Es zeigt sich, dass man bei den anfangs gewählten Definitionen bleiben sollte:

$p = 1$ (positiv, gültig, wahr) $\qquad$ $p = 0$ (negativ, ungültig, falsch)

Dies umso mehr, als sich noch zeigen wird, wie fruchtbar dieses Modell ist, man kann mit ihm alle aussagen-logischen Strukturen und Gesetze *numerisch* darstellen.

Und das *Kontradiktions-Problem* lässt sich durchaus innerhalb dieses Modells lösen, sogar ganz elegant. Dies lässt sich wie folgt begründen: In einem System, in dem nur *zwei* Werte zugelassen sind (positiv / negativ bzw. p = 1 / p = 0), *müssen* diese Werte *kontradiktorisch* sein. Und genau dies ist der Fall in der *quantitativen Aussagen-Logik*, hier gilt:

$p = 1 >< p = 0$ oder $\neg(p = 1) \Leftrightarrow p = 0$ bzw. $\neg(p = 0) \Leftrightarrow p = 1$

In einem differenzierteren System, mit *mehr* Werten, sind p = 1 und p = 0 dagegen nur *konträr*. Das werde ich für die *quantitative* Quantoren-Logik zeigen, in der 4 Werte unterschieden werden und daher andere *Negationen* vollzogen werden; hier gilt z. B.: $\neg(p = 1) \Leftrightarrow p < 1$ bzw. $\neg(p = 0) \Leftrightarrow p > 0$.

1-4-2 Implikation

1-4-2-1 DEFINITION

Die Implikation wurde schon in der Einführung beschrieben. Es ergibt sich:

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \rightarrow Y$	$\neg(X \rightarrow Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$p(X \rightarrow Y) = 0$
Formel	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} = 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$a + c + d > 0, b = 0$	$a + c + d = 0, b > 0$
Gegen-Relation	$p(X >\!- Y) = 0$	$p(X >\!- Y) = 1$

1-4-2-2 NEGATIVE IMPLIKATION

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \to \neg Y$ (entspricht X | Y)	$\neg(X \to \neg Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \to \neg Y) = 1$	$p(X \to \neg Y) = 0$
Formel	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$b + c + d > 0$, $a = 0$	$b + c + d = 0$, $a > 0$
Gegen-Relation	$p(X \wedge Y) = 0$	$p(X \wedge Y) = 1$

1-4-2-3 REPLIKATION

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \leftarrow Y$	$\neg(X \leftarrow Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \leftarrow Y) = 1$	$p(X \leftarrow Y) = 0$
Formel	$\frac{a+b+d}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{a+b+d}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$a + b + d > 0$, $c = 0$	$a + b + d = 0$, $c > 0$
Gegen-Relation	$p(X -\!< Y) = 0$	$p(X -\!< Y) = 1$

1-4-2-4 ÄQUIVALENZ

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \leftrightarrow Y$	$\neg(X \leftrightarrow Y$
Quantitäts-Logik	$p(X \leftrightarrow Y) = 1$	$p(X \leftrightarrow Y) = 0$
Formel	$\frac{a+d}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{a+d}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$a + d > 0$, $b + c = 0$	$a + d = 0$, $b + c > 0$
Gegen-Relation	$p(X >\!< Y) = 0$	$p(X >\!< Y) = 1$

1-4-2-5 KOMPLEXE IMPLIKATION

Es soll auch für eine Implikation mit *3* Variablen das obige Schema ausgefüllt werden:

$$p((X \to Y) \to Z) = \frac{a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Deterministisch

Aussagen-Logik	$(X \to Y) \to Z$
Quantitäts-Logik	$p((X \to Y) \to Z) = 1$
Formel	$\dfrac{a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$
Bedingungen	$a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1 > 0, \quad a_2 + c_2 + d_2 = 0$

Nullistisch

Aussagen-Logik	$\neg((X \to Y) \to Z)$
Quantitäts-Logik	$p(\neg((X \to Y) \to Z)) = 0$
Formel	$\dfrac{a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 0$
Bedingungen	$a_1 + b_1 + b_2 + c_1 + d_1 = 0, \quad a_2 + c_2 + d_2 > 0$

1-4-3 Positiv-Implikation

1-4-3-1 HERLEITUNG
Die Herleitung aus der Wahrheits-Tafel ergibt für: $p(X \ast\!\!\to Y) = 1$

	X	*→	Y		
1.	+	+	+	$q(X \wedge Y)$	$= a > 0$
2.	+	−	−	$q(X \wedge \neg Y)$	$= b = 0$

1-4-3-2 SCHEMA DER POSITIV-IMPLIKATION
Direkte (kontradiktorische) *Gegen-Relationen* gibt es bei der Positiv-Implikation nicht. Denn es gibt eben nur 3 Positiv-Relatoren, die alle auf der Implikation beruhen: *→, ←*, *↔. Gegen-Relationen müssen somit mit Hilfe der *Negation* gebildet werden.

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \ast\!\!\to Y$	$\neg(X \ast\!\!\to Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \ast\!\!\to Y) = 1$	$p(X \ast\!\!\to Y) = 0$
Formel	$\dfrac{a}{a+b} = 1$	$\dfrac{a}{a+b} = 0$
Bedingungen	$a > 0, b = 0$	$a = 0, b > 0$
Gegen-Relation	$p(X \ast\!\!\to \neg Y) = 0$	$p(X \ast\!\!\to \neg Y) = 1$

(Die Bedingung b > 0 und entsprechende sollen später noch diskutiert werden.)

1-4-3-3 POSITIV-REPLIKATION

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \leftarrow^* Y$	$\neg(X \leftarrow^* Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \leftarrow^* Y) = 1$	$p(X \leftarrow^* Y) = 0$
Formel	$\frac{a}{a+c} = 1$	
Bedingungen	$a > 0, c = 0$	$a = 0, c > 0$
Gegen-Relation	$p(\neg X \leftarrow^* Y) = 0$	$p(\neg X \leftarrow^* Y) = 1$

1-4-3-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X *\leftrightarrow Y$	$\neg(X *\leftrightarrow Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X *\leftrightarrow Y) = 1$	$p(X *\leftrightarrow Y) = 0$
Formel	$\frac{a}{a+b+c} = 1$	$\frac{a}{a+b+c} = 0$
Bedingungen	$a > 0, b + c = 0$	$a = 0, b +c > 0$
Gegen-Relation	$p\neg(X *\leftrightarrow Y) = 0$	$p\neg(X *\leftrightarrow Y) = 1$

1-4-3-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Zum genauen Vergleich stelle ich den „Steckbrief" von $p(X \rightarrow Y) = 1$ und $p(X *\rightarrow Y) = 1$ gegenüber:

Deterministisch	*Positiv-Implikation*	*Implikation*
Aussagen-Logik	$X *\rightarrow Y$	$X \rightarrow Y$
Quantitäts-Logik	$p(X *\rightarrow Y) = 1$	$p(X \rightarrow Y) = 1$
Formel	$\frac{a}{a+b} = 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$
Bedingungen	$a > 0, b = 0$	$a + c + d > 0, b = 0$
Gegen-Relation	$p(X *\rightarrow \neg Y) = 0$	$p(X >\!- Y) = 0$

Nullistisch	*Positiv-Implikation*	*Implikation*
Aussagen-Logik	$\neg(X \ast\!\!\rightarrow Y)$	$\neg(X \rightarrow Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 0$	$p(X \rightarrow Y) = 0$
Formel	$\frac{a}{a+b} = 0$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	a = 0, b > 0	a + c + d = 0, b > 0
Gegen-Relation	$p(X \ast\!\!\rightarrow \neg Y) = 1$	$p(X >\!\!- Y) = 1$

1-4-4 Systematik

Wir stellen hier ausgewählte Relatoren im obigen Schema vor, vom „Null-Welt-Relator" bis zum „Vier-Welt-Relator"; der Name richtet sich danach, in *wie vielen Welten* ein Relator (bzw. die Relation) als gültig gilt.

Beim „Null-Welt-Relator" (Antilogator) und „Vier-Welt-Relator" (Tautologator) habe ich schon angemerkt, dass es keine echten Relatoren sind.

Besonders der *Antilogator* ist problematisch, zwei Interpretationen sind bei ihm möglich:

• a + b + c + d > 0
Dann gilt $p(X \perp Y) = 0/a+b+c+d = 0$. Dies ist keine Kontradiktion, so wie $\neg(X \perp Y)$ keine Kontradiktion ist (sondern eine Tautologie). Erst $p(X \perp Y) = 1$ ist eine Kontradiktion.

• a + b + c + d = 0
Eine *Division durch 0* ist in der Mathematik *nicht definiert*. Somit gilt:

$p(X \perp Y) = 0/a+b+c+d = 0/0$ = undefiniert.
$p(X \perp Y) = 1$ ist dann konktradiktorisch *und* undefiniert.

Ich bevorzuge die erste Lösung, weil a + b + c + d > 0 eine *generelle Bedingung* ist, die für alle Relatoren gilt und selbst bei der Kontradiktion aufrechterhalten bleiben sollte.

1-4-4-1 NULL-WELT-RELATOR

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \perp Y$	$\neg(X \perp Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \perp Y) = 1$	$p(X \perp Y) = 0$
Formel	$\frac{0}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{0}{a+b+c+d} = 0$
Gegen-Relation	$p(X \top Y) = 0$	$p(X \top Y) = 1$
	(Kontradiktionen)	(Tautologien)

1-4-4-2 EIN-WELT-RELATOREN

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \wedge Y$ (Konjunktion)	$\neg(X \wedge Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \wedge Y) = 1$	$p(X \wedge Y) = 0$
Formel	$\frac{a}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{a}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$a > 0, b + c + d = 0$	$a = 0, b + c + d > 0$
Gegen-Relation	$p(X \mid Y) = 0$	$p(X \mid Y) = 1$

Für die anderen 1-Welt-Relatoren $X -\!\!< Y$, $X >\!\!- Y$ und $X \nabla Y$ gilt Entsprechendes.

1-4-4-3 ZWEI-WELT-RELATOREN

Der wichtige 2-Welt-Relator $\leftrightarrow$ (Äquivalentor) wird an anderer Stelle behandelt.

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \rfloor Y$ (Präpension)	$\neg(X \rfloor Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \rfloor Y) = 1$	$p(X \rfloor Y) = 0$
Formel	$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$a + b > 0, c + d = 0$	$a + b = 0, c + d > 0$
Gegen-Relation	$p(X \rceil Y) = 0$	$p(X \rceil Y) = 1$

1-4-4-4 DREI-WELT-RELATOREN

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \mid Y$ (Exklusion)	$\neg(X \mid Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \mid Y) = 1$	$p(X \mid Y) = 0$
Formel	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 0$
Bedingungen	$b + c + d > 0, a = 0$	$b + c + d = 0, a > 0$
Gegen-Relation	$p(X \wedge Y) = 0$	$p(X \wedge Y) = 1$

Andere 3-Welt-Relatoren wie $X \rightarrow Y$ und $X \leftarrow Y$ werden an anderer Stelle besprochen.

1-4-4-5 VIER-WELT-RELATOR

Hier gibt es nur *einen* Relator, den *Tautologator* $\top$, der wie gesagt im eigentlichen Sinn kein Relator ist (obwohl er von manchen Logikern als Junktor aufgestellt wird).

	Deterministisch	*Nullistisch*
Aussagen-Logik	$X \top Y$	$\neg(X \top Y)$
Quantitäts-Logik	$p(X \top Y) \equiv 1$	$p(X \top Y) = 0$
Formel	$\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} \equiv 1$	$\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 0$
Gegen-Relation	$p(X \perp Y) \equiv 0$	$p(X \perp Y) = 1$
	(Tautologien)	(Kontradiktionen)

Diese Auflistung zeigt, dass der *Tautologator* nicht mit den anderen Relatoren gleichzusetzen ist. Ja sie zeigt, dass es wenig sinnvoll ist, überhaupt einen solchen Relator aufzustellen. Tautologien werden vielmehr durch alle 14 anderen Relatoren (ohne Antilogator) gebildet.

1-4-5 Erweiterungen

In den Erweiterungen geht es um die (implizite) *intensionale* Quantität logischer Strukturen, vor allem von Aussagen- und Prädikaten-Logik. Dabei muss aber zunächst – zur Abgrenzung – auf die *extensionale* Quantität eingegangen werden (Genaueres in der „Integralen Logik“).

1-4-5-1 EXTENSIONALE QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

In der *quantitativen Aussagen-Logik* geht es darum zu zeigen, dass ein, scheinbar nur *qualitativer*, aussagen-logischer Ausdruck wie $X \rightarrow Y$ *implizit* eine *quantitative Struktur* besitzt, die man also in Zahlen *angeben* kann.

Es sind – wie beschrieben – verschiedene quantitative Deutungen für $X \rightarrow Y$ möglich, vor allem die folgenden zwei (wobei allerdings in beiden Fällen der *Wert* $p = 1$ beträgt):

1) funktional: In *allen* Fällen gilt, wenn X dann Y.
2) relational: *alle* X sind Y.

Diese zweite Deutung bevorzuge ich hier und ihr gilt die folgende Übersicht.

Übersicht: Extensionale Quantität in der Aussagen-Logik (allgemein)

normale Sprache	quantitative Sprache	Aussagen-Logik	Quantitäts-Logik	quantitativ allgemein
alle X sind Y	100% der X sind Y	$X \rightarrow Y$	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$p(\Phi) = 1$
alle X sind nicht Y	0% der X sind Y	$\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$p(\Phi) = 0$

1-4-5-2 INTENSIONALE QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

Die Logik zielt primär auf die *extensionale* Quantität, man kann aber auch eine (implizite) *intensionale* Quantität angeben. Es ist die Quantität des *Prädikats*, üblicherweise die Quantität einer *Eigenschaft*. Z. B. fragt man: „*Zu welchem Grad* ist dieser Mensch oder sind alle Menschen klug?“ bzw. „Zu welchem Grad besitzt der Mensch die *Eigenschaft* Klugheit?“

Hier geht es darum, wie sich die *intensionale* Quantität (aussagen-)logischer Strukturen bestimmen lässt. Dabei gehe ich von folgender Entsprechung aus:

extensional	intensional	allgemein:
alle	vollständig	$p = 1$
alle nicht	vollständig nicht	$p = 0$

So kommt man zur *Übersicht: Intensionale Quantität in der Aussagen-Logik*

normale Sprache	quantitative Sprache	Aussagen-Logik	Quantitäts-Logik	quantitativ allgemein
X ist *vollständig* Y	X ist zu 100% Y	$[X \rightarrow Y]$	$p[X \rightarrow Y] = 1$	$p[\Phi] = 1$
X ist *gar nicht* Y	X ist zu 0% Y	$\neg[X \rightarrow Y]$	$p[X \rightarrow Y] = 0$	$p[\Phi] = 0$

1-4-5-3 INTENSIONALE QUANTITATIVE PRÄDIKATEN-LOGIK

Anders als bei der *Aussagen-Logik* gibt es hier keine *eindeutige implizite* Quantität, die nur *explizit* zumachen wäre.

Nehmen wir als Beispiel: Fx_i mit der Bedeutung „x_i besitzt die Eigenschaft F“ bzw. $\neg Fx$ mit der Bedeutung „x_i besitzt *nicht* die Eigenschaft F“.

Zwar haben wir es wiederum mit einem *2-wertigen* System zu tun, das nur zwischen „ja“ und „nein“ unterscheidet. Aber wie das Ja oder Nein quantitativ zu deuten ist, bleibt offen.

Vor allem folgende Deutungen kommen in Frage:

für: Fx_i	$p = 1, p > 0, p > 0{,}5, p > 0{,}75$
$\neg Fx_i$	$p = 0, p < 1, p < 0{,}5, p < 0{,}25$

Eine mögliche Interpretation ist also analog der Aussagen-Logik: $p = 1$ versus $p = 0$.

normale Sprache	quantitative Sprache	Prädikaten-Logik	Quantitäts-Logik	quantitativ allgemein
x_i ist *vollständig* F	x_i ist zu 100% F	$[Fx_i]$	$p[Fx_i] = 1$	$p[\Phi] = 1$
x_i ist *gar nicht* F	x_i ist zu 0% F	$\neg[Fx_i]$	$p[Fx_i] = 0$	$p[\Phi] = 0$

Ich halte aber eine andere Deutung für besser: $p[Fx_i] > 0$ für $[Fx_i]$ und $p[Fx_i] < 1$ für $\neg[Fx_i]$; denn nur so wird jeweils ein maximales Werte-Intervall umfasst, während $p[Fx_i] = 1$ und $p[Fx_i] = 0$ nur genau *einen* Wert erfassen. – Die *eckigen* Klammern p[ ] stehen für *intensionale* Quantität, im Gegensatz zu den *runden* Klammern p( ) für *extensionale* Quantität.

1-4-5-4 NORMALE SPRACHE

Hier stellt sich im Grunde dasselbe Problem wie in der Prädikaten-Logik: Wir verwenden oft qualitative Sätze, bei denen nur zwischen ja und nein unterschieden wird, z. B. ‚Peter ist intelligent' oder ‚Peter ist nicht intelligent'.

Zwar kann man sprachlich auch Hinzufügungen verwenden wie ‚Peter ist sehr intelligent' oder ‚Peter ist kaum intelligent', aber vielfach machen wir auch nur „ist-" oder „ist-nicht"-Aussagen. Wie sind die aber quantitativ zu deuten?

Z. B. ist das bei unserem Beispiel gar nicht trivial: ‚Peter ist intelligent' muss keineswegs heißen, Peter ist maximal intelligent ($p = 1$), aber $p > 0$ dürfte andererseits auch nicht reichen; vermutlich wäre in diesem Fall $p > 0{,}75$ die beste Deutung.

Meine These ist aber, dass in der normalen Sprache je nach Inhalt *unterschiedliche* quantitative Interpretationen angemessen sind. Nur einige Beispiele:

$p = 1$	Petra ist schwanger	$p = 0$	Petra ist nicht schwanger
$p = 1$	John ist gesund	$p < 1$	John ist nicht gesund
$p > 0$	Frank hat Schulden	$p = 0$	Frank hat keine Schulden
$p > 0{,}75$	Lisa ist intelligent	$p < 0{,}25$	Lisa ist nicht intelligent
$p > 0{,}5$	Ralf ist zufrieden	$p < 0{,}5$	Ralf ist nicht zufrieden

1-4-5-5 ABSCHLUSS: ÜBERSICHT ÜBER INTENSIONALE QUANTITÄT

• Aussagen-Logik

Für die Aussagen-Logik ist es sinnvoll, die *intensionale* Quantität entsprechend zur *extensionalen* (impliziten) Quantität zu deuten, d. h. alle/immer versus alle nicht/niemals.

vollständig: $p = 1$, vollständig nicht (bzw. gar nicht): $p = 0$.

Dies ist quantitativ gesehen zwar nur *konträr*, in einem *2*-wertigen System aber *kontradiktorisch*, da wenn nur zwei Werte gegeben, diese immer als kontradiktorisch gelten.

• Prädikaten-Logik

Hier ist es angemessen, eine quantitative Deutung vorzunehmen, die für alle möglichen Konkretisierungen offen ist und gültig bleibt.

Für [Fx] ist das p[Fx] > 0, dies umfasst die möglichen Werte > 0,5, > 0,75 und 1.

Für ¬[Fx] ist das p[Fx] < 1, dies umfasst als mögliche Werte < 0,75, < 0,5 und 0.

• Sprache

Die Sprache, die eben nicht formal, sondern inhaltlich konkret ist, verlangt in besonderer Weise, alle möglichen quantitativen Verhältnisse darzustellen. Daher ist es wohl angemessen, für die qualitative Unterscheidung „ ... besitzt die Eigenschaft" versus „ ... besitzt die Eigenschaft *nicht*" gar *kein generelles* Zahlenpaar anzugeben, sondern je nach Einzelfall zu interpretieren. Die bevorzugte Deutung ist aber: ja: $p > 0{,}75$, nein/nicht: $p < 0{,}25$.

1 – 5 QUANTITATIVE QUANTOREN-LOGIK

1-5-1 Einführung

1-5-1-1 QUANTITATIVE DEFINITION

In der Quantoren-Logik werden, wie bereits ausführlich dargestellt, normalerweise 4 Werte unterschieden: *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*. *Quantitative* Quantoren-Logik bedeutet soviel wie *quantifizierte* Quantoren-Logik, d. h. diese o. g. 4 Werte sollen nun quantitativ-numerisch bestimmt werden.

Und zwar sind *„alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht"* primär *relative* Größen (p), aus denen sich in begrenztem Umfang *absolute* Größen (q) ableiten lassen. Zur Darstellung relativer Größen bieten sich in erster Linie *Dezimalzahlen* an. Dabei sei noch einmal daran erinnert, dass hier prinzipiell gilt: $0 \leq p \leq 1$.

Man kann diese Werte aber auch *prozentual* oder durch einen *Bruch* bestimmen:

	Dezimal		Prozent	Bruch
1. alle	$p = 1$	$(p = 1{,}0)$	100%	n/n
2. alle nicht	$p = 0$	$(p = 0{,}0)$	0%	0/n
3. einige	$p > 0$	$(p > 0{,}0)$	> 0%	> 0/n
4. einige nicht	$p < 1$	$(p < 1{,}0)$	< 100%	< n/n

Damit bedeutet die (quantitative) *Quantoren-Logik* eine Erweiterung der (quantitativen) *Aussagen-Logik*, bei der nur zwischen „alle" und „alle nicht" unterschieden wird.

1-5-1-2 PRÄDIKATEN-LOGIK / ABSOLUTE VS. RELATIVE GRÖSSE

Ein Problem ist in diesem Fall die *Prädikaten-Logik*. Sie war als Modell eingeführt worden, das einerseits individuelle Aussagen erlaubt (z. B. Fx_i), die in der Quantoren-Logik nicht möglich sind, andererseits sollten sich *quantoren-logische* Relationen in *prädikaten-logische* übersetzen lassen, z. B. $\Lambda x(Fx) =_{df} Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n$.

Nun ist „alle" eine *relative* Größe (p), welche über die *absolute* Größe (q) nur aussagt, dass $q > 0$. Also: $p(F) = 1 \Rightarrow q(F) > 0$ bzw. $p(F) = 1 \Rightarrow q(F) \geq 1$. $p = 1$ und $q = 1$ dürfen dabei auf keinen Fall verwechselt werden.

Komplizierter ist es noch bei molekularen Aussagen mit *Implikation*: z. B. $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $p(F \rightarrow G) = 1$, z. B. „alle Menschen sind sterblich". Bei Verwendung der *normalen Implikation* ist für die Wahrheit von $p(F \rightarrow G) = 1$ nicht einmal notwendig, dass es überhaupt *einen* Menschen gibt; es darf nur kein Individuum x geben, für das gilt: Es ist Mensch und es ist nicht sterblich. Denn $p(F) = 0 \Rightarrow p(F \rightarrow G) = 1$.

Anders ist es dagegen bei „alle nicht": dieser Begriff umfasst zugleich präzise eine *absolute* wie eine *relative* Größe, prozentual also 0 oder 0%, was hier gleichbedeutend ist, denn: $q(F) = 0 \Leftrightarrow p(F) = 0\%$. Entsprechend gilt bei „einige": auch dieser Begriff umfasst zugleich eine *absolute* wie eine *relative* Größe, $q > 0$ und $p > 0\%$.

1-5-1-3 EINFACHE RELATIONEN / DEZIMAL-DARSTELLUNG

Als *einfache* Relationen haben wir solche eingeführt, in denen nur *ein* Prädikat-Ausdruck vorkommt und in denen nur der Gesamt-Relation ein Wahrheitswert zugewiesen wird, also z. B. Fx (extensional-intensional) oder $x \in F$ (rein extensional).

Wir sind bisher immer von 4 Werten in der (inklusiven) Quantoren-Logik ausgegangen: *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*. Nun kann man durch *zusätzliche Negationen* aus diesen 4 Werten 8 Werte machen. Z. B. wird so aus „alle nicht" der Ausdruck „nicht alle nicht". Geht man von 8 Werten aus und verwendet die Individuen-Variable x, so ergibt sich:

Alle x sind F	$\Lambda x(Fx)$	$p(F) = 1$
Alle x sind nicht F	$\Lambda x(\neg Fx)$	$p(\neg F) = 1$
Nicht alle x sind F	$\neg\Lambda x(Fx)$	$p(F) < 1$
Nicht alle x sind nicht F	$\neg\Lambda x(\neg Fx)$	$p(\neg F) < 1$
Einige x sind F	$Vx(Fx)$	$p(F) > 0$
Einige x sind nicht F	$Vx(\neg Fx)$	$p(\neg F) > 0$
Nicht einige x sind F	$\neg Vx(Fx)$	$p(F) = 0$
Nicht einige x sind nicht F	$\neg Vx(\neg Fx)$	$p(\neg F) = 0$

Wie im analytischen Teil genauer gezeigt werden wird, sind aber von den obigen 8 Relationen jeweils eine mit einer anderen *äquivalent*; daher mag man doch nur von 4 Grund-Relationen auszugehen. In einer *einfachen Formalisierung* kann man schreiben:

$\Lambda(X)$	$p(X) = 1$
$\Lambda(\neg X)$	$p(X) = 0$
$V(X)$	$p(X) > 0$
$V(\neg X)$	$p(X) < 1$

1-5-1-4 EINFACHE RELATIONEN / PROZENT

Anstelle der Dezimal-Darstellung kann man auch eine *Prozent-Darstellung* wählen, die näher an der normalen Sprache ist. Für „alle x sind F" sagt man: „100% aller x sind F":

Alle	100%
Alle nicht	0 %
Einige	mehr als 0% (> 0 %)
Einige nicht	weniger als 100 % (< 100%)

Den *Prozent-Wert* erhält man, wenn man den *Dezimal-Wert* mit 100 multipliziert.
Also z. B.: p = 1 x 100 = 100%, oder: p = 0,6 x 100 = 60%.

1-5-1-5 WAHRHEITSTAFEL

Hier beziehe ich mich auf den Punkt 1-2-2-4 über die Wahrheitstafel in der Quantoren-Logik. Für $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ hatte ich u. a. folgende Wahrheitstafel aufgestellt:

	$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda x(Gx)$	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	
1.	Λ	Λ	Λ	$\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
2.	Λ	$\neg\Lambda$	$\neg\Lambda$	$\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
3.	$\neg\Lambda$	Λ	Λ	$\neg\Lambda x(Fx) \wedge \Lambda x(Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
4.	$\neg\Lambda$	$\neg\Lambda$	Λ	$\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

Wie oben erläutert, gilt:

quantoren-logisch	quantitativ
Λ	$p = 1$
$\neg\Lambda$	$p < 1$

Insofern werden auch in der Wahrheitstafel die Quantoren durch *Zahlenwerte* ersetzt. Dabei bleibe ich hier bei den Buchstaben ‚F' und ‚G' (statt ‚X' und ‚Y'), weil so die Beziehung zur Quantoren-Logik sofort anschaulich ist. Es geht also um die Relation: $p(F \rightarrow G) = 1$

So ergibt sich für die folgende quantitativ-quantoren-logische Wahrheitstafel:

	p(F)	p(G)	$p(F \rightarrow G)$	Deutung
1.	1	1	1	$p(F) = 1 \wedge p(G) = 1 \Rightarrow p(F \rightarrow G) = 1$
2.	1	<1	<1	$p(F) = 1 \wedge p(G) < 1 \Rightarrow p(F \rightarrow G) < 1$
3.	<1	1	1	$p(F) < 1 \wedge p(G) = 1 \Rightarrow p(F \rightarrow G) = 1$
4.	<1	<1	1	$p(F) < 1 \wedge p(G) < 1 \longrightarrow p(F \rightarrow G) = 1$

Wenn man das in *Formeln* übersetzt, erhält man:

	$\frac{a+b}{a+b+c+d}$	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$
1.	1	1	1
2.	1	<1	< 1
3.	<1	1	1
4.	<1	<1	1

Diese Formel-Wahrheitstafel sei für die 2. Zeile erläutert:

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \qquad \text{d. h.: } a + b > 0,\ c + d = 0$$

$$\frac{a+c}{a+b+c+d} < 1 \qquad \text{d. h. : } b + d > 0$$

Daraus ergibt sich: b > 0 (weil d = 0). Somit folgt für die Konklusion:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1 \quad \text{(denn der Nenner n ist größer als der Zähler r)}$$

Auch für die 4. Zeile sei die Wahrheitstafel erläutert:

$$\frac{a+b}{a+b+c+d} < 1 \qquad \text{d. h.: } c + d > 0 \qquad \frac{a+c}{a+b+c+d} < 1 \qquad \text{d. h. : } b + d > 0$$

Daraus ergibt sich: es kann gelten b > 0 oder b = 0.

Aber nur wenn b = 0 ist die Konklusion $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ *streng* abzuleiten.

Daher gilt p(F) < 1 ∧ p(G) < 1 ⟶ p(F → G) = 1 nur *semi-analytisch*. Anders als bei der (quantitativen) aussagen-logischen *Wahrheitstafel* sind also bei der (quantitativen) quantoren-logischen Wahrheitstafel nur 3 Zeilen *strenge* Schlüsse, nicht alle 4.

Wenn man allerdings nicht von Λx(Fx → Gx) ausgeht, sondern von Λx(Fx) → Λx(Gx), das man als p(F) = 1 → p(G) = 1 *quantifiziert*, erhält man auch in der 4. Zeile einen gültigen Schluss: p(F) < 1 ∧ p(G) < 1 ⇒ p(F) = 1 → p(G) = 1. Denn p(F) = 1 → p(G) = 1 ist nur falsch, wenn p(F) = 1 ∧ p(G) < 1 (vgl. hierzu 1-2-2-4).

Selbstverständlich könnte man eine entsprechende Wahrheitstafel auch für Vx(Fx → Gx) bzw. p(F → G) > 0 aufstellen; dann stände p > 0 für V und p = 0 für ¬V. Dabei ergibt sich ebenfalls eine Wahrheitstafel mit *drei* strengen Schlüssen und *einem* semi-analytischen.

Erläuterung zum Unterschied von quantitativer Aussagen- versus Quantoren-Logik

– Aussagen-logisch gilt:

X → Y	p(X → Y) = 1
¬(X → Y)	p(X → Y) = 0

Es ist dies ein *2-wertiges* System, in dem es nur die Werte „ja" (p = 1) und „nein (p = 0) gibt. Damit gibt es auch nur *eine* Negation, nämlich ¬(X → Y).

– Quantoren-logisch gilt:

Λ(X → Y)	p(X → Y) = 1
Λ¬(X → Y)	p(X → Y) = 0
¬Λ(X → Y)	p(X → Y) < 1
¬Λ¬(X → Y)	p(X → Y) > 0

Dies ist ein *4-wertiges* System, in dem es *zwei* Negationen gibt. Λ¬ und ¬Λ (bzw. noch die doppelte Negation ¬Λ¬ als dritte Negation). Die *primäre*, *kontradiktorische* Negation ist aber: ¬Λ (nicht alle). Daher muss dieser Wert bzw. p < 1 auch in der Wahrheitstafel stehen.

1-5-2 Implikation

Die paradoxe Asymmetrie der *Existenz-Behauptung* von *All-Relationen* und Partikulär-Relationen zeigt sich in der *quantitativen* Form besonders deutlich (vgl. genauer Kap. 2):

• *All-Relation* („alle X sind Y"): Aus ihr folgt weder p(X) > 0 noch p(Y) > 0, also *keine Existenz-Behauptung*. p(X → Y) = 1 ist auch wahr, wenn p(¬X ∧ ¬Y) = 1 oder p(X) = 0.
• *Partikulär-Relation* („einige X sind Y"): bei der häufigsten Formalisierung p(X ∧ Y) > 0 gilt: Aus ihr folgt p(X) > 0 und p(Y) > 0, somit wird hier die *Existenz* von X wie Y behauptet.

1-5-2-1 MODELLE DER IMPLIKATION

Es lassen sich *verschiedene Modelle* der Verwendung der Implikation für *All- und Partikulär*-Relationen angeben, die später (in 1-5-4) noch diskutiert werden sollen. Am ehesten der Einteilung: „*alle*, *alle nicht*, *einige* und *einige nicht*" entspricht aber das folgende Modell:

alle:	p(X → Y) = 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}=1$	a + c + d > 0, b = 0
alle nicht:	p(X → Y) = 0	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}=0$	a + c + d = 0, b > 0
einige:	p(X → Y) > 0	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}>0$	a + c + d > 0, b ≥ 0
einige nicht:	p(X → Y) < 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}<1$	a + c + d < a + b + c + d

1-5-2-2 ALTERNATIVEN

Die Werte der Implikation können auch durch den Gegen-Relator >– dargestellt werden:

p(X → Y) = 1	p(X >– Y) = 0	$\frac{b}{a+b+c+d}=0$
p(X → Y) = 0	p(X >– Y) = 1	$\frac{b}{a+b+c+d}=1$
p(X → Y) > 0	p(X >– Y) < 1	$\frac{b}{a+b+c+d}<1$
p(X → Y) < 1	p(X >– Y) > 0	$\frac{b}{a+b+c+d}>0$

1-5-2-3 NEGATIONEN DER IMPLIKATION

p(X → ¬Y) = 1	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d}=1$
p(¬X → Y) = 1	$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}=1$
p(¬X → ¬Y) = 1	$\frac{a+b+d}{a+b+c+d}=1$

1-5-2-4 REPLIKATION

p(X ← Y) = 1	$\frac{a+b+d}{a+b+c+d}=1$	a + b + d > 0, c = 0
p(X ←Y) = 0	$\frac{a+b+d}{a+b+c+d}=0$	a + b + d = 0, c > 0

p(X ←Y) > 0 $\frac{a+b+d}{a+b+c+d} > 0$ a + b + d > 0, c ≥ 0

p(X ←Y) < 1 $\frac{a+b+d}{a+b+c+d} < 1$ a + b + d < a + b + c + d

1-5-2-5 ÄQUIVALENZ

p(X ↔ Y) = 1 $\frac{a+d}{a+b+c+d} = 1$ a + d > 0, b + c = 0

p(X ↔Y) = 0 $\frac{a+d}{a+b+c+d} = 0$ a + d = 0, b + c > 0

p(X ↔Y) > 0 $\frac{a+d}{a+b+c+d} > 0$ a + d > 0, b + c ≥ 0

p(X ↔Y) < 1 $\frac{a+d}{a+b+c+d} < 1$ a + d < a + b + c + d

1-5-3 Positiv-Implikation

1-5-3-1 BEVORZUGTES MODELL

1. alle X sind Y p(X *→ Y) = 1 $\frac{a}{a+b} = 1$
2. alle X sind nicht Y p(X *→ Y) = 0 $\frac{a}{a+b} = 0$
3. einige X sind Y p(X *→ Y) > 0 $\frac{a}{a+b} > 0$
4. einige X sind nicht Y p(X *→ Y) < 1 $\frac{a}{a+b} < 1$

1-5-3-2 ALTERNATIVE

Bei der *Positiv-Implikation* gilt (bei der primären Interpretation) wie bereits dargestellt:

p(X *→ Y) = 0 ⇔ p(X *→ ¬Y) = 1

und entsprechend. So kann man auch anders schreiben:

1. alle X sind Y p(X *→ Y) = 1 $\frac{a}{a+b} = 1$

2. alle X sind nicht Y p(X *→ ¬Y) = 1 $\frac{b}{a+b} = 1$

3. einige X sind Y	p(X *→ Y) > 0	$\frac{a}{a+b} > 0$
4. einige X sind nicht Y	p(X *→ ¬Y) > 0	$\frac{b}{a+b} > 0$

Die Gleichsetzung von $\frac{a}{a+b} = 0$ mit $\frac{b}{a+b} = 1$ (und entsprechend) setzt allerdings voraus, dass gilt: a + b > 0.

1-5-3-3 POSITIV-REPLIKATION

1. alle Y sind X	p(X ←* Y) = 1	$\frac{a}{a+c} = 1$
2. alle Y sind nicht X	p(X ←* Y) = 0	$\frac{a}{a+c} = 0$
3. einige Y sind X	p(X ←* Y) > 0	$\frac{a}{a+c} > 0$
4. einige Y sind nicht X	p(X ←* Y) < 1	$\frac{a}{a+c} < 1$

1-5-3-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

1. alle X sind Y / alle Y sind X	p(X *↔ Y) = 1	$\frac{a}{a+b+c} = 1$
2. alle X sind nicht Y / alle Y sind nicht X	p(X *↔ Y) = 0	$\frac{a}{a+b+c} = 0$
3. einige X sind Y / einige Y sind X	p(X *↔ Y) > 0	$\frac{a}{a+b+c} > 0$
4. einige X sind nicht Y / einige Y sind nicht X	p(X *↔ Y) < 1	$\frac{a}{a+b+c} < 1$

1-5-3-5 VERGLEICH ZWISCHEN POSITIV-IMPLIKATION UND IMPLIKATION

	Implikation		*Positiv-Implikation*	
alle:	p(X → Y) = 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$	p(X *→ Y) = 1	$\frac{a}{a+b} = 1$
alle nicht:	p(X → Y) = 0	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$	p(X *→ Y) = 0	$\frac{a}{a+b} = 0$

einige:	p(X → Y) > 0	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$	p(X *→ Y) > 0	$\frac{a}{a+b} > 0$
einige nicht:	p(X → Y) < 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$	p(X *→ Y) < 1	$\frac{a}{a+b} < 1$

1-5-4 Systematik

Hier will ich die 5 *Modelle*, die in 1-2-4 vorgestellt wurden, in ihrer *quantitativen* Form darstellen. Die Diskussion dieser Modelle wurde bereits dort geführt und wird im analytischen Teil noch einmal aufgegriffen. Ich schreibe die logischen Gleichungen hier mit der *Individuenvariable ,*x' (und mit den Prädikatvariablen ‚F' und ‚G') weil damit eine bessere Vergleichbarkeit mit den quantoren-logischen Relationen gegeben ist, also z. B. p(Fx → Gx) = 1, entsprechend Λx(Fx → Gx). Bei Verwendung von ‚x' müsste man genau z. B. folgendermaßen übersetzen: ‚alle x, denen die Eigenschaft F zukommt, kommt auch die Eigenschaft G zu'. Vereinfachend schreibe ich aber wieder ‚alle F sind G' und entsprechend. Natürlich könnte man anstatt p(Fx → Gx) = 1 auch einfacher p(X → Y) = 1 u. ä. schreiben.

1-5-4-1 MODELL 1: IMPLIKATION

1. alle F sind G	p(Fx → Gx) = 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$
2. alle F sind nicht G	p(Fx → Gx) = 0	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$
3. einige F sind G	p(Fx → Gx) > 0	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$
4. einige F sind nicht G	p(Fx → Gx) < 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$

1-5-4-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G	p(Fx → Gx) = 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$
2. alle F sind nicht G	p(Fx → ¬Gx) = 1	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$
3. einige F sind G	p(Fx → Gx) > 0	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$
4. einige F sind nicht G	p(Fx → ¬Gx) > 0	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} > 0$

1-5-4-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G p(Fx ∧ Gx) = 1 $\frac{a}{a+b+c+d} = 1$

2. alle F sind nicht G p(Fx ∧ ¬Gx) = 1 $\frac{b}{a+b+c+d} = 1$

3. einige F sind G p(Fx ∧ Gx) > 0 $\frac{a}{a+b+c+d} > 0$

4. einige F sind nicht G p(Fx ∧ ¬Gx) > 0 $\frac{b}{a+b+c+d} > 0$

1-5-4-4 MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

1. alle F sind G p(Fx → Gx) = 1 $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$

2. alle F sind nicht G p(Fx → ¬Gx) = 1 $\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

3. einige F sind G p(Fx ∧ Gx) > 0 $\frac{a}{a+b+c+d} > 0$

4. einige F sind nicht G p(Fx ∧ ¬Gx) > 0 $\frac{b}{a+b+c+d} > 0$

1-5-4-5 MODELL 5: POSITIV-IMPLIKATION

1. alle F sind G p(Fx *→ Gx) = 1 $\frac{a}{a+b} = 1$

2. alle F sind nicht G p(Fx *→ Gx) = 0 $\frac{a}{a+b} = 0$

3. einige F sind G p(Fx *→ Gx) > 0 $\frac{a}{a+b} > 0$

4. einige F sind nicht G p(Fx *→ Gx) < 1 $\frac{a}{a+b} < 1$

Diese 5 Modelle wurden bereits diskutiert und werden im analytischen Teil erneut behandelt.

1-5-5 Erweiterungen

1-5-5-1 INKLUSIV / EXKLUSIV

Ich hatte in 1-2 unterschieden zwischen *inklusiver* und *exklusiver* Quantoren-Logik. Diese Unterscheidung bezieht sich auf den *Partikulär-Quantor* (Existenz-Quantor). In 1-5 wurde bisher nur die inklusive Version vorgestellt, aber auch exklusiv kann man *quantifizieren*.

- inklusiv: *mindestens* einige (exakt: mindestens einer), formal: V, z. B. Vx(Fx)
  quantitativ:
  mindestens einige: $p > 0$
  mindestens einige *nicht*: $p < 1$
- exklusiv: *genau* einige, formal: $\exists$, z. B. $\exists x(Fx)$
  quantitativ:
  genau einige: $p > 0 \wedge p < 1$. Oder: $0 < p(\exists) < 1$. Z. B. $0 < p(Fx) < 1$
  genau einige *nicht*: hier ergibt sich der gleiche Wert, denn $p(\exists) = p(\exists\neg)$

Ich hatte darauf hingewiesen, dass man die quantoren-logischen Unterscheidungen: *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht* ergänzen kann durch „die meisten" und „die meisten nicht". Wie sind diese quantitativ zu bestimmen?

Auch hier kann man unterscheiden zwischen *inklusiv* und *exklusiv*:

Inklusiv		*exklusiv*
die meisten	$p > 0{,}5$	genau die meisten: $0{,}5 < p < 1$
die meisten nicht	$p < 0{,}5$	genau die meisten nicht: $0 < p < 0{,}5$

Für die „meisten nicht" kann man auch sagen: „die wenigsten".

- inklusiv: „die meisten F sind G" (genauer: „die meisten x, welche die Eigenschaft F haben, haben auch die Eigenschaft G"): $p(Fx \rightarrow Gx) > 0{,}5$.

- exklusiv: „genau die meisten F sind nicht G": $0 < p(Fx \rightarrow Gx) < 0{,}5$

Zu beachten ist, dass es hier zu Überschneidungen kommt zwischen „genau einige" und „genau die meisten" u. a., aber das ist legitim.

1-5-5-2 ÜBERSICHT

Die folgende Übersicht legt immer die *Implikation* zugrunde:
Sie geht aus von der Formel: $p(X \rightarrow Y) = r/n$.

Normale Sprache	Quantoren-Logik	Quantitativ	r
Alle X sind Y	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$r = n$
Alle X sind nicht Y	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$r = 0$
Einige X sind Y	$V(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) > 0$	$r > 0$
Einige X sind nicht Y	$V\neg(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) < 1$	$r < n$
Genau einige X sind Y	$\exists(X \rightarrow Y)$	$p(X \rightarrow Y) = > 0 \wedge < 1$	$0 < r < n$
Die meisten X sind Y	nicht belegt	$p(X \rightarrow Y) > 0{,}5$	$r > n/2$
Die wenigsten X sind Y	nicht belegt	$p(X \rightarrow Y) < 0{,}5$	$r < n/2$

„Alle X sind nicht Y" und „einige X sind Y" formalisiert man allerdings meistens anders. Ich habe die verschiedenen Modelle ja bereits diskutiert.

1-5-5-3 INTENSIONALE QUANTITÄT

Bei der *intensionalen* Quantität wurde quantoren-logisch unterschieden zwischen 4 Stufen.
Diesen werden jetzt quantitative Werte zugewiesen:

Extensional	Intensional	Prozent	Beispiel
Alle	vollständig	zu 100%	vollständig glücklich
Alle nicht	gar nicht	zu 0%	gar nicht glücklich (ganz unglücklich)
Einige	etwas	zu > 0 %	etwas glücklich
Einige nicht	etwas nicht	zu < 100%	etwas nicht glücklich (etwas unglücklich)

Alternativen zu ‚vollständig' sind: vollkommen, gänzlich, ganz, absolut
Alternativen zu ‚vollkommen nicht' sind: gar nicht (oder Konstruktionen mit ‚un')
Alternativen zu ‚etwas' sind: partiell, teilweise

1-5-5-4 INTENSIONALE QUANTITÄT – 6-WERTIG

Hier werden jetzt 2 Werte hinzugefügt: *überwiegend* und *überwiegend nicht*.
Andere Begriffe wären: *überdurchschnittlich* und *unterdurchschnittlich*.

Extensional	Intensional	Prozente	Beispiel
Die meisten	Überwiegend	Zu > 50%	Überwiegend glücklich
Die meisten nicht	überwiegend nicht	Zu < 50%	Überwiegend nicht glücklich

1-5-5-5 INTENSIONALE QUANTITÄT – EXKLUSIV

Ich habe bisher nur *inklusive* Quantitäten berücksichtigt. Jetzt werden auch *exklusive* Werte berücksichtigt (100% ist invariant gegenüber inklusiv/exklusiv)

Genau partiell	zu > 0%, < 100%	genau partiell glücklich
Genau partiell nicht	zu > 0%, < 100%	genau partiell unglücklich

Bei dem *exklusiven* (genau) „einige" gilt: wenn etwas für *genau einige* gilt, dann gilt es auch für *genau einige nicht*. So bei der *intensionalen* Entsprechung: wenn etwas *genau partiell* gilt, dann gilt es auch *genau partiell nicht*. Jemand, der genau partiell glücklich ist, der ist zu einem Prozentsatz zwischen 0% und 100% glücklich. Folglich ist er auch zwischen 0% und 100% nicht glücklich (unglücklich).

Wenn man den *6-wertigen* Ansatz nimmt, dann kommen noch hinzu:

Genau überdurchschnittlich: zu > 50%, < 100%
Genau unterdurchschnittlich zu > 0%, < 50%

Man erhält dann insgesamt folgende Werte:

- partiell: > 0, < 1
- partiell nicht: > 0, < 1
- unterdurchschnittlich: > 0, < 0,5
- durchschnittlich: 0,5
- überdurchschnittlich: > 0,5, < 1

2 LOGIK ANALYTISCHER RELATIONEN

ÜBERSICHT

2-1 Aussagen-Logik

Hier wird der Unterschied zwischen *synthetischen*, *analytischen* und *partiell analytischen* Relationen herausgearbeitet.

2-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

In diesem Punkt werden zuvorderst die verschiedenen Modelle für *All-Sätze* und *Partikulär-Sätze* auf ihre analytischen Eigenschaften geprüft und danach bewertet. Außerdem wird das *logische Quadrat* im Einzelnen vorgestellt. Dabei spielt auch die Übersetzung der *Quantoren-Logik* in *Prädikaten-Logik* eine wichtige Rolle.

2-3 Quantitative Logik

Hier gibt es eine wesentliche Erweiterung herkömmlicher logischer Gesetze durch Einführung *quantitativer Gesetze*.

2-4 Quantitative Aussagen-Logik

In diesem Unterkapitel werden die klassischen Gesetze der Aussagen-Logik in quantitativer Form dargestellt. Damit werden logische Schlüsse zu Rechenformeln. Es zeigt sich, dass sich so logische Schlüsse viel einfacher und präziser auf ihre Gültigkeit prüfen lassen.

2-5 Quantitative Quantoren-Logik

Die quantitative Quantoren-Logik stellt die quantoren-logischen Gesetze in numerischer Form vor. Es werden dabei auch auf der Quantoren-Logik basierende Modelle z. B. von *Modal-Logik* präsentiert, aber eben quantifizierte Modelle.

Jedes Unter-Kapitel ist wieder folgendermaßen unterteilt:

- Einführung
- Implikation
- Positiv-Implikation
- Systematik
- Erweiterungen

2 – 1 AUSSAGEN-LOGIK

2-1-1 Einführung

2-1-1-1 ANALYTISCHE RELATIONEN

Analytische Relationen (kurz *A-Relationen*) sind – *syntaktisch* gesehen – solche, bei denen auf beiden Seiten des *Relators* (partiell) gleiche Zeichen stehen. Auf die Definition analytischer Relationen bzw. Verknüpfungen bin ich schon in 0-5 eingegangen – und es wird an späterer Stelle, vor allem in 4-1, noch genauer darauf eingegangen werden.

Man kann unterscheiden:

- *Tautologien*
  Sie sind in *jeder* Welt wahr, man sagt auch L-wahr (*logisch* wahr). In der Wahrheitstafel steht nur + (plus = gültig) unter dem Junktor. Sie haben den Status von *Gesetzen*.

- *Kontradiktionen*
  Sie sind in *keiner* Welt wahr, also in jeder falsch, man sagt auch L-falsch. D. h. sie sind *widersprüchlich*. Es steht nur – (minus = ungültig) unter dem Junktor. Kontradiktionen sind natürlich weniger bedeutsam als Tautologien.

Eine herausragende Tautologie ist die *analytische Implikation* (= logische Folge oder Schluss), z. B.: $X \Rightarrow X \vee Y$ mit folgender Wahrheitstafel:

X	⇒	X	∨	Y
+	+	+	+	+
+	+	+	+	−
−	+	−	+	+
−	+	−	−	−

Man kann die Wahrheitstafel auch abkürzen, so dass man nur den – entscheidenden – Werteverlauf unter dem Zentral-Relator, hier ⇒, horizontal angibt.

$X \Rightarrow X \vee Y$ (+ + + +)

Eine wichtige *Kontradiktion* ist die folgende Konjunktion:

$X\,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ (– – – –)

Eine analytische Relation enthält meistens mehrere (synthetische) Relationen, die durch einen *Zentral-Relator* verbunden sind, z. B.:

$X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$

$X \wedge Y$ und $X \vee Y$ sind hier die *synthetischen* Relationen, der Zentral-Relator ist ⇒. *Synthetische* Relatoren (∧) *binden* mehr als *analytische* (⇒), so braucht man $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$ nicht mit Klammern als $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y)$ zu schreiben. Meint man aber eine ganz andere Relation, etwa $X\,{}^{+}\!\wedge^{--} (Y \Rightarrow X \vee Y)$, so muss man natürlich Klammern setzen.

Eine *Tautologie* (mit 2 Variablen) hat *immer* den Wahrheitswerteverlauf + + + +, unabhängig davon, mit welchem Relator sie konstruiert wird, z. B.:

$$X \wedge Y \Rightarrow X,\ X \Leftrightarrow X,\ X\ {}^{+}{\vee}^{+}\ \neg X \text{ usw.}$$

Eine Kontradiktion (mit 2 Variablen) hat ebenfalls *immer* den Wahrheitswerteverlauf – – – –, gleichgültig, mit welchem Relator sie konstruiert wird, z. B.:

$$X\ {}^{-}{\wedge}^{-}\ \neg X,\ (X \wedge Y)\ \not\Leftrightarrow\ \neg(X \wedge Y),\ (X\ {}^{+}{\vee}^{+}\ \neg X) \not\Rightarrow (X\ {}^{-}{\wedge}^{-}\ \neg X) \text{ usw.}$$

2-1-1-2 PARTIELL ANALYTISCHE RELATIONEN

Als Zwischen-Kategorie zwischen synthetischen und analytischen Relationen habe ich die *partiell-analytischen* oder *semi-analytischen* Relationen eingeführt (kurz *PA-Relationen*). Man könnte anstatt von 'partiell-analytisch' auch von 'partiell synthetisch' sprechen. Semi-analytische Relationen sind zugleich *semi-tautologisch* (dazu später). Ein Beispiel ist:

$$X \vee Y \longrightarrow X\ \ (+ + - +)$$

Auch bei partiell-analytischen Relationen gilt *syntaktisch*, dass links und rechts vom Relator (partiell) gleiche Zeichen stehen. Aber anders als die analytischen Relationen sind partiell analytische Relationen nicht tautologisch und nicht kontradiktorisch, d. h. in der Wahrheitstafel unter dem *Zentral-Relator* kommt sowohl + wie – vor. Z. B. folgende Wahrheitstafel:

(X	→	Y)	⟶	Y
+	+	+	+	+
+	–	–	+	–
–	+	+	+	+
–	+	–	–	–

Ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen *analytischen* und *partiell analytischen* Relationen ist: Eine Tautologie oder Kontradiktion hat immer den *gleichen Wahrheitsverlauf*. Dagegen gibt es (bei 2 Variablen) 14 mögliche Wahrheitsverläufe von semi-analytischen Relationen, entsprechend den 14 möglichen Wahrheitsverläufen von *synthetischen* Relationen.

2-1-1-3 NOTATION

Ich fasse hier die Notationen für Relatoren aber noch einmal systematisch zusammen.

Implikative Relationen formalisiere ich immer durch einen *Pfeil* (wie weit verbreitet):

Tautologien durch einen *Doppelpfeil*
Kontradiktionen durch den *durchgestrichenen Doppelpfeil*
semi-analytische Relationen durch den *verlängerten Pfeil*

• *Implikation*	• *Äquivalenz*	• *Replikation*
Tautologie: $\Rightarrow$	Tautologie: $\Leftrightarrow$	Tautologie: $\Leftarrow$
Kontradiktion: $\not\Rightarrow$	Kontradiktion: $\not\Leftrightarrow$	Kontradiktion: $\not\Leftarrow$
Semi-analytisch: $\longrightarrow$	Semi-analytisch: $\longleftrightarrow$	Semi-analytisch: $\longleftarrow$

Andere Tautologien formalisiere ich durch ++ über dem Junktor, z. B. ${}^{+}{\vee}^{+}$
Kontradiktionen durch – – über dem Junktor, z. B. ${}^{-}{\wedge}^{-}$
Semi-analytische Relationen durch + – über dem Junktor, z. B. ${}^{+}{><}^{-}$.

• *Konjunktion*	• *Disjunktion*
Tautologie: ${}^{+}{\wedge}^{+}$	Tautologie: ${}^{+}{\vee}^{+}$
Kontradiktion: ${}^{-}{\wedge}^{-}$	Kontradiktion: ${}^{-}{\vee}^{-}$
Semi-analytisch: ${}^{+}{\wedge}^{-}$	Semi-analytisch: ${}^{+}{\vee}^{-}$

2-1-1-4 SYNTHETISCHE WAHRHEITSTAFEL

Man kann unterscheiden zwischen *Wahrheitstafeln* für *synthetische* und *analytische* Relationen (kurz *synthetische* bzw. *analytische Wahrheitstafel*). Ich behandele auch die synthetische Wahrheitstafel genauer erst hier im Kapitel über Analytik, weil man für die Deutung jeder Wahrheitstafel *analytische* Relationen benötigt. Im Detail und mit ausführlichen Erläuterungen für Experten gehe ich auf die Wahrheitstafeln in meinem Buch „Integrale Logik“ ein.

1) *Normale Wahrheitstafel*

Ein Beispiel für die *normale* Wahrheitstafel einer *synthetischen* Relation (Implikation) ist:

X	→	Y
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	+	−

Die (normale) Wahrheitstafel enthält verschiedene *Deutungsmöglichkeiten* bzw. Schlussmöglichkeiten. Die wichtigsten Deutungen sind die *konjunktive* und die *implikative* Deutung. Die konjunktive Deutung ist die *zentrale*, die normale Wahrheitstafel enthält implizit bereits die *konjunktive* Deutung. Die implikative Deutung ist bei *Implikationen* bzw. Schlüssen zusätzlich heranzuziehen, in der quantitativen Logik ist sie besonders wichtig.

Ich zeige diese Deutungsmöglichkeiten auf und entwickle daraus verschiedene Formen von Wahrheitstafeln. Das verdeutliche ich anhand der Implikation $X \rightarrow Y$.

2) *Konjunktive (Deutung der) Wahrheitstafel*

Bei der konjunktiven Deutung wird aus der *Konjunktion* der beiden Einzel-Komponenten X,Y auf die Gesamt-Relation, z. B. $X \rightarrow Y$ geschlossen.

Die konjunktive Interpretation verdeutlicht folgende Form der Wahrheitstafel:

	X	Y	X → Y
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	−	+	+
4.	−	−	+

Noch deutlicher wird die konjunktive Deutung in der folgenden Darstellung, die man daher auch *konjunktive Wahrheitstafel* nennen kann. Die *Zeilen* der Wahrheitstafel werden zusätzlich durch *Relationen* formalisiert; dabei wird ein − (minus) in der Wahrheitstafel hier in ein ¬ (Negator) übersetzt:

	X ∧ Y ⇒ X → Y				
1.	+ + + + +	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$ $X \rightarrow Y$	+ − − − ⇒ + − + +	
2.	+ − − + −	$X \wedge \neg Y$	$\Rightarrow$ $\neg(X \rightarrow Y)$	− + − − ⇒ − + − −	(⇔)
3.	− − + + +	$\neg X \wedge Y$	$\Rightarrow$ $X \rightarrow Y$	− − + − ⇒ + − + +	
4.	− − − + +	$\neg X \wedge \neg Y$	$\Rightarrow$ $X \rightarrow Y$	− − − + ⇒ + − + +	

Hier wird aus den *Konjunktionen* $X \wedge Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$ und $\neg X \wedge \neg Y$ auf die Gesamt-Relation $X \rightarrow Y$ geschlossen. Und zwar handelt es sich um *strenge* Schlüsse (⇒).

Der konjunktiven Deutung entspricht folgende *konjunktive Definition* von $X \rightarrow Y$:

$X \rightarrow Y \Leftrightarrow_{df} (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$ bzw. :

$X \rightarrow Y \ \Leftrightarrow_{df} \neg(X \wedge \neg Y)$

Also wird $X \rightarrow Y$ definiert durch *Disjunktion* der Konjunktionen, die $X \rightarrow Y$ analytisch implizieren. Bzw. durch die Negation der Konjunktion, welche die Kontradiktion von $X \rightarrow Y$ ist.

3) *Implikative (Deutung der) Wahrheitstafel*

Sie bietet sich nur bei *implikativen* Beziehungen wie $X \rightarrow Y$ an, ist dort aber von besonderer Bedeutung. Hier wird von dem *Vorderglied* (z. B. X) auf das *Nachglied* (z. B. Y) gefolgert.

Imp	$X \rightarrow Y$		
1.	$+ \ + \ +$	$X \rightarrow Y$	$(+ - + +)$
2.	$+ \ - \ -$	$X \rightarrow \neg Y$	$(- + + +)$
3.	$- \ \pm \ +$	$\neg X \rightarrow Y$	$(+ + + -)$
4.	$- \ \pm \ -$	$\neg X \rightarrow \neg Y$	$(+ + - +)$

Ich schreibe die *implikative Wahrheitstafel* mit einem ‚Imp' am Anfang. Wie man aber in der *normalen* Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$ sieht, folgt in der 3. Zeile Y aus $\neg X$ und in der 4. Zeile $\neg Y$ aus $\neg X$ (und in beiden Fällen gilt $X \rightarrow Y$ als wahr). Daher wird in der *implikativen* Wahrheitstafel an beiden Stellen ein $\pm$ (für „möglich") unter den Relator geschrieben. Das liest sich wie folgt (3. Zeile): ‚Wenn X falsch ist, dann ist es *möglich* ($\pm$), dass Y wahr ist'.
Dies ähnelt der *Positiv-Implikation*, bei der die 3. und 4. Stelle „nicht definiert" sind.

Der implikativen Darstellung entspricht folgende Bestimmung der Implikation:

- $(X \rightarrow Y) \ \Leftrightarrow \ \neg(X \rightarrow \neg Y) \vee \neg(\neg X \rightarrow Y) \vee \neg(\neg X \rightarrow \neg Y)$
- $\neg(X \rightarrow Y) \ \Leftrightarrow \ (X \rightarrow \neg Y) \wedge (\neg X \rightarrow Y) \wedge (\neg X \rightarrow \neg Y)$

4) Verstärkte implikative (Deutung der) Wahrheitstafel

Bei der *konjunktiven* Deutung der Wahrheitstafel erhält man ausschließlich *analytische* Relationen wie $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$. Bei der *implikativen* Deutung sind dagegen wie beschrieben alle vier aufgeführten Relationen der Wahrheitstafel *synthetisch*, nämlich:

$X \rightarrow Y, X \rightarrow \neg Y, \neg X \rightarrow Y, \neg X \rightarrow \neg Y$

Und bei synthetischen Relationen gilt: Wenn man nur weiß, dass X gültig (+) ist, kann man noch nichts über Y aussagen, es kann gültig sein oder ungültig (und entsprechend). Erst indem man die Gültigkeit bzw. Ungültigkeit der *Gesamt-Relation*, also $X \rightarrow Y$, mit berücksichtigt, kann man aus X (in gewissen Grenzen) auf Y schließen. Man kann dies eine *verstärkte implikative* Deutung bzw. verstärkte implikative Wahrheitstafel nennen.

Imp	X	$\wedge$	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y		
1.	+	+	+	+	+	$X \wedge (X \rightarrow Y) \quad \Rightarrow \ Y$	$(+ + + +)$
2.	+	−	−	+	−	$X \ \wedge \neg(X \rightarrow Y) \ \Rightarrow \ \neg Y$	$(+ + + +)$
3.	−	−	+	$\pm$	+	$\neg X \ \wedge \ (X \rightarrow Y) \longrightarrow \ Y$	$(+ + + -)$
4.	−	−	+	$\pm$	−	$\neg X \ \wedge \ (X \rightarrow Y) \longrightarrow \ \neg Y$	$(+ + - +)$

$X \wedge (X \rightarrow Y) \ \Rightarrow Y$ ist eine *Tautologie*, nämlich der *Modus ponens*. Dies bedeutet aber nicht, dass auch alle *einzelnen* Relationen Tautologien sind. So ist in der 3. bzw. 4. Zeile kein eindeutiger Schluss möglich. Denn in der 3. Zeile wird von $\neg X \wedge (X \rightarrow Y)$ auf Y geschlossen, in der 4. Zeile vom gleichen $\neg X \wedge (X \rightarrow Y)$ auf $\neg Y$.

Damit können hier keine strengen Schlüsse vorliegen, sondern es gilt nur:
$\neg X \ \wedge \ (X \rightarrow Y) \longrightarrow \ Y$ bzw. $\neg X \ \wedge \ (X \rightarrow Y) \longrightarrow \ \neg Y$. So schreibe ich hier wieder $\pm$.

5) *Weitere mögliche Schlüsse aus der Wahrheitstafel*

- Schluss von X auf $X \rightarrow Y$

  $\neg X \Rightarrow X \rightarrow Y$
- Schluss von Y auf $X \rightarrow Y$

  $Y \Rightarrow X \rightarrow Y$
- Schluss von X auf Y (dies geht nur, wenn man $X \rightarrow Y$ hinzunimmt, vgl. oben)

  $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$

  $\neg(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow \neg Y$
- Schluss von Y auf X (dies geht nur, wenn man $X \rightarrow Y$ hinzunimmt)

  $(X \leftarrow Y) \wedge Y \Rightarrow X$

  $\neg(X \leftarrow Y) \wedge Y \Rightarrow \neg X$
- Schluss von $X \rightarrow Y$ auf X, Y

  Ein strenger Schluss von $X \rightarrow Y$ auf X, Y, $\neg X$ oder $\neg Y$ ist nicht möglich

  Aber es gilt: $\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow X$ und $\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$

2-1-1-5 ANALYTISCHE WAHRHEITSTAFEL

Die Wahrheitstafel einer (semi-)analytischen Relation nenne ich wie gesagt kurz '*analytische Wahrheitstafel'*. Grundsätzlich sind hier die gleichen Unterscheidungen möglich wie bei der synthetischen Wahrheitstafel. Ich nehme als Beispiel die Wahrheitstafel einer *semi-analytischen* Relation, weil die aussagekräftiger ist, und zwar $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$.

1) N*ormale Wahrheitstafel*:

Zunächst die normale Wahrheitstafel von $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$:

(X	→	Y)	⟶	Y
+	+	+	+	+
+	–	–	+	–
–	+	+	+	+
–	+	–	–	–

Es sind wieder vor allem 2 Möglichkeiten der Deutung zu unterscheiden: die *konjunktive* und die *implikative* Interpretation der Wahrheitstafel.

2) *Konjunktive (Deutung der) Wahrheitstafel*

Bei einer Relation $\Phi \longrightarrow \Psi$ wird aus der *Konjunktion* von *Prämisse* (Φ) und *Schluss-Satz* (Ψ) auf die Gesamtrelation ($\Phi \longrightarrow \Psi$) geschlossen. Generell ist die konjunktive Interpretation aber bei jeder beliebigen Relation möglich. Bei $(X \vee Y)\ {}^{+}{>}{<}^{-}\ Y$ wird z. B. aus der Konjunktion von $X \vee Y$ und Y auf $(X \vee Y)\ {}^{+}{>}{<}^{-}\ Y$ geschlossen.

Die konjunktive Interpretation demonstriert folgende *konjunktive Wahrheitstafel:*

	$(X \rightarrow Y)$	$\wedge$	Y	$\Rightarrow$	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	
1.	+	+	+	+	+	$(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
2.	–	–	–	+	+	$\neg(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
3.	+	+	+	+	+	$(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
4.	+	–	–	+	–	$(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$

Grundsätzlich wäre zwar auch eine andere Kombination denkbar, nämlich: $\neg(X \rightarrow Y) \wedge Y$.

Aber die ist *kontradiktorisch* und somit in der Wahrheitstafel nicht enthalten, die Wahrheitstafel berücksichtig eben nur die *möglichen* Kombinationen. Das ist bei der *analytischen* Wahrheitstafel anders als bei der *synthetischen*, bei der *alle* Kombinationen bzw. Welten vertreten sind (wobei synthetisch allerdings *alle* Kombinationen *möglich* sind).

3) *Implikative (Deutung der) Wahrheitstafel*
Hier wird bei einer (semi)analytischen Relation $\Phi \longrightarrow \Psi$ aus der Prämisse (Φ) auf den Schluss-Satz (Ψ) geschlossen. Es wird also gefragt: Wenn die Prämisse (Φ) wahr ist, ist dann auch der Schluss-Satz (Ψ) wahr usw.? Diese Deutung ist nur bei *implikativen* Relationen wie $\rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow$ u. ä. relevant, dort aber besonders wichtig.

Bei *(semi)analytischen* Relationen ist es möglich, allein aus der Prämisse (Φ) in gewissem Ausmaß auf den Schluss-Satz (Ψ) zu schließen, anders als bei den *synthetischen* Relationen: dort ist wie beschrieben ein Schluss nur möglich, wenn man die Gesamt-Relation $\Phi \rightarrow \Psi$ mit berücksichtigt.

Als Beispiel zunächst wieder *der* semi-analytische Schluss $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$.

Imp	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y	
1.	+	±	+	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
2.	−	+	−	$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$
3.	+	±	+	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
4.	+	±	−	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$

In der 1. (bzw. 3.) und 4. Zeile hier wird einmal von $X \rightarrow Y$ auf Y und einmal auf $\neg Y$ geschlossen, somit können diese Schlüsse nur *partiell analytisch* sein. Daher wird hier in der Wahrheitstafel unter dem $\longrightarrow$ wieder ± für „möglich" eingesetzt.
Es gilt:

+ entspricht $\Rightarrow$ tautologisch (notwendige Folge)
± entspricht $\longrightarrow$ semi-analytisch (mögliche Folge)
− (wäre Kontradiktion, das kann hier unter dem Zentral-Relator nicht vorkommen)

4) *Verstärkte implikative Deutung der Wahrheitstafel*
Hier wird noch berücksichtigt, ob die Gesamtrelation ($\Phi \longrightarrow \Psi$) wahr oder falsch ist. D. h. es wird aus der Prämisse Φ und der Gesamtrelation $\Phi \longrightarrow \Psi$ auf die Konklusion Ψ geschlossen. So ergeben sich in allen Fällen *strenge* Schlüsse.

Nehmen wir als Beispiel zunächst wieder den *semi-analytischen Schluss* $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$. Hier wird also noch die Gesamtrelation $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ als *Verstärkung* hinzugefügt (oder aus anderer Sicht wird die Prämisse $X \rightarrow Y$ hinzugefügt).

Die *verstärkte implikative Wahrheitstafel* mit sämtlich *tautologischen* Relationen lautet:

Imp	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$	$\wedge$	$(X \rightarrow Y)$	$\Rightarrow$	Y	
1.	+	+	+	+	+	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$
2.	+	−	−	+	−	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \wedge \neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$
3.	+	+	+	+	+	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$
4.	−	−	+	+	−	$\neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$

5) *Funktionen der Wahrheitstafel*
Die primäre Funktion der Wahrheitstafel ist, die *Wahrheitsbedingungen* einer Relation bzw. eines Relators, eines Satzes oder einer Aussage aufzuzeigen. Dabei ist zu unterscheiden:

• *konjunktive* Wahrheitstafel: sie zeigt die Wahrheitsbedingungen des *Gesamt-Satzes* (z. B.

$X \rightarrow Y$) auf, in Abhängigkeit von der *Konjunktion* von Vorder-Satz (X) und Nach-Satz (Y).
• *implikative* Wahrheitstafel: sie zeigt (z. B. bei $X \rightarrow Y$) die Wahrheitsbedingungen des *Nach-Satzes* (Y) auf, in Abhängigkeit vom Vorder-Satz (X).
• *verstärkte implikative* Wahrheitstafel: sie zeigt (z.B. bei $X \rightarrow Y$) die Wahrheitsbedingungen des *Nach-Satzes* (Y) auf, in Abhängigkeit von Vorder-Satz (X) und Gesamt-Satz ($X \rightarrow Y$).

Speziell die *synthetische* Wahrheitstafel hat noch folgende *Funktionen*:
Erstens dient die Wahrheitstafel dazu, die *Relatoren zu definieren*.
Zweitens erlaubt sie, für einen realen, empirischen Sachverhalt die treffende Relation zu finden. Hat man z. B. den Sachverhalt bzw. die Menge von Sachverhalten X: „es regnet", Y: „die Strasse ist nass", und untersucht, in welchen Kombinationen (die in der Wahrheitstafel aufgeführt sind) diese Sachverhalte auftreten, wird man z. B. als zutreffende Relation herausfinden: „Es regnet → die Strasse ist nass".

Speziell die *analytische* Wahrheitstafel hat folgende Aufgaben:
den *logischen Zusammenhang* zwischen zwei Relationen herauszufinden, also vor allem zu prüfen, ob
- eine *Tautologie* vorliegt (nur + unter dem Zentral-Relator)
- eine *Kontradiktion* vorliegt (nur – unter dem Zentral-Relator)
- eine *semi-analytische* Verbindung vorliegt (+ und – unter dem Zentral-Relator).

2-1-2 Implikation

2-1-2-1 WAS IST EIN SCHLUSS?
Was macht eine *tautologische Implikation*, also einen *logischen Schluss* wesentlich aus?
Hier greifen wir zurück auf zwei bereits eingeführte Modelle (vgl. vor allem 0-4):
1) *aussagen-logischer* Ansatz
2) *mengen-theoretischer* Ansatz

Das erläutern wir anhand des folgenden Schlusses $X \wedge Y \Rightarrow Y$ mit seiner Wahrheitstafel:

	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	–	+	–
3.	–	+	+
4.	–	+	–

1) *aussagen-logischer Ansatz*
Aussagen-logisch gilt für einen Schluss: Wenn die Prämisse (hier $X \wedge Y$) wahr ist, dann muss auch der Schluss-Satz (hier Y) wahr sein.
Generell ist für die Aussagen-Logik prototypisch, dass sie *wahrheitswert-funktional* bestimmt ist. D. h. die Wahrheit (oder Falschheit) eines Satzes ist eine *Funktion* der Wahrheit (oder Falschheit) eines anderen Satzes bzw. mehrerer anderer Sätze. Dies bezeigt sich besonders bei der *Implikation* bzw. dem *Schluss*: Z. B. ist bei $X \wedge Y \Rightarrow Y$ die Wahrheit von Y eine Funktion der Wahrheit von $X \wedge Y$. Aber diese Wahrheits-Funktionalität gilt generell für die Aussagen-Logik. Allgemeine Formalisierung bzw. Formulierung eines strengen Schlusses wäre: $\Phi \Rightarrow \Psi$, d. h.: ‚Wenn Φ wahr ist, dann ist Ψ logisch notwendig wahr'.

Wir können weiter bestimmen: Ein *logischer Schluss* ist eine *Implikation*, die ihn allen Welten wahr ist (es kommt nur + unter dem Zentral-Relator vor).

Wir können aber zusätzlich alle möglichen Konjunktionen aus Prämisse und Konklusion *disjunktiv* zusammenfassen, gemäß der Definition (wie sie im Abschnitt über die Wahrheitstafel eingeführt wurde). Dann erhalten wir:

$$[X \wedge Y \Rightarrow Y] \Leftrightarrow [(X \wedge Y) \wedge Y] \vee [\neg(X \wedge Y) \wedge \neg Y] \vee [\neg(X \wedge Y) \wedge Y]$$

2) *mengen-theoretischer Ansatz*

Mengen-theoretisch könnte man als Bedeutung des Schlusses $X \wedge Y \Rightarrow Y$ formulieren: Y ist logisch gesehen *Teilmenge* von $X \wedge Y$.
Hier gilt im Einzelnen:
– Bei einem Schluss ist die Konklusion (Schluss-Satz) bereits in der Prämisse *enthalten*.
– Genauer: Bei einem Schluss ist die *Information* der Konklusion in der *Information* der Prämisse enthalten.
– Definition: Ein Schluss ist eine *Implikation*, bei der die Information der Konklusion bereits in der Information der Prämisse enthalten ist.

Dies ist andererseits ja auch die primäre Definition von *analytisch*: dass das Nachglied schon im Vorderglied enthalten ist.

Dies ist bei dem Schluss $X \wedge Y \Rightarrow Y$ besonders augenfällig: Y ist bereits in $X \wedge Y$ enthalten. Allerdings ist z. B. bei dem Schluss $X \Rightarrow X \vee Y$ die Konklusion $X \vee Y$ *logisch* genauso in der Prämisse X enthalten (obwohl das optisch anders aussieht). Entscheidend für den Bestimmung des *Informationsgehaltes* einer aussagen-logischen Relation ist die Menge der Welten, in denen die Relation *ungültig* (–) ist.

Im obigen Beispiel $X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist laut Wahrheitstafel die Prämisse in der 2., 3. und 4. Zeile bzw. Welt ungültig (wobei die 2. Welt und die 4. Welt übereinstimmen, die Detailunterschiede sind hier nicht relevant). Die Konklusion Y ist dagegen nur in der 2. und 4. Welt ungültig. Insofern ist die Menge der Welten, in den Y ungültig ist, ein *Teilmenge* der Welten, in denen $X \wedge Y$ ungültig ist. Anders gesagt, der *Informationsgehalt* von Y ist eine Teilmenge des Information von $X \wedge Y$.

Mit Begriffen der *Informationstheorie* kann man auch sagen: Ein logischer Schluss ist *redundant* – oder spezifischer: Beim Schluss ist die Konklusion in Bezug auf die Prämisse *redundant*. Nun muss man damit allerdings vorsichtig sein, denn dies klingt so, als sei ein Schluss gewissermaßen *überflüssig*.

Schlüsse bringen für uns aber durchaus *neue* Erkenntnisse. Denn wir vermögen oft (subjektiv) in einer *Gesamt-Information* nicht die für uns relevante *Teil-Information* zu erkennen; erst wenn wir sie logisch ableiten, isolieren, wird sie uns bewusst. Darauf verweist auch der Begriff der *Deduktion*, der logischen Ableitung.

2-1-2-2 TAUTOLOGIE

Man kann bei der *analytischen Implikation* zweierlei behandeln:

- Gesetze der Implikation, z. B.: $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \leftarrow \neg Y)$
- Gesetze, in denen eine analytische Implikation vollzogen wird, z. B.: $X \wedge Y \Rightarrow Y$

Im ersten Beispiel geht es um eine analytische *Äquivalenz*, aber zwischen Implikationen. Im zweiten Fall geht es zwar um eine analytische *Implikation*, aber auf der Basis einer Konjunktion. Beides kommt zusammen z. B. in: $(X \rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow X)$.

Generell gilt:

- Die Implikation ist immer gültig, wenn das *Vorderglied ungültig* ist: $- \Rightarrow \ldots$
- Die Implikation ist immer gültig, wenn das *Nachglied gültig* ist: $\ldots \Rightarrow +$
- Natürlich kann das auch zusammenkommen, nämlich: $- \Rightarrow +$

Zusammenfassend haben wir also 3 Fälle: $- \Rightarrow -,\ - \Rightarrow +,\ + \Rightarrow +$

So ergibt sich z. B.:

$$- - - - \quad \Rightarrow \quad - - - + \quad \Rightarrow \quad - - + + \quad \Rightarrow \quad - + + + \quad \Rightarrow \quad + + + +$$

Anders gesagt: Die Implikation ist nur dann *ungültig*, wenn das *Vorderglied gültig* und das *Nachglied ungültig* ist. (Im Systematik-Teil wird das im Einzelnen dargestellt.)

Ein Beispiel für die Wahrheitstafel einer *Implikations-Tautologie* ist:

(X	→	Y)	∧	X	⇒	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	−	+	+	−
−	+	+	−	−	+	+
−	+	−	−	−	+	−

Wichtige *Gesetze*, eine Auswahl:

• *1 Variable*:

Reflexivität $X \Rightarrow X$

Reductio ad absurdum $X \rightarrow \neg X \Rightarrow \neg X$ (es gilt auch $\Leftrightarrow$)

• *2 Variablen*:

Modus (ponendo) ponens $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$

Modus tollendo tollens $(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg X$

Modus ponendo tollens $(X >< Y) \wedge X \Rightarrow \neg Y$

Modus tollendo ponens $(X >< Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y$
$(X \vee Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y$

Abtrennungs-Regel $X \wedge Y \Rightarrow Y, X \wedge Y \Rightarrow X$

Simplifikations-Regel $X \leftrightarrow Y \Rightarrow X \rightarrow Y$

Paradoxie $\neg X \Rightarrow X \rightarrow Y$

• *3 Variablen*:

Transitivität $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \Rightarrow X \rightarrow Z$
$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow \neg Z) \Rightarrow X \rightarrow \neg Z$
$(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \Rightarrow X \leftrightarrow Z$

2-1-2-3 KONTRADIKTION UND NEGATION

Eine Implikation kann nur dann *kontradiktorisch* sein, wenn das *Vorderglied eine Tautologie* und das *Nachglied eine Kontradiktion* ist.

Tautologie $\nRightarrow$ Kontradiktion

In diesem Fall ist also die analytische Gesamt-Relation bereits aus zwei *analytischen* Relationen zusammengesetzt, z. B.:

$$
\begin{array}{ccccc}
(X & {}^{+}\vee^{+} \neg X) & \not\Rightarrow & (X & {}^{-}\wedge^{-} \neg X) \\
 & + & - & - & \\
 & + & - & - & \\
 & + & - & - & \\
 & + & - & - &
\end{array}
$$

Diese scharfe Forderung bedingt, dass Folgen, die man eigentlich für *kontradiktorisch* halten müsste, es doch nicht sind, z. B.:

$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg(X \rightarrow Y) : - + - -$

$\neg(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \rightarrow Y) : + - + +$

Wenn man also aus der Implikation auf ihre *Negation* schließt (und umgekehrt), ergibt sich keine Kontradiktion, sondern nur eine *semi-analytische* Relation. Und obwohl die beiden obigen Relationen logisch gleichwertig sind, hat der eine Schluss 3+, der andere nur 1+. Das ist von unserem normalen Sprach- und Logikverständnis her wenig plausibel.

Wohl noch problematischer ist, dass auch folgende Schlüsse *nicht kontradiktorisch* sind:

$X \longrightarrow \neg X\text{:}\ \ - - + +$

$\neg X \longrightarrow X\text{:}\ \ + + - -$

Partiell kann man dieser Paradoxie mit der *negativen Folge* begegnen: $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$

z. B.: $X >< Y \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$

Da die *Kontradiktion* bei der normalen Implikation extrem eingeschränkt und damit fast unbrauchbar ist, spielt die *Folge mit Negation* als Alternative eine wichtige Rolle.

Wichtig ist auch die *Negation des strengen Schlusses*: $\Phi \neg\Rightarrow \Psi$

$\Phi \neg\Rightarrow \Psi$ soll bedeuten: Φ impliziert nicht streng (tautologisch) Ψ, sondern nur partiell.

Ψ folgt daher *nicht notwendig* aus Φ.

$\Phi \neg\Rightarrow \Psi$ kann somit für $\Phi \longrightarrow \Psi$ stehen.

$\Phi \neg\Rightarrow \Psi$ darf man nicht gleichsetzen mit ${}^{-}\neg^{-}(X \Rightarrow X)$, das ist ja eine Kontradiktion.

$\Phi \neg\Rightarrow \Psi$ kann man keine eindeutige Wahrheitstafel zuordnen, sondern nur sagen: die Wahrheitstafel enthält nicht ausschließlich + und nicht ausschließlich –.

2-1-2-4 SEMI-ANALYTISCHE IMPLIKATION

Semi-analytische Relationen können unterschiedlich nahe an der *Tautologie* oder *Kontradiktion* stehen.

$X \vee Y \longrightarrow Y \quad (+ - + +)$

$X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y \quad (+ - - +)$

$X \mid Y \longrightarrow X \wedge Y \quad (+ - - -)$

Man könnte unterscheiden zwischen:

- *unechten* semi-analytischen Schlüssen

z. B. $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$. Unecht, denn der umgekehrte Schluss, die Replikation, ist ein *streng* analytischer Schluss: $X \vee Y \Leftarrow X \wedge Y$

- *echten* semi-analytischen Schlüssen

z. B. $X \wedge Y \longrightarrow X \wedge \neg Y \quad (- + + +)$

Hier ist die Replikation auch eine semi-analytische Folge:

$X \wedge Y \longleftarrow X \wedge \neg Y$ (+ − + +)

2-1-2-5 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Replikation* sind nicht viele Gesetze ausgewiesen, allerdings kann man die umgekehrten Gesetze der *Implikation* verwenden.

Gesetze der Replikation

$X \Leftarrow X$

$(X \leftarrow Y) \Leftarrow X$

$(X \leftarrow Y) \Leftarrow X \wedge Y$

$(X \vee Y) \Leftarrow X \wedge Y$

$X \Leftarrow (X \leftarrow Y) \wedge Y$

Für die Äquivalenz sind viele Gesetze ausgewiesen, hier nur eine kleine Auswahl:

Gesetze der Äquivalenz

Reflexivität der Äquivalenz	$X \Leftrightarrow X$
Definition der Äquivalenz	$(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y)$
Kontraposition Implikation	$X \rightarrow Y \Leftrightarrow (\neg X \leftarrow \neg Y)$
Kontraposition Äquivalenz	$X \leftrightarrow Y \Leftrightarrow (\neg X \leftrightarrow \neg Y)$
De Morgan	$X \wedge Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)$ $X \vee Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y)$
Vertauschungsgesetz	$X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X$

2-1-3 Positiv-Implikation

Die *analytischen Eigenschaften* der *Positiv-Implikation* sind recht komplex bzw. kompliziert, daher habe ich auch noch keine vollständige der Theorie der Positiv-Implikation entwickelt, hier steht weitere Forschungsarbeit aus. Für die Positiv-Implikation ergeben sich z. T. die gleichen, z. T. aber auch andere Gesetze wie für die klassische Implikation.

Es lassen sich 2 Modelle der (analytischen) Positiv-Implikation unterscheiden. Ich nenne sie: *Existenz-Modell* und *Nicht-Existenz-Modell*.

- *Existenz-Modell*

Hier gilt: $(X \mathbin{*}\!\!\rightarrow Y) \;*\!\!\Leftrightarrow\; \neg(X \mathbin{*}\!\!\rightarrow \neg Y)$ Bzw.: $(X \mathbin{*}\!\!\rightarrow \neg Y) \;*\!\!\Leftrightarrow\; \neg(X \mathbin{*}\!\!\rightarrow Y)$

- *Nicht-Existenz-Modell*

Hier gelten die obigen tautologischen Äquivalenzen nicht, sondern nur die *semi-analytischen Äquivalenzen* bzw. *analytischen Implikationen*.

Nämlich: (X *→ Y) *←→ ¬(X *→ ¬Y). Oder: (X *→ Y) *⇒ ¬(X *→ ¬Y)
Bzw.: (X *→ ¬Y) *←→ ¬(X *→ Y) Oder: (X *→ ¬Y) *⇒ ¬(X *→ Y)

Existenz meint in diesem Fall: Aus der *Negation* von X *→ ¬Y folgt logisch X *→ Y und daraus folgt X. Somit ist die *Existenz* von X gewährleistet. Bei dem Nicht-Existenz-Modell ist das beides nicht gegeben. Allerdings gilt der Schluss auf X nicht aussagen-logisch, sondern nur *quantoren-logisch* bzw. *quantitativ* (denn es gilt nur $p > 0$, nicht $p = 1$).

Ich werde hier das *Existenz-Modell* vorstellen. Im Punkt 2-4, über quantitative Aussagen-Logik, werde ich auch das Nicht-Existenz-Modell vorstellen und die beiden Modelle miteinander vergleichen, was auch mit *unterschiedlichen Wahrheitstafeln* verbunden ist. Denn nur im quantitativen Ansatz ist eine verständliche Unterscheidung der beiden Modelle möglich.

2-1-3-1 TAUTOLOGIE

Es gelten z. B. folgende Gesetze:

X *⇒ X
X ∧ Y *⇒ Y
(X *→ Y) ∧ X *⇒ Y

Der Schluss *Modus ponens*: (X *→ Y) ∧ X *⇒ Y soll genauer erklärt werden.
Zunächst Beweis durch *verkürzte* Wahrheitstafel:

(X	*→	Y)	∧	X	*⇒	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	−	+		

Die Lücke in der Wahrheitstafel ergibt sich, weil unter der Konjunktion ∧ in der 2. Zeile ein Minus (–) steht, so dass eben bei der Positiv-Implikation kein Wert daraus folgt. Denn die Positiv-Implikation ist ja nur für die Fälle definiert, in denen das *Vorderglied gültig* (+) ist; sonst wird bei der *verkürzten Wahrheitstafel* eine Lücke gelassen (vgl. aber unten).

Verwendet man die *vollständige Wahrheitstafel* mit □, ergibt sich keine Lücke. Grundsätzlich ist die vollständige Wahrheitstafel vorzuziehen, auch wenn sie optisch unübersichtlicher ist; in bestimmten Fällen können sich bei der verkürzten Wahrheitstafel Fehler bzw. nicht entscheidbare Wahrheitswerte ergeben.

Modus ponens: vollständige Wahrheitstafel:

(X	*→	Y)	∧	X	*⇒	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	−	+	□	−
−	□	+	−	−	□	+
−	□	−	−	−	□	−

Wie schon in erläutert: Wenn links von *→ ein Minus (–) in der Wahrheitstafel unter dem Relator steht, dann gilt *→ als *nicht definiert* und erhält in dieser Zeile ein □.

Definition einer Tautologie der Positiv-Implikation: Eine Positiv-Implikation, bei der *syntaktisch* gesprochen rechts und links von *→ ganz oder teilweise gleiche Zeichen stehen, und bei der außer + nur □ unter dem Zentral-Relator steht, gilt als *analytisch* und wird mit dem Doppelpfeil *⇒ gekennzeichnet. Dies im Unterschied zur *normalen* analytischen Implikation, bei der in der Wahrheitstafel nur + vorkommt.

Es stellt sich die Frage, inwieweit sich Positiv-Relationen mit anderen Relatoren verknüpfen lassen. Verwendet man die *verkürzte* Wahrheitstafel, so ist das nicht besonders problematisch, da in dieser Wahrheitstafel nur + (entsprechend w = wahr) und – (entsprechend f = falsch) vorkommen, für welche die normalen Relatoren definiert sind. Verwendet man dagegen die *vollständige* Wahrheitstafel der Positiv-Implikation, dann treten dort Zeichen wie □ auf. Zunächst ist das Zeichen □ für „nicht definiert" (und auch das noch einzuführende Zeichen ‚?' = unbestimmt) nur für die Positiv-Implikation bzw. Positiv-Replikation/Positiv-Äquivalenz definiert. In bestimmten Fällen sind aber auch bei anderen Relatoren wie $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ usw. Verknüpfungen mit □ möglich. Z. B. weiß man bei der *normalen Implikation*, dass sie *immer* gültig ist, wenn links – (minus) steht, sie muss also auch gültig sein, wenn links – (minus) und rechts □ steht. Oder die *Konjunktion* ist immer ungültig, wenn *ein* – (minus) steht, d. h. sie muss auch ungültig sein, wenn – und □ kombiniert sind.

Dieser Fall ist bei der obigen Wahrheitstafel von $(X \ast\!\rightarrow Y) \wedge X \ast\!\Rightarrow Y$ gegeben. Die Reihe unter $\wedge$ kann man im obigen Beispiel vollständig ausfüllen, obwohl 2x links □ steht. Denn rechts steht dort jeweils minus (–), und die Konjunktion ist ja immer negativ, auch wenn nur *ein* Minus da steht.

2-1-3-2 KONTRADIKTION

Für die Positiv-Implikation gibt es folgende 3 Möglichkeiten der Kontradiktion:

- Tautologie $\ast\!\not\Rightarrow$ Kontradiktion: $^{+}\Phi^{+} \ast\!\not\Rightarrow {}^{-}\Psi^{-}$
- Position $\ast\!\not\Rightarrow$ Negation: $\Phi \ast\!\not\Rightarrow \neg\Phi$
- Relation $\ast\!\not\Rightarrow$ negative Folge: $\Phi \ast\!\not\Rightarrow \neg\Psi$

Dabei ist vorab zu sagen:

Die Positiv-Implikation ist *kontradiktorisch*, wenn unter dem Zentral-Relator außer – (ungültig) nur □ (nicht definiert) steht.

Entsprechend war ja die *Tautologie* der Positiv-Implikation bestimmt worden:

Die Positiv-Implikation ist *tautologisch*, wenn unter dem Zentral-Relator außer + (gültig) nur □ (nicht definiert) steht.

Dabei ist festzuhalten: Aus der Negation von □ folgt wiederum □. D. h. in der Wahrheitstafel:

wenn $\Phi \ast\!\rightarrow \Psi$, dann $\neg(\Phi \ast\!\rightarrow \Psi)$

□ □

- Tautologie $\ast\!\not\Rightarrow$ Kontradiktion

$^{+}\Phi^{+} \ast\!\not\Rightarrow {}^{-}\Psi^{-}$

z. B. $(X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \ast\!\not\Rightarrow (X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$

Dies entspricht der Kontradiktion bei der normalen Implikation.

- Position $\ast\!\not\Rightarrow$ Negation

$\Phi \ast\!\not\Rightarrow \neg\Phi$, z. B.: $X \ast\!\not\Rightarrow \neg X$

Die Positiv-Implikation ist also nicht nur kontradiktorisch, wenn das Vorderglied tautologisch und das Nachglied kontradiktorisch ist. Sondern auch, wenn das *Nachglied die Negation des Vorderglieds* bedeutet. Ebenso ist die Umkehrung kontradiktorisch, also: $\neg\Phi \ast\!\not\Rightarrow \Phi$.

(X	→	Y)	*⇏	¬(X	→	Y)
+	+	+	–	– +	+	+
+	–	–	□	+ +	–	–
–	+	+	–	– –	+	+
–	+	–	–	– –	+	–

• Relation $*\not\Rightarrow$ (negative) Folge: $\Phi *\not\Rightarrow \neg\Psi$ bzw. $\Phi *\not\Rightarrow \Psi$
Es gibt aber noch eine *dritte* Form der Kontradiktion, die noch weniger Voraussetzungen hat. Hier liegt also eine Kontradiktion vor, obwohl Φ und $(\neg)\Psi$ nicht äquivalent sind.

Z. B. $X \wedge Y *\Rightarrow \neg(X >< Y)$, entsprechend $X \wedge Y *\not\Rightarrow X >< Y$

Zusammenfassend ergeben sich z. B. folgende Unterschiede zur normalen Implikation:

Normale Implikation	*Positiv-Implikation* (Kontradiktionen)
$X \longrightarrow \neg X$: $- - + +$	$X *\not\Rightarrow \neg X$: $- -$ □ □
$\neg X \longrightarrow X$: $+ + - -$	$\neg X *\not\Rightarrow X$: □ □ $- -$

Das heißt, bei der *normalen Implikation* gilt: Wenn X sein kontradiktorisches Gegenteil ¬X impliziert, dann ist diese Implikation nicht kontradiktorisch. Für das Umgekehrte gilt das Gleiche. Dagegen ist bei der *Positiv-Implikation* der Schluss von X auf ¬X kontradiktorisch. Diese Bestimmung der Positiv-Implikation entspricht viel mehr unserer Intuition und unserem Sprachverständnis als die Verhältnisse bei der normalen Implikation.

Ein weiter wesentlicher Unterschied zwischen der normalen Implikation und der Positiv-Implikation ist:

Bei der *normalen Implikation* ist aus der Kontradiktion *alles* abzuleiten:

$- - - -$ $\Rightarrow$ alles

Bei der *Positiv-Implikation* ist aus der Kontradiktion *nichts* abzuleiten:

$- - - -$ $*\!\!\longrightarrow$ nichts

Denn die Positiv-Implikation ist in diesem Fall *vollständig undefiniert*, sie hat also nur undefinierte Felder, d. h. man bekommt immer einen Wahrheitsverlauf □ □ □ □.

Denn aus – (ungültig) folgt ja bei der Positiv-Implikation immer □: nicht definiert.

2-1-3-3 SEMI-ANALYTISCHE RELATION

Bei der *normalen semi-analytischen* Implikation kommt in der Wahrheitstafel unter dem Relator sowohl plus (+) wie minus (–) vor. Bei der *semi-analytischen Positiv-Implikation* ist das komplizierter: Es muss „plus" (+) vorkommen, es muss „minus" (–) oder „unbestimmt" (?) vorkommen, es kann „undefiniert" (□) vorkommen.

Zur Erläuterung: ich hatte gesagt, wenn *links* vom Pfeil „minus" (–) steht, dann wird die Positiv-Implikation nicht als gültig, sondern als *nicht definiert* verstanden (□), denn „wenn X, dann Y" ist eben nur für die Fälle positiv definiert, in denen X auch gültig ist.

Hinzufügen kann man: Wenn *links* „nicht definiert", also □ steht, dann gilt diese Kombination auch als *nicht definiert*. Außer es folgt ein – auf das □, dann gilt die Kombination als *unbestimmt*, wofür ich das *Frage-Zeichen* (?) verwende.

Auch wenn *links* „positiv" (+) steht und *rechts* „nicht definiert (□), gilt die Kombination als *unbestimmt* (?). Das „unbestimmt" (?) darf nicht verwechselt werden mit dem „nicht definiert" (□), bei „unbestimmt" kann man nicht entscheiden, ob die Relation, in der betreffenden logischen Welt, positiv oder negativ ist (zur Übersicht vgl. unten).

Aus Gründen der Einfachheit würde man gerne mit *einer* Zusatz-Kategorie, also „nicht definiert" oder „nicht bestimmt" auskommen. Aber es zeigt sich, dass man diese Unterscheidung benötigt. Denn wie oben beschrieben, gilt eine Positiv-Relation, mit nur + (oder nur + und □) als *tautologisch*. Wenn dagegen auch das ? für *unbestimmt* in der Wahrheitstafel unter dem Relator steht, dann ist die Relation nicht tautologisch oder kontradiktorisch, sondern nur *semi-analytisch*. Daher kommt man auch nicht immer mit der *verkürzten* Wahrheitstafel aus, weil dort z. B. der Unterschied zwischen □ (nicht definiert) und ? (nicht bestimmt) gar nicht erfasst wird. Das wird später, im quantitativen Teil, genauer gezeigt werden.

Ein Beispiel für eine *semi-analytische* Positiv-Implikation ist:

$\neg$(X *$\rightarrow$ Y)	*$\longrightarrow$	$\neg$(X $\rightarrow$ Y)
− + + +	□	− + + +
+ + − −	+	+ + − −
□ − □ +	?	− − + +
□ − □ −	?	− + + −

In der 3. und 4. Zeile muss unter dem Zentral-Relator*⟶ jeweils ? (unbestimmt) stehen, weil hier links □ und rechts − steht. Denn wenn man anstelle des ? auch ein □ setzen würde, wäre die Implikation ja *tautologisch* (□ + □ □). Wie man am besten im quantitativen Ansatz zeigen kann, ist das falsch. Nachfolgend eine Übersicht über die *wichtigsten Kombinationen*:

Φ	*$\rightarrow$	Ψ
+	+	+
+	−	−
+	?	□
−	□	+
−	□	−
−	□	□
□	□	+
□	?	−
□	□	□

Man könnte allerdings auch *andere* Definitionen vornehmen, beim heutigen Stand haben sich aber die obigen Festlegungen als am sinnvollsten erwiesen. Später wird gezeigt werden, dass bei einem anderen Modell der Positiv-Implikation, dem *Nicht-Existenz-Modell*, z. T. veränderte Definitionen erforderlich sind.

2-1-3-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

• Definition der Positiv-Implikation

Ich habe schon darauf hingewiesen, dass ich hier nur das *Existenz-Modell* der Positiv-Implikation vorstelle. Und in diesem Modell gilt:

(X *→ Y) *⇔ ¬(X *→ ¬Y)

¬(X *→ Y) *⇔ (X *→ ¬Y)

Diese Relationen kann man als *definierend* für die Positiv-Implikation ansehen. Die erste sei durch ihre Wahrheitstafel erläutert:

(X *→ Y)	*⇔	¬(X *→ ¬Y)
+ + +	+	+ + + − +
+ − +	□	− + − + −
− □ +	□	□ − □ − +
− □ −	□	□ − □ + −

Auch hier gibt es Unterschiede zur normalen Äquivalenz bzw. normalen Implikation.

Denn dies sind Äquivalenzen, die bei der Positiv-Implikation gelten und bei der Implikation nicht. So ergeben sich folgende Unterschiede:

Implikation:	$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow (X \rightarrow \neg Y)$	$(- + - -) \Rightarrow (- + + +)$
Positiv-Implikation:	$\neg(X *\!\!\rightarrow Y)\ *\!\!\Leftrightarrow\ (X *\!\!\rightarrow \neg Y)$	$(- + □ □) *\!\!\Leftrightarrow (- + □ □)$
Implikation:	$\neg(X \rightarrow \neg Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$	$(+ - - -) \Rightarrow (+ - + +)$
Positiv-Implikation:	$\neg(X *\!\!\rightarrow \neg Y)\ *\!\!\Leftrightarrow\ (X *\!\!\rightarrow Y)$	$(+ - □ □) *\!\!\Leftrightarrow (+ - □ □)$

Es gibt auch Äquivalenzen, die bei der normalen Implikation gelten, bei der Positiv-Implikation aber nicht. Z. B. gilt die *Kontraposition* $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \leftarrow \neg Y)$ bei Verwendung der Positiv-Implikation bzw. Positiv-Äquivalenz nicht streng analytisch, sondern ist ganz *undefiniert* (es sei denn, man nimmt eine besondere Variante der Positiv-Implikation an). Dies ist von großer Wichtigkeit, denn die Kontraposition spielt eine wesentliche Rolle.

$$(X *\!\!\rightarrow Y)\ *\!\!\longleftrightarrow\ (\neg X \leftarrow\!\! * \neg Y)$$

+	+	+	□	− +	□	− +
+	−	−	□	− +	−	+ −
−	□	+	□	+ −	□	− +
−	□	−	□	+ −	+	+ −

Wie man sieht, ist die Kontraposition völlig *undefiniert* (bei einer anderen Interpretation ständen in der 1. und 4. Zeile ein ? statt □, was aber auch nichts Wesentliches änderte).

2-1-3-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Unterschiede von Normal-Implikation und Positiv-Implikation

- Implizierung von X

$(X \rightarrow Y) \longrightarrow X$	$(X *\!\!\rightarrow Y)\ *\!\!\longrightarrow X$	(+ □ ? ?)
$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow X$	$\neg(X *\!\!\rightarrow Y)\ *\!\!\longrightarrow X$	(□ + ? ?)

Die *normale Implikation* impliziert nicht die Gültigkeit (Existenz) der Prämisse (X), der Schluss ist nur semi-analytisch (+ + − −). *Paradoxerweise* impliziert aber die Negation der normalen Implikation die Gültigkeit von X. Auch bei der *Positiv-Implikation* wird in bejahter und negierter Form nicht die Gültigkeit von X impliziert, allerdings in gleicher Weise (im *quantitativen* Modell wird jedoch impliziert, dass $p(X) > 0$, nur nicht $p(X) = 1$, dazu später).

- Paradoxie der Implikation

$\neg X \Rightarrow X \rightarrow Y$ $\qquad$ $\neg X\ *\!\!\longrightarrow\ X *\!\!\rightarrow Y$ (□ □ ? ?)

Diese Paradoxie tritt bei der Positiv-Implikation nicht auf. Die Relation ist vollständig undefiniert bzw. unbestimmt.

- Negation

$X \longrightarrow \neg X$ (− − + +) $\qquad$ $X\ *\!\!\not\Rightarrow \neg X$ (− − □ □)

$\neg X \longrightarrow X$ (+ + − −) $\qquad$ $\neg X\ *\!\!\not\Rightarrow X$ (□ □ − −)

Diese beiden Relationen sind bei Verwendung der *normalen Implikation* semi-analytisch, liegen also zwischen analytisch und kontradiktorisch. Bei der *Positiv-Implikation* sind beide Relationen *kontradiktorisch*, was deutlich überzeugender ist.

Beziehungen zwischen Implikation und Positiv-Implikation:
Es sind vor allem 4 Relationen zwischen Implikation und Positiv-Implikation zu untersuchen:

- X *→ Y Positiv-Implikation X → Y
- X *→ Y Implikation X →Y
- X → Y Positiv-Implikation X *→ Y
- X → Y Implikation X *→ Y

• *Positiv*-Schluss von der Positiv-Implikation auf die Implikation: (X *→ Y) *⇒ (X → Y)
Hier liegt eine streng-analytische Positiv-Implikation, ein *strenger* Schluss vor. Denn außer dem + kommt nur das □ vor. Und in diesem Fall gilt die Relation als tautologisch.

(X *→ Y)	*⇒	(X → Y)
+ + +	+	+ + +
+ − −	□	+ − −
− □ +	□	− + +
− □ −	□	+ + −

• Schluss von der Positiv-Implikation auf die Implikation : (X *→ Y) ⇒ (X → Y)

(X *→ Y)	⇒	(X → Y)
+ + +	+	+ + +
+ − −	+	+ − −
− □ +	+	− + +
− □ −	+	+ + −

Auch bei der Verwendung der normalen Implikation erhält man einen *vollständigen* Schluss Obwohl in der 3. und 4. Zeile ein □ unter dem *→ steht (und die Implikation keine Deutung von □ beinhaltet), kann man ein + unter den Pfeil ⇒ setzen. Denn unter dem → steht in diesen Zeilen ebenfalls ein +. Und die Implikation hat ja immer den Wert +, wenn das Nachglied, also hier X → Y den Wert + hat, egal welchen Wert das Vorderglied hat.
Somit gilt: Ein *strenger Schluss* von der Positiv-Implikation auf die Implikation ist möglich.

• *Positiv*-Schluss von der Implikation auf die Positiv-Implikation:(X → Y) *⟶ (X *→ Y)

(X → Y)	*⟶	(X *→ Y)
+ + +	+	+ + +
+ − −	□	+ − −
− + +	?	− □ +
− + −	?	+ □ −

Der Schluss von der Implikation auf die Positiv-Implikation mittels der Positiv-Implikators ist nur *partiell-analytisch*. (Allerdings könnte man auch vertreten, dass hier ein *strenger* Schluss vorliegen muss, auf dieses sehr komplizierte Problem gehe ich aber nicht weiter ein.)

• Schluss von der Implikation auf die Positiv-Implikation $(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X *\!\!\rightarrow Y)$

$(X$	$\rightarrow$	$Y)$	$\longrightarrow$	$(X$	$*\!\!\rightarrow$	$Y)$
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	+	+	−	−
−	+	+	∅	−	□	+
−	+	−	∅	+	□	−

Hier ist gar kein Schluss möglich. Denn wie die Wahrheitstafel oben zeigt: in der 3. und 4. Zeile steht links unter dem $\rightarrow$ ein + und rechts unter dem $*\!\!\rightarrow$ ein □. Die *normale* Implikation ist aber gar nicht für □ definiert, insofern ist kein Schluss möglich, hierfür wähle ich das Symbol ∅.

2-1-4 Systematik

Es gibt (bei 2 Variablen) 16 bzw. 14 Relatoren, wenn man *Antilogator* und *Tautologator* nicht dazu zählt. So gibt es bei der Verknüpfung von zwei einfachen Relationen 16 x 16 x 16 = 4096 Kombinationen bzw. 14 x 14 x 14 = 2744 Kombinationen.

Z. B. $(X \wedge Y) \wedge (X \wedge Y)$. Für die drei $\wedge$ (bzw. anstelle) kann man eben 16 (bzw. 14) Relatoren einsetzen. Es gibt verschiedene *Darstellungs-Möglichkeiten*, vor allem die folgenden zwei:

- $(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\!\wedge^{-}\ (X \leftarrow Y)$: + − − +
  Hier wird anschließend der Wahrheitsverlauf der *Gesamtrelation* angegeben (in Klammern oder nicht). Dies ist vor allem sinnvoll bei *semi-analytischen* Relationen wie ${}^{+}\!\wedge^{-}$, denn bei tautologischen Relationen wie ${}^{+}\!\wedge^{+}$ lautet der Verlauf ja ohnehin immer + + + + und bei kontradiktorischen entsprechend − − − −.
- $(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\!\wedge^{-}\ (X \leftarrow Y)$ (+ − + +) ${}^{+}\!\wedge^{-}$ (+ + − +)
  Hier werden die Wahrheitsverläufe der Teil-Relationen, im Beispiel $X \rightarrow Y$ und $X \leftarrow Y$, jeweils gesondert dargestellt, zur besseren Übersichtlichkeit.

2-1-4-1 NULL+RELATOR

Hier kommt nur der *Antilogator* $\perp$ in Frage, der aber wie gesagt kein *echter* Relator ist.
$X \perp Y$ hat den Wahrheitsverlauf: − − − −

Eine Tautologie ist hier per definitionem ausgeschlossen, auch eine semi-analytische Relation. Gleichgültig, welche Relationen man mit dem Antilogator verbindet, es ergibt sich immer eine *Kontradiktion*.

Das hat vor allem für die Implikation eine paradoxe Auswirkung: Aus der Antilogie lässt sich jede beliebige Relation logisch ableiten, sogar eine *Kontradiktion*.

$$X \perp Y \Rightarrow X \wedge \neg X \ (+ + + +)$$

Bei der *Positiv-Implikation* ergibt sich dieses Problem nicht, denn ein solcher Schluss ist hier nicht definiert, weil die Positiv-Implikation bei ungültigem Vorderglied grundsätzlich nicht definiert ist.

2-1-4-2 EIN+RELATOREN

Hier geht es um die *Konjunktion* bzw. verwandte Relatoren X >– Y, X –< Y, $X \nabla Y$.

• Tautologie

Eine Tautologie der Konjunktion ist nur möglich, wenn zwei Tautologien verknüpft werden:

$(X \vee \neg X)\ {}^{+}\wedge^{+}\ \neg(X \wedge \neg X) \qquad (++++)\ {}^{+}\wedge^{+}\ (++++)$

• Kontradiktion

Eine Kontradiktion ist dann gegeben, wenn in jeder Welt mindestens einer der zu verbindenden Relationen ungültig (–) sind, z. B.:

$(X \wedge Y)\ {}^{-}\wedge^{-}\ (X \wedge \neg Y) \qquad (+---)\ {}^{-}\wedge^{-}\ (-+--)$

• Semi-analytisch

$(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\wedge^{-}\ (X \leftarrow Y) \qquad (+-++)\ {}^{+}\wedge^{-}\ (++-+)$

2-1-4-3 ZWEI+RELATOREN

Die Zwei+Relatoren $\leftrightarrow$ und >< werden an anderer Stelle behandelt. Hier geht es um die Relatoren: $X \rfloor Y$, $X \lfloor Y$, $X \rceil Y$, $X \lceil Y$

• Tautologie

Mit dem Relator $\rfloor$ erzeugt man nur dann eine Tautologie, wenn links von dem Relator eine Tautologie steht, was dann rechts steht, ist gleichgültig, z. B.:

$(X \vee \neg X)\ {}^{+}\rfloor^{+}\ (X \wedge Y) \qquad (++++)\ {}^{+}\rfloor^{+}\ (+---)$

• Kontradiktion

Mit dem Relator $\rfloor$ ergibt sich nur dann eine Kontradiktion, wenn links vom Relator eine Kontradiktion steht, z. B.:

$(X \wedge \neg X)\ {}^{-}\rfloor^{-}\ (X \wedge Y) \qquad (----)\ {}^{-}\rfloor^{-}\ (+---)$

• Semi-analytisch

Semi-analytisch sind alle anderen Kombinationen, z. B.:

$(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\rfloor^{-}\ (X \leftarrow Y) \qquad (+-++)\ {}^{+}\rfloor^{-}\ (++-+)$

Entsprechendes gilt für die anderen genannten Relatoren.

2-1-4-4 DREI+RELATOREN

Die Drei+Relatoren $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\vee$ und | werden systematisch an anderer Stelle behandelt.
Es sei deshalb nur kurz auf die Implikation $\rightarrow$ eingegangen.

• Tautologie

Die Implikation ist nur ungültig, wenn links vom $\rightarrow$ plus (+) steht und rechts minus (–), in allen anderen Fällen ist sie gültig, z. B.:

$(X \wedge Y) \Rightarrow Y \qquad (+---) \Rightarrow (+-+-)$

• Kontradiktion

Eine Kontradiktion gibt es nur, wenn gilt: Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion, z. B.:

$(X \vee \neg X) \not\Rightarrow (X \wedge \neg X) \qquad (++++) \not\Rightarrow (----)$

• Semi-analytisch

$(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \leftarrow Y) \qquad (+-++) \longrightarrow (++-+)$

2-1-4-5 VIER+RELATOR

Hier ist der *Tautologator* $\top$ zu nennen, der allerdings, wie erläutert, kein echter Relator ist.

• Tautologie

Die Verbindung zweier beliebiger Relatoren durch den Tautologator führt in jedem Fall zu einer Tautologie, selbst die Verbindung zweier Kontradiktionen, z. B.:

$(X \wedge \neg X) \top (Y \wedge \neg Y) \qquad (----) \top (----)$

Man braucht hier für die Tautologie nicht $^{+}\top^{+}$ schreiben, denn es ergibt sich ja immer eine Tautologie.

• Kontradiktion

Die Verbindung zweier Relationen durch den Tautologator ergibt in keinem Fall eine Kontradiktion.

• Semi-analytisch

Die Verbindung zweier Relationen durch den Tautologator ergibt in keinem Fall eine semi-analytische Relation.

2-1-5 Erweiterungen

2-1-5-1 INKLUSIV / EXKLUSIV

Hier sollen zunächst die Begriffe *inklusiv* und *exklusiv* – jetzt im analytischen Bereich – noch einmal präzisiert werden. Diese beziehen sich in erster Linie auf die *Disjunktion* $X \vee Y$ und die *Kontravalenz* $X >< Y$. Dabei geht es um das Verhältnis zur *Konjunktion* $X \wedge Y$.

Inklusion bedeutet, dass „oder" das höhere „und" als *Möglichkeit* mit einschließt: oder $\longrightarrow$ und. Das gilt für die Disjunktion: $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$: $(+++-) \longrightarrow (+---)$.

Exklusion bedeutet, dass „oder" das „und" ausschließt: oder $\Rightarrow$ $\neg$und. Das gilt für die Kontravalenz: $X >< Y \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$: $(-++-) \Rightarrow (-+++)$.

Der Dritte im Bund der „oder" ist die Exklusion $X \mid Y$.

Auch hier gilt der Ausschluß des „und": $X \mid Y \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$, es gilt sogar $\Leftrightarrow$.

Das wichtigste Gesetz für alle drei „oder" ist der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*; er begründet die *2-Wertigkeit* der klassischen Logik: $X \,^{+}\vee^{+} \neg X$, $X \,^{+}{><}^{+} \neg X$, $X \,^{+}|^{+} \neg X$.

Weitere wichtige Gesetze der Disjunktion sind:

$$(X \vee Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y \qquad\qquad (X \vee Y) \wedge \neg Y \Rightarrow X$$

De-Morgan-Gesetze (hier nur eine Auswahl):

$$\begin{array}{llll} X \vee Y & \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y) & \qquad X \vee \neg Y & \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge Y) \\ \neg X \vee Y & \Leftrightarrow \neg(X \wedge \neg Y) & \qquad \neg X \vee \neg Y & \Leftrightarrow \neg(X \wedge Y) \end{array}$$

Zwischen den drei „oder" gilt ($\longleftrightarrow$ steht für die *semi-analytische* Äquivalenz):

$$\begin{array}{ccc} & X >< Y & \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ X \vee Y & \longleftrightarrow & X \mid Y \end{array}$$

2-1-5-2 LOGISCHES QUADRAT

Man kann wichtige Beziehungen zwischen bestimmten Relatoren durch das *logische Quadrat* bzw. Rechteck angeben (obwohl dieses in der *Quantoren-Logik* wichtiger ist, vgl. 2-2).

$$\begin{array}{c|ccc|c} (+---) & X \wedge Y & ^{+}|^{+} & X \nabla Y & (---+) \\ & \Downarrow & ^{+}{><}^{+} & \Downarrow & \\ (+++-) & X \vee Y & ^{+}\vee^{+} & X \mid Y & (-+++) \end{array}$$

2-1-5-3 GEGENSÄTZE

Man unterscheidet in der Logik verschiedene *Gegensätze*, nach ihrer Stärke geordnet:

Kontradiktorisch	$X >< Y$: entweder ist X gültig oder Y
Konträr	$X \mid Y$: X und Y sind nicht beide gültig
Subkonträr	$X \vee Y$: X und Y sind nicht beide ungültig
Subaltern	$X \rightarrow Y$: wenn X gültig ist, dann auch Y

Als stärkster Gegensatz gilt der kontradiktorische, dann der konträre, dann der subkonträre; den subalternen interpretieren wir im normalen Sprachgebrauch kaum als Gegensatz. Die Gegensätze werden durch die oben genannten *Relatoren* logisch ausgedrückt.

Man könnte zwar auch *synthetische* Gegensätze definieren (entsprechend den oben genannten Relatoren), aber normalerweise versteht man in der Logik die Gegensätze als *analytisch*; insofern kommen die analytischen Versionen der Relatoren zum Einsatz:

$$^{+}{><}^{+} \quad ^{+}|^{+} \quad ^{+}\vee^{+} \quad \Rightarrow$$

Gegensatz und logisches Quadrat

Die Gegensätze lassen sich im *logischen Quadrat* darstellen:

Konträr

	$X \wedge Y$	$^{+}\mid^{+}$	$X \nabla Y$	
subaltern	$\Downarrow$	kontra- $^{+}{><}^{+}$ diktorisch	$\Downarrow$	subaltern
	$X \vee Y$	$^{+}\vee^{+}$	$X \mid Y$	

subkonträr

Zur Einheitlichkeit könnte man einsetzen für $X \mid Y$: $\neg X \vee \neg Y$ und für $X \nabla Y$: $\neg X \wedge \neg Y$

2-1-5-4 ANALYTISCH UND SEMI-ANALYTISCH

Es gilt, vor allem zwei Ebenen zu unterscheiden:

1) *Logische* Ebene

Hier geht es um logische Beziehungen zwischen *unterschiedlichen Relationen*, z. B.:

- Tautologie $\nRightarrow$ Kontradiktion
  $X \vee \neg X \nRightarrow X \wedge \neg X$ $\quad$ $++++ \nRightarrow ----$
- Kontradiktion $\Rightarrow$ Tautologie
  $X \wedge \neg X \Rightarrow X \vee \neg X$ $\quad$ $---- \Rightarrow ++++$
- Tautologie $\longrightarrow$ semi-analytische Relation
  $X \vee \neg X \longrightarrow (X \vee Y) \wedge X$ $\quad$ $++++ \longrightarrow ++--$
- semi-analytische Relation $\Rightarrow$ Tautologie
  $(X \vee Y) \wedge X \Rightarrow X \vee \neg X$ $\quad$ $++-- \Rightarrow ++++$

2) *Begriffliche* Ebene

Hier geht es um die Beziehung zwischen verschiedenen logischen Eigenschaften (tautologisch, kontradiktorisch usw.) *derselben Relation*, z. B.:

• tautologisch $\Rightarrow$ ¬kontradiktorisch

„$X \vee \neg X$“ ist tautologisch $\Rightarrow$ „$X \vee \neg X$“ ist nicht kontradiktorisch

• kontradiktorisch $\Rightarrow$ ¬tautologisch

„$X \wedge \neg X$“ ist kontradiktorisch $\Rightarrow$ „$X \wedge \neg X$“ ist nicht tautologisch

• tautologisch $\Rightarrow$ ¬semi-analytisch

„$X \vee \neg X$“ ist tautologisch $\Rightarrow$ „$X \vee \neg X$“ ist nicht semi-analytisch

• semi-analytisch $\Rightarrow$ ¬tautologisch

„$(X \vee Y) \wedge X$“ ist semi-analytisch $\Rightarrow$ „$(X \vee Y) \wedge X$“ ist nicht tautologisch

Also *logisch* gilt: semi-analytische Relation $\Rightarrow$ Tautologie

$X \vee X \Rightarrow X \vee \neg X$

d. h. aus einer semi-analytischen Relation folgt logisch eine Tautologie, aber:

begrifflich gilt: semi-analytisch $\Rightarrow$ ¬tautologisch

„$X \vee X$“ ist semi-analytisch $\Rightarrow$ „$X \vee X$“ ist nicht tautologisch

d. h. wenn eine Relation semi-analytisch ist, dann ist sie nicht tautologisch.

2-1-5-5 MODAL-LOGIK

Die *Modal-Logik* behandelt die Beziehungen zwischen Begriffen bzw. Operatoren wie: *notwendig*, *möglich*, *nicht notwendig*, *nicht möglich*. Damit hat sie auch mit *Gegensätzen* zu tun.

Die Modal-Logik lässt sich teilweise auf die *Aussagen-Logik* zurückführen. Wie ich noch genauer zeigen und begründen werde, lässt sich auf der *Aussagen-Logik* aber nur eine Modal-Logik aufzubauen, die ausschließlich *zwei* Werte unterscheidet: „notwendig“ und „unmöglich“ (bzw. „notwendig, dass nicht“).

Für Einbeziehung von „möglich“ und „möglich, dass nicht“ benötigt man die *Quantoren-Logik* oder eine höhere Logik. Dagegen lässt sich „nicht möglich“ sehr wohl im Rahmen der Aussagen-Logik darstellen, denn es besitzt logisch einen ganz anderen Status als „möglich“; das wird am besten in der später vorzustellenden quantitativen Modal-Logik verdeutlicht.

Wir haben in 1-1-5-1 eine Modal-Logik kennen gelernt, die auf die *synthetische* Aussagen-Logik Bezug nimmt; hier geht es aber um die *analytische* Aussagen-Logik, die mit „tautologisch“, „kontradiktorisch“ und auch „semi-analytisch“ operiert. Und zwar gilt dabei:

Notwendig (N) $=_{df}$ tautologisch. *Unmöglich* (U) $=_{df}$ kontradiktorisch

Man kann unterscheiden *absoluter* und *relativer* Modalität.

Absolut: eine logische Relation ist *für sich* tautologisch bzw. kontradiktorisch.

Relativ: eine logische Relation (bzw. ein logischer Ausdruck) ist *im Verhältnis zu* einer anderen Relation tautologisch bzw. kontradiktorisch, konkret sie ist logische *Folge* oder kontradiktorische ‘Folge’ der anderen Relation.

• *Notwendigkeit* (Tautologie)

- absolut

z. B.: $X \;{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$ Notwendig($X \;{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$) N($X \;{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$)

Hier kann man auch nur schreiben ‘N($X \vee \neg X$)’, denn durch den Modal-Ausdruck „notwendig“ wird bereits ausgedrückt, dass eine Tautologie vorliegt.

- relativ

z. B.: $X \wedge Y \Rightarrow Y$ Notwendig($Y, X \wedge Y$) N($Y, X \wedge Y$)

Lies: ‘Y ist (analytisch) notwendig in Bezug auf $X \wedge Y$’.

Allerdings ist $X \wedge Y \Rightarrow Y$ im Ganzen ebenfalls *absolut* notwendig.

Für die Darstellung der relativen Notwendigkeit bietet sich die *Implikation* oder *Positiv-Implikation* an. Allgemein: $N(\Psi, \Phi) =_{df} \Phi \Rightarrow \Psi$ (bzw. $\Phi \mathbin{*{\Rightarrow}} \Psi$)

• *Unmöglichkeit* (Kontradiktion)
Man kann Unmöglichkeit als „notwendig nicht“ oder „nicht möglich“ darstellen, aber ich verwende hier zur Einfachheit keinen abgeleiteten Begriff.

- absolut
  z. B. $X \;{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ Unmöglich($X \;{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$) U($X \;{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$)
- relativ
  z. B.: ($X \;{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$) $\not\Rightarrow$ ($X \;{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$)
  Unmöglich($X \;{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$, $X \;{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$) U($X \;{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$, $X \;{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$)

Die Bestimmung des *relativen* „Unmöglich“ ist nicht sehr überzeugend, denn $X \;{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ ist ja bereits *absolut* unmöglich, weil kontradiktorisch, es ist wenig informativ, dass es zusätzlich auch noch *relativ* unmöglich ist.

Naheliegend wäre dagegen U(Y, ($X \rightarrow \neg Y$) $\wedge$ X)). Man geht also davon aus: Wenn X nicht-Y impliziert und X gültig ist, dann ist $\neg$Y *relativ notwendig:* $(X \rightarrow \neg Y) \wedge X \;\Rightarrow \neg Y$. In diesem Fall müsste aber Y *relativ unmöglich* und der gesamte Schluss eine Kontradiktion sein. Nur stimmt das nicht. $(X \rightarrow \neg Y) \wedge X \;\longrightarrow Y$ (+ – + +) ist nicht kontradiktorisch, sondern es liegt ein *semi-analytischer* Schluss vor, der sogar in 3 von 4 Welten gültig ist.

Verwendet man allerdings die *Positiv-Implikation*, dann erhält man die gewünschte Kontradiktion: (X *$\rightarrow \neg Y$) $\wedge$ X *$\not\Rightarrow$ Y (□ – □ □).

Bei Verwendung der Positiv-Implikation könnte man z. B. schreiben:

*U(Y, X *$\rightarrow \neg$Y $\wedge$ X).

Das * bei dem U (also *U) weist darauf hin, dass die *Positiv-Implikation* *$\rightarrow$ verwendet wird.

Hier gilt: *Unmöglich(Ψ, Φ) $=_{df}$ Φ *$\Rightarrow \neg\Psi$. Oder kurz: *U(Ψ,Φ) $=_{df}$ Φ *$\Rightarrow \neg\Psi$.

• Problemfall «Möglichkeit»
Ich hatte anfangs gesagt, *aussagen-logisch* lässt sich nur „notwendig“ und „unmöglich“ darstellen, aber nicht der Modus „möglich“. Man könnte dagegen einwenden: Der Bereich *semi-analytisch* steht für „möglich“ bzw. „unnotwendig“. Z. B. könnte man folgenden aussagen-logischen Ausdruck modal-logisch als *Möglichkeits*-Aussage deuten:

$X \vee Y \longrightarrow Y$ als M(Y, $X \vee Y$)

Es ist zwar richtig, dass aussagen-logisch der *semi-analytische* Bereich generell für die Welt des (logisch) Möglichen steht und somit alle semi-analytischen Relationen logisch möglich sind – Entsprechendes gilt für den *synthetischen* Bereich. Aber es gelingt aussagen-logisch nicht, *Beziehungen* zwischen *möglich* und *notwendig* (oder unmöglich) adäquat darzustellen.

Dazu hier nur eine kurze Begründung:
$X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist eine *Tautologie*, entsprechend auch das äquivalente ‘Notwendig(Y, $X \wedge Y$)’. Dagegen sind $X \vee Y \longrightarrow Y$ und entsprechend ‘M(Y, $X \vee Y$)’ *semi-analytisch*.

Nun lautet eins der zentralen Gesetze der Quantoren-Logik: notwendig $\Rightarrow$ möglich
Das besagt: „Wenn etwas notwendig ist, dann ist es auch (mindestens) möglich“.

Aber es gilt: Eine Tautologie impliziert logisch nur eine andere Tautologie:

Tautologie $\Rightarrow$ Tautologie (+ + + + $\Rightarrow$ + + + +).

D. H. eine (semi-analytische) Möglichkeits-Aussage kann nie aus einer (tautologischen) Notwendigkeits-Aussage folgen.

Vielmehr gilt das Gegenteil, im Beispiel: $(X \vee Y \longrightarrow Y) \;\Rightarrow (X \wedge Y \Rightarrow Y)$.

2 – 2 QUANTOREN- UND PRÄDIKATEN-LOGIK

2-2-1 Einführung

2-2-1-1 FORMULIERUNGEN

Ich habe bisher im Wesentlichen *4* Stufen in der Quantoren-Logik unterschieden:

alle, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*

Es bestehen aber zwischen den Formen von „alle“ und „einige“ *Äquivalenzen*, so dass man insgesamt auf 8 Unterscheidungen kommt:

Dabei bestehen folgende analytische Äquivalenzen (in normaler Sprache und formal):

alle	nicht einige nicht	Λ	$\Leftrightarrow$	$\neg V \neg$
alle nicht	nicht einige	$\Lambda\neg$	$\Leftrightarrow$	$\neg V$
nicht alle	einige nicht	$\neg\Lambda$	$\Leftrightarrow$	$V\neg$
nicht alle nicht	einige	$\neg\Lambda\neg$	$\Leftrightarrow$	V

Dabei gilt es verschiedene Negationen von Λ zu unterscheiden:

kontradiktorische Verneinung	$\neg\Lambda$	$\Lambda \ {}^{+}{>}{<}^{+} \ \neg\Lambda$
konträre Verneinung	$\Lambda\neg$	$\Lambda \ {}^{+}{\mid}^{+} \ \neg\Lambda$
doppelte, subalterne Verneinung	$\neg\Lambda\neg$	$\Lambda \ \Rightarrow \ \neg\Lambda$

Ähnliches, aber nicht Gleiches gilt für für V = einige.

Wichtig ist hier, den Unterschied zur Aussagen-Logik zu sehen: *Aussagen-logisch* gibt es im strengen Sinn nur *eine* Verneinung, die *kontradiktorische*. Allerdings entspricht aussagen-logisch $\neg(X \rightarrow Y)$ quantoren-logisch $\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$ (vgl. dazu vor allem 1-4-1-5).

	Position	kontradiktorisch	konträr	subaltern
Aussagen-Logik	$X \rightarrow Y$	$\neg(X \rightarrow Y)$		
Quantoren-Logik	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$\neg\Lambda(X \rightarrow Y)$	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$\neg\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$

Ich habe schon grundsätzlich dargelegt, dass man die Quantoren-Logik (bzw. die Prädikaten-Logik) als eine *Erweiterung* der Aussagen-Logik verstehen kann. Insofern gilt:

- alle Gesetze der Aussagen-Logik gelten auch in der Quantoren-Logik
- es gibt *spezifische* Gesetze der Quantoren-Logik, die in der Aussagen-Logik nicht darstellbar sind (dies sind genau die, die den Partikulär- oder Existenz-Quantor verwenden)

Anbei ein Beispiel für die Darstellung eines Gesetzes in aussagen-logischer und quantoren-logischer Form:

z. B. aussagen-logisch: $X \wedge Y \Rightarrow Y$

quantoren-logisch: $\Lambda x(Fx \wedge Gx) \Rightarrow \Lambda x(Gx)$

bzw. vereinfacht $\Lambda(X \wedge Y) \Rightarrow \Lambda(Y)$

prädikaten-logisch: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \wedge Gx_n) \Rightarrow (Gx_1 \wedge \ldots \wedge Gx_n)$

2-2-1-2 DARSTELLUNGSFORMEN

Wie beschrieben (in 1-2-1-4) geht es hier im Grunde um eine *Klassen-Logik*, die man aber in verschiedener Weise darstellen kann:

Das soll am Beispiel des quantoren-logischen Gesetzes „alle“ ⇒ „einige“ (verstanden als „mindestens einige“ – inklusiv) erläutert werden:

- Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$
- Prädikaten-Logik: $Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$
- Mengen-Logik: $F \subset G \Rightarrow F \sqcap G$

$F \sqcap G$ kann man auch übersetzen mit „F schneidet G“: Das entspricht „einige F sind G“.

$F \subset G \Rightarrow F \sqcap G$ wäre also zu deuten: wenn F Teilmenge von G ist, dann schneidet F auch G.

Für „F schneidet G“ verwende ich das Zeichen ⊓, also $F \sqcap G$. Dies darf nicht verwechselt werden mit $F \cap G$ für „die Schnitt-Menge $F \cap G$“. $F \sqcap G$ ist eine *Relation*, $F \cap G$ ist eine *Menge*. Es ist bezeichnend, dass es für die Relation kein eingebürgertes Zeichen gibt. Denn genau wie sich in der Aussagen-Logik kein *Relator* findet, der „einige F sind G“ ausdrückt, so auch nicht in der Mengenlehre (die entsprechend der Aussagen-Logik 2-wertig ist).

2-2-1-3 LOGISCHES QUADRAT

Die wichtigsten analytischen klassen-logischen Relationen behandelt das sogenannte *logische Quadrat* (bzw. Rechteck), das in einer *aussagen-logischen* Form schon eingeführt wurde.

- in normaler Sprache

alle	$^+|^+$	alle¬
⇓	$^+{><}^+$	⇓
einige	$^+\vee^+$	einige¬

Das Zeichen $^+{><}^+$ in der Mitte bezieht sich auf *beide* Diagonalen:

1. alle $^+{><}^+$ einige¬ 2. alle¬ $^+{><}^+$ einige

Zur Erinnerung die Wahrheitsverläufe der oben genannten *Junktoren* bzw. *Relatoren*:

X Y	∧	∨	><	|	→	↔
+ +	+	+	–	–	+	+
+ –	–	+	+	+	–	–
– +	–	+	+	+	+	–
– –	–	–	–	+	+	+

• einfache Relationen
Einfache Relationen sind solche mit *einer* Prädikat-Variablen wie $\Lambda x(Fx)$ im Gegensatz zu *komplexen* Relationen mit *zwei oder mehr* Prädikat-Variablen wie $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$.

Darstellung in Quantoren-Logik

$\Lambda x(Fx)$	$^{+}\|^{+}$	$\Lambda x\neg(Fx)$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
$Vx(Fx)$	$^{+}\vee^{+}$	$Vx\neg(Fx)$

Anmerkung zur Schreibweise. Man kann $\Lambda x\neg(Fx)$ oder $\Lambda x(\neg Fx)$ schreiben.

Darstellung in Individuen-Logik (Prädikaten-Logik)

$Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n$	$^{+}\|^{+}$	$\neg Fx_1 \wedge \ldots \wedge \neg Fx_n$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
$Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$	$^{+}\vee^{+}$	$\neg Fx_1 \vee \ldots \vee \neg Fx_n$

• komplexe Relationen
Komplexe Relationen enthalten *mindestens zwei* Prädikat-Variablen (‚F' und ‚G'). Ich bringe hier nur *eine* Realisation des logischen Quadrats, später werden Variationen vorgestellt.

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$^{+}\|^{+}$	$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$^{+}\vee^{+}$	$Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$

2-2-1-4 GESETZE
Im Folgenden eine Übersicht über wichtige *Gesetze* der Quantoren-Logik. Im späteren Text werden weitere Gesetze vorgestellt und vor allem problematische Gesetze diskutiert.

• einfache Relationen

Äquivalenzen

$\Lambda x(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx(Fx)$
$\neg\Lambda x(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx\neg(Fx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx(Fx)$

Schlüsse (die nicht aus den Äquivalenzen folgen)

$\Lambda x(Fx) \quad \Rightarrow \quad Vx(Fx)$
$\neg\Lambda x(Fx) \quad \Leftarrow \quad \neg Vx(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx) \quad \Rightarrow \quad Vx\neg(Fx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx) \quad \Leftarrow \quad \neg Vx\neg(Fx)$

• komplexe Relationen

Äquivalenzen

$\Lambda x(Fx \to Gx) \quad \Leftrightarrow \quad \neg Vx\neg(Fx \to Gx) \quad \Leftrightarrow \quad \neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
$\Lambda x\neg(Fx \to Gx) \quad \Leftrightarrow \quad \neg Vx(Fx \to Gx) \quad \Leftrightarrow \quad \neg Vx\neg(Fx \wedge \neg Gx)$
$\neg\Lambda x(Fx \to Gx) \quad \Leftrightarrow \quad Vx\neg(Fx \to Gx) \quad \Leftrightarrow \quad Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx \to Gx) \quad \Leftrightarrow \quad Vx(Fx \to Gx) \quad \Leftrightarrow \quad Vx\neg(Fx \wedge \neg Gx)$

Schlüsse (die aus den Äquivalenzen folgen, eine Auswahl)

$\Lambda x(Fx) \quad \Rightarrow \quad \neg Vx\neg(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx) \quad \Rightarrow \quad \neg Vx(Fx)$
$\neg\Lambda x(Fx) \quad \Rightarrow \quad Vx\neg(Fx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx) \quad \Rightarrow \quad Vx(Fx)$

Schlüsse (die nicht aus den Äquivalenzen folgen)

$\Lambda x(Fx \to Gx) \quad \Rightarrow \quad Vx(Fx \to Gx)$
$\neg\Lambda x(Fx \to Gx) \quad \Leftarrow \quad \neg Vx(Fx \to Gx)$
$\Lambda x\neg(Fx \to Gx) \quad \Rightarrow \quad Vx\neg(Fx \to Gx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx \to Gx) \quad \Leftarrow \quad \neg Vx\neg(Fx \to Gx)$

Durch Verwendung einer spezifischen *Individuen-Konstante* x_i sind zusätzlich z. B. folgende Schlüsse möglich:

$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Fx_i$
$\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow \neg Fx_i$
$Fx_i \Rightarrow Vx(Fx)$
$\neg Fx_i \Rightarrow Vx\neg(Fx)$

Prädikaten-logisch ergibt sich:

$Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_i$
$\neg Fx_1 \wedge \ldots \wedge \neg Fx_n \Rightarrow \neg Fx_i$
$Fx_i \Rightarrow Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$
$\neg Fx_i \Rightarrow \neg Fx_1 \vee \ldots \vee \neg Fx_n$

Beispiel für $Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_i$: Wenn gilt, x_1 ist Mensch und x_2 ist ein Mensch und ... und x_n ist ein Mensch, dann ist auch x_i (ein beliebiges bestimmtes x) ein Mensch.

2-2-1-5 WAHRHEITS-TAFELN

In der *Aussagen-Logik* kann man die Gültigkeit einer Relation durch die *Wahrheitstafeln* problemlos überprüfen. Dabei ergibt sich die Gültigkeit der Gesamt-Relation aus der Gültigkeit der Einzel-Relationen (bzw. Einzelfaktoren). In der *Quantoren-Logik* ist das schwieriger. Man kann nicht einfach aus den Wahrheitstafeln der Aussagen-Logik Wahrheitstafeln für die Quantoren-Logik ableiten. Dennoch gibt es verschiedene Möglichkeiten. Ausführlich, für

Spezialisten, gehe ich darauf im Buch „Integrale Logik“. Hier erfolgt eine Kurzfassung. Dabei konzentriere ich mich auf eine *semi-analytische* Relation, weil deren Wahrheitstafel interessanter ist. Auf die Wahrheitstafeln *synthetischer* quantoren-logischer Relationen bin ich in 1-2-2-4 eingegangen.

Als Beispiel nehme ich den *semi-analytischen* Schluss $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$. Ich bringe nachfolgend die wichtigsten Wahrheitstafeln (analog zur *Aussagen-Logik*), wobei ich zur Übersichtlichkeit darauf verzichtet habe, + durch Λ bzw. V und – durch $\neg\Lambda$ bzw. $\neg V$ darzustellen, wie in 1-2-2-4 erläutert.

• *normale* Wahrheitstafel:

Vx(Fx)	⟶	Λx(Fx)
+	+	+
+	−	−
+	−	−
−	+	−

Die Einsetzung der Wahrheitswerte für Vx(Fx) und Λx(Fx) erklärt sich wie folgt: Bei 2 Variablen entspricht Vx(Fx) prädikaten-logisch $Fx_1 \vee Fx_2$ und aussagen-logisch $X \vee Y$; Λx(Fx) entspricht prädikaten-logisch bei 2 Variablen $Fx_1 \wedge Fx_2$ und aussagen-logisch $X \wedge Y$. Um zu prüfen, ob ein Ausdruck Φ_1, Φ_2 ,..., Φ_n tautologisch, kontradiktorisch oder semi-analytisch ist, genügt es normalerweise, nur die ersten *zwei* Glieder zu prüfen.

• *konjunktive* Wahrheitstafel (2. und 3. Zeile sind gleich)

	[Vx(Fx)	∧	Λx(Fx)]	⇒	[Vx(Fx) ⟶ Λx(Fx)]
1.	+	+	+	+	+
2.	+	−	−	+	−
3.	+	−	−	+	−
4.	−	−	−	+	+

Dazu folgende Einzel-Relationen, welche alle *Tautologien* sind

1. $[Vx(Fx) \wedge \Lambda x(Fx)] \Rightarrow [Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$
2. $[Vx(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Fx)] \Rightarrow \neg[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$
3. $[Vx(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Fx)] \Rightarrow \neg[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$
4. $[\neg Vx(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Fx)] \Rightarrow [Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$

• komplexe Relationen

Wir haben bisher nur *einfache* Relationen der Form $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$ behandelt, weil sich hier die Wahrheitstafeln übersichtlicher darstellen lassen. Was ist aber mit *komplexen* Relationen der Form $Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$? Insofern der Ausdruck in der Klammer gleich ist (z. B. $Fx \rightarrow Gx$), es also nur um die Verhältnisse zwischen den *Quantoren* geht, gelten im Wesentlichen die oben gemachten Aussagen.

Schwieriger ist es, wenn der Ausdruck in der Klammer (und ggf. zusätzlich die Quantoren) unterschiedlich sind, also z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$. Hier hat es wenig Sinn, eine *direkte quantoren-logische* Wahrheitstafel aufzustellen, weil die Struktur in der Klammer eine Rolle spielt. Sondern man muss eine *prädikaten-logische* Analyse vornehmen. Für n = 2 ergibt sich: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2)$.

Dabei verwende ich erstmals die übersichtlichere Wahrheitswertetafel in *Tabellenform*.

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\longrightarrow$	Fx_1	$\wedge$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\wedge$	Gx_2
1	+	+	+	**+**	+	+	+	**+**	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	**−**	+	−	−	**+**	+	+	+	+	+	−	−
3	+	+	+	**+**	−	+	+	**+**	+	+	+	+	−	−	+
4	+	+	+	**+**	−	+	−	**+**	+	+	+	+	−	−	−
5	+	−	−	**−**	+	+	+	**+**	+	−	−	+	+	+	+
6	+	−	−	**−**	+	−	−	**+**	+	−	−	−	+	−	−
7	+	−	−	**−**	−	+	+	**+**	+	−	−	−	−	−	+
8	+	−	−	**−**	−	+	−	**+**	+	−	−	−	−	−	−
9	−	+	+	**+**	+	+	+	**+**	−	−	+	+	+	+	+
10	−	+	+	**−**	+	−	−	**+**	−	−	+	−	+	−	−
11	−	+	+	**+**	−	+	+	**−**	−	−	+	−	−	−	+
12	−	+	+	**+**	−	+	−	**−**	−	−	+	−	−	−	−
13	−	+	−	**+**	+	+	+	**+**	−	−	−	+	+	+	+
14	−	+	−	**−**	+	−	−	**+**	−	−	−	−	+	−	−
15	−	+	−	**+**	−	+	+	**−**	−	−	−	−	−	−	+
16	−	+	−	+	−	+	−	**−**	−	−	−	−	−	−	−

Bei $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ handelt es sich also um eine *semi-analytische* Relation. Denn unter dem Zentral-Relator $\longrightarrow$ kommen + und − vor. Um hier *generell* von einer semi-analytischen Relation zu sprechen, reicht die Prüfung für n = 2.

Fazit: Auch wenn es nicht so einfach ist wie in der Aussagen-Logik, man kann vor allem *einfache* quantoren-logische Relationen sehr wohl mittels *Wahrheitstafeln* überprüfen bzw. beweisen. Am sichersten sind dabei prädikaten-logischen Wahrheitstafeln.

2-2-2 Implikation

2-2-2-1 TAUTOLOGIE

Auch hier sei wieder unterschieden zwischen
- allgemeinen *aussagen-logischen* Gesetzen, die auch quantoren-logisch gelten
- speziellen *quantoren-logischen* Gesetzen (die aussagen-logisch nicht gelten)
- speziellen *prädikaten-logischen* Gesetzen (die quantoren-logisch nicht gelten)

Dazu folgendes aussagen-logisches Beispiel: *Modus ponens* bzw. analog: $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$

• Aussagen-logisches Gesetz in quantoren-logischer bzw. prädikaten-logischer Form

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) \Rightarrow \Lambda x(Gx)$

Vereinfacht: $\Lambda(X \rightarrow Y) \wedge \Lambda(X) \Rightarrow \Lambda(Y)$

$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \wedge (Fx_1 \wedge ... \wedge Fx_n) \Rightarrow (Gx_1 \wedge ... \wedge Gx_n)$

• Speziell quantoren-logisches Gesetz

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Vx(Fx) \Rightarrow Vx(Gx)$

Vereinfacht: $\Lambda(X \rightarrow Y) \wedge V(X) \Rightarrow V(Y)$

$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \wedge (Fx_1 \vee ... \vee Fx_n) \Rightarrow (Gx_1 \vee ... \vee Gx_n)$

• Speziell prädikaten-logisches Gesetz

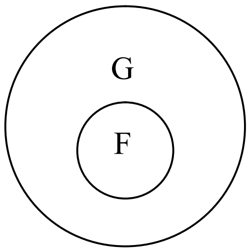
$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx_i \Rightarrow Gx_i$

$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \wedge Fx_i \Rightarrow Gx_i$

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Vx(Fx) \Rightarrow Vx(Gx)$ ist aussagen-logisch nicht darzustellen, weil es für den Partikulär-Quantor V kein Äquivalent in der Aussagen-Logik gibt.

Die Formalisierung $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx_i \Rightarrow Gx_i$ könnte annehmen lassen, dieses Gesetz lasse sich doch rein quantoren-logisch darstellen. Aber in der eigentlichen Quantoren-Logik kommen keine Individuen-*Konstanten* wie x_i vor, sondern nur Individuen-*Variablen* wie x, y, die durch Quantoren gebunden werden. Dasselbe gilt für $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \neg Gx_i \Rightarrow \neg Fx_i$.

Ein wichtiges und unmittelbar einleuchtendes *Gesetz der (traditionellen) Klassen-Logik* ist: „Wenn alle F auch G sind, dann sind einige G auch F“. Hypothese: Dieses Gesetz gilt auch in der Quantoren-Logik *tautologisch*. Die folgende Grafik veranschaulicht das Gesetz.



Formal: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Gx \rightarrow Fx)$ bzw. $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \leftarrow Gx)$.

Ich verwende hier aber nur den Pfeil für *semi-analytische* Implikation. Denn bei der Normal-Implikation bzw. der normalen Quantoren-Logik gilt dieses Gesetz *nicht tautologisch*.

Zum Beweis per Wahrheitstafel wird die Relation zunächst in *Prädikaten-Logik* übersetzt.

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow (Fx_1 \leftarrow Gx_1 \vee \ldots \vee Fx_n \leftarrow Gx_n).$$

Nun habe ich schon erläutert: um den *logischen Status* (tautologisch, semi-analytisch oder kontradiktorisch) einer Relation zu prüfen, genügt es normalerweise, von n = 2 auszugehen.

D. h.: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1 \wedge Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \leftarrow Gx_1 \vee Fx_2 \leftarrow Gx_2)$.

Das kann man vereinfacht quasi *aussagen-logisch* schreiben:

$$(X_1 \rightarrow Y_1 \wedge X_2 \rightarrow Y_2) \longrightarrow (X_1 \leftarrow Y_1 \vee X_2 \leftarrow Y_2).$$

Ich spreche von *quasi* aussagen-logisch, weil die Indizes im Grunde *prädikaten-logisch* sind. Dafür stelle ich nun eine Wahrheitstafel auf. Dabei verwende ich wieder die Wahrheitswertetafel in *Tabellenform*, welche für mehrere Variablen übersichtlicher ist.

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \leftarrow Gx)$

	X_1	→	Y_1	∧	X_2	→	Y_2	⟶	X_1	←	Y_1	∨	X_2	←	Y_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	–	+	–	–	+	+	+	+	+	+	+	–
3	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+
4	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–
5	+	–	–	–	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+
6	+	–	–	–	+	–	–	+	+	+	–	+	+	+	–
7	+	–	–	–	–	+	+	+	+	+	–	+	–	–	+
8	+	–	–	–	–	+	–	+	+	+	–	+	–	+	–
9	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+	+	+	+	+
10	–	+	+	–	+	–	–	+	–	–	+	+	+	+	–
11	–	+	+	+	–	+	+	–	–	–	+	–	–	–	+
12	–	+	+	+	–	+	–	+	–	–	+	+	–	+	–
13	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+
14	–	+	–	–	+	–	–	+	–	+	–	+	+	+	–
15	–	+	–	+	–	+	+	+	–	+	–	+	–	–	+
16	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–

Die Tafel ist zwar nur in *einer* Welt (bzw. *einer*, der 11. Zeile) ungültig, aber das reicht dafür, dass dieses Gesetz nicht generell, nicht tautologisch gilt, sondern *nur semi-analytisch* ist.

Man könnte allerdings einwenden, dass man „einige G sind F“ meistens mit $\vee x(Gx \wedge Fx)$ formalisiert und nicht mit $\vee x(Gx \rightarrow Fx)$. Man sollte den Schluss daher nicht so schreiben:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \vee x(Gx \rightarrow Fx)$ (Hypothese)

Sondern:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \vee x(Gx \wedge Fx)$ (Hypothese)

Aber auch dies ist kein strenges Gesetz. Um das zu beweisen, verwenden wir zunächst das *Vertauschungsgesetz*: $\vee x(Fx \wedge Gx) \Leftrightarrow \vee x(Gx \wedge Fx)$

Es genügt also zu zeigen, dass folgende Relation kein strenges Gesetz ist:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \vee x(Fx \wedge Gx)$ (Hypothese)

Es gilt nur *semi-analytisch*: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \vee x(Fx \wedge Gx)$

Diesen Beweis werde ich gleich in 2-2-2-3 ausführlich demonstrieren. Bleibt festzuhalten: Das gut bewährte, klassische Gesetz „wenn alle F auch G sind, dann sind einige G auch F“ ist bei den üblichen Formalisierungen der Quantoren-Logik nicht gültig.

2-2-2-2 KONTRADIKTION

Hier sei daran erinnert, dass die Implikation nur kontradiktorisch ist, wenn von einer Tautologie auf eine Kontradiktion geschlossen wird: also Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion. Dazu nur zwei Beispiele:

- aussagen-logisches Gesetz in quantoren-logischer Form

$\Lambda x(Fx \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg Fx) \not\Rightarrow \Lambda x(Fx \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg Fx)$

- quantoren-logisches Gesetz

$\Lambda x(Fx \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg Fx) \not\Rightarrow \vee x(Fx \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg Fx)$

2-2-2-3 SEMI-ANALYTISCH

Als wesentliche Gesetze der traditionellen Quantoren-Logik bzw. Klassen-Logik gelten:

Alle $\Rightarrow$ einige und alle$\neg$ $\Rightarrow$ einige$\neg$

In der Formalisierung $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \vee x(Fx \rightarrow Gx)$ gilt dieses Gesetz bei der Verwendung der Implikation. Wie in 1-2-4-4 beschrieben, findet man aber am häufigsten in der logischen bzw. wissenschaftstheoretischen Literatur folgende Formalisierungen:

Alle F sind G:	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
Einige F sind G:	$\vee x(Fx \wedge Gx)$
Alle F sind nicht G:	$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
Einige F sind nicht G:	$\vee x(Fx \wedge \neg Gx)$

Bei diesen Formalisierungen ist der Schluss von „alle“ auf „einige“ aber *nur semi-analytisch*, nicht tautologisch. Ebenso der Schluss von „alle nicht“ auf „einige nicht“. Es gilt hier also: Alle $\neg\Rightarrow$ einige bzw. alle $\longrightarrow$ einige (und entsprechend), konkret bedeutet das:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \vee x(Fx \wedge Gx)$

$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow \vee x(Fx \wedge \neg Gx)$

Das kann man zeigen, indem man die *Klassen-Relationen* („quantoren-logischen“ Formeln) in *Individuen-Relationen* („prädikaten-logische“ Formeln) übersetzt, für die sich Wahrheitstafeln angeben lassen. Noch eleganter soll das später im *quantitativen* Modell gezeigt werden.

Für $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \vee x(Fx \wedge Gx)$ schreibt man prädikaten-logisch ausführlich:

$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow$
$(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$
Zwar kann man (praktisch) die Wahrheitstafeln nicht für *alle* n angeben, aber es genügt ja zu zeigen, dass jeweils in *einem* Fall die Folge $\Phi \Rightarrow \Psi$ nicht erfüllt ist, dann bedeutet das bereits $\Phi \longrightarrow \Psi$, also einen nur *semi-analytischen* Schluss.

Da eine *Implikation* $Fx_i \rightarrow Gx_i$ in der *letzten Zeile* der Wahrheitstafel immer positiv (+) ist, muss auch die *Konjunktion* solcher Implikationen in der *letzten Zeile* der Wahrheitstafel positiv sein. Andererseits ist eine *Konjunktion* $Fx_i \wedge Gx_i$ in der *letzten Zeile* der Wahrheitstafel immer negativ (–). Somit muss eine *Disjunktion* dieser Konjunktionen in der *letzten Zeile* der Wahrheitstafel negativ sein. Die Implikation $X \rightarrow Y$ ist ja aber so definiert, dass sie negativ ist, wenn das Vorderglied positiv und das Nachglied negativ ist. D. h. dass die Wahrheitstafel für die Gesamtformel (mindestens) in der *letzten Zeile* negativ sein muss.

Entsprechend ließe sich $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge \neg Gx)$ beweisen.
Ich verweise hier auch auf die Wahrheits-Tabelle in 2-2-1-5, wo ich bereits für n = 2 gezeigt habe, dass hier nur ein semi-analytischer Schluss vorliegt:

Dies bestätigt noch einmal, dass der Schluss von „alle" auf „einige" in der Formulierung $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ nicht tautologisch ist, entsprechend der Schluss von „alle nicht" auf „einige nicht". Da die Gesetze „alle $\Rightarrow$ einige" und „alle$\neg$ $\Rightarrow$ einige$\neg$„ aber erstens allgemein anerkannt und zweitens sehr wesentlich für die Bedeutung von „alle" und „einige" sind, muss man die oben genannte formale Interpretation von *All-Sätzen* und *Partikulär-Sätzen* als sehr problematisch einstufen (dazu später weitere Argumente).

Man kann allerdings $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ in einen *strengen* Schluss überführen. Dazu muss man folgende *Zusatzhypothese* einführen: $\Lambda x(Fx)$. Im Ganzen:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$$

In dieser Form ist der Schluss zwar tautologisch. Das werde ich im quantitativen Punkt 2-5 beweisen. Aber die Einführung von $\Lambda x(Fx)$ ist durchaus problematisch.

Angenommen folgendes Beispiel: „Für alle x gilt: Wenn sie Menschen sind, sind sie sterblich, impliziert logisch: Für (mindestens) einige x gilt: sie sind Menschen und sie sind sterblich". Die Zusatzhypothese lautet dann: „Alle x sind Menschen" – und das ist unrealistisch.

Eine viel elegantere Lösung erlaubt die *Positiv-Implikation*, wie ich später zeigen möchte.

2-2-2-4 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Replikation* gilt im Wesentlichen das für die Implikation gesagte, daher soll hier auf eine gesonderte Darstellung verzichtet werden.

Die wichtigsten quantoren-logischen *Äquivalenzen* sind die Umformungen von Relationen mit dem *All-Quantor* Λ in solche mit dem *Partikulär-Quantor* V. Allerdings kann man anstatt von Äquivalenzen auch von *Definitionen* ausgehen, was aber logisch kaum einen Unterschied macht, beide gelten notwendig: z. B.: $\Lambda(X) =_{df} \neg V \neg(X)$.

Alle	nicht einige nicht	$\Lambda(X)$	$\Leftrightarrow$	$\neg V \neg(X)$
Alle nicht	nicht einige	$\Lambda\neg(X)$	$\Leftrightarrow$	$\neg V(X)$
Nicht alle	einige nicht	$\neg\Lambda(X)$	$\Leftrightarrow$	$V\neg(X)$
Nicht alle nicht	einige	$\neg\Lambda\neg(X)$	$\Leftrightarrow$	$V(X)$

Das ist hier jeweils die Darstellung in der *verkürzten* Form, voll ausgeschrieben lautete die obige Äquivalenz z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg V \neg(Fx \rightarrow Gx)$

2-2-2-5 SYLLOGISMUS

Mit *Syllogismus* bezeichnet man traditionell eine Form von *Quantoren-Logik*, die mit 3Variablen (M, S und P) operiert – und nicht mit 2, wie hier bisher dargestellt. Der Syllogismus geht auf Aristoteles zurück. Man unterscheidet 4 Figuren mit insgesamt ca. 20 gültigen Schlüssen (die genaue Anzahl ist umstritten: 15, 18, 19 oder 24).

Der Syllogismus arbeitet auch mit den vier genannten *Urteilen* (entsprechend Relationen), er benennt sie mit den Buchstaben a, e, i, o

a: alle	z. B.: S a P	alle S sind P
e: alle nicht	z. B.: S e P	alle S sind nicht P
i: einige	z. B.: S i P	einige S sind P
o: einige nicht	z. B.: S o P	einige S sind nicht P

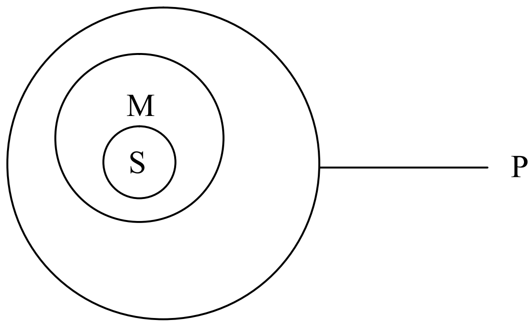
S = Subjekt, P = Prädikat, M = Mittelbegriff

Ein bekannter Syllogismus ist: (S a M) $\wedge$ (M a P) $\Rightarrow$ (S a P) (bzw. zuerst M a P)
Quantoren-logisch z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Gx \rightarrow Hx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Hx)$

Aber man schreibt einen Syllogismus normalerweise vertikal, nicht horizontal:

S a M	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
$\underline{\text{M a P}}$	$\underline{\Lambda x(Gx \rightarrow Hx)}$
S a P	$\Lambda x(Fx \rightarrow Hx)$

Diesen Syllogismus veranschaulicht das folgende Diagramm:



Manche Syllogismen lassen sich mit der *herkömmlichen Implikation* nicht darstellen, sondern nur mit der *Positiv-Implikation*. Im Grunde gibt es hier dieselben Probleme, die ich für die Quantoren-Logik beschreibe.

Der Bereich der Syllogismen ist sehr umfangreich, ich kann hier nicht ausführlich darauf eingehen. An späterer Stelle, vor allem bei der quantitativen Logik, wird das Thema noch genauer behandelt.

2-2-3 Positiv-Implikation

2-2-3-1 TAUTOLOGIE

Zum großen Teil gelten die gleichen Schlüsse wie bei der *normalen* Implikation, z. B.:

$\Lambda x(Fx *\rightarrow Gx) \wedge Fx_i *\Rightarrow Gx_i$

$\Lambda x(Fx *\rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) * \Rightarrow \Lambda x(Gx)$

Allerdings gibt es auch Unterschiede:

• „Wenn alle F auch G sind, dann sind mindestens einige G auch F"

Wir hatten gesehen, dieses wichtige Gesetz gilt nicht streng bei Verwendung der *Normal-Implikation*, aber bei Verwendung der *Positiv-Implikation*: $\Lambda x(Fx *\rightarrow Gx) *\Rightarrow Vx(Fx \leftarrow* Gx)$

Ich verweise dazu auf die Wahrheits-Tabelle in 2-2-2-1 mit der *normalen Implikation*. Der semi-analytische Schluss $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \mathrm{V}x(Fx \leftarrow Gx)$ ist nur in Zeile 11 ungültig (–). Es genügt somit zu zeigen, dass bei der *Positiv-Implikation* in dieser Zeile ein + oder ein □ steht, denn ein □ verhindert keinen strengen Schluss.

Und da ist die Sachlage eindeutig. Denn man kann (u. a.) die Zeilen 9 – 16 streichen, weil dort von negativem X_1 geschlossen wird, und solche Schlüsse sind nicht definiert (□). Da der Zentral-Relator bei der Normal-Implikation eben nur in der 11. Zeile ungültig ist, tritt dieser Fall also bei der Positiv-Implikation gar nicht auf, sie ist in der 11. Zeile undefiniert.

• „Wenn *alle* F auch G sind, dann sind *mindestens einige* F auch G“
Wir hatten gesehen, dieses wichtige Gesetz gilt in der üblichen Formalisierung nicht bei Verwendung der *Normal-Implikation*: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \neg\Rightarrow \mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$

Aber es gilt bei Verwendung der *Positiv-Implikation*: $\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx) *\!\Rightarrow \mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$.
Ich verweise hier auch auf die Wahrheits-Tabelle in 2-2-1-5, wo ich für die Normal-Implikation gezeigt habe, dass hier nur ein semi-analytischer Schluss vorliegt. Wie man dort sieht: Der (partielle) Schluss ist in den Zeilen 11, 12, 15 und 16 ungültig (–).

Es genügt somit zu zeigen, dass bei der Positiv-Implikation in diesen Zeilen ein + oder ein □ steht, dann ist $\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx) *\!\Rightarrow \mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$ als *strenger* Schluss gesichert.

Und zwar man kann (u. a.) die Zeilen 9 bis 16 streichen, weil dort von negativem X_1 geschlossen wird, und solche Schlüsse sind unbestimmt, also nicht relevant. Alle ungültigen Felder treten aber in diesem Zeilenabschnitt 9 - 16 auf, eben in Zeile 11, 12, 15 und 16.

2-2-3-2 KONTRADIKTION

Bei der Kontradiktion gilt für die *Positiv-Implikation* Anderes als für die normale Implikation. Sie ist nicht nur kontradiktorisch, wenn das Vorderglied tautologisch und das Nachglied kontradiktorisch ist. Sondern überhaupt, wenn das Nachglied die Negation des Vorderglieds bedeutet, also: Position $*\!\nRightarrow$ Negation.

Dabei ist zu bedenken: genauso wie gilt, eine Positiv-Implikation ist tautologisch, wenn unter dem Zentral-Relator außer + nur □ (undefiniert) steht, so gilt: die Positiv-Implikation ist kontradiktorisch, wenn unter dem Zentral-Relator außer – nur □ steht.

Beispiele für Kontradiktionen sind:

$$\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx) *\!\nRightarrow \neg\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)$$

$$\mathrm{V}x(Fx *\!\rightarrow Gx) *\!\nRightarrow \neg\mathrm{V}x(Fx *\!\rightarrow Gx)$$

Diese Kontradiktionen gelten auch, wenn als Teil-Relationen die *normale* Implikation fungiert, also z. B.:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\!\nRightarrow \neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$$

2-2-3-3 SEMI-ANALYTISCH

Ein typischer semi-analytischer quantoren-logischer Schluss ist der von „einige“ auf „alle“, also z. B.: „Wenn *einige* Menschen Philosophen sind, dann sind *alle* Menschen Philosophen“. Das ist zwar nicht kontradiktorisch, aber auch nicht streng folgerichtig.

$$\mathrm{V}x(Fx *\!\rightarrow Gx) *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)$$

Andere semi-analytische Schlüsse sind:

$$\mathrm{V}x(Fx *\!\rightarrow Gx) *\!\longrightarrow \neg\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)$$

$$\mathrm{V}x(Fx *\!\rightarrow Gx) *\!\longrightarrow \mathrm{V}x\neg(Fx *\!\rightarrow Gx)$$

Diese oben genannten semi-analytischen Schlüsse sind übrigens mit der normalen Implikation ebenfalls semi-analytisch gültig.

2-2-3-4 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Positiv-Äquivalenz* gelten quantoren-logisch überwiegend die Äquivalenzen der normalen Äquivalenz, etwa die klassischen Umformungen der Quantoren, hier in ausführlicher Schreibweise mit Individuenvariable x:

Alle	nicht einige nicht	$\Lambda x(Fx \ast\!\!\to Gx) \Leftrightarrow \neg Vx\neg(Fx \ast\!\!\to Gx)$
Alle nicht	nicht einige	$\Lambda\neg(Fx \ast\!\!\to Gx) \Leftrightarrow \neg V(Fx \ast\!\!\to Gx)$
Nicht alle	einige nicht	$\neg\Lambda(Fx \ast\!\!\to Gx) \Leftrightarrow V\neg(Fx \ast\!\!\to Gx)$
Nicht alle nicht	einige	$\neg\Lambda\neg(Fx \ast\!\!\to Gx) \Leftrightarrow V(Fx \ast\!\!\to Gx)$

Die Replikation weist keine Besonderheiten auf, weshalb hier nicht auf sie einzugehen ist.

2-2-3-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Folgende Beziehungen bestehen zwischen Implikation und Positiv-Implikation (ich verwende dabei als Zentral-Relator die Implikation, weil nämlich nur hier die *Kontraposition* gilt.)

• $\Lambda x(Fx \ast\!\!\to Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$
Kontraposition: $\neg\Lambda x(Fx \to Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \ast\!\!\to Gx)$
(Man könnte allerdings vertreten, dass hier sogar die Äquivalenz gilt. Aber dies erforderte komplizierte Erläuterungen, auf die ich hier verzichten möchte.)
• $Vx(Fx \ast\!\!\to Gx) \Rightarrow Vx(Fx \to Gx)$
Kontraposition: $\neg Vx(Fx \to Gx) \Rightarrow \neg Vx(Fx \ast\!\!\to Gx)$

Die für diese Gesetze werde ich im *quantitativen* Bereich anbringen, denn quantitativ ist dieser Beweis viel leichter und eleganter zu führen. Natürlich ist die Positiv-Implikation auch geeignet, Schlüsse des *Syllogismus* darzustellen, sogar viel geeigneter dafür als die normale Implikation, mit der sich nicht alle Syllogismen darstellen lassen.

2-2-4 Systematik

Ich komme zurück auf die 5 *Modelle* quantoren-logischer Relationen, die in 1-2-4 und 1-5-4 bereits vorgestellt wurden. Und zwar geht es dabei um *komplexe* Relationen, in denen jeweils *zwei* Prädikate bzw. Eigenschaften F und G vorkommen. Es ist nun zu prüfen, inwieweit die anerkannten Gesetzmäßigkeiten des *logischen Quadrats* gelten.

Allerdings werden die Aussagen hier nicht alle im Einzelnen durch *Wahrheitstafeln* bewiesen. Das erforderte, die *quantoren-logischen* Relationen zunächst in *prädikaten-logische* Relationen umzuformen und für die dann umfangreiche und komplizierte Wahrheitstafeln aufzustellen. Zwar wurden alle Relationen durch solche Wahrheitstafeln geprüft, aber diese Tafeln sollen im Text nur in Einzelfällen aufgeführt werden. Ohnehin ist die Beweisführung im Rahmen der *quantitativen Logik* leichter und verständlicher.

Zunächst sei zur Erinnerung noch einmal das logische Quadrat dargestellt:

alle	$^{+}\mid^{+}$	alle$\neg$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
einige	$^{+}\vee^{+}$	einige$\neg$

2-2-4-1 MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

$$\begin{array}{ccc} \Lambda x(Fx \rightarrow Gx) & {}^{+}|^{+} & \Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \\ \Downarrow & {}^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\ \mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx) & {}^{+}\vee^{+} & \mathrm{V}x\neg(Fx \rightarrow Gx) \end{array}$$

Bei diesem Modell gelten *alle* analytischen Relationen des logischen Quadrats. Denn in der Klammer steht immer dieselbe Ausdruck ($Fx \rightarrow Gx$). Nur die Quantoren sind unterschiedlich, und genau zwischen diesen unterschiedlichen Quantoren (einschließlich der Negationen) gelten eben die Beziehungen des logischen Quadrats.

2-2-4-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

$$\begin{array}{ccc} \Lambda x(Fx \rightarrow Gx) & & \Lambda x\ (Fx \rightarrow \neg Gx) \\ \Downarrow & {}^{+}\vee^{+} & \Downarrow \\ \mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx) & {}^{+}\vee^{+} & \mathrm{V}x\ (Fx \rightarrow \neg Gx) \end{array}$$

Wie man sieht, weichen bei diesem Modell mehrere Beziehungen vom logischen Quadrat ab. So besteht in der Diagonalen keine *Kontravalenz* = kontradiktorischer Gegensatz, (${}^{+}{>}{<}^{+}$), sondern nur die *Disjunktion* = subkonträrer Gegensatz (${}^{+}\vee^{+}$).

Und auch zwischen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ und $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ besteht keine Exklusion, sondern es lässt sich gar keine relevante analytische Beziehung angeben.

2-2-4-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

$$\begin{array}{ccc} \Lambda x(Fx \wedge Gx) & {}^{+}|^{+} & \Lambda x(Fx \wedge \neg Gx) \\ \Downarrow & {}^{+}|^{+} & \Downarrow \\ \mathrm{V}x(Fx \wedge Gx) & & \mathrm{V}x(Fx \wedge \neg Gx) \end{array}$$

Hier stimmen 3 analytische Relationen mit dem logischen Quadrat überein, d. h. aber auch 3 nicht. In den beiden Diagonalen besteht kein *kontradiktorischer* Gegensatz (${}^{+}{>}{<}^{+}$), sondern nur ein konträrer (${}^{+}|^{+}$). Zwischen $\mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$ und $\mathrm{V}x(Fx \wedge \neg Gx)$ lässt sich keinerlei *tautologische* Relation angeben.

2-2-4-4 MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

Das ist wie gesagt das bekannteste Modell, in der Logik wie in der *Wissenschaftstheorie*.

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$		$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
	$^{+}{><}^{+}$	
$Vx(Fx \wedge Gx)$		$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$

Bei diesem am weitesten verbreitetsten Modell stimmen nur die 2 Diagonal-Beziehungen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ $^{+}{><}^{+}$ $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$ und $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ $^{+}{><}^{+}$ $Vx(Fx \wedge Gx)$ mit dem logischen Quadrat überein. Und bei den anderen Relationen besteht gar keine *tautologische* Verbindung. Es ist erstaunlich, dass dieser Diskrepanz nicht mehr Aufmerksamkeit geschenkt wird, denn sie stellt die Brauchbarkeit dieses Modells doch sehr in Frage.

Zu den *Kontravalenzen* und *Äquivalenzen* von $\rightarrow$ und $\wedge$:

- $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ $^{+}{><}^{+}$ $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
  $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
  $\neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)$ $^{+}{><}^{+}$ $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
- $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ $^{+}{><}^{+}$ $Vx(Fx \wedge Gx)$
  $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \Leftrightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow \neg Gx) \Leftrightarrow \neg Vx(Fx \wedge Gx)$
  $\neg Vx(Fx \wedge Gx)$ $^{+}{><}^{+}$ $Vx(Fx \wedge Gx)$

2-2-4-5 MODELL 5: (NEGIERTE) POSITIV-IMPLIKATION

$\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$	$^{+}\vert^{+}$	$\Lambda x\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
$\Downarrow$	$^{+}{><}^{+}$	$\Downarrow$
$Vx(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$	$^{+}\vee^{+}$	$Vx\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$

Dieses Modell erfüllt *alle* Bedingungen des *logischen Quadrats*. Und dieses Modell zeigt noch einmal besonders klar: Es geht bei All- und Partikulär-Ausagen nicht um unterschiedliche logische Strukturen, sondern nur um *unterschiedliche Quantität* derselben Struktur $\ast\!\!\rightarrow$.

Die völlige Übereinstimmung mit dem logischen Quadrat gilt sonst allein noch für das Modell 1, das sich nur durch Verwendung der *Normal-Implikation* unterscheidet. Wie ich aber früher gezeigt habe, führt die normale Implikation zu verschiedenen Problemen. So spricht sehr vieles für dieses Modell mit der Positiv-Implikation, ihr einziger Nachteil ist, dass sie nicht *alle* logischen Welten abdeckt.

2-2-5 Erweiterungen

2-2-5-1 INKLUSIV / EXKLUSIV
Auf die *inklusive* Quantoren-Logik bin ich schon genauer eingegangen. Bei der *exklusiven* Quantoren-Logik ergeben sich teils andere Verhältnisse. Zunächst das *logische Quadrat*.

alle	$^{+}\vert^{+}$	alle¬
$^{+}\vert^{+}$	$^{+}\vert^{+}$	$^{+}\vert^{+}$
genau einige	$\Leftrightarrow$	genau einige¬

Wichtige *Äquivalenzen* sind:

$\exists x(Fx) \Leftrightarrow [\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x\neg(Fx)] \Leftrightarrow [Vx\neg(Fx) \wedge Vx(Fx)]$

$\neg\exists x(Fx) \Leftrightarrow [\Lambda x(Fx) \vee \Lambda x\neg(Fx)] \Leftrightarrow [\neg Vx\neg(Fx) \vee \neg Vx(Fx)]$

Wichtige *Folgen* sind:

$\exists x(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx)$ $\qquad$ $\exists x(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx)$

$\exists x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ $\qquad$ $\exists x(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$

Prädikaten-logisch gilt :

$\exists x(Fx) \Leftrightarrow (Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n) \wedge (\neg Fx_1 \vee \ldots \vee \neg Fx_n)$

$\neg\exists x(Fx) \Leftrightarrow (Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n) \vee (\neg Fx_1 \wedge \ldots \wedge \neg Fx_n)$

Im Verhältnis zur *inklusiven* Quantoren-Logik ergibt sich in einer Gesamt-Übersicht:

	¬genau einige	$\Leftrightarrow$	¬genau einige¬	
	$\Uparrow$		$\Uparrow$	
¬einige¬ $\Leftrightarrow$	alle	$^{+}\vert^{+}$	alle¬	$\Leftrightarrow$ ¬einige
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$^{+}><^{+}$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
einige $\Leftrightarrow$	¬alle¬	$^{+}\vee^{+}$	¬alle	$\Leftrightarrow$ einige¬
	$\Uparrow$		$\Uparrow$	
	genau einige	$\Leftrightarrow$	genau einige¬	

2-2-5-2 SECHS-WERTIGE LOGIK

Die *6-wertige* Logik wurde in ihrer *synthetischen* Form bereits vorgestellt. Als neue Kategorie wurde dabei „die meisten" eingeführt. Jetzt geht es um die *analytischen* Beziehungen.

Die 6-wertige Logik umfasst folgende Stufen bzw. Gegensätze:

Alle – alle nicht / die meisten – die meisten nicht / einige – einige nicht.

Es gilt bei *inklusiver* Interpretation:

alle $\Rightarrow$ die meisten $\Rightarrow$ einige $\neg$einige $\Rightarrow$ $\neg$die meisten $\Rightarrow$ $\neg$alle

alle$\neg$ $\Rightarrow$ die meisten$\neg$ $\Rightarrow$ einige$\neg$ $\neg$einige$\neg$ $\Rightarrow$ $\neg$die meisten$\neg$ $\Rightarrow$ $\neg$alle$\neg$

Bei inklusiver Interpretation gilt also: *mindestens* einige (vielleicht die meisten, vielleicht alle), *mindestens* die meisten (vielleicht alle).

Bei *exklusiver* Interpretation heißt es dagegen: *genau einige*, *genau die meisten*. So gilt:

Genau einige $\Leftrightarrow$ genau einige nicht

Aber anders: Genau die meisten $\Leftrightarrow$ genau die wenigsten nicht

Bei der exklusiven Logik ergeben sich allerdings nur 5 Unterscheidungen, man kommt also zu einer *5-wertigen* Logik:

alle / genau die meisten / genau einige (nicht) / genau die wenigsten / alle nicht.

Außer zwischen den äquivalenten Ausdrücken herrscht *exklusiv* überall der *konträre* Gegensatz, also Φ $^+|^+$ Ψ bzw. $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$. Z. B. gilt für „alle":

alle $\Rightarrow$ $\neg$die genau meisten $\wedge$ $\neg$genau einige $\wedge$ $\neg$genau die wenigsten $\wedge$ $\neg$alle nicht

2-2-5-3 DIMENSIONEN

Verschiedene Dimensionen wie *Raum* und *Zeit* können entsprechend strukturiert werden:

In der 4-wertigen (inklusiven) *Raum-Logik* gilt:

überall $\Rightarrow$ mancherorts

In der 6-wertigen Raum-Logik gilt:

überall $\Rightarrow$ meistenorts $\Rightarrow$ mancherorts

In der 4-wertigen (inklusiven) *Zeit-Logik* gilt:

immer $\Rightarrow$ manchmal

In der 6-wertigen Zeit-Logik gilt:

immer $\Rightarrow$ meistens $\Rightarrow$ manchmal

Für die Negationen gilt Entsprechendes.

2-2-5-4 MODAL-LOGIK

• *Inklusive* Modal-Logik

Hier gilt in der 4-wertigen Logik, entsprechend dem *logischen Quadrat* der Quantoren-Logik:

notwendig	$^+|^+$	notwendig$\neg$
$\Downarrow$	$^+{><}^+$	$\Downarrow$
möglich	$^+\vee^+$	möglich$\neg$

Z. B.: Notwendig(Φ) $^{+}{><}^{+}$ Möglich(¬Φ) bzw. Notwendig(Φ) ⇔ ¬Möglich(¬Φ).
Es ist beliebig, ob man z. B. ¬Möglich(¬Φ) oder ¬Möglich¬(Φ) schreibt.
Entsprechend der Quantoren-Logik gelten folgende *Äquivalenzen* in der Modal-Logik:

Notwendig	⇔	¬Möglich¬	N ⇔ ¬M¬
Notwendig¬	⇔	¬Möglich	N¬ ⇔ ¬M
¬Notwendig	⇔	Möglich¬	¬N ⇔ M¬
¬Notwendig¬	⇔	Möglich	¬N¬ ⇔ M

Also z. B.: Notwendig ¬(Φ) ⇔ ¬Möglich (Φ) bzw. N¬(Φ) ⇔ ¬M(Φ)

Sprachlich gibt es folgende Umformungen:

Nicht notwendig ⇔ *unnotwendig*
Nicht möglich ⇔ *unmöglich*

In einer *6-wertigen* Logik ergibt sich:
notwendig ⇒ wahrscheinlich ⇒ möglich
¬möglich ⇒ ¬wahrscheinlich ⇒ ¬notwendig
unmöglich ⇒ unwahrscheinlich ⇒ unnotwendig

Die Frage ist, wie in diesem Zusammenhang „*tatsächlich*“ (wahr) bzw. „*nicht tatsächlich*“ (falsch) einzuordnen sind.
notwendig ⇒ tatsächlich ⇒ möglich
¬möglich ⇒ ¬tatsächlich ⇒ ¬notwendig
„Tatsächlich“ liegt allerdings auf einer *anderen Ebene*, keiner logischen, sondern einer *realen* (synthetischen) Ebene. Von daher sind diese Ketten-Schlüsse nicht unproblematisch.

• *Exklusive* Modal-Logik
Auch hier lassen sich die Beziehungen am besten im logischen Quadrat darstellen:
N = Notwendig, M = Möglich

N	$^{+}\vert^{+}$	N¬
$^{+}\vert^{+}$	$^{+}\vert^{+}$	$^{+}\vert^{+}$
genau M	⇔	genau M¬

Z. B.: Genau M(Φ) ⇔ Genau M¬(Φ)
„Es ist genau möglich, dass Φ“, ist äquivalent: „Es ist genau möglich, dass nicht Φ“.
Für „genau möglich“ kann man schreiben: $M^{\exists}$ (unter Bezug auf den *exklusiven* Partikulär-Quantor ∃ für „genau einige“).
Im Verhältnis zur *inklusiven* Modal-Logik gilt:
Genau möglich ⇔ möglich und möglich nicht
$M^{\exists}$ ⇔ M ∧ M¬ bzw. $M^{\exists}$¬ ⇔ M ∧ M¬

Z. B. Wenn Φ *genau* möglich ist, dann und nur dann gilt: Es ist möglich, dass Φ, und es ist möglich, dass nicht Φ.

Besonders interessant ist „genau möglich" bzw. die Konjunktion von „möglich" und „möglich nicht" aus folgendem Grund: Dies ist die beste und präziseste Definition von „*kontingent*", und *Kontingenz* („Zufälligkeit") spielt eine große Rolle in der Philosophie:

kontingent ⇔ möglich ∧ möglich¬

2-2-5-5 INTENSIONALE LOGIK

Die *intensionale* Quantoren-Logik wendet (wie in 1-2-5-5 beschrieben) die Quantoren nicht auf Objekte bzw. *Individuen* an (alle x ...), sondern auf Eigenschaften bzw. *Größeneinheiten* (alle Einheiten ...).

Z. B.: Wenn Sokrates *alle* Weisheits-Einheiten besitzt (*vollständig* weise ist), dann besitzt er auch – mindestens – *einige* Weisheits-Einheiten (ist auch mindestens *partiell* weise).

Im Folgenden werden nur ausgewählte intensionale (analytische) Relationen dargestellt, weitere sind direkt aus der *extensionalen* Quantoren-Logik abzuleiten.

• Herkömmliche *inklusive* 4-wertige Quantoren-Logik:

Äquivalenzen:

vollständig ⇔ ¬partiell¬

¬vollständig ⇔ partiell¬

vollständig¬ ⇔ ¬partiell

¬vollständig¬ ⇔ partiell

Beispiel: „Sokrates ist vollständig weise ⇔ Sokrates ist nicht partiell nicht weise".

Folgen:

Vollständig ⇒ partiell bzw. vollständig¬ ⇒ partiell¬

¬partiell ⇒ ¬vollständig bzw. ¬partiell¬ ⇒ ¬vollständig¬

• Erweiterte *inklusive* 6-wertige Quantoren-Logik

Vollständig ⇒ überwiegend ⇒ partiell

Vollständig¬ ⇒ überwiegend¬ ⇒ partiell¬

Anstatt „überwiegend" kann man auch „überdurchschnittlich" o. ä. einsetzen.

Beispiel: „Er ist vollständig zufrieden ⇒ Er ist (mindestens) überwiegend zufrieden ⇒ Er ist (mindestens) partiell zufrieden".

• Einfache *exklusive* 3-wertige Logik

Genau partiell ⇔ genau partiell¬

Beispiel: „Wenn Peter partiell klug ist, dann ist er auch partiell nicht klug und umgekehrt".

Genau partiell ⇔ partiell ∧ partiell¬

• Erweiterte *exklusive* 5-wertige Logik

Hier geht es um die Beziehungen zwischen vollständig – genau überdurchschnittlich – genau partiell (nicht) – genau unterdurchschnittlich – vollständig nicht. Zwischen allen diesen Eigenschaftsausprägungen besteht der *konträre Gegensatz.*

2 – 3 QUANTITATIVE LOGIK

2-3-1 Einführung

Die *quantitative* Logik wurde in 1-3 eingeführt. Sie unterscheidet nicht nur zwischen 2 Werten wie die *Aussagen-Logik* oder (meistens) 4 Werten wie die *Quantoren-Logik*, sondern sie unterscheidet *unendlich viele* Werte. Man kann die *absolute Quantität* q angeben, wesentlich für die Logik ist aber die *relative Quantität* p, die allerdings auf der absoluten Quantität fußt. In diesem Kapitel über Analytik geht es um *analytisch-quantitative* Beziehungen, und zwar vor allem um logische *Schlüsse*. Ich konzentriere mich in dieser Einführung auf *semi-analytische Schlüsse*, an denen sich die logischen Strukturen am besten darstellen lassen.

Die Ausführungen in 2-3-1 sind recht kompliziert und enthalten auch noch ungeklärte Punkte bzw. Diskussionen, sie sind in erster Linie für Spezialisten gedacht, andere Leser mögen sie ggf. übergehen (als Basis dient 1-3-4-5).

Wir können logische Schlüsse nach der *Anzahl der Quantifizierungen* unterscheiden.
Bei einem einfachen (partiellen) Schluss $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ kann man unterscheiden:
- 1-fache Quantifizierung: $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = r/n$
- 2-fache Quantifizierung: $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n$

Diese verschiedenen Quantifizierungen werde ich jetzt besprechen

2-3-1-1 EIN-FACHE QUANTIFIZIERUNG

Bei der *1-fachen* Quantifizierung spreche ich auch von einem *Gesamt-Ausdruck* oder einer *ganzheitlichen Formel*. Dies sei hier an einem *semi-analytischen* Schluss erläutert, nämlich:

$$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$$

Zur Angabe der relativen Quantität p schreibt man: $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = r/n$.

Hier wird also nur dem *Gesamt-Ausdruck* $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y)$ *ein* quantitativer Wert, nämlich r/n zugewiesen.

Man könnte in diesem Fall auch die inneren *Klammern* weglassen, weil $\rightarrow$ stärker bindet als $\longrightarrow$, d. h. $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = r/n$. Aber mit Klammern ist es normalerweise übersichtlicher.

Als Beispiel nehmen wir: $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = 4/10$.

Das kann man z. B. folgendermaßen *interpretieren*:

„$p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y)$“ ist in 4 von 10 Fällen gültig.

Mit 40% Wahrscheinlichkeit impliziert „$X \rightarrow Y$“ semi-analytisch „Y“.

Die *qualitative* Wahrheitstafel des Schlusses lautet folgendermaßen:

	X	→	Y	⟶	Y
a	+	+	+	+	+
b	+	–	–	+	–
c	–	+	+	+	+
d	–	+	–	–	–

Um eine *quantitative Formel* dieses Schlusses zu konstruieren, folgt man einfach der Wahrheitstafel. Unter dem *Zentral-Relator* $\longrightarrow$ steht der Wahrheitsverlauf: + + + –. Daraus bildet man eine Formel, wie es bei den synthetischen Relationen beschrieben wurde.

Zur Berechnung von p dividiert man die Anzahl der *Fälle* in den *gültigen Welten* (wo + unter dem Zentral-Relator $\longrightarrow$ steht) durch die Anzahl der Fälle in *allen Welten*. D. h. der Nenner ist (bei 2 Variablen) immer: a + b + c + d.

Wie man sieht, mit + belegt sind a, b und c. So ergibt sich als Formel:

$$p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$$

Der Wahrheitsverlauf + + + – entspricht der Definition der *Disjunktion* $X \vee Y$: + + + –

Somit kann man sagen: $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = p(X \vee Y)$

Davon ist unberührt: „$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$“ ist eine *semi-analytische* Relation und „$X \vee Y$“ ist eine *synthetische* Relation.

• Wahrheitstafel

Die Frage ist, ob wir eine *Wahrheitstafel* für $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = r/n$ aufstellen können. Zunächst bietet es sich an, der *qualitativen* Wahrheitstafel von $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ zu folgen. Ich habe sie oben dargestellt, man kann sie aber auch in folgender Form schreiben, welche die *konjunktive* Deutung verdeutlicht:

	$X \rightarrow Y$	Y	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
1.	+	+	+
2.	–	–	+
3.	+	+	+
4.	+	–	–

Die 1. Zeile der Wahrheitstafel ist dann zu lesen:

$(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$, die anderen Zeilen entsprechend (wie früher erläutert).

Um eine entsprechende *quantitative* Wahrheitstafel für $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$ aufzustellen, müssen wir für $p(X \rightarrow Y)$ und $p(Y)$ *gesonderte* quantitative Werte angeben. Zwar sind die nicht vorgegeben, wir kennen nur den Gesamtwert $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$, aber wir können den Prämissen Werte zuweisen, also z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und $p(Y) = s/n$. (Dadurch ergibt sich aber indirekt eine *3-fache*, nicht mehr eine *1-fache* Quantifizierung.)

Man erhält folgende Tafel:

	$p(X \rightarrow Y) = r/n$	$p(Y) = s/n$	$p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$
1.	+	+	+
2.	–	–	+
3.	+	+	+
4.	+	–	–

Die 1. Zeile der Wahrheitstafel (in der es *keine Negationen* gibt) ist zu lesen:

$p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n \longrightarrow p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$, die anderen Zeilen entsprechend. Diese Wahrheitstafel ist allerdings inadäquat, pointiert gesagt, sie ist falsch. Denn in der Wahrheitstafel müssen sich für alle Zeilen strenge Schlüsse ergeben, doch die erste Zeile p(X → Y) = r/n ∧ p(Y) = s/n ⟶ p((X → Y) ⟶ Y) = m/n ist nur ein *semi-analytischer* Schluss, daher darf man bei der 1. Zeile als Zentral-Relator nur den *semi-analytischen* Implikator ⟶ nehmen, nicht den *analytischen* Implikator ⇒. Und dasselbe gilt für Zeile 2, 3 und 4. Es ist sofort offensichtlich, dass wir für diesen Schluss mit den 3 *numerischen Variablen* r/n, s/n und m/n nicht *allgemein* angeben können, ob er gültig ist oder nicht. Entsprechend habe ich in 1-3-4-5 gezeigt, dass sich keine adäquate Wahrheitstafel für p(X → Y) = r/n angeben lässt.

2-3-1-2 BERECHNUNG BEI DREI-FACHER QUANTIFIZIERUNG

Es gibt aber noch eine andere Methode, den Wert von semi-analytischen Schlüssen analog der *konjunktiven* Wahrheitstafel festzustellen, ohne dass wirklich eine Wahrheitstafel aufgestellt wird, nämlich durch *Berechnung* der Konklusion.

Gehen wir zurück zu dem Beispiel p((X → Y) ⟶ Y) = m/n

Dabei ist zu bedenken: Auch wenn wir für diesen quantitativen Schluss keine Wahrheitstafel aufstellen können, können wir (der *qualitativen*, wahrheitswert-funktionalen Wahrheitstafel folgend) einen neuen *quantitativ-funktionalen* Schluss formulieren, bei dem gilt:

– die Prämisse X → Y wird zur neuen *quantitativen* Prämisse p(X → Y) = r/n
– die Konklusion Y wird ebenfalls zu einer neuen quantitativen Prämisse p(Y) = s/n
– der alte Gesamtschluss p((X → Y) ⟶ Y) = m/n wird zur neuen Konklusion

Es ergibt sich: p(X → Y) = r/n ∧ p(Y) = s/n ⟶ p((X → Y) ⟶ Y) = m/n

Setzen wir dafür Formeln ein:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \mathrm{r/n} \ \wedge \ \frac{a+c}{a+b+c+d} = \mathrm{s/n} \ \longrightarrow \ \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \mathrm{m/n}$$

Nun können wir aber m/n durch r/n und s/n definieren.

Machen wir uns klar, dass gilt: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \mathrm{r/n} \Leftrightarrow \frac{b}{a+b+c+d} = 1 - \mathrm{r/n}$

Weiterhin gilt: $\frac{a+c}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} = \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$

Wir können jetzt schreiben:

p(X → Y) = r/n ∧ p(Y) = s/n ⇒ p((X → Y) ⟶ Y) = 1 – r/n + s/n

Man kann hier von einer *kombinierten Formel* sprechen. Bei der kombinierten Formel berechnet man also den Wert der *Gesamtformel*, indem man von den Werten der *Einzelkomponenten* ausgeht. Beispielsweise berechnet man den Wert von p((X → Y) ⟶ Y), indem man von den Werten der Komponenten p(X → Y) und p(Y) ausgeht. Dies ist anders als bei einer Wahrheitstafel, da würde nur entschieden, die Gesamtformel ist wahr oder falsch, hier wird ihr ein *quantitativer Wert* zugewiesen. So gelingt es, den *partiellen* Schluss in einen *echten* Schluss umwandeln, also:

p(X → Y) = r/n ∧ p(Y) = s/n ⟶ p((X → Y) ⟶ Y) = m/n in:
p(X → Y) = r/n ∧ p(Y) = s/n ⇒ p((X → Y) ⟶ Y) = 1 – r/n + s/n

Um die Gültigkeit dieses Schlusses nachzuweisen, muss man *Rechen-Methoden* verwenden, man kann nicht einfach vergleichen, welche Symbole in der Wahrheitstafel gegenüber stehen. Andererseits, es lässt sich bei diesem Schluss gar keine *Wahrheitstafel* aufstellen (wie oben erläutert). Darum stellt sich die Frage: Darf man überhaupt den logischen *Implikator* ⇒ verwenden, wenn sich der Schluss nicht mittels *Wahrheitstafel* darstellen lässt? Ich meine ja, denn dieser *quantitative* Schluss lässt sich letztlich doch als *logischer* Schluss verstehen, in dem fundamentalen Sinn, dass die Information der Konklusion in der Information der Prämisse(n) bereits enthalten ist, wie in 2-1-2-1 gezeigt wurde.

2-3-1-3 ZWEI-FACHE QUANTIFIZIERUNG

Wir werden hier zunächst 2 Schlüsse unterscheiden:

1) *semi-analytischer* Schluss: z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n$.
2) *strenger* Schluss: z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$

1) *Semi-analytischer Schluss*

Es geht also um einen Schluss wie: $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n$.

In normaler Sprache lautet die primäre *Bedeutung* dieses Schlusses:
„Wenn die Wahrscheinlichkeit $p(X \rightarrow Y)$ den Wert r/n besitzt, dann besitzt die Wahrscheinlichkeit $p(Y)$ den Wert s/n". (Auf eine mengen-theoretische Interpretation verzichte ich hier.)
Ich habe diesen Schluss als *semi-analytisch* gekennzeichnet, denn es ist nicht allgemein zu bestimmen, ob er streng gültig ist; erst durch Einsatz von *konkreten* Werten für die Variablen r/n und s/n können wir das – aber auch nur partiell bzw. bedingt – entscheiden.

Fragen wir dennoch genauer nach den *Wahrheitsbedingungen* und damit nach der *Wahrheitstafel* dieses Schlusses, so ergeben sich vor allem zwei Möglichkeiten:

Gemäß der konjunktiven Deutung wird aus der Konjunktion der Glieder $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und $p(Y) = s/n$ auf die Wahrheit/Falschheit der *Gesamt-Relation* $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n$ geschlossen. D. h. für die 1., *positive* Zeile:

$$[p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n] \Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$$

Greifen wir zunächst zurück auf die *qualitative* Form dieses Schlusses und zeigen seine Wahrheitstafel bzw. die Einzel-Schlüsse, die den *Zeilen* der Wahrheitstafel entsprechen.

	$(X \rightarrow Y)$	$\wedge$	Y	$\Rightarrow$	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	
1.	+	+	+	+	+	$(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
2.	−	−	−	+	+	$\neg(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
3.	+	+	+	+	+	$(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
4.	+	−	−	+	−	$(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$

Wie übersetzt man eine solche *qualitative* Wahrheitstafel in eine *quantitative* Wahrheitstafel ?

Erstens stellt sich dabei die Frage, ob wir die *qualitativen*, aussagen-logischen *Wahrheitsverläufe* (also z. B. für $X \rightarrow Y$ den Verlauf + – + +) in die *quantitative* Wahrheitstafel übernehmen; ich tat das in einer früheren Fassung des Textes, habe aber inzwischen meine Auffassung geändert. Der Grund ist folgender:

Die *qualitativen* Ausdrücke $(X \rightarrow Y)$ und Y stehen in einem genau bestimmten logischen *Abhängigkeitsverhältnis*, was die Wahrheitstafel widerspiegelt (siehe oben).

Zwar stehen die *quantitativen* Ausdrücke $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und $p(Y) = s/n$ ebenfalls in einem logischen Abhängigkeitsverhältnis (zumal eben das Y in $X \rightarrow Y$ enthalten ist). Vor allem zeigt sich dies in der Ungleichung $p(X \rightarrow Y) \geq p(Y)$; das erläutere ich im nächsten Punkt.

Aber außer diesem Größen-Verhältnis besteht *Unabhängigkeit*. Innerhalb des definierten Wertebereichs von $0 \leq p \leq 1$ können $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und $p(Y)$ alle denkbaren Werte annehmen. D. h. wenn ich $p(X \to Y)$ kenne, weiß ich keinesfalls *genau*, wie groß $p(Y)$ ist und umgekehrt.

Daher darf man den Wahrheitsverlauf aus der *qualitativen* Wahrheitstafel *nicht* übernehmen, sondern muss die Werte wie *unabhängige synthetische* Werte behandeln (Stichpunkt: *systematische* Wahrheitstafel).

Als *konjunktive* Wahrheitstafel ergibt sich dann:

$[p(X \to Y) = r/n \wedge$	$p(Y) = s/n]$	$\Rightarrow [p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	−	+

Zweitens stellt sich die Frage, wie man das + und das − übersetzt. Hier bietet sich an:

Für $p(X \to Y)$: bei +: r/n bei −: $\neg(r/n)$ bzw. $\neq r/n$

Für $p(Y)$: bei +: s/n, bei −: $\neg(s/n)$ bzw. $\neq s/n$.

Setzen wir die *quantitativen* Werte in die Wahrheitstafel ein, erhalten wir:

$[p(X \to Y)$	$\wedge\ p(Y)\,]$	$\Rightarrow [p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
r/n	s/n	+
r/n	$\neq$ s/n	−
$\neq$ r/n	s/n	+
$\neq$ r/n	$\neq$ s/n	+

Als einzelne Zeilen ergeben sich:

1. $[p(X \to Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n] \Rightarrow [p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
2. $[p(X \to Y) = r/n \wedge p(Y) \neq s/n] \Rightarrow \neg[p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
3. $[p(X \to Y) \neq r/n \wedge p(Y) = s/n] \Rightarrow [p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
4. $[p(X \to Y) \neq r/n \wedge p(Y) \neq s/n] \Rightarrow [p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$

(Wenn wir die Wahrheitstafel analog der qualitativen Wahrheitstafel konstruiert hätten, ergäben sich ebenfalls nur strenge Schlüsse.)

Hier stoßen wir also wieder auf das schon bekannte Problem: Wir können zwar *logisch* eine korrekte Wahrheitstafel und korrekte Schlüsse aufstellen. Aber wenn wir diese *quantitativen* Schlüsse *mathematisch* analysieren, scheinen sie uns sinnlos. Denn die *Variablen* wie r/n sind weitgehend *unbestimmt* (noch unbestimmter sind aber die *negativen* Werte wie $\neq$ r/n, dieser Wert schließt eben nur sich selbst, also nur *einen* Wert aus).

Aber auch bei einem *konkreten* Beispiel ergibt sich kein wesentlich anderes Resultat, z. B. für $p(X \to Y) = 7/10 \longrightarrow p(Y) = 5/10$. Die konjunktive Deutung lautet hier:

$$[p(X \to Y) = 7/10 \wedge p(Y) = 5/10] \Rightarrow [p(X \to Y) = 7/10 \longrightarrow p(Y) = 5/10]$$

Da wir es jetzt mit Konstanten wie 7/10 zu tun haben, wirkt diese 1. Zeile der Wahrheitstafel wohl mathematisch sinnvoll. Aber bei den weiteren Zeilen der Wahrheitstafel benötigen wir wieder die *Negationen*, und diese *negativen* Bestimmungen $\neq$ 5/10 oder $\neq$ 7/10 sind zu unkonkret für eine sinnvolle mathematisch-numerische Deutung. Dies gilt auch, wenn man einschränkt: Die Negation z. B. $\neq$ 7/10 bezieht sich nur auf den *Zähler* (also Negationen sind 1/10, 2/10 usw.), der Nenner n = 10 wird nicht negiert; außerdem sind grundsätzlich alle Werte $p < 0$ und $p > 1$ ausgeschlossen.

2) *strenger Schluss*: $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$
Hier handelt sich um einen strengen Schluss. Deutlicher wird das, wenn man die Formeln verwendet.

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \leq r/n$$

Dies ist unmittelbar evident und mathematisch plausibel. Betrachtet man nur den Zähler, dann gilt: a + c ist Teil (Teilsumme) von a + c + d. Der Teil kann aber nicht größer als das Ganze sein.

Man kann den Schluss auch *umgekehrt* schreiben: $p(Y) = s/n \Rightarrow p(X \rightarrow Y) \geq s/n$.
Für die *Negationen* gilt, am Beispiel von p(Y):
$\neg[p(Y) \geq s/n]$ ist definiert als $p(Y) < s/n$, $\neg[p(Y) \leq s/n]$ ist definiert als $p(Y) > s/n$.

Eine ganz andere Möglichkeit ist, mit einer *Gleichung* und mit der *Addition* zu arbeiten: Dazu führen wir den Faktor $p(\Phi) = m/n$ ein. Es soll gelten: $p(Y) + p(\Phi) = p(X \rightarrow Y)$.
Bzw. $s/n + m/n = r/n$.
Zurück zur ursprünglichen Form: $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$
Bei *konjunktiver* Deutung ergäbe sich als *1. Zeile* einer *Wahrheitstafel*:

$$[p(X \rightarrow Y) = r/n \ \wedge \ p(Y) \leq r/n] \Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n]$$

Eine *vollständige*, adäquate Wahrheitstafel aufzustellen, ist aber m. E. nicht möglich.

Der Grund ist, wir können nicht die Wahrheitsverläufe für $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und $p(Y) \leq r/n$ aufstellen. Denn es gibt für den Schluss $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$ kein direktes Vorbild in der Aussagen-Logik, auf dessen Wahrheitstafel man sich beziehen könnte (einmal davon abgesehen, dass dies sehr problematisch wäre).

Wir dürfen aber $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und $p(Y) \leq r/n$ auch nicht einfach wie *unabhängige* Relationen behandeln und, wie bei einer *synthetischen* Relation, für $p(X \rightarrow Y) = r/n$ den Werteverlauf + + – – und für $p(Y) \leq r/n$ den Verlauf + – + – ansetzen, weil diese Werte logisch und mathematisch vollkommen voneinander *abhängig* sind. (Man könnte zwar eine passende Wahrheitstafel konstruieren, aber das wäre doch willkürlich).

Aber da $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$ eine *Tautologie* ist, wäre eine Wahrheitstafel auch nicht sehr aufschlussreich, denn es wären alle Zeilen der Wahrheitstafel automatisch tautologisch. Bei Verwendung der normalen Implikation gilt eben: Ein Schluss auf eine Tautologie ist immer ebenfalls eine Tautologie: $\Phi \Rightarrow$ Tautologie. Somit muss in der Wahrheitstafel unter dem zentralen Relator $\Rightarrow$ 4mal + stehen: + + + +.

Man könnte hier wiederum fragen, ob man dem *logischen (analytischen)* Implikator $\Rightarrow$ überhaupt bei einem Schluss verwenden darf, für den sich keine (sinnvolle) Wahrheitstafel aufstellen lässt, ob man vielleicht stattdessen einen Implikator für einen *nur mathematischen* Schluss benötigt. Aber ein Schluss wie $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$ gehorcht ebenfalls der fundamentalen Definition des logischen Schlusses, nachdem die *Information der Konklusion* eine *Teilmenge der Information der Prämisse* ist – das werde ich gleich in 2-3-1-4 zeigen.

Auch eine *implikative* Wahrheitstafel von $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$ stieße auf dieselben Probleme. Daher habe ich darauf verzicht, sie darzustellen.

Fassen wir noch einmal zusammen, welche Quantifzierungen von Schlüssen vorgenommen wurde. Wir haben zuerst die *Gesamtformel* von $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ berechnet, dann die *Einzelkomponenten* und dann beide in einer *Kombinations-Formel* integriert:
- Gesamtformel: $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$
- Einzelkomponenten-Formel: $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n$
- Kombinierte Formel: $[p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n] \longrightarrow [p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n]$

2-3-1-4 WAS IST EIN QUANTITATIVER SCHLUSS ?

Wir haben gesehen, dass man als Inbegriff eines logischen Schlusses verstehen kann: Die *Information der Konklusion ist in der Information der Prämisse bereits enthalten*, ist also eine *Teilmenge* der Prämissen-Information. Traditionell sagt man: Der Schluss (geht) vom Allgemeinen auf das Besondere. Die Frage ist: Wie sieht das bei einem *quantitativen* Schluss aus? Geht es da auch ausschließlich um diesen Zusammenhang der *Informations-Übertragung*? Oder spielt bei einem quantitativen Schluss zusätzlich ein *mathematisches*, *numerisches* Moment eine Rolle? Zur Beantwortung der Frage möchte ich 2 Arten von Schlüssen unterscheiden, man könnte sie *quantifizierte* vs. *quantitative* Schlüsse nennen.

- quantifizierte Schlüsse

Ein Beispiel ist: $p(X) = r/n \wedge p(Y) = s/n \Rightarrow p(Y) = s/n$

Dies ist zwar formal ein quantitativer Schluss, aber besser spräche man vielleicht von einem *quantifizierten S*chluss, denn dieser Schluss hat genau *dieselbe Informations-Struktur* wie der folgende *qualitative* Schluss: $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Die Quantität spielt hier keine Rolle für den Schluss, sie ist sekundär.

- quantitative Schlüsse

Als erstes Beispiel folgender Schluss $p(X) = 1 \wedge p(Y) = 1 \Rightarrow p(Y) > 0$.

Diesen *quantitativen* Schluss kann man leicht auf einen *quantoren-logischen* Schluss zurückführen: $\Lambda(X) \wedge \Lambda(Y) \Rightarrow V(X)$, sprachlich z. B.: „Wenn alle X wahr sind und alle Y wahr sind, dann sind auch einige Y wahr“. Gerade der Schluss von „*alle*“ auf „*einige*“ demonstriert besonders deutlich das Prinzip „vom Allgemeinen zum Besonderen“.

Das *Ganze* ist „alle“, der *Teil* ist „einige“; der All-Satz (Λ bzw. $p = 1$) beinhaltet die Gesamt-Information. Man könnte denken: $p > 0$ enthält mehr Information als $p = 1$, weil $p > 0$ (trotz der Einschränkung $p \leq 1$) doch einen viel größeren Zahlenbereich abdeckt als $p = 1$, das nur genau *einen* Wert umfasst. Aber dies ist ein Irrtum: Je weniger Möglichkeiten eine Relation oder Variable umfasst, desto höher der *Informationsgehalt*. Somit besitzt $p > 0$ wesentlich *weniger* Informationsgehalt als $p = 1$, ist in $p = 1$ bereits enthalten: $p = 1 \Rightarrow p > 0$.

Ein zweites Beispiel: $p(X \to Y) = 7/10 \wedge p(Y) = 5/10 \Rightarrow p(X \to Y \longrightarrow Y) = 8/10$

Wie in 2-3-1-2 gezeigt, lässt sich dieser Schluss *berechnen* nach der allgemeinen Gleichung:

$$p(X \to Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n \Rightarrow p(X \to Y \longrightarrow Y) = 1 - r/n + s/n.$$

Als Formel (mit den Beispielwerten) ergibt sich hier:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 7/10 \;\wedge\; \frac{a+c}{a+b+c+d} = 5/10 \;\Rightarrow\; \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 8/10$$

Als *Gesamt-Information* aus den beiden Prämissen ergibt sich: $a + c = 5$, $b = 3$, $d = 2$. Als *Teil-Information* ist ableitbar: $a + b + c = 8$, $a + b + c + d = 10$, also die Werte der Konklusion.

Machen wir die Gegenprobe: Welche Informationen enthält die Konklusion?

$a + b + c = 8$, $d = 2$. Wir können aber nicht ableiten: $a + c = 5$ und $b = 3$.

Zwar müssen wir, um die Wahrheit dieses Schlusses zu *berechnen*, *mathematische Operationen* wie *Addition* und *Subtraktion* verwenden. Aber der Schluss selbst enthält keinen besonderen mathematischen Faktor, sondern er beinhaltet nur das *logische Prinzip*, dass die Teil-Information in der Gesamt-Information enthalten ist, man somit von der Gesamt-Information sicher auf die Teil-Information schließen kann. Somit ist der analytische Implikator $\Rightarrow$ in allen 3 Fällen berechtigt.

2-3-1-5 PROBLEME QUANTITATIVER SCHLÜSSE

Warum gibt es Probleme bei der Aufstellung von *quantitativen* Schlüssen und insbesondere ihrer Wahrheitstafeln, Probleme, die bei *qualitativen* Schlüssen bzw. Wahrheitstafeln nicht entstehen? Wir haben schon einige Punkte angesprochen und fassen sie abschließend noch einmal systematisch zusammen:

• Numerische Variablen

Beim *qualitativen* Schluss wie z. B. $X \Rightarrow X \vee Y$ haben wir es mit *Konstanten* zu tun, er steht für $p(X) = 1 \Rightarrow p(X \vee Y) = 1$. Bei *quantitativen* Schlüssen arbeitet man mit *numerischen Variablen* wie z. B. bei $p(X) = r/n \longrightarrow p(X \vee Y) = s/n$.

• Probleme der Negation

Ein wichtigeres, zentrales Problem ist die *Negation*. Während die Negation von X, nämlich $\neg X$, genau bestimmt ist (quantitativ $p = 0$), bleibt die Negation einer *numerischen Variable* $p(X) \neq r/n$ völlig unbestimmt (abgesehen von den Einschränkungen $0 \leq r/n \leq 1$). Aber auch wenn man ein konkretes Beispiel nimmt, z. B. $p(X) \neq 3/5$, ist der Wert unbestimmt.

• Implikation

Es wurde schon mehrfach, auch im Bereich der *qualitativen* Aussagen-Logik, darauf hingewiesen, dass die Deutung der Implikation $\Phi \rightarrow \Psi$ prinzipiell *problematisch* ist, weil die nämlich auch als gültig angesehen wird, wenn das Vorderglied Φ ungültig ist bzw. wenn beide Glieder Φ, Ψ ungültig sind. Im *quantitativen* Bereich ist die normale Implikation aber (bei negativem Vorderglied) normalerweise unangebracht, unsinnig oder gar falsch. Man kann die Implikation im *quantitativen* Bereich normalerweise nur mit einer gewissen Berechtigung verwenden, wenn man konsequent und vollständig auf eine konditionale *Wenn-dann-Deutung* verzichtet und $\Phi \rightarrow \Psi$ ausschließlich im Sinne des äquivalenten $\neg(\Phi \wedge \neg\Psi)$ deutet. Nur, das entspricht nicht der üblichen oder wenigstens überwiegenden und wesentlichsten Deutung der Implikation.

• Positiv-Implikation

Von daher dürfte es ggf. sinnvoller sein, bei quantitativen Schlüssen die *Positiv-Implikation* Φ $*\!\!\rightarrow \Psi$ zu verwenden. Diese ist ja nur definiert, wenn das Vorderglied bzw. der Vordersatz *gültig* (+) ist, somit treten die Probleme eines negativen Vordergliedes gar nicht auf.

• Wahrheitstafel

Bei quantitativen Schlüssen (Relationen) lassen sich nur eingeschränkt Wahrheitstafeln verwenden bzw. gelten nicht alle logischen Gesetze. Also: Die Wahrheitstafel funktioniert hier nicht, oder allgemeiner: Der *wahrheitswert-funktionale* Ansatz funktioniert nur eingeschränkt bei quantitativen Sätzen bzw. Schlüssen. Die große und wichtige Ausnahme sind die Schlüsse der *quantitativen Aussagen-Logik*, bei der nur mit den Werten $p = 1$ und $p = 0$ gearbeitet wird; diese bietet dieselben Möglichkeiten wie die *qualitative Aussagen-Logik.* Generell kann man allerdings auch in Frage stellen, ob man bei einem *quantitativen Schluss* überhaupt eine *Wahrheitstafel* benötigt. Das zweiwertige + und – der Wahrheitstafel ist hier eigentlich in einer *quantitativen Funktion* aufgelöst. Man fragt hier nicht: Wenn Φ gültig ist, ist dann auch Ψ gültig? Sondern: Wenn Φ den Wert r/n hat, welchen Wert hat dann Ψ?

Fazit: Die Wahrheitstafel ist bei *quantitativen* – semi-analytischen oder analytischen – *Schlüssen* nur partiell verwendbar; dasselbe gilt *generell* für semi-analytische / analytische Relationen. Allerdings gibt es bei bestimmten Schlüssen die Möglichkeit, den *Wert der Konklusion* aus den Prämissen zu *berechnen*. Fassen wir die unübersichtliche Situation noch einmal zusammen, unter Einbeziehung synthetischer Relationen (mit Beispielen):

1) *synthetische* Relationen

- 1fache Quantität: $p(X \rightarrow Y) = r/n$. Keine Wahrheitstafel und keine Berechnung möglich.
- 2fache Quantität: $p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$. Wahrheitstafel möglich, mathematisch sinnlos.

2) semi-analytische Relationen
- 1fache Quantität: $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$. Wahrheitstafel geht nicht, aber Berechnung.
- 2fache Quantität: $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n$. Wahrheitstafel bedingt möglich.

(Das Entsprechende gilt für *streng* analytische Relationen bzw. Schlüsse.)

2-3-2 Implikation

2-3-2-1 DEFINITION
Ich werde im Folgenden wieder verschiedene implikative Beziehungen untersuchen: primär die *Implikation*, aber auch *Replikation* und *Äquivalenz*. Es geht hier – im analytischen Kapitel – um *semi-analytische*, *tautologische* und *kontradiktorische* Relationen.

2-3-2-2 SEMI-ANALYTISCHE RELATIONEN
Ich nehme bei den *semi-analytischen* Relationen zur besseren Vergleichbarkeit immer eine Relation zwischen $X \rightarrow Y$ und $X \vee Y$, also: $R(X \rightarrow Y, X \vee Y)$.

- Implikation

	X	→	Y	⟶	X	∨	Y
a	+	+	+	+	+	+	+
b	+	–	–	+	+	+	–
b	–	+	+	+	–	+	+
d	–	+	–	–	–	–	–

Hier ergibt sich als *Gesamtformel*: $p(X \rightarrow Y \longrightarrow X \vee Y) = p(X \vee Y) = \dfrac{a+b+c}{a+b+c+d}$

- Replikation

X	→	Y	⟵	X	∨	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	–	–	–	+	+	–
–	+	+	+	–	+	+
–	+	–	+	–	–	–

$$p(X \rightarrow Y \longleftarrow X \vee Y) = p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d}$$

- Äquivalenz

$$p(X \rightarrow Y \longleftrightarrow X \vee Y) = p(Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d}$$

2-3-2-3 TAUTOLOGIE
Ich habe oben einen *semi-analytischen* Schluss genauer untersucht. Zum Vergleich sei jetzt ein echter, *tautologischer* Schluss herangezogen: $X \wedge Y \Rightarrow Y$

Die Wahrheitstafel lautet:

X	$\wedge$	Y	$\Rightarrow$	Y
+	+	+	+	+
+	−	−	+	−
−	−	+	+	+
−	−	−	+	−

Die Formel für die gesamte Relation lautet: p(X $\wedge$ Y $\Rightarrow$ Y) = $\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$

Dies zeigt, dass gelten muss: p(X $\wedge$ Y $\Rightarrow$ Y) = 1

Und für jede Tautologie (mit 2 Variablen) gilt: p(Tautologie) = $\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$

2-3-2-4 KONTRADIKTION

Jetzt zur kontradiktorischen Implikation, z. B. (X $^+\vee^+$ $\neg$X) $\not\Rightarrow$ (X $^-\wedge^-$ $\neg$ X).
Die (vereinfachte) Wahrheitstafel lautet:

(X $^+\vee^+$ $\neg$X)	$\not\Rightarrow$	(X $^-\wedge^-$ $\neg$ X)
+	−	−
+	−	−
+	−	−
+	−	−

Daraus ergibt sich folgende Formel:

p((X $^+\vee^+$ $\neg$X) $\not\Rightarrow$ (X $^-\wedge^-$ $\neg$ X)) = $\frac{0}{a+b+c+d} = 0$

2-3-2-5 DREI VARIABLEN

Ich gehe hier von 3 Variablen X, Y, Z aus.

Als Beispiel eine *semi-analytische* Implikation: X $\vee$ Y $\vee$ Z $\longrightarrow$ X $\wedge$ Y $\wedge$ Z.
Für X $\vee$ Y $\vee$ Z kann man auch schreiben: $\vee$(X, Y, Z), also den Relator $\vee$ *vorgestellt*.
In der Wahrheitstafel unten verwende ich zur besseren Übersicht auch die folgende Schreibweise (X, Y, Z)$\vee$, also den Relator $\vee$ *nachgestellt*.

	(X	Y	Z)	$\vee$	$\longrightarrow$	$\wedge$	(X	Y	Z)
a_1	+	+	+	+	+	+	+	+	+
a_2	+	+	–	+	–	–	+	+	–
b_1	+	–	+	+	–	–	+	–	+
b_2	+	–	–	+	–	–	+	–	–
c_1	–	+	+	+	–	–	–	+	+
c_2	–	+	–	+	–	–	–	+	–
d_1	–	–	+	+	–	–	–	–	+
d_2	–	–	–	–	+	–	–	–	–

Die semi-analytische Relation $X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z$ ist *analytisch äquivalent* der synthetischen *Äquivalenz* $X \leftrightarrow Y \leftrightarrow Z$; die ist eben nur gültig, wenn entweder *alle* Variablen, X, Y, Z gültig sind (1. Zeile) oder *alle* ungültig sind (letzte Zeile).

$$(X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \leftrightarrow Y \leftrightarrow Z)$$

Als quantitative *Gesamtformel* ergibt sich:

$$p(X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z) = \frac{a_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Und zwar gilt für die einzelnen Relationen:

$$p(X \vee Y \vee Z) = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

$$p(X \wedge Y \wedge Z) = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Dreht man die eben genannte *semi-analytische* Relation um, so erhält man eine *streng analytische* Relation, eine Tautologie: $X \wedge Y \wedge Z \Rightarrow X \vee Y \vee Z$

Die Gesamtformel hierfür lautet:

$$p(X \wedge Y \wedge Z \Rightarrow X \vee Y \vee Z) = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Somit gilt: $p(X \wedge Y \wedge Z \Rightarrow X \vee Y \vee Z) = 1$

2-3-3 Positiv-Implikation

Bei der Positiv-Implikation beschränke ich mich auf die *implikative* Betrachtung, d. h. bei einem Schluss Φ *$\Rightarrow$ Ψ untersuche ich nur den Aspekt, inwieweit Ψ aus Φ folgt.

Ich gebe dabei immer die *qualitative* Struktur an, die *quantitative* Struktur und die *mathematische* Formel. Allerdings ist die qualitative Struktur nicht mit der quantitativen genau identisch, die qualitative Struktur gibt nur die Basis; genau entsprechende qualitative und quantitative Schlüsse werden im nächsten Punkt über *quantitative Aussagen-Logik* behandelt, in der nämlich nur mit Werten von p = 1 und p = 0 gearbeitet wird.

Bei den unten gezeigten Schlüssen kommt als *synthetischer* Schluss immer die Positiv-Implikation X *$\rightarrow$ Y vor. Als *analytischen* Zentral-Relator kann man normalerweise sowohl $\Rightarrow$ oder *$\Rightarrow$ verwenden. Ein Kriterium ist, ob die *Kontraposition* gilt, also:

$$(\Phi \Rightarrow \Psi) \Leftrightarrow (\neg\Psi \Rightarrow \neg\Phi)$$

Denn bei der *normalen Implikation* gilt die Kontraposition, bei der *Positiv-Implikation* aber nicht. Ursprünglich ist die Kontraposition zwar nur auf die qualitative Aussagen-Logik bezogen, aber man kann sie auch in der quantitativen Logik verwenden. Und zwar benötigt man dabei vor allem folgende (allerdings nicht unproblematische) *Negationen*:

Position	Negation
$p(\Phi) \leq r/n$	$\neg[p(\Phi) \leq r/n] \Leftrightarrow p(\Phi) > r/n$
$p(\Phi) \geq r/n$	$\neg[p(\Phi) \geq r/n] \Leftrightarrow p(\Phi) < r/n$
$p(\Phi) = r/n$	$\neg[p(\Phi) = r/n] \Leftrightarrow p(\Phi) \neq r/n$

2-3-3-1 MODUS PONENS

 qualitativ: $(X *\!\rightarrow Y) \wedge X \;*\!\Rightarrow\; Y$
 quantitativ: $p(X *\!\rightarrow Y) = r/n \;\wedge p(X) = 1 \;*\!\Rightarrow\; p(Y) = r/n$

 Bruch: $\frac{a}{a+b} = \frac{r}{n} \;\wedge\; \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \;*\!\Rightarrow\; \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$

Erläuterung:

- erster Bruch (bzw. erste Prämisse): daraus ergibt sich: a = r, a + b = n.
- zweiter Bruch: aus dem ergibt sich: a + b > 0, c + d = 0
- abgeleiteter dritter Bruch (bzw. Konklusion): im Zähler steht noch a, im Nenner noch a + b, somit wie im ersten Bruch: p = r/n (wobei auch möglich ist, dass r = 0)

Voraussetzung für einen solchen Schluss ist, dass p(X) = 1 (jedenfalls, wenn die genauen Werte von a, b, c und d nicht bekannt sind).

2-3-3-2 SCHLUSS VON DER POSITIV-IMPLIKATION AUF DIE IMPLIKATION

 qualitativ: $(X *\!\rightarrow Y) *\!\Rightarrow (X \rightarrow Y)$
 quantitativ: $p(X *\!\rightarrow Y) = r/n \;*\!\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) \geq r/n$

 Bruch : $\frac{a}{a+b} = \frac{r}{n} \;*\!\Rightarrow\; \frac{a+c+d}{a+b+c+d} \geq \frac{r}{n}$

In dem Ausnahmefall, dass b = 0, ist sowohl $p(X *\!\rightarrow Y) = 1$ wie $p(X \rightarrow Y) = 1$.
Es handelt sich hier um den deterministischen Fall (Voraussetzung a > 0).
Wenn dagegen b > 0, sind haben beide Brüche einen Wert p < 1.

Man kann auch folgende Formel verwenden: $\frac{a}{a+b} = \frac{r}{n} \;*\!\Rightarrow\; \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{s}{m}$

Dabei gilt: $s \geq r$, $m \geq n$. Es ergeben sich also folgende Lösungen für den zweiten Bruch:

s/m = $\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n+1}, \frac{r+2}{n+2}, ...$

Erläuterung an einem *Zahlenbeispiel*:

- erster Bruch: $\frac{a}{a+b} = \frac{4}{5}$ a = 4, b = 1 • Zweiter Bruch: $\frac{4+c+d}{4+1+c+d} = \frac{s}{m}$ $s \geq 4$, $m \geq 5$

Konkret ergeben sich folgende mögliche Werte:

c + d	$\frac{4+c+d}{4+1+c+d}$	dezimal
0	4/5	0,8
1	5/6	0,83
2	6/7	0,86
.		
.		
100	104/105	0,99

Es zeigt sich: Der Wert des ersten Bruches p = 4/5 bleibt immer *kleiner* als der Wert des zweiten Bruches: 4/5, 5/6, 6/7 usw. Und der erste Bruch nähert sich zwar p = 1 beliebig an, er bleibt aber p < 1 (1 ist der Grenzwert).

2-3-3-3 SCHLUSS VON DER IMPLIKATION AUF DIE POSITIV-IMPLIKATION

□ qualitativ: $(X \rightarrow Y) \ {*}\!\!\longrightarrow \ (X \ {*}\!\!\rightarrow Y)$
□ quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = r/n \ {*}\!\!\Rightarrow \ p(X \ {*}\!\!\rightarrow Y) \leq r/n$

□ Bruch: $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \quad {*}\!\!\Rightarrow \quad \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{s}{m}$

$s \leq r, m \leq n$
Also gilt: s = r, r – 1, r – 2, ... , r – r. Und: m = n, n – 1, n – 2, ... , (n – n) + 1
n – n = 0 ist ausgeschlossen, weil eine Division durch 0 „verboten“ ist.

Hier liegt wieder der Fall vor, dass die *qualitative* Basis nur ein *partieller* Schluss ist, in der *quantitativen* Form aber ein *vollständiger* Schluss vorliegt (allerdings mit mehreren möglichen Lösungen).

Das erläutere ich an einem Beispiel:

r = 4, n = 5 $\quad p(X \rightarrow Y) = \dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = \dfrac{4}{5}$ Folglich b = 1

Dann gibt es folgende Möglichkeiten für $p(X \ {*}\!\!\rightarrow Y)$:

a	c + d	$\frac{a}{a+b}$	dezimal
4	0	4/5	0,8
3	1	3/4	0,75
2	2	2/3	0,67
1	3	1/2	0,5
0	4	0/1	0

Ausgeschlossen ist eben nur: $p(X \ {*}\!\!\rightarrow Y) = 5/5 = 1$.

2-3-3-4 SCHLUSS VON DER POSITIV-IMPLIKATION AUF DIE KONJUNKTION

□ qualitativ: $(X \rightarrow Y) \ {*}\!\!\longrightarrow (X \wedge Y)$
□ quantitativ: $p(X \ {*}\!\!\rightarrow Y) = r/n \ {*}\!\!\Rightarrow \ p(X \wedge Y) \leq r/n$

□ Bruch: $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{r}{n} \quad {*}\!\!\Rightarrow \quad \dfrac{a}{a+b+c+d} \leq \dfrac{r}{n}$

$c + d = 0 \Rightarrow p(X \ {*}\!\!\rightarrow Y) = p(X \wedge Y)$

Hier liegt ein Sonderfall vor, weil der Zähler gleich ist (a), nur der Nenner verschieden. Für den gilt: $a + b \leq a + b + c + d$

2-3-3-5 ÄQUIVALENZ

□ qualitativ: (X *→ Y) ⇔ ¬(X *→ ¬Y)

□ quantitativ: p(X *→ Y) = r/n ⇔ p(X *→ ¬Y) = 1 – r/n

□ Bruch: $\frac{a}{a+b} = \frac{r}{n} \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 1 - \frac{r}{n}$

Voraussetzung: a + b > 0. Oder: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$

(Dies wird noch genau diskutiert werden: Existenz-Modell vs. Nicht-Existenz-Modell)

2-3-4 Systematik

In diesem Punkt „Systematik" behandle ich nur – strenge und partielle – *Schlüsse*. Dabei verwende ich überwiegend die *normale Implikation*. Allerdings wäre (als Zentral-Relator) auch die *Positiv-Implikation* einzusetzen, dies wäre normalerweise sogar unproblematischer.

Die generelle Form einer *streng analytischen* Relation ist: p(Φ) = r/n ⇒ p(Ψ) = s/n

Bzw. werden im Allgemeinen *Ungleichungen* statt Gleichungen verwendet:

p(Φ) = r/n ⇒ p(Ψ) ≥ r/n bzw. p(Φ) = r/n ⇒ p(Ψ) ≤ r/n u. a.

Die generelle Form einer *partiell analytischen* Relation ist: p(Φ) = r/n ⟶ p(Ψ) = s/n

Dabei gilt wie schon ausgeführt: n = 1, 2, ... r = 0, 1, ... , n s = 0, 1, ... , n.

Somit: p/maximum = n/n = 1, p/minimum = 0/n = 0. Also 0 ≤ p ≤ 1.

Ich unterscheide im Folgenden:

- qualitativ und quantitativ strenger Schluss
- qualitativ partieller, quantitativ strenger Schluss
- quantitativ partieller Schluss

2-3-4-1 QUALITATIV UND QUANTITATIV STRENGER SCHLUSS

Damit ist gemeint: Die *qualitative*, aussagen-logische *Basis* ist ein *strenger* Schluss, und auch der *quantitative* Schluss ist *streng* analytisch. Allerdings ergibt sich in der quantitativen Form keine eindeutige Lösung. Sondern man kann ein nur *Lösungs-Intervall* (bzw. eine *Ungleichung*) oder eine Disjunktion angeben.

Z. B.: p(Φ) = r/n ⇒ p(Ψ) = r/n ∨ (r+1)/n ∨ (r+2)/n ∨ … ∨ n/n

Man könnte natürlich bezweifeln, ob man hier zu Recht von einem *strengen* Schluss spricht, aber in der Aussagen-Logik gilt ja entsprechend $\Phi \Rightarrow \Psi_1 \vee \Psi_2 \vee ... \vee \Psi_n$ auch als strenger Schluss.

• *Beispiel: Abtrennungsregel* (*Simplifikationsregel*)

□ qualitativ: X ∧ Y ⇒ Y

□ quantitativ: p(X ∧ Y) = r/n ⇒ p(Y) ≥ r/n

□ Bruch: (1) $\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \geq \frac{r}{n}$

Kurz-Erläuterung: Wenn c = 0 haben beide Brüche den gleichen Wert. Wenn c > 0, hat der zweite Bruch einen höheren Wert.

Aus der Formel ergibt sich zwar, dass auch der zweite Bruch n als Nenner hat. Um dies aber *explizit* zu machen, könnte man schreiben:

$$(2)\quad \frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \;\Rightarrow\; \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{s}{n} \qquad s \geq r$$

Es wäre auch folgende einfache Form möglich, eine *(Un-)Gleichung* anstatt einer Implikation:

$$(3)\quad \frac{a}{a+b+c+d} \leq \frac{a+c}{a+b+c+d}$$

Bei der Ungleichung ergeben sich folgende (n – r +1) Lösungen:

s = r, r + 1, …, n Also: p(Y) = r/n, (r + 1)/n, ... , n/n

Wählt man einen *bestimmten* Wert für p(Y), dann kann man nur einen semi-analytischen Schluss angeben, z. B.: p(X ∧ Y) = r/n ⟶ p(Y) = (r+2)/n

Zur Veranschaulichung ein Beispiel mit Zahlen:

r = 5, n = 8

p(X ∧ Y) = 5/8 ⇒ p(Y) ≥ 5/8

Also: p(Y) = 5/8, 6/8, 7/8, 8/8. W.: p(Y) = 5/8 ∨ 6/8 ∨ 7/8 ∨ 8/8

• *Beispiel: Modus ponens*

□ qualitativ: (X → Y) ∧ X ⇒ Y

□ quantitativ: p(X → Y) = r/n ∧ p(X) = 1 ⇒ p(Y) = r/n

□ Bruch: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \wedge \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$

Erläuterung:

Aus dem ersten Bruch ergibt sich: a + c + d = r

Aus dem zweiten Bruch ergibt sich: c + d = 0

Also ergibt sich für den abgeleiteten dritten Bruch ebenfalls der Wert p = r/n.

Der Schluss gilt aber nur streng, wenn p(X) = 1.

2-3-4-2 QUALITATIV PARTIELLER, QUANTITATIV STRENGER SCHLUSS

Dies muss erläutert werden. Es gibt Schlüsse, die in ihrer *qualitativen* aussagen-logischen Form (also mit implizitem p = 1 oder p = 0) nur *partiell* gültig sind, in der quantitativen Form aber *vollständig*, z. B.: (X ∨ Y) ⟶ Y.

(X	∨	Y)	⟶	Y
+	+	+	+	+
+	+	–	–	–
–	+	+	+	+
–	–	–	+	–

Ein solcher Schluss hat – quantifiziert – die Struktur: p = r/n ⇒ p ≤ r/n. Es handelt sich also um einen vollständigen Schluss (auch wenn es eben keine eindeutige Lösung gibt).

Zur Erklärung: (X ∨ Y) ⟶ Y ist die *Umkehrung* des strengen Schlusses: Y ⇒ (X ∨ Y).

Somit p(X ∨ Y) = r/n ⇒ p(Y) ≤ r/n die Umkehrung von p(Y) = r/n ⇒ p(X ∨ Y) ≥ r/n.

Eine Merkregel ist:

qualitativ *strenger* Schluss: quantitativ $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n$

qualitativ *partieller* Schluss: quantitativ $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n$

Es gibt allerdings auch andere Strukturen (vgl. unten).

• Beispiel: *Disjunktive Abschwächung*: $(X \vee Y) \longrightarrow Y$ (vgl. oben)

 qualitativ: $(X \vee Y) \longrightarrow Y$

 quantitativ: $p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$

 Bruch: $\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \leq \frac{r}{n}$

Für $q(Y) = s$ ergibt sich: $s = r, r-1, ..., r-r$

Für $p(Y) = s/n$ ergibt sich: $\frac{r}{n}, \frac{r-1}{n}, ..., \frac{r-r}{n}$

Ein numerisches Beispiel: $r = 4$, $n = 6$

$p(X \vee Y) = 4/6 \Rightarrow p(Y) \leq 4/6$

Es gilt: $p(Y) = 4/6, 3/6, 2/6, 1/6, 0/6$

2-3-4-3 QUANTITATIV PARTIELLER SCHLUSS

Bei einer semi-analytischen Implikation liegt wie erläutert nur eine *partielle logische Folge,* ein partieller Schluss vor, zur Symbolisierung verwende ich den *langen* Pfeil $\longrightarrow$.

• *Qualitative Basis: strenger Schluss*

Ich greife hier zurück auf den oben genannten Schluss (Abtrennungsregel):

$p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) = \geq r/n$

Seine qualitative Struktur (Basis) ist ein *vollständiger* Schluss, nämlich:

$X \wedge Y \Rightarrow Y$

Als quantitatives Beispiel hatte ich angegeben:

$p(X \wedge Y) = 5/8 \Rightarrow p(Y) = \geq 5/8$

Es gibt also folgende Lösungen der Gleichung:

$p = 5/8, p = 6/8, p = 7/8, p = 8/8$

Angenommen, man gibt folgenden Schluss an:

$p(X \wedge Y) = 5/8 \longrightarrow p(Y) = 7/8$

Man könnte dafür auch allgemein schreiben: $p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = r/n + 2/n$

Herkömmlicherweise würde man sagen: Das ist ein *Fehlschluss*. Aber dies wäre inadäquat, denn $p = 7/8$ ist ja eine *mögliche* Lösung. Man sollte daher von einem ‘partiellen Schluss’ sprechen. Ich werde im 4. Kapitel zeigen, wie man solche Schlüsse quantitativ bestimmen kann.

• *Qualitative Basis: Partieller Schluss*

Ich greife hier zurück auf den oben genannten Schluss:

$p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$

Seine qualitative Struktur (Basis) ist ein *partieller* Schluss, nämlich:

$X \vee Y \longrightarrow Y$

Als quantitatives Beispiel hatte ich angegeben

$p(X \vee Y) = 4/6 \Rightarrow p(Y) \leq 4/6$

Es gilt: p(Y) = 4/6, 3/6, 2/6, 1/6, 0/6
Angenommen ich nehme den Schluss:

$$p(X \vee Y) = 4/6 \longrightarrow p(Y) = 2/6$$

Auch hier liegt ein *partieller* Schluss vor. Denn 2/6 ist nur eine *mögliche* Lösung, aber keine *sichere* Lösung.

2-3-4-4 ÜBERSICHT

Ich habe bisher 4 *Ungleichungen* zur Berechnung von p(Ψ) aus p(Φ) entwickelt:

1. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n$
2. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n$
3. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq (n-r)/n$
4. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq (n-r)/n$

Zusammenfassend gebe ich einige Beispiele für diese Ungleichungen.

1. $\underline{p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n}$

Schlüsse, die aussagen-logisch, qualitativ, nur *semi-analytisch* sind, aber *Umkehrungen* von vollständigen Schlüssen darstellen. Hier gilt: Die gültigen Welten der Konklusion (z. B. a und c) sind eine Teilmenge der gültigen Welten der Prämisse (z. B. a, b und c).

- $X \vee Y \longrightarrow Y$ (Umkehrschluss: $X \vee Y \Leftarrow Y$)

$$p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n \qquad \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \leq r/n$$

- $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ (Umkehrschluss: $X \vee Y \Leftarrow X \wedge Y$)

$$p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n \qquad \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d} \leq r/n$$

2. $\underline{p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n}$

Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *streng* analytisch sind. Die gültigen Welten der Prämisse sind eine Teilmenge der gültigen Welten der Konklusion.

- $Y \Rightarrow X \vee Y$

$$p(Y) = r/n \Rightarrow p(X \vee Y) \geq r/n \qquad \frac{a+c}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \geq r/n$$

- $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$

$$p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(X \vee Y) \geq r/n \qquad \frac{a}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \geq r/n$$

3. $\underline{p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq (n-r)/n}$

Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *partiell analytisch* sind. Dabei schneiden sich die Mengen der gültigen Welten von Prämisse und Konklusion.

- $(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \leftarrow Y)$

$$p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(X \leftarrow Y) \geq (n-r)/n$$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+b+d}{a+b+c+d} \geq \frac{n-r}{n}$$

• $(X \rightarrow Y) \longrightarrow (\neg Y)$

$p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(\neg Y) \geq (n - r)/n$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{b+d}{a+b+c+d} \geq \frac{n-r}{n}$$

4. <u>$p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq (n - r)/n$</u>
Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *partiell analytisch* sind. Dabei sind Prämisse und Konklusion in keiner Welt gemeinsam gültig.

• $(X \wedge Y) \longrightarrow (X \nabla Y)$

$p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(X \nabla Y) \leq (n - r)/n$

$$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{d}{a+b+c+d} \leq \frac{n-r}{n}$$

Neben den *Ungleichungen* (bzw. Schlüssen mit Ungleichungen) kann man auch *Gleichungen* verwenden:

• bei Negationen
• bei Schlüssen mit 2 oder mehr Prämissen

1. *Negation*
$p(\Phi) = r/n \Leftrightarrow p(\Psi) = 1 - r/n$
$p(\Phi) = 1 - p(\Psi)$ bzw. $p(\Psi) = 1 - p(\Phi)$ bzw. $p(\Phi) + p(\Psi) = 1$

Beispiel beliebig, etwa: $p(X \rightarrow Y) = r/n \Leftrightarrow p(\neg(X \rightarrow Y)) = 1 - r/n$.

2. *Addition*
$p(\Phi_1) + p(\Phi_2) = p(\Psi)$
Beispiel: $p(X \wedge Y) + p(X \nabla Y) = p(X \leftrightarrow Y)$

$$\frac{a}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

Allgemein: $p(\Phi_1) + p(\Phi_2) + ... + p(\Phi_n) = p(\Psi)$
Beispiel: $p(X \wedge Y) + p(X -\!\!< Y) + p(X \nabla Y) = p(X \rightarrow Y)$

$$\frac{a}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+c+d}{a+b+c+d}$$

2-3-4-5 PSEUDO-SCHLÜSSE
Ich habe oben verschiedene Strukturen zur Berechnung von Schlüssen „p(Ψ) folgt aus p(Φ)“ vorgestellt, zur Wiederholung:

$p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \geq r/n$
$p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \leq r/n$
$p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \geq (n - r)/n$
$p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \leq (n - r)/n$
$p(\Phi) = r/n \;\Leftrightarrow\; p(\neg\Phi) = 1 - r/n$

Ob damit *alle* möglichen Schluss-Typen (mit zwei Variablen) erfasst sind, muss noch weiter untersucht werden. In manchen Fällen ist aber *gar kein Schluss* möglich, weil die Relationen *vollständig unabhängig* voneinander sind. Man kann von *Pseudoschlüssen* sprechen.

Wir müssen also genau unterscheiden:

- strenger Schluss $\Rightarrow$
- partieller Schluss $\longrightarrow$
- kontradiktorische Implikation $\not\Rightarrow$
- kein Schluss/Pseudoschluss $\dashrightarrow$

Im Folgenden soll der Pseudoschluss $p(X \rfloor Y) = r/n \dashrightarrow p(X \lfloor Y) = s/n$ analysiert werden.

$$p(X \rfloor Y) = \frac{a+b}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \qquad\qquad p(X \lfloor Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{s}{n}$$

Die Frage lautet genau: Lässt sich von $p(X \rfloor Y)$ auf $p(X \lfloor Y)$ schließen? Liegt ein Pseudoschluss vor? Ich gehe im Beispiel von n = 3 aus.

$\frac{a+b}{a+b+c+d}$	a + b	c + d	a + c	b + d	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$
3/3	3	0	3	0	3/3
			2	1	2/3
			1	2	1/3
			0	3	0/3
2/3	2	1	3	0	3/3
			2	1	2/3
			1	2	1/3
			0	3	0/3
1/3	1	2	3	0	3/3
			2	1	2/3
			1	0	1/3
			0	3	0/3
0/3	0	3	3	0	3/3
			2	1	2/3
			1	2	1/3
			0	3	0/3

Wie man sieht, ist hier bei *jedem* vorgegebenen Wert von $p(X \rfloor Y)$ *jeder* Wert von $p(X \lfloor Y)$ möglich. Es gibt also keinen echten Schluss von $p(X \rfloor Y)$ auf $p(X \lfloor Y)$, sondern nur *Pseudoschlüsse* (die man allerdings auch zu den semi-analytische Schlüssen zählen kann).

Zwar kann man scheinbar strenge Schlüsse aufstellen wie:

$p(X \rfloor Y) = 0/3 \;\Rightarrow\; p(X \lfloor Y) = 3/3 \vee 2/3 \vee 1/3 \vee 0/3$

Dass hier das Zeichen für den strengen Schluss $\Rightarrow$ verwendet wird, darf jedoch nicht irritieren. Wenn auf die Disjunktion *aller* möglichen Werte geschlossen wird, muss $\Rightarrow$ gelten. Das sagt keinesfalls, dass $p(X \lfloor Y)$ aus $p(X \rfloor Y)$ abzuleiten ist. Wenn man weiß, welchen Wert $p(X \lfloor Y)$ besitzt, hat man damit noch *keine* Information über den Wert von $p(X \rfloor Y)$.

Umgekehrt, als Replikation, gibt es auch nur Pseudoschlüsse von $p(X \lfloor Y)$ auf $p(X \rfloor Y)$. Das überrascht nicht, wenn man bedenkt: $p(X \rfloor Y) = p(X)$ und $p(X \lfloor Y) = p(Y)$. Zwischen $p(X)$ und $p(Y)$ kann nur ein *synthetisches* Verhältnis bestehen, entsprechend werden in der Wahrheitstafel alle möglichen Kombinationen von X und Y aufgeführt. Somit besteht quasi zwischen $p(X \rfloor Y)$ auf $p(X \lfloor Y)$ auch ein synthetisches Verhältnis

Im Kapitel 4 über die *Meta-Werte analytischer Relationen* werde ich allerdings zeigen, dass auch Pseudoschlüsse unterschiedlich bewertet werden können, indem man ihnen unterschiedliche *theoretische Wahrscheinlichkeiten* zuweist.

2-3-5 Erweiterungen

2-3-5-1 STECKBRIEF

Zur Übersichtlichkeit soll nachfolgend quasi der *Steckbrief* eines Schlusses dargestellt werden: und zwar von der *Abtrennungsregel* $X \wedge Y \Rightarrow Y$.

2-3-5-2 STRENGER SCHLUSS

□ qualitativ: $X \wedge Y \Rightarrow Y$

□ quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$

□ Formel: $\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \geq \frac{r}{n}$

Beispiel:

□ quantitativ: $p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow p(Y) \geq 3/5$

□ Formel: $\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \geq \frac{3}{5}$

2-3-5-3 UMKEHRUNG

Als quantitativen *Umkehr-Schluss* bezeichne ich einen Schluss mit Ungleichungen, bei dem die Glieder vertauscht werden.

□ quantitativ: $p(Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n$

□ Formel: $\frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d} \leq \frac{r}{n}$

Der Umkehr-Schluss ist äquivalent mit dem Ausgangs-Schluss:

$[p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) = \geq r/n] \Leftrightarrow [p(Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n]$

2-3-5-4 KONTRAPOSITION

Der *Umkehr-Schluss* darf nicht mit der *Kontraposition* verwechselt werden. Die Kontraposition lautet:

- qualitativ: $\neg(X \wedge Y) \Leftarrow \neg Y$
- quantitativ: $p(X \wedge Y) < r/n \Leftarrow p(Y) < r/n$
- Formel: $\dfrac{a}{a+b+c+d} < \dfrac{r}{n} \Leftarrow \dfrac{a+c}{a+b+c+d} < \dfrac{r}{n}$

Die direkte Verneinung von $p(\Phi) = r/n$ ist allerdings $p(\Phi) \neq r/n$. Konkret: Die direkte Verneinung von $p(X \wedge Y) = r/n$ ist $p(X \wedge Y) \neq r/n$, nicht $p(X \wedge Y) < r/n$. Doch hierbei ist der Schluss nicht zwingend, denn $p(X \wedge Y) \neq r/n$ könnte auch bedeuten: $p(X \wedge Y) > r/n$, und dann erhielte man nur einen *semi-analytischen* Schluss.

Nur wenn man wie folgt bestimmt: $p(\Phi) \neq r/n$ ist äquivalent $p(\Phi) < r/n$, erhält man einen *strengen* Schluss.

$$p(X \wedge Y) < r/n \Leftarrow p(Y) < r/n$$

2-3-5-5 SEMI-ANALYTISCHE SCHLÜSSE

Wenn gilt $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$, dann gibt es folgende *semi-analytische* Schlüsse:

$p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = r/n$
$p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = (r+1)/n$
……………………………………..
$p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = n/n$

Wir hatten als Beispiel gewählt: $p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow p(Y) = \geq 3/5$.
Dann ergeben sich als semi-analytische Schlüsse:

$p(X \wedge Y) = 3/5 \longrightarrow p(Y) = 3/5$ $p(X \wedge Y) = 3/5 \longrightarrow p(Y) = 4/5$
$p(X \wedge Y) = 3/5 \longrightarrow p(Y) = 5/5$

Diese Schlüsse sind alle *möglich* (semi-analytisch), aber *nicht notwendig*.

2 – 4 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

2-4-1 Einführung

2-4-1-1 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK
Ich darf noch einmal daran erinnern: *Quantitative Aussagen-Logik* (bzw. quantifizierte Aussagen-Logik) bedeutet, man arbeitet nur mit den Werten p = 1 und p = 0. Denn diese Werte sind *implizit* in aussagen-logischen Relationen enthalten. Durch die Quantifizierung kann man aussagen-logische Relationen präziser darstellen und besser prüfen.
Wir können unterscheiden zwischen:
- Position (positiv, bejaht, belegt)
- Negation (negativ, verneint, nicht belegt)

Zur Wiederholung erläutere ich die Quantifizierung aussagen-logischer *synthetischer* Relationen, am Beispiel der *Implikation* bzw. ihrer *Negation*:

1. positiv: $X \rightarrow Y$ $\quad$ $p(X \rightarrow Y) = 1$ $\quad$ $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$

2. negativ: $\neg(X \rightarrow Y)$ $\quad$ $p(X \rightarrow Y) = 0$ $\quad$ $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$

2-4-1-2 GANZHEITLICHE FORMEL
Ich habe in 2-3-1-1 beschrieben, wie man eine *ganzheitliche Formel* aus der Wahrheitstafel entwickelt.
Nehmen wir als Beispiel wieder den semi-analytischen Schluss: $X \rightarrow Y \longrightarrow Y$.
Der Wahrheitsverlauf + + + – entspricht der Definition der *Disjunktion*: $X \vee Y$.

• *Position*
Quantitativ schreibt man für $X \rightarrow Y \longrightarrow Y$:

$$p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = 1. \text{ Als Formel: } \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1$$

• *Negation*
$\neg(X \rightarrow Y \longrightarrow Y)$ hat den umgekehrten Wahrheitsverlauf, also unter dem Negationszeichen steht – – – +. Das entspricht der *synthetischen* Relation $X \nabla Y$.
Quantitativ schreibt man für $\neg(X \rightarrow Y \longrightarrow Y)$:

$$p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = 0. \text{ Als Formel: } \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 0$$

2-4-1-3 KOMBINIERTE FORMEL

Normalerweise berechnet man aber den Wert von $p((X \to Y) \longrightarrow Y)$, indem man von den Werten der beiden *Einzelkomponenten* $p(X \to Y)$ und $p(Y)$ ausgeht. Und zwar gilt entsprechend den Wahrheitstafeln:

$$p(X \to Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} \qquad p(Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d}$$

Bei der *quantifizierten Aussagen-Logik* kommen aber nur die Werte p = 1 und p = 0 (bei Negation) vor. Wir müssen hier also für alle Relationen p = 1 einsetzen.

$p(X \to Y)$	$p(Y)$	$p(X \to Y \longrightarrow Y)$
$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$	$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$
1	1	1

• $p(X \to Y) = 1$: daraus folgt: $b = 0$ • $p(Y) = 1$: daraus folgt zusätzlich $d = 0$

• $p(X \to Y \longrightarrow Y)$: Hier ergibt sich dann: $\frac{a+c}{a+c} = 1$

Man kann konstatieren:

$$p(X \to Y) = 1 \;\wedge\; p(Y) = 1 \;\Rightarrow\; p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 1$$

2-4-1-4 QUANTITATIVE WAHRHEITS-TAFEL

Um *alle* Möglichkeiten darzustellen, kann man (wie erläutert) eine *quantitative* Wahrheitstafel verwenden. Dabei greifen wir zur besseren Verständlichkeit zunächst auf die normale, *qualitative* Wahrheitstafel zurück, am Beispiel der Relation: $(X \to Y) \longrightarrow Y$

Wir knüpfen hier an folgender Form der Wahrheitstafel an (wobei nur die wichtigsten Wahrheitsverläufe angegeben sind):

	$(X \to Y)$	Y	$(X \to Y) \longrightarrow Y$
2.	+	+	+
2.	–	–	+
3.	+	+	+
4.	+	–	–

Die primäre – nämlich *konjunktive* – Deutung der Wahrheitstafel verdeutlicht die aus der obigen Form abgeleitete *konjunktive Wahrheitstafel,* mit den entsprechenden Relationen.

	$(X \to Y)$	$\wedge$ Y	$\Rightarrow (X \to Y) \longrightarrow Y$	
1.	+	+	+	$(X \to Y) \wedge Y \Rightarrow (X \to Y) \longrightarrow Y$
2.	–	–	+	$\neg(X \to Y) \wedge \neg Y \Rightarrow (X \to Y) \longrightarrow Y$
3.	+	+	+	$(X \to Y) \wedge Y \Rightarrow (X \to Y) \longrightarrow Y$
4.	+	–	–	$(X \to Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg((X \to Y) \longrightarrow Y)$

Konjunktive Wahrheitstafel bedeutet: Prämisse und Konklusion werden als *Konjunktion* gefasst, aus der auf die Gesamtrelation geschlossen wird.

Kommen wir nun zur Wahrheitstafel der *quantitativen Aussagen-Logik*. Hier gilt:
Wo + in der qualitativen Wahrheitstafel steht, wird 1 eingesetzt, wo – steht, wird 0 eingesetzt. Das sind *konkrete Zahlenwerte*, nicht nur Symbole für + und –.

	$p(X \to Y)$	$\wedge$ $p(Y)$	$\Rightarrow$ $p(X \to Y) \longrightarrow Y$
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$	$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$
1)	1	1	1
2)	0	0	1
3)	1	1	1
4)	1	0	0

Den 1) Fall haben wir in 2-4-1-3 geprüft, der 3) Fall entspricht dem 1) Fall.
$p(X \to Y) = 1 \wedge p(Y) = 1 \Rightarrow p(X \to Y \longrightarrow Y) = 1$

Der 2) Fall besagt: $p(X \to Y) = 0 \wedge p(Y) = 0 \Rightarrow p(X \to Y \longrightarrow Y) = 1$
Aus $p(X \to Y) = 0$ ergibt sich: $a + c + d = 0$, somit ist auch $p(Y) = a + c = 0$.
Da $a + b + c + d > 0$, muss also $b > 0$ sein. Somit auch $a + b + c > 0$.
Es resultiert: $p(X \to Y \longrightarrow Y) = b/b = 1$. Korrekt.

Der 4) Fall besagt: $p(X \to Y) = 1 \wedge p(Y) = 0 \Rightarrow p(X \to Y \longrightarrow Y) = 0$
Aus $p(X \to Y) = 1$ ergibt sich: $b = 0$, $a + c + d > 0$.
Aus $p(Y) = 0$ ergibt sich: $a + c = 0$. Somit $a + b + c = 0$, $d > 0$.
Daraus folgt für $p(X \to Y \longrightarrow Y) = 0$, denn sein Zähler ist: $a + b + c = 0$. Korrekt.

Allerdings kann man diese Fälle auch leichter berechnen, nach der in 2-3-1-3 genannten Formel: $p(\neg(X \to Y)) + p(Y) = p((X \to Y) \longrightarrow Y)$.
Dabei muss man berücksichtigen, dass gilt: $p(\neg(X \to Y)) = 1 - p(X \to Y)$.
Bei der quantitativen Aussagen-Logik bedeutet das: $p(\neg(X \to Y)) = 1 \Leftrightarrow p(X \to Y) = 0$.
Somit ergibt sich:
1) Fall: $0 + 1 = 1$ 2) Fall: $1 + 0 = 1$ 3) Fall: $0 + 1 = 1$ 4) Fall: $0 + 0 = 0$

Hier zeigt sich: Es gibt einen wesentlichen Unterschied zwischen der allgemeinen *quantitativen Logik* und der *quantitativen Aussagen-Logik*. Bei der allgemeinen Quantitäts-Logik gilt die Wahrheitstafel nur in eng begrenztem Ausmaß, bei der quantitativen Aussagen-Logik gilt die quantitative Wahrheitstafel dagegen perfekt.

2-4-1-5 IMPLIKATIVE FORMEL

Es ist noch eine weitere Wahrheitstafel möglich, allerdings nur bei implikativen Beziehungen: die schon eingeführte *implikative Wahrheitstafel*. Gehen wir noch einmal vom Beispiel $(X \to Y) \longrightarrow Y$ aus, mit der Wahrheitstafel in der üblichsten Form:

	(X	→	Y)	$\longrightarrow$	Y
1.	+	+	+	+	+
2.	+	–	–	+	–
3.	–	+	+	+	+
4.	–	+	–	–	–

Als *implikative Wahrheitstafel* war hier eingeführt worden:

Imp	(X	→	Y)	$\longrightarrow$	Y
1.	+	+	+	±	+
2.	+	–	–	+	–
3.	–	+	+	±	+
4.	–	+	–	±	–

Quantitativ ergibt sich folgende Struktur:

$$p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$$

Das soll nun in einer *quantitativen* Wahrheitstafel darstellgestellt werden. Diese implikative Wahrheitstafel ist allerdings ganz anders zu interpretieren als die normale bzw. konjunktive Wahrheitstafel.

Die *normale* Wahrheitstafel für $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y)$ informiert z. B. (siehe oben):
Wenn $p(X \rightarrow Y) = 1$ und $p(Y) = 1$, dann ist auch $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = 1$.

Die *implikative* Wahrheitstafel für $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y)$ informiert dagegen z. B.:
Wenn $p(X \rightarrow Y) = 1$ (oder 0), ist $p(Y) = 1$ (oder 0).
Und zwar kann dies gelten:

- *notwendig* (+): $\Phi \Rightarrow \Psi$
- *unmöglich* (–) $\neg(\Phi \Rightarrow \Psi)$ oder indirekt auch $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$
- *möglich* (±) $\Phi \longrightarrow \Psi$

	$p(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	$p(Y)$
	$\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\dfrac{a+c}{a+b+c+d}$
1)	1	±	1
2)	0	+	0
3)	1	±	1
4)	1	±	0

1) Fall
$p(X \rightarrow Y) = 1$ bedeutet: $a + c + d > 0$, $b = 0$
$p(Y) = 1$, wenn $a + c > 0$ und $b + d = 0$.
$p(Y) = 1$ ist also mit $p(X \rightarrow Y) = 1$ *verträglich*, folgt aber *nicht notwendig* daraus. Denn es könnte auch gelten: $a + c = 0$, $d > 0$.
2) Fall
Dies ist der einzige notwendige Fall: Denn $p(X \rightarrow Y) = 0$ bedeutet: $a + c + d = 0$, $b > 0$.

Somit muss auch a + c = 0 sein und damit p(Y) = 0.
3) Fall: Der ist gleich dem 1) Fall.
4) Fall
Hier gilt Entsprechendes zum 1) Fall: p(Y) = 0 ist also mit p(X → Y) = 1 verträglich, folgt aber nicht notwendig daraus.

Diese Resultate der Wahrheitstafel überraschen nicht, denn es gilt:
- semi-analytischer Schluss: p(X → Y) = 1 ⟶ p(Y) = 1
- aber strenger Schluss: p(X → Y) = 0 ⇒ p(Y) = 0
- und *Kontraposition*: p(X → Y) = 1 ⇐ p(Y) = 1

2-4-2 Implikation

2-4-2-1 DEFINITION
Ich werde hier keine streng allgemeine Darstellung vornehmen, sondern nur Beispiele geben; und zwar nehme ich bei den semi-analytischen Relationen zur besseren Vergleichbarkeit immer R(X → Y, X ∨ Y). Hier geht es nur um die speziellen Fälle, dass p = 1 (oder p = 0).

	X	→	Y	⟶	X	∨	Y
a	+	+	+	+	+	+	+
b	+	–	–	+	+	+	–
b	–	+	+	+	–	+	+
d	–	+	–	–	–	–	–

$$p(X \rightarrow Y \longrightarrow X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow p(X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1$$

2-4-2-2 REPLIKATION

X	→	Y	⟵	X	∨	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	–	–	–	+	+	–
–	+	+	+	–	+	+
–	+	–	+	–	–	–

$$p(X \rightarrow Y \longleftarrow X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow p(X \rightarrow Y) = 1 \Leftrightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

2-4-2-3 ÄQUIVALENZ

X	→	Y	⟷	X	∨	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	–	–	–	+	+	–
–	+	+	+	–	+	+
–	+	–	–	–	–	–

$$p(X \rightarrow Y \longleftrightarrow X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow p(Y) = 1 \Leftrightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

2-4-2-4 TAUTOLOGIE UND KONTRADIKTION

• tautologische Implikation: $\Rightarrow$

Die *tautologische* Implikation bedeutet einen besonderen Fall, sie besitzt grundsätzlich den Wert p = 1. Z. B. $X \wedge Y \Rightarrow Y$:

$$p(X \wedge Y \Rightarrow Y) = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

Und das gilt generell für jede Tautologie, jede Tautologie hat den Wert p = 1.

• kontradiktorische Implikation: $\not\Rightarrow$

Jetzt zur *kontradiktorischen* Implikation, z. B. $(X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$.
Sie hat grundsätzlich den Wert p = 0. Es ergibt sich folgende Formel:

$$p((X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,^{-}\!\wedge^{-} \neg X)) = \frac{0}{a+b+c+d} = 0$$

Hier gilt entsprechend: Jede Kontradiktion hat den Wert p = 0.

2-4-2-5 DREI VARIABLEN

Ich gehe hier von 3 Variablen X, Y, Z aus.

Zunächst eine *semi-analytische* Implikation: $X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z$
Als *Gesamtformel* gilt:

• Positiv: $p(X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{a_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$

• Negativ: $p(X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 0$

Jetzt eine *strenge* Implikation, als *kombinierte Formel*:
Wir nehmen den obigen semi-analytischen Schluss als Konklusion und seine Komponenten als Prämissen:

• aussagen-logische Struktur
$(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \wedge Y \wedge Z) \Rightarrow (X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z)$

• quantitativ
$[p(X \vee Y \vee Z) = 1 \wedge p(X \wedge Y \wedge Z) = 1] \Rightarrow [p(X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z) = 1]$

• Formel :

$$\frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1 \wedge \frac{a_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$$

Begründung: Aus der ersten und zweiten Bruch ergibt sich: nur $a_1 > 0$, alle anderen Variablen haben den Wert 0. Somit ergibt sich für den dritten Bruch: $\frac{a_1}{a_1} = 1$

Ich habe bewusst ein Beispiel genommen, bei dem die Beziehungen zwischen den Brüchen leicht zu erkennen sind, andere Brüche sind natürlich komplizierter.

2-4-3 Positiv-Implikation

2-4-3-1 ZWEI MODELLE DER POSITIV-IMPLIKATION

Diese Problematik ist schon mehrfach angesprochen worden, aber erst hier kann sie systematisch analysiert werden. Die Analyse in 2-4-3-1 ist allerdings primär für *Experten* gedacht.

Wie wir gesehen haben, gilt für den *Nenner* der *normalen* Implikation wie für alle anderen Relatoren: a + b + c + d > 0. Das erklärt sich dadurch, dass damit *alle möglichen* 4 Welten (bei 2 Variablen) angeführt sind, und in wenigstens einer Welt muss ein Wert > 0 bestehen. Anders gesagt: a > 0 ∨ b > 0 ∨ c < 0 ∨ d > 0.

Man kann darüber diskutieren, ob das eine rein *logische* oder auch *ontologische* Voraussetzung ist, aber ich sehe es als rein logische Voraussetzung. Sie entspricht nämlich dem logischen Gesetz, der Tautologie: (X ∧ Y) ∨ (X ∧ ¬Y) ∨ (¬X ∧ Y) ∨ (¬X ∧ ¬Y). Außerdem ist *mathematisch* verboten, dass der *Nenner* 0 beträgt, also durch 0 geteilt wird.

Die Frage ist nun, ob bei der Positiv-Implikation ein ähnliches Gesetz gilt. Betrachten wir die wichtigste Positiv-Implikation: X *→ Y.

Ihr entspricht die Formel $\frac{a}{a+b}$, also mit dem Nenner a + b.

Gilt hier ein entsprechendes Gesetz: a + b > 0? Offensichtlich kann man das nicht rein logisch folgern, denn es könnten ja gelten a + b = 0, wenn andererseits gilt: c + d > 0. Andererseits könnte man von der Definition der Positiv-Implikation und dem Sprachverständnis doch fordern, dass a > 0 oder b > 0. So kommen wir zu zwei Interpretationen: Existenz oder Nicht-Existenz. Existenz bzw. Nicht-Existenz bezieht sich primär auf das X in X *→ Y oder in p(X *→ Y) bzw. auf p(X) = $\frac{a+b}{a+b+c+d}$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Positiver Fall: X *→ Y

Dieser Fall ist unproblematisch, die Existenz von X wird ausgesagt.

p(X *→ Y) = 1 ⇒ p(X ∧ Y) > 0 ⇒ p(X) > 0 (anstatt ‚p' könnte man auch ‚q' schreiben)

$$\frac{a}{a+b} = 1 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a + b > 0$$

Wichtig: „X existiert" wird durch p(X) > 0 ausgesagt, man benötigt nicht das stärkere p(X) = 1, das zu vielen Einschränkungen führen würde. Entsprechend gilt aussagen-logisch auch nur semi-analytisch: (X *→ Y) ⟶ X.

2. Negativer Fall: ¬(X *→ Y) bzw. p(X *→ Y) = 0

In diesem Fall ist die Existenz von X problematisch.

• Existenz-Hypothese

p(X *→ Y) = 0 ⇒ p(X ∧ ¬Y) > 0 ⇒ p(X) > 0

$\frac{a}{a+b} = 0 \Rightarrow b > 0 \Rightarrow a + b > 0$ Daraus ergibt sich:

p(X *→ Y) = 0 ⇔ p(X *→ ¬Y) = 1 bzw. $\frac{a}{a+b} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 1$

In der Darstellung der aussagen-logischen, qualitativen Wahrheitstafel:

(X	*→	¬Y)	*⇔	¬(X	*→	Y)
+	−	−+	□	− +	+	+
+	+	+−	+	+ +	−	−
−	□	−+	□	□ −	□	+
−	□	+−	□	□ −	□	−

• Nicht-Existenz-Hypothese

p(X *→ Y) = 0 ¬⇒ p(X ∧ ¬Y) > 0 ¬⇒ p(X) > 0

$\frac{a}{a+b} = 0$ ¬⇒ b > 0 ¬⇒ a + b > 0 Es gilt:

p(X *→ Y) = 0 ⇐ p(X *→ ¬Y) = 1. Aber :

p(X *→ Y) = 0 ¬⇒ p(X *→ ¬Y) = 1 somit: p(X *→ Y) = 0 ¬⇔ p(X *→ ¬Y) = 1

Φ ¬⇒ Ψ ist wie beschrieben folgendermaßen zu deuten: Φ impliziert *nicht* streng Ψ. Man kann dies auch als semi-analytische Implikation schreiben: Φ ⟶ Ψ.

Aussagen-logisch gilt (X *→ ¬Y) *⇒ ¬(X *→ Y). Auf eine Wahrheitstafel verzichte ich hier, die *modifizierten* Wahrheitstafeln für das Nicht-Existenz-Modell sind sehr kompliziert, sie sind ggf. meinem Buch «Integrale Logik» zu entnehmen.

Im *aussagen-logischen* Bereich (bei den Wahrheitstafeln) verwende ich auch als *Zentral-Relator* ausschließlich die *Positiv-Implikation*, weil die normale Implikation für die Zeichen ‚□' und ‚?' keine Interpretation besitzt. Im *quantitativen* Bereich verwende ich als Zentral-Relator aber vorwiegend die *Normal-Implikation*, weil dort diese Interpretationsfragen nicht auftreten und so die Darstellung übersichtlicher ist. Hier verbirgt sich ein noch nicht vollständig gelöstes Problem, inwieweit die *aussagen-logische* und die *quantitative* Darstellung der Positiv-Implikation bzw. der *Positiv-Logik* vollkommen äquivalent sind.

2-4-3-2 EXISTENZ-MODELL VERSUS NICHT-EXISTENZ-MODELL

Für welches Modell soll man sich entscheiden? Das Existenz-Modell oder das Nicht-Existenz-Modell? Diese Frage ist, wie die vorausgegangenen Analysen schon gezeigt haben, nicht leicht zu beantworten.

• Für das *Existenz-Modell* spricht (u. a.):
– es ist von den Wahrheitstafeln her plausibler
– es entspricht mehr unserem Sprachverständnis

• Für das *Nicht-Existenz-Modell* spricht (u. a.):
– es benötigt nicht die zusätzliche Annahme a + b > 0
– es ist besser kompatibel mit der normalen Logik

Ich halte letztlich die *Existenz-Interpretation* für überlegen. Ihre Wahrheitstafeln sind gut bestätigt, und ihre Übertragung in die Formeln ist unzweifelhaft. Ich will aber das Nicht-

Existenz-Modell auch nicht verwerfen. Die Lösung könnte sein, dass man *innerhalb* der Positiv-Implikation (bzw. innerhalb der *Positiv-Logik*) die Existenz-Interpretation verwendet, *außerhalb*, d. h. *in Beziehung zur normalen Implikation* bzw. normalen Logik aber die Nicht-Existenz-Implikation. Diese Lösung müsste aber noch im Einzelnen erarbeitet werden.

2-4-3-3 SCHLUSS VON DER POSITIV-IMPLIKATION AUF DIE IMPLIKATION

- qualitativ: $(X *\!\!\to Y) \Rightarrow (X \to Y)$
- quantitativ: $p(X *\!\!\to Y) = 1 \Rightarrow p(X \to Y) = 1$

- Bruch: $\frac{a}{a+b} = 1 \Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$

Erläuterung: Aus der ersten Bruch-Gleichung ergibt sich: b = 0, a > 0. Damit ergibt sich für den abgeleiteten zweiten Bruch p = 1.

Hier stellt sich das Existenz-Problem nicht, wohl aber bei dem *semi-analytischen* Schluss von $p(X *\!\!\to Y) = 0$ auf $p(X \to Y) = 0$.

• Existenz-Modell

Voraussetzung ist hier: $\left(\frac{a}{a+b} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 1\right) \Rightarrow b > 0$

Daraus sind u. a. folgende drei Ableitungen möglich:

– semi-analytisch: $\frac{a}{a+b} = 0 \;\; *\!\!\longrightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$ (wenn c + d = 0)

– kontradiktorisch: $\frac{a}{a+b} = 0 \;\; *\!\!\not\Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ (Widerspruch, weil b > 0)

– tautologisch: $\frac{a}{a+b} = 0 \;\; *\!\!\Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$ (folgt aus b > 0)

Eigentlich gehört dieser Schluss allerdings nicht in die quantitative Aussagen-Logik, weil dort keine Werte p < 1 definiert sind, sondern in die *quantitative Quantoren-Logik*.

• Nicht-Existenz-Modell

Hier gilt: wenn $p(X *\!\!\to Y) = 0$, kann $p(X \to Y)$ beliebige Werte annehmen:

– wenn gilt b = 0 (was ja im Nicht-Existenz-Modell möglich ist), $p(X \to Y) = 1$.

– wenn b > 0 und c + d = 0, dann $p(X \to Y) = 0$

– wenn b > 0 und c + d > 0, dann $0 < p(X \to Y) < 1$

(Aber auch dieser Schluss gehört nicht mehr zur quantitativen *Aussagen*-Logik.)

2-4-3-4 SCHLUSS VON IMPLIKATION AUF POSITIV-IMPLIKATION

- qualitativ: $(X \to Y) \;\; *\!\!\longrightarrow (X *\!\!\to Y)$
- quantitativ: $p(X \to Y) = 1 \;\; *\!\!\longrightarrow p(X *\!\!\to Y) = 1$

- Bruch: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \;\; *\!\!\longrightarrow \frac{a}{a+b} = 1$

Begründung: Aus $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ folgt b = 0 und a + c + d > 0.

D. h. es ist auch möglich, dass a = 0, es reicht, dass c +d > 0. Dann wäre p(X *→ Y) = 0
Somit ist nur ein *semi-analytischer* Schluss möglich auf p(X *→ Y) = 1.

2-4-3-5 KONTRAPOSITION
Die Frage ist, inwieweit die Kontraposition auch für die *Positiv-Implikation* gilt, also:

(X → Y) ⇔ (¬X ←* ¬Y) ?
¬(X → Y) ⇔ ¬(¬X ←* ¬Y) ?

Im Einzelnen beinhaltete das somit vier *Implikationen*:

(X *→ Y) ⇒ (¬X ←* ¬Y) (X *→ Y) ⇐ (¬X ←* ¬Y)
¬(X *→ Y) ⇒ ¬(¬X ←* ¬Y) ¬(X *→ Y) ⇐ ¬(¬X ←* ¬Y)

Ich konzentriere die Analyse auf die *Implikationen*, weil die leichter zu untersuchen sind als die Äquivalenzen im Ganzen. Das Ergebnis ist aber unschwer auf die Äquivalenz zu übertragen. Und zwar untersuche ich exemplarisch die 1. Implikation, die anderen Fälle verhalten sich entsprechend.

 qualitativ: (X *→ Y) *⟶ (¬X ←* ¬Y)
 quantitativ: p(X *→ Y) = 1 *⟶ p(¬X ←* ¬Y) = 1

 Bruch: $\dfrac{a}{a+b} = 1$ *⟶ $\dfrac{d}{d+b} = 1$

Begründung: aus $\dfrac{a}{a+b} = 1$ folgt a > 0 und b = 0. b = 0 ist zwar eine *notwendige* Bedingung für $\dfrac{d}{d+b} = 1$, aber keine *hinreichende*; dafür müsste auch noch gelten d > 0.

Somit ist nur ein *semi-analytischer* Schluss möglich. Und zwar gilt das gleichermaßen für das *Existenz-Modell* und das *Nicht-Existenz-Modell*, und es gilt auch für die anderen Implikationen. Fazit: Bei der Positiv-Implikation gilt die Kontraposition nicht.

2-4-4 Systematik

Bei Systematik behandele ich verschiedene Formen von *Schlüssen*. Ich nenne wieder jeweils die *qualitative* Form, die *quantitative* Form und die Form als *Bruch*. Dabei ist zu bedenken, dass grundsätzlich gilt:

a + b + c + d > 0. Also: a > 0 ∨ b > 0 ∨ c > 0 ∨ d > 0

2-4-4-1 ABTRENNUNGSREGEL
Struktur: p(Φ) = 1 ⇒ p(Ψ) = 1 / eine Prämisse

 qualitativ: X ∧ Y ⇒ Y
 quantitativ: p(X ∧ Y) = 1 ⇒ p(Y) = 1
 Bruch: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Kurz-Erläuterung: Aus dem ersten Bruch ergibt sich:
$a > 0$, $b + c + d = 0$. Somit haben also alle Parameter außer a den Wert 0.
Damit ergibt sich für den abgeleiteten zweiten Bruch:

$$\frac{a}{a} = 1$$

2-4-4-2 MODUS PONENS

Struktur: $p(\Phi) = 1 \Rightarrow p(\Psi) = 1$ / zwei Prämissen

- qualitativ: $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$
- quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = 1 \wedge p(X) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$
- Bruch: $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \;\wedge\; \dfrac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Erläuterung:
Aus dem ersten Bruch ergibt sich: $b = 0$
Aus dem zweiten Bruch ergibt sich: $c + d = 0$
Also ergibt sich entsprechend wie oben für den abgeleiteten dritten Bruch der Wert $p = 1$.

Modus ponens mit der Positiv-Implikation
Bei der Positiv-Implikation ergibt sich ein entsprechendes Ergebnis für den Modus ponens. Dabei stellt sich das *Existenz-Problem* nicht, es wird mit dem positiven $X *\!\rightarrow Y$ gearbeitet.

- qualitativ: $(X *\!\rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$
- quantitativ : $p(X *\!\rightarrow Y) = 1 \wedge p(X) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$
- Bruch : $\dfrac{a}{a+b} = 1 \;\wedge\; \dfrac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Erläuterung: Aus den ersten beiden Brüchen ergibt sich (entsprechend wie bei dem Beispiel mit der herkömmlichen Implikation) $b + c + d = 0$.
Damit ergibt sich für den abgeleiteten Bruch: $p = 1$. Denn:

$$\frac{a}{a} = 1$$

2-4-4-3 NULLISTISCHE SCHLÜSSE

Bei denen kommt wenigstens *ein* Wert $p = 0$ vor, z. B. Struktur: $p(\Phi) = 1 \Rightarrow p(\Psi) = 0$

- qualitativ: $X \wedge Y \Rightarrow \neg(X >< Y)$
- quantitativ: $p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(X >< Y) = 0$
- Bruch: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{b+d}{a+b+c+d} = 0$

Erläuterung: Aus dem ersten Bruch folgt: $b + c + d = 0$
Folglich muss der abgeleitete zweite Bruch den Wert 0 haben.

2-4-4-4 SEMI-ANALYTISCHE SCHLÜSSE

Bei einer semi-analytischen Implikation liegt nur eine *partielle logische Folge* vor.

Ich beschränke mich hier auf *ein* Beispiel mit dem Schluss:

$p(\Phi) = 1 \longrightarrow p(\Psi) = 1$. Und zwar konkret: $p(X \vee Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$

- qualitativ: $(X \vee Y) \longrightarrow Y$
- quantitativ : $p(X \vee Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$

- Bruch: $$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1 \longrightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

Erläuterung:

Aus dem ersten Bruch folgt: $a + b + c > 0$, $d = 0$. Was lässt sich daraus für den zweiten Bruch ableiten? Betrachten wir drei Möglichkeiten:

$a + c = 0$, $b > 0$: Hier hat der zweite Bruch den Wert $p = 0$.
$a + c > 0$, $b = 0$: Hier hat der zweite Bruch den Wert $p = 1$.
$a + c > 0$, $b > 0$. Hier hat der zweite Bruch, je nach dem Verhältnis von $a + c$ zu b, beliebige Werte zwischen 0 und 1.

Es hat also den Anschein, als könne man aus dem ersten Bruch jeden möglichen Wert des zweiten Bruchs ableiten (und damit umgekehrt gar nichts). Es wäre kein partiell-analytischer Schluss gegeben, sondern überhaupt kein Schluss (bzw. ein *Pseudoschluss*).

Um dieses Ergebnis zu prüfen, setze ich konkrete Zahlen in die Gleichungen ein.

$$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \frac{4}{4} \longrightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{4}{4}$$

Jetzt erhalte ich aus der ersten Gleichung: $a + b + c = 4$, $d = 0$.

Nun ergeben sich folgende Möglichkeiten:

a + c	b	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$
4	0	4/4
3	1	3/4
2	2	2/4
1	3	1/4
0	4	0/4

In diesem Beispiel gibt es also nicht mehr wie im obigen abstrakten Fall *unendlich viele* Lösungen, sondern nur 5 Lösungen für den zweiten Bruch. Allerdings kann der Bruch auch in diesem konkreten Fall Werte von 0 bis 1 annehmen. Wie aber noch gezeigt wird, haben diese Werte unterschiedliche *theoretische Wahrscheinlichkeiten*. Jedenfalls gilt, dass bei Einsatz konkreter Zahlen ein *partieller* Schluss der Form $p(X \vee Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$ möglich ist.

2-4-4-5 ANDERE BERECHNUNGSMETHODEN

Ich habe bisher die Schlüsse berechnet, indem ich die *Prämissen analysiert* habe. Gerade bei Schlüssen mit *mehreren* Prämissen ergeben sich aber auch noch andere Methoden. Ich will die wichtigsten Methoden kurz vorstellen, anhand des *Modus ponens*:

$$p(X \to Y) = 1 \ \wedge p(X) = 1 \ \Rightarrow \ p(Y) = 1$$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \ \wedge \ \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

• Prämissen *getrennt analysieren* (bisherige Methode)

$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ Daraus erhält man: b = 0

$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$ Daraus erhält man: c + d = 0

Aus beiden Brüchen zusammen erhält man: b + c + d = 0
Nun gilt: a + b + c + d > 0. Somit a > 0.

Also gilt für die Konklusion: $\frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{a}{a} = 1$

• Prämissen *gleichsetzen* und einen Ausdruck analysieren

$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{a+b}{a+b+c+d}$ Daraus folgt: a + c + d = a + b. Somit b = c + d.

$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ Daraus erhält man: b = 0

Aus beiden Zeilen zusammen erhält man: b + c + d = 0

Dann weiter wie oben.

• Prämissen *addieren* oder *subtrahieren* und den daraus resultierenden neuen Ausdruck analysieren

Aus $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ und $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$ erhält man durch *Addition*:

$\frac{a+c+d+a+b}{a+b+c+d} = 2$ Daraus: $\frac{2a+b+c+d}{a+b+c+d} = 2$

Man *subtrahiert* davon 1 bzw. $\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$

$$\frac{2a+b+c+d}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = \frac{a}{a+b+c+d} = 1$$

Aus $\frac{a}{a+b+c+d} = 1$ erhält man: b + c + d = 0.

Dann weiter wie oben.

Je nach zu analysierendem Schluss sind nicht immer alle o. g. Verfahren anzuwenden.

2-4-5 Erweiterungen

Ich habe verschiedene Strukturen von *quantitativen aussagen-logischen* Schlüssen vorgestellt:

$p(\Phi) = 1 \;\Rightarrow\; p(\Psi) = 1$
$p(\Phi) = 1 \;\Rightarrow\; p(\Psi) = 0$
$p(\Phi) = 0 \;\Rightarrow\; p(\Psi) = 1$
$p(\Phi) = 0 \;\Rightarrow\; p(\Psi) = 0$

Eine vollständige Erfassung aller möglichen Strukturen steht hier noch aus.

2-4-5-1 STECKBRIEF EINES SCHLUSSES

Zur Übersichtlichkeit soll im Folgenden abschließend der *Steckbrief* eines Schlusses dargestellt werden. Und zwar von der *Abtrennungsregel*: $X \wedge Y \;\Rightarrow\; Y$.

2-4-5-2 STRENGER SCHLUSS

- qualitativ: $X \wedge Y \;\Rightarrow\; Y$
- quantitativ: $p(X \wedge Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(Y) = 1$

- Formel: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Beispiel:
- quantitativ: $p(X \wedge Y) = 5/5 \Rightarrow p(Y) = 5/5$

- Formel: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{5}{5} \;\Rightarrow\; \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = \dfrac{5}{5}$

2-4-5-3 UMKEHRUNG

Als quantitativen *Umkehr-Schluss* bezeichne ich in der deterministischen Aussagen-Logik einen Schluss mit doppelter Verneinung:
- quantitativ: $p(\neg(X \wedge Y)) = 0 \;\Rightarrow\; p(\neg Y)) = 0$

- Formel: $\dfrac{b+c+d}{a+b+c+d} = 0 \;\Rightarrow \dfrac{b+d}{a+b+c+d} = 0$

Der Umkehr-Schluss ist äquivalent dem Ausgangs-Schluss:

$[p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1] \;\Leftrightarrow\; [p(\neg(X \wedge Y)) = 0 \;\Rightarrow\; p(\neg(X \wedge Y)) = 0]$

2-4-5-4 KONTRAPOSITION

Der *Umkehr-Schluss* darf nicht mit der *Kontraposition* verwechselt werden. Die Kontraposition lautet:

- qualitativ: $\neg(X \wedge Y) \Leftarrow \neg Y$
- quantitativ: $p(X \wedge Y) = 0 \Leftarrow p(Y) = 0$
- Formel: $\frac{a}{a+b+c+d} = 0 \Leftarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 0$

Auch die Kontraposition ist *äquivalent* dem Ausgangs-Schluss:

$$[p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1] \Leftrightarrow [p(X \wedge Y) = 0 \Leftarrow p(Y) = 0]$$

2-4-5-5 SEMI-ANALYTISCHE SCHLÜSSE

Wenn gilt: $p(X \wedge Y) = 1$, dann ergibt sich ein strenger Schluss für $p(Y)$, nämlich $p(Y) = 1$. Wenn aber $p(X \wedge Y) = 0$, dann gibt es nur folgende *semi-analytische* Schlüsse:

$$p(X \wedge Y) = 0 \longrightarrow p(Y) = 0$$
$$p(X \wedge Y) = 0 \longrightarrow p(Y) = 1$$

Man kann allerdings fragen, ob das noch echte Schlüsse sind, denn wenn $p(X \wedge Y) = 0$, ist eben gar nichts Sicheres über $p(Y)$ abzuleiten.

2 – 5 QUANTITATIVE QUANTOREN-LOGIK

2-5-1 Einführung

2-5-1-1 FORMULIERUNGEN

Hier sollen zunächst die quantoren-logischen Grundstrukturen dargestellt werden. Ich werde zur besseren Veranschaulichung neben die *quantitative* Form auch die normale *quantoren-logische* Form stellen. Im Einzelnen geht es um 8 Möglichkeiten: Dabei bestehen folgende analytische Äquivalenzen (in normaler Sprache und formal):

- Alle $\Leftrightarrow$ nicht einige nicht
  $\Lambda \Leftrightarrow \neg V \neg$
  $p(X) = 1 \Leftrightarrow p(\neg X) = 0$
- Alle nicht $\Leftrightarrow$ nicht einige
  $\Lambda\neg \Leftrightarrow \neg V$
  $p(X) = 0 \Leftrightarrow p(\neg X) = 1$
- Nicht alle $\Leftrightarrow$ einige nicht
  $\neg\Lambda \Leftrightarrow V\neg$
  $p(X) < 1 \Leftrightarrow p(\neg X) > 0$
- Nicht alle nicht $\Leftrightarrow$ einige
  $\neg\Lambda\neg \Leftrightarrow V$
  $p(\neg X) < 1 \Leftrightarrow p(X) > 0$

Negationen

Es gilt, verschiedene *Negationen* von Λ bzw. p = 1 zu unterscheiden:

kontradiktorische Verneinung	$\neg\Lambda$	$p < 1$
konträre Verneinung	$\Lambda\neg$	$p = 0$
doppelte Verneinung	$\neg\Lambda\neg$	$p > 0$

Die doppelte Verneinung ist allerdings keine echte Verneinung, denn: $\Lambda \Rightarrow \neg\Lambda\neg$.

Es stehen sich also folgende Größen *kontradiktorisch* gegenüber:

Λ: $p = 1$ >< $\neg\Lambda$: $p < 1$
$\Lambda\neg$: $p = 0$ >< $\neg\Lambda\neg$: $p > 0$

Ähnliches gilt für „einige“, also V bzw. p > 0.

Wichtig ist hier, den Unterschied zur *Aussagen-Logik* zu sehen: aussagen-logisch gibt es (im strengen Sinn) nur *eine* Verneinung.

	Position	Negation 1	Negation 2
Aussagen-Logik	$X \rightarrow Y$	$\neg(X \rightarrow Y)$	
Quantoren-Logik	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$\neg\Lambda(X \rightarrow Y)$
Quantitativ	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$p(X \rightarrow Y) < 1$

Dabei gilt aber, wie schon in 1-5-1-5 erläutert: Innerhalb der – quantitativen – *Aussagen-Logik* ist $p(X \rightarrow Y) = 0$ *kontradiktorische* Negation von $p(X \rightarrow Y) = 1$. Innerhalb der – quantitativen – *Quantoren-Logik* ist aber $p(X \rightarrow Y) = 0$ *konträre* Negation von $p(X \rightarrow Y) = 1$, denn die kontradiktorische Negation ist hier $p(X \rightarrow Y) < 1$.

2-5-1-2 QUANTOREN-LOGIK VERSUS AUSSAGEN-LOGIK

Ich habe schon grundsätzlich dargelegt, dass man die Quantoren-Logik als eine *Erweiterung* der Aussagen-Logik verstehen kann. Insofern gilt:

- alle Gesetze der Aussagen-Logik gelten auch in der Quantoren-Logik
- es gibt spezifische Gesetze der Quantoren-Logik, die in der Aussagen-Logik nicht darstellbar sind (dies sind genau die, welche den Partikulär-Quantor verwenden)

Anbei ein Beispiel für die Darstellung eines Gesetzes in aussagen-logischer und quantoren-logischer Form, z. B.:

aussagen-logisch:	$X \wedge Y \Rightarrow Y$
quantoren-logisch:	$\Lambda x(Fx \ \wedge Gx) \ \Rightarrow \Lambda x(Gx)$
quantoren-logisch quantifiziert:	$p(Fx \ \wedge Gx) = 1 \ \Rightarrow p(Gx) = 1$

2-5-1-3 LOGISCHES QUADRAT

Die wichtigsten analytischen *klassen-logischen* Relationen behandelt das sogenannte *logische Quadrat*, das in einer normalen quantoren-logischen Form schon eingeführt wurde.

alle $p = 1$	$^{+}|^{+}$	alle¬ $p = 0$
$\Downarrow$	$^{+}\!\!><\!\!^{+}$	$\Downarrow$
einige $p > 0$	$^{+}\vee^{+}$	einige¬ $p < 1$

Das Zeichen $^{+}\!\!><\!\!^{+}$ in der Mitte bezieht sich auf *beide* Diagonalen:

1. alle $^{+}\!\!><\!\!^{+}$ einige¬ 2. alle¬ $^{+}\!\!><\!\!^{+}$ einige

2-5-1-4 EINFACHE RELATIONEN

Einfache Relationen sind solche mit *einer* Prädikat-Variablen wie $\Lambda x(Fx)$ im Gegensatz zu *komplexen* Relationen mit zwei oder mehr Prädikat-Variablen wie $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$. Man kann sie quantitativ mit *Individuenvariable* x und *Prädikatvariable* F schreiben, z. B. $p(Fx) = 1$. Übersichtlicher ist aber, sie nur mit der *neutralen* Variable X zu schreiben: $p(X) = 1$.

Die logischen Verbindungen zwischen den Quantoren lassen sich für einfache Sätze bzw. Relationen unproblematisch im *logischen Quadrat* darstellen.

Aus Platzgründen wird das „Quadrat“ oft nur als *Rechteck* dargestellt, so auch bei mir an vielen Stellen in diesem Buch.

$p(X) = 1$	$^{+}|^{+}$	$p(X) = 0$
$\Downarrow$	$^{+}\!\!><\!\!^{+}$	$\Downarrow$
$p(X) > 0$	$^{+}\vee^{+}$	$p(X) < 1$

Anstelle $p(X) = 0$ könnte man auch $p(\neg X) = 1$ schreiben u. ä., das würde der quantorenlogischen Grundform $\Lambda\neg(X)$ mehr entsprechen. In der quantitativen Form ist aber die obige Darstellung am übersichtlichsten.

Durch Verwendung einer spezifischen *Individuen-Konstante* x_i sind z.B. folgende Schlüsse möglich: $p(Fx) = 1 \Rightarrow Fx_i$. Das ist wie folgt zu deuten: „Wenn alle x die Eigenschaft F haben, dann hat auch ein beliebiges x die Eigenschaft F". Ähnlich z. B. $Fx_i \Rightarrow p(Fx) > 0$. Man könnte auch $p(Fx_i) = 1$ statt Fx_i schreiben, dies wäre aber zu interpretieren (vgl. 1-4-5-3).

Außerdem sind von Bedeutung:
analytische Relationen zwischen *relativen* Häufigkeiten (p) und *absoluten* Häufigkeiten (q):

- $p(X) = 1 \Rightarrow q(X) > 0$ (es gilt auch: $\Leftrightarrow$) Oder: $p(X) = 1 \Rightarrow q(X) \geq 1$
  Wenn alle Objekte X sind, dann gibt es mehr als 0 Objekte (bzw. mindestens 1 Objekt), die X sind. Die 1 hat bei p natürlich eine ganz andere Bedeutung als bei q, bei p steht sie für 100%, bei q für genau *ein* Objekt. Zur Unterscheidung könnte man bei p immer *dezimal* 1,00 bzw. 0,00 schreiben, was aber eher unübersichtlich sein dürfte.
  Es gilt auch die Kontraposition: $q(X) = 0 \Rightarrow p(X) < 1$.
- $p(X) > 0 \Rightarrow q(X) > 0$ oder : $p(X) > 0 \Rightarrow q(X) \geq 1$
  Kontraposition: $q(X) = 0 \Rightarrow p(X) = 0$
- $p(X) = 0 \Rightarrow q(X) = 0$
  Kontraposition: $q(X) > 0 \Rightarrow p(X) > 0$. Dies ist korrekt, wenn allerdings p z. B. nur 1/1000000 beträgt (also q = 1), kann man auch sagen: $p \approx 0$.
- $p(X) < 1$
  Aus $p(X) < 1$ lässt sich nichts über q(X) ableiten. q(X) kann 0 sein, 1 oder beliebig groß. Es muss nur gewährleistet sein, dass $q(X) < [q(X) + q(\neg X)]$.

2-5-1-5 WAHRHEITS-TAFELN

In der *Aussagen-Logik* kann die Gültigkeit einer Relation durch die *Wahrheitstafeln* überprüfen. Dabei ergibt sich die Gültigkeit der Gesamt-Relation aus der Gültigkeit der Einzel-Relationen bzw. Einzelfaktoren. In der *Quantoren-Logik* ist das schwieriger. Es gibt verschiedene Möglichkeiten (siehe genauer in 2-2-1-5).

• *Strenger (analytischer) Schluss*

Als Beispiel wähle ich wieder $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ bzw. $p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0$. Für den Schluss $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ verwendete ich – analog zur Aussagen-Logik – folgende Wahrheitstafel:

Λx(Fx)	⇒	Vx(Fx)
+	+	+
−	+	+
−	+	+
−	+	−

Es geht nun darum, das + und das − unter den Quantoren präzise zu bestimmen.

In der *quantitativen* Quantoren-Logik stehen + und − in der Wahrheitstafel nämlich nicht wie bei der Aussagen-Logik einfach für „ja" (bzw. p = 1) und „nein" (bzw. p = 0), sondern sie müssen folgendermaßen gedeutet werden:

Λx(Fx)	Vx(Fx)
+: p = 1	+: p > 0
−: p < 1	−: p = 0

Somit ergibt sich folgende quantitativ-quantoren-logische (normale) Wahrheitstafel:

$p(X) = 1$	$\Rightarrow$	$p(X) > 0$
$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$		$\frac{a+b}{a+b+c+d} > 0$
+ (p = 1)	+	+ (p > 0)
− (p < 1)	+	+ (p > 0)
− (p < 1)	+	+ (p > 0)
− (p < 1)	+	− (p = 0)

Daraus ergeben sich folgende Einzel-Relationen bei einer *konjunktiven* Interpretation:

$[p(X) = 1 \wedge p(X) > 0] \Rightarrow [p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0]$
$[p(X) < 1 \wedge p(X) > 0] \Rightarrow [p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0]$
$[p(X) < 1 \wedge p(X) > 0] \Rightarrow [p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0]$
$[p(X) < 1 \wedge p(X) = 0] \Rightarrow [p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0]$

Diese Relationen müssen alle *Tautologien* sein, weil $p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0$ ja eine Tautologie ist und jeder Schluss auf eine Tautologie seinerseits eine Tautologie ist: $\Phi \Rightarrow$ Tautologie.

• Semi-analytischer Schluss
Hier wähle ich $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$ bzw. $p(X) > 0 \longrightarrow p(X) = 1$. Die quantitative Tafel:

Vx(Fx)	$\longrightarrow$	Λx(Fx)
$\frac{a+b}{a+b+c+d} > 0$		$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$
+ (p > 0)	+	+ (p = 1)
+ (p > 0)	−	− (p < 1)
+ (p > 0)	−	− (p < 1)
− (p = 0)	+	− (p < 1)

2-5-2 Implikation

2-5-2-1 TAUTOLOGIE
Typische *quantitative quantoren-logische* Schlüsse sind solche, bei denen die Werte p < 1 und p < 0 vorkommen. Denn Schlüsse nur mit p = 1 oder p = 0 können bereits in der *quantitati-*

ven Aussagen-Logik dargestellt werden. Ich wähle hier nur spezifisch quantoren-logische (quantitative) Schlüsse wie:

• $p < 1 \Rightarrow p < 1$ • $p < 1 \Rightarrow p > 0$ • $p > 0 \Rightarrow p > 0$ • $p = 1 \Rightarrow p > 0$

• *Eine* Prämisse: Beispiel: $\neg\Lambda x(Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \wedge Gx)$

□ quantoren-logisch: $\neg\Lambda(Y) \Rightarrow \neg\Lambda(X \wedge Y)$

□ quantitativ: $p(Y) < 1 \Rightarrow p(X \wedge Y) < 1$

□ Bruch: $\frac{a+c}{a+b+c+d} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d} < 1$

Kurz-Erläuterung: Aus dem ersten Bruch ergibt sich: $b + d > 0$. Damit muss aber auch der abgeleitete Bruch den Wert $p < 1$ haben.

• *Zwei* Prämissen. Beispiel analog Modus ponens: $Vx(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Gx)$

□ quantoren-logisch: $V(X \rightarrow Y) \wedge \Lambda(X) \Rightarrow V(Y)$

□ quantitativ: $p(X \rightarrow Y) > 0 \wedge p(X) = 1 \Rightarrow p(Y) > 0$

□ Bruch: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0 \wedge \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} > 0$

Erläuterung:
Aus dem ersten Bruch ergibt sich: $a + c + d > 0$. Aus dem zweiten Bruch ergibt sich: $c + d = 0$
Somit ergibt sich aus beiden Brüchen zusammen: $a > 0$.
Also ergibt sich für den abgeleiteten dritten Bruch der Wert $p > 0$.

• *Zwei* Prämissen. Beispiel analog Modus ponens: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Vx(Fx) \Rightarrow Vx(Gx)$

□ quantoren-logisch: $\Lambda(X \rightarrow Y) \wedge V(X) \Rightarrow V(Y)$

□ quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = 1 \wedge p(X) > 0 \Rightarrow p(Y) > 0$

□ Bruch: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \wedge \frac{a+b}{a+b+c+d} > 0 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} > 0$

Erläuterung:
Aus dem ersten Bruch ergibt sich: $a + c + d > 0$, $b = 0$.
Aus dem zweiten Bruch ergibt sich u. a.: $a + b > 0$
Somit ergibt sich aus beiden Brüchen zusammen: $a > 0$.
Also ergibt sich für den abgeleiteten dritten Bruch der Wert $p > 0$.

2-5-2-2 KONTRADIKTION

Hier sei daran erinnert, dass die Implikation nur kontradiktorisch ist, wenn von einer Tautologie auf eine Kontradiktion geschlossen wird: also Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion

Als Beispiel: $p(X \,{}^{+}\vee^{+} \neg X) = 1 \not\Rightarrow p(Y \,{}^{-}\wedge^{-} \neg Y) > 0$.

Es wurde schon darauf hingewiesen, dass es *logisch falsche Folgen* gibt, die aber bei Verwendung der normalen Implikation nicht *kontradiktorisch* sind. Hier verwendet man i. allg. am besten: $\Rightarrow \neg$

Als Beispiel: $p(X) = 1 \Rightarrow \neg[p(X) < 1]$. Nun gilt aber laut quantoren-logischer Definition:

$\neg[p(X) < 1] \Leftrightarrow p(X) = 1$. Somit gilt auch die *Äquivalenz*.

2-5-2-3 SEMI-ANALYTISCH

Z. B.: $p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0$

Als wesentliche Gesetze der traditionellen Quantoren-Logik gelten:

alle $\Rightarrow$ einige und alle¬ $\Rightarrow$ einige¬

In der Formalisierung $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$ gilt dieses Gesetz bei der Verwendung der Implikation. Wie beschrieben, findet man aber am häufigsten in der logischen bzw. wissenschaftstheoretischen Literatur folgende Formalisierungen:

	Quantoren-logisch	Quantitativ
Alle F sind G:	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$p(X \rightarrow Y) = 1$
Einige F sind G:	$Vx(Fx \wedge Gx)$	$p(X \wedge Y) > 0$
Alle F sind nicht G:	$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$	$p(X \rightarrow \neg Y) = 1$
Einige F sind nicht G:	$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$	$p(X \wedge \neg Y) > 0$

Bei diesen Formalisierungen ist der Schluss von „alle" auf „einige" aber *nur semi-analytisch*, nicht streng analytisch. Es gilt also:

„alle $\neg\Rightarrow$ einige" bzw. „alle $\longrightarrow$ einige" (und entsprechend), konkret bedeutet das:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ bzw. $p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \longrightarrow \frac{a}{a+b+c+d} > 0$$

Begründung: Aus dem ersten Bruch ergibt sich: a + c + d > 0. Daraus folgt aber nicht notwendig, dass a > 0. Es kann auch gelten a = 0, es reicht, dass c + d > 0.

Entsprechend ließe sich beweisen:

$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge \neg Gx)$ bzw. $p(X \rightarrow \neg Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge \neg Y) > 0$

Da die Gesetze „alle $\Rightarrow$ einige" und „alle¬ $\Rightarrow$ einige¬„ aber wesentlich für die Bedeutung von *alle* und *einige* sind, muss man die oben genannte Interpretation von *All-Sätzen* und *Partikulär-Sätzen* als sehr problematisch einstufen, wie schon an früherer Stelle aufgezeigt.

2-5-2-4 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Replikation* gilt im Wesentlichen das für die Implikation gesagte, daher soll hier auf eine gesonderte Darstellung verzichtet werden.

Die wichtigsten quantoren-logischen *Äquivalenzen* sind die *Umformungen* von Relationen mit dem *All-Quantor* in solche mit dem *Partikulär-Quantor*. Allerdings kann man anstatt von Äquivalenzen auch von *Definitionen* ausgehen, was aber logisch kaum einen Unterschied macht, beide gelten *notwendig*, allerdings die einen *formal*, die anderen *material*.

Ich wähle hier die übliche und die vereinfachte Darstellung, also p(Fx) und p(X):

• Alle $\Leftrightarrow$ nicht einige nicht	• Alle nicht $\Leftrightarrow$ nicht einige
$p(X) = 1 \Leftrightarrow p(\neg X) = 0$	$p(X) = 0 \Leftrightarrow p(\neg X) = 1$
$p(Fx) = 1 \Leftrightarrow p(\neg Fx) = 0$	$p(Fx) = 0 \Leftrightarrow p(\neg Fx) = 1$
• Nicht alle $\Leftrightarrow$ einige nicht	• Nicht alle nicht $\Leftrightarrow$ einige
$p(X) < 1 \Leftrightarrow p(\neg X) > 0$	$p(\neg X) < 1 \Leftrightarrow p(X) > 0$
$p(Fx) < 1 \Leftrightarrow p(\neg Fx) > 0$	$p(\neg Fx) <1 \Leftrightarrow p(Fx) > 0$

2-5-2-5 SYLLOGISMUS

Mit *Syllogismus* bezeichnet man traditionell eine *Quantoren-Logik*, die mit 3Variablen (M, S und P) operiert – und nicht mit 2, wie hier bisher dargestellt. Der Syllogismus arbeitet auch mit den vier genannten *Urteilen* entsprechend Relationen, er benennt sie mit den Buchstaben a, e, i, o (vgl. hierzu 2-2-2-5):

a:	z. B.: S a P:	alle S sind P
e:	z. B.: S e P	alle S sind nicht P
i:	z. B.: S i P	einige S sind P
o:	z. B.: S o P	einige S sind nicht P

Ein Syllogismus ist z. B.: M a P $\wedge$ S a M $\Rightarrow$ S a P

quantoren-logisch: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Hx \rightarrow Fx) \Rightarrow \Lambda x(Hx \rightarrow Gx)$

quantitativ: $p(Fx \rightarrow Gx) = 1 \wedge p(Hx \rightarrow Fx) = 1 \Rightarrow p(Hx \rightarrow Gx) = 1$.

Ich analysiere aber im Folgenden einen Schluss, der nicht als gültiger Syllogismus gilt, bei Verwendung der (normalen) Implikation jedoch folgerichtig ist: M i P $\wedge$ S a M $\longrightarrow$ S i P

quantoren-logisch: $Vx(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Hx \rightarrow Fx) \Rightarrow Vx(Hx \rightarrow Gx)$

quantitativ: $p(Fx \rightarrow Gx) > 0 \wedge p(Hx \rightarrow Fx) = 1 \Rightarrow p(Hx \rightarrow Gx) > 0$.

Schreiben wir vereinfacht für Fx: X, für Gx: Y, für Hx: Z.

Dann ergibt sich: $V(X \rightarrow Y) \wedge \Lambda(Z \rightarrow X) \Rightarrow V(Z \rightarrow Y)$.

In quantifizierter Form lautet der Schluss:

$p(X \rightarrow Y) > 0 \wedge p(Z \rightarrow X) = 1 \Rightarrow p(Z \rightarrow Y) > 0$

Dann ergeben sich folgende Formeln (vgl. zur Konstruktion der Formeln 1-3-2-5):

(1) $p(X \rightarrow Y) > 0$ $$\frac{a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} > 0$$

(2) $p(Z \rightarrow X) = 1$ $$\frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$$

(3) $p(Z \rightarrow Y) > 0$ $$\frac{a_1 + a_2 + b_2 + c_1 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} > 0$$

Begründung:

(1) Aus $p(X \rightarrow Y) = 1$ ergibt sich: $a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2 > 0$

(2) Aus $p(Z \rightarrow X) = 1$ ergibt sich: $c_1 + d_1 = 0$

Aus (1) und (2) ergibt sich: $a_1 + a_2 + c_2 + d_2 > 0$

Dies bedeutet für die Konklusion (3) $p(Z \rightarrow Y)$:

Sie muss > 0 sein, denn sie enthält im Zähler alle oben aufgeführten 4 Elemente: $a_1 + a_2 + c_2 + d_2$, zusätzlich noch b_2 (c_1 kann man streichen, weil es den Wert 0 hat). Also:

$$\frac{a_1 + a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} > 0$$

Wenn man im Nenner c_1 und d_1 streicht, weil beide den Wert 0 haben, ergibt sich:

$$\frac{a_1 + a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_2 + d_2} > 0$$

Es könnte dabei theoretisch sein, dass z. B. nur $a_1 > 0$ und alle anderen Parameter = 0 sind, aber man kann aus den Formeln eben nicht die Werte für *alle* Variablen abzuleiten, sie bleiben diesbezüglich *unbestimmt*.

2-5-3 Positiv-Implikation

2-5-3-1 TAUTOLOGIE
Zum großen Teil gelten die gleichen Schlüsse wie bei der *normalen Implikation*.

Z. B. der Modus ponens:
Λx(Fx *→ Gx) ∧ Λx(Fx) *⇒ Λx(Gx)
p(Fx *→ Gx) = 1 ∧ p(Fx) = 1 *⇒ p(Gx) = 1

$$\frac{a}{a+b} = 1 \ \wedge \ \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \ {*\Rightarrow} \ \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

Allerdings gibt es auch Unterschiede So gilt bei der *Positiv-Implikation* das Gesetz:
Λx(Fx *→ Gx) *⇒ Vx(Fx ←* Gx)
p(Fx *→ Gx) = 1 *⇒ p(Fx ←* Gx) > 0

$$\frac{a}{a+b} = 1 \ {*\Rightarrow} \ \frac{a}{a+c} > 0$$

Dies gilt nicht bei der *Normal-Implikation*, hier ist nur ein *partieller Schluss* möglich:
p(Fx → Gx) = 1 ⟶ p(Fx ← Gx) > 0

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \longrightarrow \frac{a+b+d}{a+b+c+d} > 0$$

Aus dem ersten Bruch ergibt sich: a + c + d > 0, b = 0.
Es wäre also möglich, dass a + d = 0 und nur c > 0. In diesem Fall wäre der zweite Bruch, wäre p(Fx ← Gx) = 0. Allerdings, wenn a + d > 0 und c = 0, dann p(Fx ← Gx) = 1.

2-5-3-2 KONTRADIKTION
Wie in 2-1-3-2 ausgeführt wurde, gilt für die *Positiv-Implikation* anders als für die *normale Implikation:* sie ist nicht nur kontradiktorisch, wenn das Vorderglied tautologisch und das Nachglied kontradiktorisch ist. Sondern überhaupt, wenn das Nachglied die Negation des Vorderglieds bedeutet, also: Position *⇏ Negation.

Dabei ist zu bedenken: Genauso wie gilt, eine Positiv-Implikation ist *tautologisch*, wenn unter dem Zentral-Relator außer + nur □ (undefiniert) steht, so gilt: Die Positiv-Implikation ist *kontradiktorisch*, wenn unter dem Zentral-Relator außer – nur □ steht.

Beispiele für Kontradiktionen sind (in quantoren-logischer und quantitativer Form):

Λx(Fx *→ Gx) *⇏ ¬Λx(Fx *→ Gx) bzw. p(Fx *→ Gx) = 1 *⇏ p(Fx *→ Gx) < 1

$\mathrm{Vx(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} \;\; {*}{\not\Rightarrow}\; \neg\mathrm{Vx(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)}$ bzw. $\mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} > 0 \;\; {*}{\not\Rightarrow}\; \mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} = 0$

2-5-3-3 SEMI-ANALYTISCH

Ein typischer semi-analytischer quantoren-logischer Schluss ist der von „einige“ auf „alle“, also z. B.: „Wenn *einige* Menschen Philosophen sind, dann sind *alle* Menschen Philosophen“. Das ist zwar nicht kontradiktorisch, aber auch nicht streng folgerichtig.

$\mathrm{Vx(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} \quad {*}{\longrightarrow}\; \Lambda\mathrm{x(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)}$
$\mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} > 0 \quad {*}{\longrightarrow} \quad \mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} = 1$

$\frac{a}{a+b} > 0 \;\; {*}{\longrightarrow} \;\; \frac{a}{a+b} = 1$ b kann 0 sein, muss aber nicht 0 sein.

2-5-3-4 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Positiv-Äquivalenz* gelten quantoren-logisch überwiegend die Äquivalenzen der normalen Äquivalenz, etwa die klassischen Umformungen der Quantoren, hier in ausführlicher Schreibweise mit *Individuenvariable* ‚x’:

Alle	nicht einige nicht	$\Lambda\mathrm{x(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)}$	$\Leftrightarrow\; \neg\mathrm{Vx}\neg\mathrm{(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)}$
		$\mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} = 1$	$\Leftrightarrow\; \neg(\mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx))} < 1$
Alle nicht	nicht einige	$\Lambda\neg\mathrm{(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)}$	$\Leftrightarrow\; \neg\mathrm{V(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)}$
		$\mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} = 0$	$\Leftrightarrow\; \neg(\mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx))} > 0$
Nicht alle	einige nicht	$\neg\Lambda(\mathrm{\ Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)}$	$\Leftrightarrow\; \mathrm{V}\neg\mathrm{(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)}$
		$\neg(\mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} = 1$	$\Leftrightarrow\; \mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} < 1$
Nicht alle	einige	$\neg\Lambda\neg\mathrm{(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx\ )}$	$\Leftrightarrow\; \mathrm{V(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)}$
Nicht		$\neg(\mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx))} = 0$	$\Leftrightarrow\; \mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} > 0$

Bei der Positiv-Implikation (*Existenz-Ansatz*) gilt: $(\mathrm{X} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Y}) \;\Leftrightarrow \neg(\mathrm{X} \;{*}{\rightarrow}\; \neg\mathrm{Y})$

Umgesetzt in Quantoren-Logik: $\Lambda\mathrm{x(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} \;\;\Leftrightarrow\;\; \neg\mathrm{Vx(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \neg\mathrm{Gx)}$

Umgesetzt in quantitative Logik: $\mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} = 1 \Leftrightarrow \neg(\mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \neg\mathrm{Gx)}{>}\; 0$

Zur Erläuterung:

Es gilt: $\frac{a}{a+b} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{b}{a+b} = 0$ Dann gilt auch: $\frac{a}{a+b} = 1 \;\Leftrightarrow \neg(\frac{b}{a+b} > 0)$

Die *Positiv-Replikation* $\leftarrow{*}$ weist keine Besonderheiten auf, weshalb hier nicht gesondert auf sie einzugehen ist.

2-5-3-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Folgende Beziehungen bestehen z. B. zwischen Implikation und Positiv-Implikation (ich verwende dabei als Zentral-Relator die *normale* Implikation, weil hier die *Kontraposition* gilt.)

$\mathrm{Vx(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} \;\Rightarrow\; \mathrm{Vx(Fx} \rightarrow \mathrm{Gx)}$ bzw. $\mathrm{p(Fx} \;{*}{\rightarrow}\; \mathrm{Gx)} > 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{p(Fx} \rightarrow \mathrm{Gx)} > 0$

$$\frac{a}{a+b} > 0 \Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$$

Kontraposition:

$\neg$Vx(Fx $\rightarrow$ Gx) $\Rightarrow$ $\neg$Vx(Fx *$\rightarrow$ Gx) bzw. p(Fx $\rightarrow$ Gx) = 0 $\Rightarrow$ p(Fx *$\rightarrow$ Gx) = 0

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0 \Rightarrow \frac{a}{a+b} = 0$$

2-5-4 Systematik

Ich komme zurück auf die *5 Modelle* quantoren-logischer Relationen, die bereits mehrfach, zuletzt in 2-2-4 vorgestellt wurden. Es ist hier zu prüfen, inwieweit die anerkannten Gesetzmäßigkeiten des *logischen Quadrats* gelten. Ich verwende hier zur besseren Vergleichbarkeit die Form mit *Individuenvariable*, z. B. p(Fx $\rightarrow$ Gx) = 1.

2-5-4-1 MODELL 1: IMPLIKATION

$$\begin{array}{ccc}
p(Fx \rightarrow Gx) = 1 & {}^{+}|^{+} & p(Fx \rightarrow Gx) = 0 \\
\Downarrow & {}^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\
p(Fx \rightarrow Gx) > 0 & {}^{+}\vee^{+} & p(Fx \rightarrow Gx) < 1
\end{array}$$

Bei diesem Modell gelten *alle* analytischen Relationen des logischen Quadrats. Denn in der Klammer steht immer derselbe Ausdruck (Fx $\rightarrow$ Gx). Nur die *Quantität ist* unterschiedlich, und genau zwischen diesen unterschiedlichen Quantitäten gelten eben die Beziehungen des logischen Quadrats.

2-5-4-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

$$\begin{array}{ccc}
p(Fx \rightarrow Gx) = 1 & & p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1 \\
\Downarrow & {}^{+}\vee^{+} & \Downarrow \\
p(Fx \rightarrow Gx) > 0 & {}^{+}\vee^{+} & p(Fx \rightarrow \neg Gx) > 0
\end{array}$$

Wie man sieht, weichen bei diesem Modell mehrere Beziehungen vom *logischen Quadrat* ab. So besteht in der Diagonalen keine Kontravalenz (${}^{+}{>}{<}^{+}$), sondern nur die Disjunktion (${}^{+}\vee^{+}$); es besteht also kein *kontradiktorischer*, sondern nur ein *subkonträrer* Gegensatz. Und wenn es auch erstaunen mag, zwischen p(Fx $\rightarrow$ Gx) = 1 und p(Fx $\rightarrow$ $\neg$Gx) = 1 besteht gar keine *tautologische* Beziehung.

2-5-4-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

$$
\begin{array}{ccc}
p(Fx \wedge Gx) = 1 & {}^{+}|^{+} & p(Fx \wedge \neg Gx) = 1 \\
\Downarrow & {}^{+}|^{+} & \Downarrow \\
p(Fx \wedge Gx) > 0 & & p(Fx \wedge \neg Gx) > 0
\end{array}
$$

Hier stimmen 3 analytische Relationen mit dem logischen Quadrat überein, d. h. aber auch 3 nicht. Zwischen $p(Fx \wedge Gx) > 0$ und $p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$ lässt sich wieder keinerlei tautologische Relation angeben.

2-5-4-4 MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

Das ist wie gesagt das verbreitetste Modell, welches z. B. in der Wissenschaftstheorie überwiegend zu finden ist, so auch bei Karl Popper.

$$
\begin{array}{ccc}
p(Fx \rightarrow Gx) = 1 & & p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1 \\
 & {}^{+}{>}{<}^{+} & \\
p(Fx \wedge Gx) > 0 & & p(Fx \wedge \neg Gx) > 0
\end{array}
$$

Bei diesem, allgemein akzeptierten Modell stimmen nur die 2 Diagonal-Beziehungen mit dem *logischen Quadrat* überein, also:

$p(Fx \rightarrow Gx) = 1 \quad {}^{+}{>}{<}^{+} \quad p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$

$p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1 \quad {}^{+}{>}{<}^{+} \quad p(Fx \wedge Gx) > 0$

Und für die anderen Relationen lässt sich sogar gar keine tautologische Verbindung angeben. Es ist erstaunlich, dass der Diskrepanz zum logischen Quadrat nicht mehr Aufmerksamkeit geschenkt wird. Es stellt die Berechtigung dieser quantoren-logischen Formalisierung (natürlich auch in der ursprünglichen, nicht quantifizierten Form) doch sehr in Frage.

2-5-4-5 MODELL 5: POSITIV-IMPLIKATION

$$
\begin{array}{ccc}
p(Fx *\!\!\rightarrow Gx) = 1 & {}^{+}|^{+} & p(Fx *\!\!\rightarrow Gx) = 0 \\
\Downarrow & {}^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\
p(Fx *\!\!\rightarrow Gx) > 0 & {}^{+}\vee^{+} & p(Fx *\!\!\rightarrow Gx) < 1
\end{array}
$$

Dieses Modell erfüllt alle Bedingungen des *logischen Quadrats*. Das gilt sonst allein noch für das Modell 1, welches sich nur durch Verwendung der *Normal*-Implikation unterscheidet. Wie ich aber früher gezeigt habe, führt die *normale* Implikation zu verschiedenen Problemen. So spricht sehr vieles für dieses Modell mit der *Positiv*-Implikation, ihr einziger Nachteil ist, dass sie nicht *alle* logischen Welten abdeckt.

2-5-5 Erweiterungen

2-5-5-1 INKLUSIV / EXKLUSIV

Zunächst zur *exklusiven* Variante des *logischen Quadrats*. Bei der exklusiven Logik schließt das „einige" im Sinne von „genau einige" das „alle" aus (das „alle nicht" natürlich sowieso).

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}\text{alle}\\ p = 1\end{array} & {}^+|^+ & \begin{array}{c}\text{alle}\neg\\ p = 0\end{array} \\[1em]
{}^+|^+ & {}^+|^+ & {}^+|^+ \\[2em]
\begin{array}{c}\text{genau}\\ \text{einige}\\ 0 < p < 1\end{array} & \Leftrightarrow & \begin{array}{c}\text{genau}\\ \text{einige}\neg\\ 0 < p < 1\end{array}
\end{array}
$$

Das Verhältnis von *inklusiv* und *exklusiv* zeigt folgende Übersicht auf:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \neg(0 < p < 1) & \Leftrightarrow & \neg(0 < p < 1) & & \\
 & & \Uparrow & & \Uparrow & & \\
p \neg < 1 & \Leftrightarrow & p = 1 & {}^+|^+ & p = 0 & \Leftrightarrow & p \neg > 0 \\
\Downarrow & & \Downarrow & {}^+\!\!>\!\!<\!\!{}^+ & \Downarrow & & \Downarrow \\
p \neq 0 & \Leftrightarrow & p > 0 & {}^+\vee^+ & p < 1 & \Leftrightarrow & p \neq 1 \\
 & & \Uparrow & & \Uparrow & & \\
 & & 0 < p < 1 & \Leftrightarrow & 0 < p < 1 & &
\end{array}
$$

Es gelten hier folgende Definitionen:

$p = 1 \Leftrightarrow p \neg < 1$, $p = 0 \Leftrightarrow p \neg > 0$, $p < 1 \Leftrightarrow p \neq 1$, $p > 0 \Leftrightarrow p \neq 0$

Inklusive Gesetze wurden schon genannt, einige wichtige – *exklusive* – Gesetze sind:

quantoren-logisch:	quantifiziert:
$\exists x(Fx) \Leftrightarrow \neg\Lambda x\,(Fx) \wedge Vx(Fx)$	$0 < p(Fx) < 1 \Leftrightarrow p(Fx) < 1 \wedge p(Fx) > 0$
$\exists x(Fx) \Leftrightarrow \exists x\neg(Fx)$	$0 < p(Fx) < 1 \Leftrightarrow 0 < p(\neg Fx) < 1$
$\exists x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$	$0 < p(Fx) < 1 \Rightarrow p(Fx) > 0$
$\exists x(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$	$0 < p(Fx) < 1 \Rightarrow p(\neg Fx) > 0$

Voraussetzung: $\exists x(Fx)$ bedeutet $0 < p(Fx) < 1$. $\exists x\neg(Fx)$ bedeutet $0 < p(\neg Fx) < 1$.

2-5-5-2 SECHS-WERTIGE LOGIK

Die 6-wertige Logik wurde – in ihrer *synthetischen* Form – in 2-1-5-1 vorgestellt. Hier geht es jetzt um die *analytischen* Beziehungen.

Die 6-wertige Logik umfasst folgende Stufen bzw. Gegensätze:

alle – alle nicht / die meisten – die meisten nicht / einige – einige nicht.

Ich möchte hier nur kurz auf die wichtigsten quantitativen analytischen Relationen eingehen.

• Es gilt bei *inklusiver* Interpretation:

alle $\Rightarrow$ die meisten $\Rightarrow$ einige $\qquad p = 1 \Rightarrow p > 0{,}5 \Rightarrow p > 0$

alle$\neg$ $\Rightarrow$ die meisten$\neg$ $\Rightarrow$ einige$\neg$ $\qquad p = 0 \Rightarrow p < 0{,}5 \Rightarrow p < 1$

Bei inklusiver Interpretation gilt also: *mindestens* einige (vielleicht die meisten, vielleicht alle), *mindestens* die meisten (vielleicht alle).

• Bei *exklusiver* Interpretation heißt es dagegen: *genau* einige, *genau* die meisten. So gilt:

genau einige $\Leftrightarrow$ genau einige nicht. Dem entspricht nur *ein* Werteintervall: $0 < p < 1$.

Bei „genau die meisten" sieht es aber anders aus: denn „genau die meisten" hat einen anderen Wert als „genau die meisten nicht = genau die wenigsten".

So ergeben sich insgesamt 5 Unterscheidungen, man kommt also zu einer *5-wertigen* Logik:

alle	$p = 1$
genau die meisten	$0{,}5 < p < 1$
genau einige (nicht)	$0 < p < 1$
genau die wenigsten	$0 < p < 0{,}5$
alle nicht	$p = 0$

Wenn man verhindern will, dass sich „genau die meisten (nicht)" und „genau einige (nicht)" überschneiden, müsste man „genau einige (nicht)" einschränken auf $p = 0{,}5$.

Außer zwischen den äquivalenten Ausdrücken herrscht überall der *konträre* Gegensatz, also $\Phi \,^{+}|^{+}\, \Psi$ bzw. $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$. Z. B. gilt für „alle":

alle $\Rightarrow \neg$ genau die meisten $\wedge$ $\neg$ genau einige
$\wedge$ $\neg$ genau die wenigsten $\wedge$ $\neg$ (genau) alle nicht

quantitativ: $p = 1 \Rightarrow \neg(0{,}5 < p < 1) \wedge \neg(0 < p < 1) \wedge \neg(0 < p < 0{,}5) \wedge \neg(p = 0)$

2-5-5-3 DIMENSIONEN

Verschiedene Dimensionen wie *Raum* und *Zeit* können entsprechend strukturiert werden:

• Raum

In der 4-wertigen (inklusiven) *Raum-Logik* gilt:

überall ⇒ mancherorts
Λ(Raum) ⇒ V(Raum)
p(Raum) = 1 ⇒ p(Raum) > 0

In der 6-wertigen Raum-Logik gilt:
überall ⇒ meistenorts ⇒ mancherorts
p(Raum) = 1 ⇒ p(Raum) > 0,5 ⇒ p(Raum) > 0

• Zeit
In der 4-wertigen (inklusiven) *Zeit-Logik* gilt:
immer ⇒ manchmal
Λ(Zeit) ⇒ V(Zeit)
p(Zeit) = 1 ⇒ p(Zeit) > 0

In der 6-wertigen Zeit-Logik gilt:
immer ⇒ meistens ⇒ manchmal
p(Zeit) = 1 ⇒ p(Zeit) > 0,5 ⇒ p(Zeit) > 0

2-5-5-4 MODAL-LOGIK

• *Inklusive* Modal-Logik
Ich führe hier einen *quantitativen Modal-Operator* (Mod) ein, der Werte zwischen 1 und 0 annehmen kann. Man schreibt p(Modal) oder kurz p(Mod). Er gibt gewissermaßen den *Grad der Notwendigkeit* oder auch den Grad der Unmöglichkeit an.

Allerdings ist p(Mod) letztlich auf p bzw. p^T reduzierbar, so wie die (quantitative) Modal-Logik auf die (quantitative) Quantoren-Logik reduzierbar ist.

Entsprechend der Quantoren-Logik gelten folgende *Äquivalenzen* in der Modal-Logik:

Notwendig ⇔ ¬Möglich¬
Notwendig¬ ⇔ ¬Möglich
¬Notwendig ⇔ Möglich¬
¬Notwendig¬ ⇔ Möglich

Somit gilt modal-logisch, entsprechend dem logischen Quadrat der Quantoren-Logik:

notwendig p(Mod) = 1	$^+|^+$	notwendig¬ p(Mod) = 0
⇓	$^+{><}^+$	⇓
möglich p(Mod) > 0	$^+\vee^+$	möglich¬ p(Mod) < 1

Z. B.: p(Mod:Φ) = 1 $^+{><}^+$ p(Mod:Φ) < 1

Quantitativ stellen sich diese polaren Äquivalenzen nicht dar, weil die Gegenbegriffe *Notwendig* und *Möglich* ja durch einen einheitlichen Begriff p(Modal) überschritten werden. Man kann nur durch Einführung von Negationen diese Gegensätze wieder darstellen:

z. B.: $p(\text{Mod}:\Phi) = 1 \Leftrightarrow p(\text{Mod}:\neg\Phi) = 0$

In einer *6-wertigen* Logik ergibt sich:
notwendig $\Rightarrow$ wahrscheinlich $\Rightarrow$ möglich
$p(\text{Modal}) = 1 \Rightarrow p(\text{Modal}) > 0{,}5 \Rightarrow p(\text{Modal}) > 0$

$\neg$möglich $\Rightarrow$ $\neg$wahrscheinlich $\Rightarrow$ $\neg$notwendig
unmöglich $\Rightarrow$ unwahrscheinlich $\Rightarrow$ unnotwendig
$p(\text{Modal}) = 0 \Rightarrow p(\text{Modal}) < 0{,}5 \Rightarrow p(\text{Modal}) < 1$

• *Exklusive* Modal-Logik
Auch hier lassen sich die Beziehungen am besten im *logischen Quadrat* darstellen:
N = Notwendig, *genau* M = *genau* Möglich. Mit p(Modal) ergibt sich:

N +|+ N¬
$p(\text{Mod}) = 1$ $p(\text{Mod}) = 0$

+|+ +|+ +|+

genau M $\Leftrightarrow$ genau M¬
$0 < p(\text{Mod}) < 1$ $0 < p(\text{Mod}) < 1$

Im Verhältnis zur *inklusiven* Modal-Logik gilt:

Genau möglich $\Leftrightarrow$ möglich und möglich nicht
$M^{\exists} \Leftrightarrow M \wedge M\neg$ bzw. $[0 < p(\text{Mod}) < 1] \Leftrightarrow [p(\text{Mod}) > 0 \wedge p(\text{Mod}) < 1]$

„Genau möglich“ bzw. die Konjunktion von „möglich“ und „möglich nicht“ ist die präziseste Definition von „*kontingent*“, und Kontingenz spielt eine große Rolle in der Philosophie:

kontingent $\Leftrightarrow$ möglich $\wedge$ möglich$\neg$ $\Leftrightarrow$ $p(\text{Mod}) > 0 \wedge p(\text{Mod}) < 1$

2-5-5-5 INTENSIONALE LOGIK

Die *intensionale* Quantoren-Logik wendet (wie in 1-2-5-5 beschrieben) die Quantoren nicht – extensional – auf *Individuen* an (alle x ...), sondern – intensional – auf *Eigenschaften* bzw. *Größeneinheiten* (alle Einheiten ...).

Z. B.: „Wenn Sokrates *alle* Weisheits-Einheiten besitzt (*vollständig* weise ist), dann besitzt er auch – mindestens – *einige* Weisheits-Einheiten (ist auch mindestens *partiell* weise)“.

Im Folgenden werden nur ausgewählte analytische Relationen dargestellt, weitere sind direkt aus der extensionalen Quantoren-Logik abzuleiten.

Um auszudrücken, dass ein Individuum x_i *vollständig* klug ist, mag man schreiben: ‚vollständig(klug(x_i))’. Bzw. ‚Λ(klug(x_i))’ oder zur besseren Abgrenzung ‚$^{\Lambda}$(klug(x_i))’.

Auch hier kann man *quantifizieren*. Man darf aber z. B. nicht schreiben: p(klug) = 1, denn das hieße: alle Objekte sind klug.

Man schreibe ‚p(intensional: klug) = 1' oder kurz ‚p(int: klug) = 1', für: der Grad der Klugheit beträgt 1. Will man noch ein Individuum x_i angeben, so schreibe man: p(int: klug(x_i)) = 1.

Noch einmal zur Übersicht:

Prädikaten-logisch: vollständig(klug(x_i))
Quantoren-logisch: Λ(klug(x_i))
Quantitativ: p(int: klug(x_i)) = 1

• Herkömmliche inklusive 4-wertige Quantoren-Logik:
Äquivalenzen, z. B.:

Vollständig $\Leftrightarrow$ ¬partiell¬
vollständig(klug(x_i)) $\Leftrightarrow$ ¬partiell¬(klug(x_i))
Λ(klug(x_i)) $\Leftrightarrow$ ¬V(¬klug(x_i))
p(int: klug(x_i)) = 1 $\Leftrightarrow$ p(int:¬klug(x_i)) < 1

Folgen:
Vollständig $\Rightarrow$ partiell bzw. vollständig¬ $\Rightarrow$ partiell¬
p(int) = 1 $\Rightarrow$ p(int) > 0 bzw. p(int) = 0 $\Rightarrow$ p(int) < 1

• Erweiterte inklusive 6-wertige Quantoren-Logik
Vollständig $\Rightarrow$ überwiegend $\Rightarrow$ partiell
p(int) = 1 $\Rightarrow$ p(int) > 0,5 $\Rightarrow$ p(int) > 0

Vollständig¬ $\Rightarrow$ überwiegend¬ $\Rightarrow$ partiell¬
p(int) = 0 $\Rightarrow$ p(int) < 0,5 $\Rightarrow$ p(int) < 1

• Einfache exklusive 3-wertige Logik
Genau partiell $\Leftrightarrow$ genau partiell¬ (somit zählt das nur als *eine* Größe, neben *vollständig* und *vollständig nicht*)

Beispiel: „Wenn Peter *partiell klug* ist, dann ist er auch *partiell nicht klug* ".

Genau partiell $\Leftrightarrow$ partiell $\wedge$ partiell¬
0 < p(int) < 1 $\Leftrightarrow$ p(int) > 0 $\wedge$ p(int) < 1

• Erweiterte exklusive 5-wertige Logik
Hier geht es um die Beziehungen zwischen: vollständig – genau überdurchschnittlich – genau partiell (nicht) – genau unterdurchschnittlich – vollständig nicht.

Die quantitativen Ausprägungen entsprechen den oben genannten. Zwischen allen diesen Eigenschaftsausprägungen besteht der *konträre Gegensatz*.

3 META-LOGIK SYNTHETISCHER RELATIONEN

ÜBERSICHT

3-1 Aussagen-Logik

Hier wird erläutert, wie man die theoretische *Meta-Wahrscheinlichkeit* von *synthetischen* Relationen berechnet, und zwar für alle 14 (bzw. 16) Relatoren. Die Relatoren lassen sich nach ihrer theoretischen Wahrscheinlichkeit einordnen. Als andere Meta-Werte werden *Informationsgehalt* und *Bestimmtheit* eingeführt.

3-2 Quantoren-Logik

Die Berechnung der *meta-logischen*, theoretischen Wahrscheinlichkeit von *quantoren-logischen* Relationen ist deutlich schwieriger als bei *aussagen-logischen* Relationen. Die Entwicklung entsprechender mathematischer Formeln wird Schritt für Schritt vorgeführt.

3-3 Quantitative Logik

Hier wird zunächst der *Wahrscheinlichkeitsbegriff* in seinen verschiedenen Varianten erklärt. Dann werden auf dem *Binomial-Koeffizienten* aufbauende Formeln entwickelt, nach denen man die *theoretische Wahrscheinlichkeit* von quantitativen Relationen berechnen kann, in Abhängigkeit von deren *empirischer Wahrscheinlichkeit.*

3-4 Quantitative Aussagen-Logik

In diesem Punkt wird speziell die theoretische Wahrscheinlichkeit für Relationen angegeben, die eine empirische Wahrscheinlichkeit von $p = 1$ (*deterministisch*) oder von $p = 0$ (*nullistisch*) besitzen.

3-5 Quantitative Quantoren-Logik

Thema ist hier die theoretische Wahrscheinlichkeit von Relationen mit den empirischen Wahrscheinlichkeiten $p = 1$, $p < 1$, $p = 0$, $p > 0$. So werden auch die verschiedenen Formalisierungen von *All- und Partikulär-Aussagen* in neuer Weise unterscheidbar und bewertbar.

Im meinem Modell wird die *Meta-Logik* durch *Meta-Werte* bestimmt. Unter einem *Meta-Wert* verstehe ich einen Wert, der einem anderen Wert *nachfolgt* (griechisch: *meta* = nach), sich auf einen anderen Wert bezieht.

Der entscheidende *Meta-Wert* ist die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T. Die theoretische Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die *empirische* Wahrscheinlichkeit p, insofern ist sie ein Meta-Wert. Die theoretische Wahrscheinlichkeit erlaubt es, den *Informationsgehalt* und den *tautologischen Grad* einer Relation anzugeben. Und zwar liegt dieser Grad zwischen $p^T = 1$ (Tautologie) und $p^T = 0$ (Kontradiktion).

Dabei werde ich zeigen, dass man nicht nur *analytischen* Relationen, sondern auch *synthetischen* Relationen einen *Tautologie-Grad* zusprechen kann. Es wird zu diskutieren sein, ob eine *synthetische* Relation auch *streng tautologisch* sein kann oder nur *partiell tautologisch*.

3 – 1 AUSSAGEN-LOGIK

3-1-1 Einführung

3-1-1-1 OBJEKT-EBENE UND META-EBENE

Bei einer logischen Relation kann man unterscheiden:
- *Objekt-Ebene* (Basis-Ebene, empirische Ebene)
- *Meta-Ebene* (theoretische Ebene)

Die *Objekt*-Ebene ist die vorgegebene Ebene. Die *Meta*-Ebene ist eine übergeordnete Ebene. Auf der Objekt-Ebene wird angegeben, welchen Wahrheitswert bzw. welche *Größe* eine Relation besitzt.

Auf der Meta-Ebene wird angegeben, wie *sicher* oder wie *wahrscheinlich* der Wahrheitswert oder die Größe einer Relation ist.

Das soll an einem Beispiel verdeutlicht werden:

- *Objekt-Ebene*: X ∨ Y, und zwar kann X ∨ Y den *Wahrheitswert* + (gültig) oder – (ungültig) haben. Zunächst geht man davon aus, dass X ∨ Y gültig ist, denn sonst würde man ¬(X ∨ Y) schreiben.
- *Meta-Ebene*: Hier geht es um die *Notwendigkeit* (bzw. Wahrscheinlichkeit oder Sicherheit) des Wahrheitswertes von X ∨ Y. X ∨ Y ist nicht *notwendig*, aber *möglich* (vgl. unten).

3-1-1-2 MODELLE DER META-EBENE

Die Notwendigkeit einer Relation (bzw. ihres Wahrheitswertes) ergibt sich in der Aussagen-Logik aus der *Wahrheitstafel*.

Die Wahrheitstafel von X ∨ Y ist z. B.:

X	∨	Y
+	+	+
+	+	–
–	+	+
–	–	–

Wie man sieht, steht unter dem Relator ∨ dreimal + und einmal –.

Man kann die Notwendigkeit in verschiedenen *Stufen* angeben:

- 2-stufig: notwendig / nicht notwendig

Man könnte nur 2 Stufen unterscheiden, z. B. notwendig / nicht notwendig.
X ∨ Y ist demnach *nicht notwendig*, denn notwendig sind nur *Tautologien*, bei denen viermal + (positiv) unter dem Relator steht. Man könnte auch zwischen *unmöglich* / *möglich* unterscheiden, dann gehörte X ∨ Y zu *möglich*; denn unmöglich sind nur *Kontradiktionen*, bei denen steht viermal – (negativ) unter dem Relator.

- 3-stufig: notwendig / möglich / unmöglich

So kann eine 3-stufige Unterscheidung aussehen; demnach gehörte X ∨ Y zu *möglich*, denn es ist nicht notwendig und nicht unmöglich.

• ∞-stufig

Diese 2 oder 3 Stufen sind aber nicht ausreichend. Man will vor allem im Bereich der *Möglichkeit* genauer differenzieren; das ist insbesondere bei quantitativen Relationen erforderlich, wie sich später noch zeigen wird. Daher führt man die *theoretische Wahrscheinlichkeit* ein; ich kennzeichne sie, wie gesagt, durch p^T.

3-1-1-3 THEORETISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT

Die theoretische Wahrscheinlichkeit kann alle, d. h. *unendlich* viele Werte zwischen 0 und 1 annehmen (vgl. 1-3-1-4).

Unsere Beispiel-Relation $X \vee Y$ hat eine theoretische Wahrscheinlichkeit von $p^T = 3/4$. Ich schreibe dafür: $p^T[X \vee Y] = 3/4 = 0{,}75$

Der Wert p^T gibt an, wie wahrscheinlich ein Satz (bzw. eine Struktur) allein von der Form her ist. Wenn ich z. B. einen Satz (eine Struktur) $X \vee Y$ habe, weiß ich – unabhängig von seinem Inhalt –, dass er mit $p^T = 3/4$ gültig (wahr) ist, weil er nämlich bei 3 von 4 Möglichkeiten als gültig gilt.

Man kann auch sagen, dass p^T den Grad der *Notwendigkeit*, den Grad der *Sicherheit* oder aber den Grad der *Tautologie* einer Relation angibt. Der ‚Grad der Tautologie' lässt sich auch als ‚Grad der *theoretischen Wahrheit'* verstehen.

3-1-1-4 BERECHNUNG

Es geht jetzt darum, genau zu bestimmen, welche *theoretische Wahrscheinlichkeit* logische Relationen bzw. Relatoren besitzen. Dabei geht man von der *Wahrheitstafel* aus. Und zwar *dividiert* man die Anzahl der Welten, in denen ein + unter dem Relator steht, durch die Anzahl *aller* Welten, d. h. die Anzahl der Welten, in denen ein + oder – unter dem Relator steht.

D. h. die theoretische Wahrscheinlichkeit wird grundsätzlich so berechnet wie die *empirische Wahrscheinlichkeit*, als *Quotient von günstigen und möglichen Fällen* (vgl. 1-3-1-2 und 1-3-1-3). Die theoretische Wahrscheinlichkeit fußt somit auf der *Kombinatorik*, sie gibt an, wie viele Fälle von Kombinationen von + und – es überhaupt gibt und wie viele dieser Kombinationen als *gültig* definiert sind.

Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T wird somit berechnet durch:

$$\frac{\text{Anzahl der Welten, in denen eine Relation positiv ist}}{\text{Anzahl der Welten, in denen die Relation positiv oder negativ ist}}$$

Kürzer: $\frac{\text{Anzahl der +/Welten}}{\text{Anzahl aller Welten}}$ bzw. $\frac{\text{q(+Welten)}}{\text{q(± Welten)}}$

Formal: $p^T(\Phi) = q(\Phi) / q(\Phi) + q(\neg\Phi) = r/n$
$q(\Phi) = r,\ q(\Phi) + q(\neg\Phi) = n$

Beispiel: $X \vee Y$: $p^T[X \vee Y] = \dfrac{3(+Welten)}{3(+Welten) + 1(-Welt)} = \dfrac{3(+Welten)}{4(+/-Welten)} = 3/4$

Für die *Negation* gilt: $p^T(\neg\Phi) = 1 - p^T(\Phi)$
z. B.: $p^T[\neg(X \vee Y)] = 1 - p^T[X \vee Y] = 4/4 - 3/4 = 1/4 = 0{,}25$

3-1-1-5 SYNTHETISCHE RELATIONEN

Man kann die theoretische Wahrscheinlichkeit auch auf *analytische* Relationen anwenden (vgl. Kapitel 4), aber hier geht es um *synthetische* Relationen. Die theoretische Wahrscheinlichkeit dient zunächst dazu, synthetische Relatoren zu *definieren*.

Ich hatte als allgemeine aussagenlogische Form einer *synthetischen Relation* angegeben:

$X\ R^S\ Y$, d. h.: „X steht zu Y in der synthetischen Relation R".

Oder noch allgemeiner: $\Phi\ R^S\ \Psi$ (R = Relation, s = synthetisch)

Wie schon gesagt, können zwar auch ‚X' oder ‚Y' bereits für eine Relation stehen, aber es handelt sich dann um 'strukturlose' Relationen im Sinne der Aussagen-Logik.

Synthetische Relationen wie $X\ R^S\ Y$ sind durch ihre theoretische Wahrscheinlichkeit p^T bestimmt, denn es gilt:

synthetische Relationen: $0 < p^T < 1$

Konkret bezogen auf 2 Relata (2 Variablen) X, Y bedeutet das:

$0/4 < p^T < 4/4$.

Anders gesagt: $p^T = 1/4 \vee 2/4 \vee 3/4$ (verkürzte Darstellung).

Allerdings ist dies keine hinreichende Bestimmung, weil ebenfalls gilt:

semi-analytische Relationen: $0 < p^T < 1$

Denn wie schon erläutert und später noch weiter ausgeführt: *synthetische* und *semi-analytische* Relationen sind zu unterscheiden. Bei *synthetischen* Relationen wie $X \rightarrow Y$ sind die beiden Relata (X und Y) logisch völlig *unabhängig* voneinander, *syntaktisch* gesprochen: Vor und hinter dem Relator stehen nur *unterschiedliche* (deskriptive) Symbole.

Dagegen ist bei *semi-analytischen* Relationen wie $X \vee Y \longrightarrow X$ eine (partielle) Abhängigkeit zwischen den Relata gegeben, und *syntaktisch* stimmen die Symbole *(partiell) überein*.

Es wird zu diskutieren sein, ob – abweichend von der obigen Behauptung – synthetische Relationen doch *vollständig* tautologisch oder kontradiktorisch sein können.

3-1-2 Implikation

3-1-2-1 BESTIMMUNG

Für die Implikation $X \rightarrow Y$ ergibt sich anhand der Wahrheitstafel:

X	→	Y
+	+	+
+	–	–
–	+	+
–	+	–

$$\frac{3 + Welten}{4 \pm Welten} = 3/4$$ Man kann schreiben: $p^T[X \rightarrow Y] = 3/4 = 0{,}75$

Lies: ‚Die theoretische Wahrscheinlichkeit (= der Tautologie-Grad) von $X \rightarrow Y$ beträgt 3/4'.
Es sei noch einmal betont: Auch wenn die Implikation zu 3/4 tautologisch ist, ist sie *nicht partiell analytisch*. Von einer partiell analytischen Implikation kann man grundsätzlich nur sprechen, wenn vor und hinter dem → partiell die gleichen Zeichen stehen (syntaktisches Kriterium). Bzw. wenn man aus dem Vorderglied /Vordersatz partiell das Nachglied / den Nachsatz ableiten kann (logisches Kriterium). Beides ist bei $X \rightarrow Y$ nicht gegeben.

3-1-2-2 NEGATIONEN DER IMPLIKATION

Auch hier ergibt sich der Wert p^T anhand der Wahrheitstafel:

	$X \rightarrow \neg Y$
1.	+ – – +
2.	+ + + –
3.	– + – +
4.	– + + –

$p^T(X \rightarrow \neg Y) = p^T(X \rightarrow Y) = 3/4 = 0,75$

	$\neg(X \rightarrow Y)$
1.	– + + +
2.	+ + – –
3.	– – + +
4.	– – + –

$p^T[\neg(X \rightarrow Y)]= 1 - p^T(X \rightarrow Y) = 1/4 = 0,25$

Die *doppelte Negation* $\neg(X \rightarrow \neg Y)$: + – – – ist äquivalent der Konjunktion $X \wedge Y$.
$p^T[\neg(X \rightarrow \neg Y)] = p^T[X \wedge Y] = 1/4 = 0,25$

Allgemein gilt: $p^T[\neg(\Phi)] = 1 - p^T(\Phi)$.
Dies gilt aber nicht nur für die *theoretische* Wahrscheinlichkeit, sondern auch für die *empirische* Wahrscheinlichkeit: $p[\neg(\Phi)] = 1 - p(\Phi)$

3-1-2-3 REPLIKATION

Für die Replikation gilt wie für die Implikation: $p^T[X \leftarrow Y] = 3/4 = 0,75$

3-1-2-4 ÄQUIVALENZ

Für die Äquivalenz gilt: $p^T[X \leftrightarrow Y] = 2/4 = 0,5$. Nun ist ja: $X \leftrightarrow Y \Leftrightarrow (X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y)$
Man kann berechnen: $p^T[X \leftrightarrow Y] = p^T[X \rightarrow Y] + p^T[X \leftarrow Y] - 1 = 0,75 + 0,75 - 1 = 0,5$

3-1-2-5 KOMPLEXE IMPLIKATION

Beispiel für eine Wahrheitstafel bei 3 Variablen X, Y, Z

$(X \rightarrow Y) \rightarrow Z$
+ + + + +
+ + + – –
+ – – + +
+ – – + –
– + + + +
– + + – –
– + – + +
– + – – –

Hier gilt: $p^T[(X \rightarrow Y) \rightarrow Z] = 5/8 = 0{,}63$

Allgemein gilt:
Bei 2 Variablen: $2^2 = 4$ Reihen bzw. 4 mögliche Welten
Bei 3 Variablen: $2^3 = 8$ Reihen bzw. 8 mögliche Welten
Bei 4 Variablen: $2^4 = 16$ Reihen bzw. 16 mögliche Welten usw.
Bei n Variablen: 2^n Reihen bzw. 2^n mögliche Welten.

3-1-3 Positiv-Implikation

3-1-3-1 BESTIMMUNG
Die Positiv-Implikation kann man wie beschrieben mit *vollständiger* oder *verkürzter* Wahrheitstafel schreiben:

X	*→	Y	verkürzte Wahrheitstafel
+	+	+	
+	–	–	

X	*→	Y	vollständige Wahrheitstafel
+	+	+	
+	–	–	
–	□	+	
–	□	–	

Für die Berechnung von p^T ist dieser Unterschied irrelevant, weil dabei nur die + und – berechnet werden.
$p^T[X \ast\!\rightarrow Y] = 1/2 = 0{,}5$

Die Positiv-Implikation hat also mit p = 1/2 den *Zufallswert*, den man auch normalerweise bei einer Wenn-dann-Relation von zwei Variablen erwartet.
Für die *Negation* ¬(X *→ Y) gilt (bei der primären Interpretation) folgender Wahrheitsverlauf: – + □ □. Somit ergibt sich:
$p^T[\neg(X \ast\!\rightarrow Y)] = 1/2 = 0{,}5$
Also: $p^T[X \ast\!\rightarrow Y] = p^T[\neg(X \ast\!\rightarrow Y)]$

3-1-3-2 POSITIV-REPLIKATION

X	←*	Y
+	+	+
+	□	–
–	–	+
–	□	–

Hier gilt, wie bei der Implikation: $p^T[X \leftarrow\!\ast\, Y] = 1/2 = 0{,}5$

3-1-3-3 POSITIV-ÄQUIVALENZ

X	*↔	Y
+	+	+
+	−	−
−	−	+

$p^T[X *\leftrightarrow Y] = 1/3 = 0,33$

Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man (X *↔ Y) definiert als:

(X *→ Y)	∧	(X ←* Y)
+	+	+
−	−	□
□	−	−
□	□	□

3-1-3-4 KOMPLEXE IMPLIKATION

Für die folgende Implikation mit 3 Variablen ergibt sich:

(X	*→	Y)	*→	Z
+	+	+	+	+
+	+	+	−	−
+	−	−	□	+
+	−	−	□	−
−	□	+	□	+
−	□	+	?	−
−	□	−	□	+
−	□	−	?	−

Für die Berechnung von p^T sind wie gesagt nur die + und – relevant, nicht die □ und die ?.

Somit ergibt sich: $p^T(X *\rightarrow Y) *\rightarrow Z = 1/2 = 0,5$

3-1-3-5 POSITIV-IMPLIKATION UND IMPLIKATION

Unterschiede zwischen Normal-Implikation und Positiv-Implikation

Hier sollen nur exemplarische Hinweise gegeben werden:

- Implikation
  $p^T[X \rightarrow Y] = 3/4$ $\quad$ $p^T[X *\rightarrow Y] = 1/2$
- Negation der Implikation
  $p^T[\neg(X \rightarrow Y)] = 1/4$ $\quad$ $p^T[\neg(X *\rightarrow Y)] = 1/2$
  Bei der normalen Implikation hat die *Negation* eine andere p^T als die Position.
  Dagegen gilt für die Positiv-Implikation: $p^T[X *\rightarrow Y] = p^T[\neg(X *\rightarrow Y)] = 1/2$. (Und das ist überzeugender.)
- Äquivalenz
  $p^T[X \leftrightarrow Y] = 2/4 = 1/2$ $\quad$ $p^T[X *\leftrightarrow Y] = 1/3$

Beziehungen zwischen Normal-Implikation und Positiv-Implikation

- Implikation
  $p^T[X \rightarrow Y] > p^T[X *\rightarrow Y]$

• Negation der Implikation

$p^T[X \rightarrow Y] > p^T[\neg(X *\rightarrow Y)]$

$p^T[X *\rightarrow Y] > p^T[\neg(X \rightarrow Y)]$

• Äquivalenz

$p^T[X \leftrightarrow Y] > p^T[X *\leftrightarrow Y]$

$p^T[X \leftrightarrow Y] = p^T[X *\rightarrow Y]$

3-1-4 Systematik

3-1-4-1 GESAMTÜBERSICHT

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		p^T
1) Tautologie	+	+	+	+	$X \top Y$	4/4 = 1
2) Disjunktion	+	+	+	–	$X \vee Y$	3/4 = 0,75
3) Replikation	+	+	–	+	$X \leftarrow Y$	3/4 = 0,75
4) Präpension	+	+	–	–	$X \rfloor Y$	2/4 = 0,5
5) Implikation	+	–	+	+	$X \rightarrow Y$	3/4 = 0,75
6) Postpension	+	–	+	–	$X \lfloor Y$	2/4 = 0,5
7) Äquivalenz	+	–	–	+	$X \leftrightarrow Y$	2/4 = 0,5
8) Konjunktion	+	–	–	–	$X \wedge Y$	1/4 = 0,25
9) Exklusion	–	+	+	+	$X \mid Y$	3/4 = 0,75
10) Kontravalenz	–	+	+	–	$X >< Y$	2/4 = 0,5
11) Postnonpension	–	+	–	+	$X \lceil Y$	2/4 = 0,5
12) Postsektion	–	+	–	–	$X >– Y$	1/4 = 0,25
13) Pränonpension	–	–	+	+	$X \rceil Y$	2/4 = 0,5
14) Präsektion	–	–	+	–	$X –< Y$	1/4 = 0,25
15) Rejektion	–	–	–	+	$X \nabla Y$	1/4 = 0,25
16) Antilogie	–	–	–	–	$X \perp Y$	0/4 = 0

Man kann entsprechend eine Einteilung der *Relatoren* nach ihrer *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T vornehmen:

p^T		
• 1:	4-Welt-Relator:	$\top$
• 3/4:	3-Welt-Relatoren:	$\rightarrow$ $\leftarrow$ $\vee$ $\vert$
• 2/4:	2-Welt-Relatoren:	$\leftrightarrow$ >< ⌋ ⌊ ⌉ ⌈
• 1/4:	1-Welt-Relatoren:	$\wedge$ –< >– ∇
• 0:	0-Welt-Relator:	$\perp$

Lässt man die problematischen Relatoren *Tautologator* und *Antilogator* beiseite, so gilt: Insgesamt gibt es von 14 (2-wertigen) synthetischen Relatoren.

4 Relatoren: mit $p^T = 3/4$
6 Relatoren: mit $p^T = 2/4$
4 Relatoren: mit $p^T = 1/4$

Wie ich schon mehrfach betont habe: Die Einführung des *Tautologators* und *Antilogators* bzw. überhaupt die Annahme, es gäbe im *synthetischen* Bereich (streng) tautologische bzw. kontradiktorische Relationen, ist problematisch. Zwar ist es aus *systematischen* Gründen reizvoll, einen Tautologator und Antilogator einzuführen, das zeigt ja gerade die obige Übersicht. Man erhält so genau $4^2 = 16$ Relatoren, während man sich sonst mit 14 Relatoren begnügen muss. Aber diese beiden Relatoren lassen sich kaum sinnvoll interpretieren (vgl. 3-1-4-4).

Die Alternative, Tautologator und Antilogator als *analytische Relatoren* zu kennzeichnen, überzeugt noch weniger. Es gibt m. E. überhaupt keine analytischen Relatoren.

Zwischen X und Y, als isolierten Objekten bzw. Variablen, kann gar keine analytische Beziehung bestehen, da X und Y vollkommen *unabhängig voneinander* sind. Somit ist z. B. $X \top Y$ mit Sicherheit nicht analytisch.

3-1-4-2 STUFEN DER THEORETISCHEN WAHRSCHEINLICHKEIT

Es gibt also 5 *Grade* oder Stufen der theoretischen Wahrscheinlichkeit, die in der Aussagen-Logik – bei 2 Variablen – vorkommen (wenn man den Tautologator $\top$ und den Antilogator $\perp$ mit einbezieht).

Folgende Tabelle gibt eine Übersicht hierüber:

z. B.	Wahrheits-werte		p^T
$X \top Y$	+ + + +	Tautologie	4/4 = 1
$X \rightarrow Y$	+ – + +		3/4 = 0,75
$X \leftrightarrow Y$	+ – – +		2/4 = 0,5
$X \wedge Y$	+ – – –		1/4 = 0,25
$X \perp Y$	– – – –	Kontradiktion	0/4 = 0

Diskussion: Man könnte diskutieren, ob z. B. 3/4 wirklich der *Meta-Wert* von $X \rightarrow Y$ ist oder vielleicht doch der *Objekt-Wert*. Dann wäre der Meta-Wert $4^3/4^4 = 64/256 = 1/4 = 0{,}25$. Aber da dieser Ansatz sich als wenig plausibel erwiesen hat, führe ich ihn nicht im Einzelnen aus. Wichtig ist jedoch, dass man prinzipiell von jeder theoretischen Wahrscheinlichkeit wiederum die theoretische Wahrscheinlichkeit berechnen kann, also einen *Meta-meta-Wert*.

3-1-4-3 PARTIELLE TAUTOLOGIE

Üblicherweise bestimmt man *synthetische* Relationen als *vollständig nicht-tautologisch* und hält nur *analytische* Relationen für tautologisch (oder kontradiktorisch). Ich halte diese These aber nicht für realistisch. Eine Relation wie $X \rightarrow Y$ ist zweifelsohne synthetisch, aber sie hat eine theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = 3/4$, ist somit nahe dran an einer Tautologie mit dem Wert $p^T = 4/4$. Das rechtfertigt es, die Relation $X \rightarrow Y$ *partiell tautologisch* zu nennen.

Außerdem muss es möglich sein, $X \rightarrow Y$ z. B. von $X \wedge Y$ abzugrenzen, das nur eine $p^T = 1/4$ besitzt. Da diese nahe an der Kontradiktion mit dem Wert $p^T = 0/4$ steht, kann man sie *partiell kontradiktorisch* nennen.

Synthetische Relationen dazwischen – mit $p^T = 2/4 = 1/2 = 0{,}5$ – nenne ich *neutral*.
Ich möchte die synthetischen Relationen mit p^T - Werten von 3/4 bis 1/4 hier folgendermaßen einteilen (das wird später noch genauer erläutert).

Tautologie-Grad	Wahrscheinlichkeit	Beispiel	p^T Bruch	p^T dezimal
- *Partiell tautologisch*:	wahrscheinlich	$X \rightarrow Y$	$p^T > 2/4$	$p^T > 0{,}5$
- *Partiell kontradiktorisch*:	unwahrscheinlich	$X \wedge Y$	$p^T < 2/4$	$p^T < 0{,}5$
- *Kontingent* (neutral):	zufällig	$X \leftrightarrow Y$	$p^T = 2/4$	$p^T = 0{,}5$

Streng synthetische Relation

Man kann $X \wedge Y$ in der obigen Liste auch als einzige *streng synthetische* Struktur bezeichnen. Denn real existieren *primär* Sachverhalte wie X bzw. Anhäufungen von Sachverhalten wie eben $X \wedge Y$. Ein Sachverhalt kann gültig sein oder nicht (jeweils $p^T = 1/2$), eine Kombination von 2 Sachverhalten erlaubt (streng synthetisch) folgende Kombinationen:

$X \wedge Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$, $\neg X \wedge \neg Y$ (jeweils mit $p^T = 1/4$).

Eine Struktur wie $X \leftrightarrow Y$ ist dagegen *sekundär*, sie bedeutet bereits eine *Zusammenfassung*, sie entspricht $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$.

Von daher würde man erwarten, dass für den Tautologie-Grad von $X \wedge Y$ gilt: $p^T = 0$. Und es mag etwas irritierend sein, dass $p^T[X \wedge Y] = 1/4 = 0{,}25$. Aber ein Tautologie-Grad von 0 kommt eben der *Kontradiktion* zu, somit muss auch ein rein synthetischer Satz einen Tautologie-Grad > 0 haben, es sei denn, man wählt ein ganz anderes Modell. Man kann aber zeigen, dass für streng synthetische Strukturen gilt: $0 < p^T \leq 0{,}5$. Denn:

$p^T[X] = 1/2 = 0{,}5$

$p^T[X \wedge Y] = 1/4 = 0{,}25$

$p^T[X \wedge Y \wedge Z] = 1/8 = 0{,}125$

Man sieht, dass mit *steigender* Anzahl der Variablen die p^T eines *streng synthetischen* Satzes *immer kleiner* wird und letztlich gegen 0 geht.

3-1-4-4 SYNTHETISCH-TAUTOLOGISCHE RELATIONEN ?

Ich habe eben dargelegt, dass *synthetische* Relationen *partiell* tautologisch (bzw. partiell kontradiktorisch) sein können. Die Frage stellt sich: Können synthetische Relationen auch *vollständig* tautologisch oder vollständig kontradiktorisch sein?

Nach meiner Definition sind bei einer *synthetischen* Relation die Relata logisch von einander *unabhängig* bzw. stehen *nur unterschiedliche Objekt-Zeichen* rechts und links vom Relator. Bei folgenden Beispielen ist das der Fall, dennoch sind die Relationen analytisch, nämlich tautologisch bzw. kontradiktorisch:

Tautologie $X \Rightarrow (Y \,^{+}\!\vee^{+} \neg\, Y)$

Kontradiktion $X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X \;\not\Rightarrow\; Y \,^{-}\!\wedge^{-} \neg\, Y$

Aber es handelt sich wohl um Schein-Beispiele:

Denn eine Implikation ist eben *immer tautologisch*, wenn sie als Folgeglied eine (andere) Tautologie aufweist (hier $Y \,^{+}\!\vee^{+} \neg\, Y$). Egal, welches Vorderglied sie hat: $\Phi \Rightarrow$ Tautologie.

Und eine Implikation ist *immer kontradiktorisch*, wenn sie als *Vorderglied* eine Tautologie und als Nachglied eine *Kontradiktion* hat: Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion.

Manche Autoren führen wie beschrieben sogar Junktoren wie *Tautologator* $\top$ und *Antilogator* $\perp$ ein, die parallel zu den anderen Junktoren eben durch den Wahrheitsverlauf + + + + bzw. – – – – bestimmt sind. Ich bezweifle aber, dass es Sinn macht, solche Relatoren einzuführen. Eine realistische Deutung ist kaum möglich, aber auch eine sprachlogische Funktion ist kaum erkennbar.

Zusammenfassend: Ich vertrete die These,

dass *Tautologie* ($p^T = 1$) und *Kontradiktion* ($p^T = 0$)

im eigentlichen Sinn nur bei *analytischen* Relationen vorkommen, nicht bei synthetischen Relationen (und nicht bei semi-analytischen Relationen).

Mit der Frage, ob synthetische Strukturen ganz tautologisch/kontradiktorisch sein können, hängt folgende Frage zusammen: Gibt es bei synthetischen Strukturen einen *fließenden Übergang* von nicht-tautologisch zu tautologisch, wie obige Tabelle in 3-1-4-3 nahe legt. Ist es wirklich kein Sprung von $p^T = 3/4$ zu $p^T = 4/4 = 1$? Oder von $p^T = 1/4$ zu $p^T = 0/4 = 0$?

Rein quantitativ betrachtet, ist dies zwar (jeweils) ein fließender Übergang, aber ich möchte es dennoch als einen *qualitativen* Unterschied sehen. Denn wie gesagt:

trennt $p^T = 1$ versus $p^T = 3/4$ analytisch-tautologische und synthetische Relationen
trennt $p^T = 0$ versus $p^T = 1/4$ analytisch-kontradiktorische und synthetische Relationen.

3-1-4-5 RELATIONEN MIT MEHR VARIABLEN

Wir haben hier bisher immer Relationen mit 2 Variablen betrachtet. Kurz sollen noch einige Beispiele für 3 und 4 Variablen vorgestellt werden:

• 3 Variablen X, Y, Z, n = 3, hier ist der Nenner stets $2^3 = 8$
$p^T[X \vee Y \vee Z] = 7/8$
$p^T[X \wedge Y \wedge Z] = 1/8$
$p^T[(X \rightarrow Y) \rightarrow Z] = 5/8$

• 4 Variablen X, Y, V, W, n = 4, hier ist der Nenner stets $2^4 = 16$
$p^T[(X \wedge Y) \rightarrow (V \wedge W)] = 13/16$
$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W)] = 9/16$
$p^T[(X \rightarrow Y) \vee (V \rightarrow W)] = 15/16$
$p^T[(X \leftarrow Y) \vee (V \leftarrow W)] = 15/16$
$p^T[(X \wedge Y) \vee (V \wedge W)] = 7/16$

(Das lässt sich leicht aus den Wahrheitstafeln berechnen.)

3-1-5 Erweiterungen

3-1-5-1 EMPIRISCHE WAHRHEIT UND WAHRSCHEINLICHKEIT

Ich habe schon mehrfach geschrieben, dass die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T auch den *Grad der Tautologie* einer Relation angibt, dass p^T somit auch für den Tautologie-Grad stehen kann. Zur Erläuterung muss ich etwas weiter ausholen.

Wir können unterscheiden:

- Empirische Wahrscheinlichkeit – empirische Wahrheit
- Theoretische Wahrscheinlichkeit – theoretische Wahrheit (Tautologie)

Auf das Verhältnis von *empirischer* Wahrscheinlichkeit und *empirischer* Wahrheit bin ich in 1-3-1-2 näher eingegangen. Man kann unterscheiden, am Beispiel $p(X \rightarrow Y) = 4/5$:

Wahrscheinlichkeits-Deutung: „Die Wahrscheinlichkeit, dass wenn X, dann auch Y, beträgt 4/5 = 80%“; das entspricht der Deutung der *relativen Häufigkeit*: „4 von 5 X sind auch Y“.

Wahrheits-Deutung: ‚Die Wahrheit (der Wahrheits-Grad) der Relation bzw. des Satzes: „*immer* wenn X, dann auch Y“, d. h. $p(X \rightarrow Y) = 1$, beträgt 4/5 = 80%’. Diese Deutung ist ungewöhnlicher und komplizierter, aber auch legitim.

3-1-5-2 EMPIRISCHE WAHRHEIT UND TAUTOLOGIE

Beim Verhältnis von theoretischer Wahrscheinlichkeit und theoretischer Wahrheit liegen die Verhältnisse etwas anders. Wir können zunächst definieren:

– *Theoretische Wahrheit* = Tautologie, Grad der theoretischen Wahrheit = *Tautologie-Grad* (anstelle von ‚*theoretischer* Wahrheit’ kann man auch von ‚*logischer* Wahrheit’ sprechen, dieser Begriff ist aber vieldeutig, ich verwende ihn i. allg. nur bei logischen Schlüssen).

– *Theoretische Falschheit* = Kontradiktion, Grad der theoretischen Falschheit = *Kontradiktions-Grad;* anstelle von ‚Grad’ könnte man auch von Größe, Kontradiktions-Größe sprechen.

Genauso, wie eine *synthetische* Relation eine theoretische Wahrscheinlichkeit besitzt, so besitzt sie also auch einen Tautologie-Grad; das gleiche gilt für *analytische* Relationen.

Beispiel: $p^T[X \rightarrow Y] = 3/4$
(für ein quantitatives Beispiel wie $p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n]$ ergäbe sich Entsprechendes)

Wahrscheinlichkeits-Deutung: $X \rightarrow Y$ gilt mit 3/4 = 75% *theoretischer* Wahrscheinlichkeit, oder: $X \rightarrow Y$ ist <u>*mit*</u> 3/4 = 75% *theoretischer* Wahrscheinlichkeit wahr.

Wahrheits-Deutung: $X \rightarrow Y$ ist <u>*zu*</u> 3/4 = 75% wahr

Wichtig ist dabei der folgende Unterschied:

$X \rightarrow Y$ ist *mit* 3/4 = 75% Wahrscheinlichkeit *empirisch* wahr (es wäre unsinnig zu behaupten, $X \rightarrow Y$ ist *mit* 3/4 = 75% Wahrscheinlichkeit theoretisch wahr)

$X \rightarrow Y$ ist *zu* 3/4 = 75% *theoretisch* wahr (ist zu 3/4 tautologisch).

Wie lässt sich die *Gleichsetzung* von theoretischer Wahrscheinlichkeit und Tautologie begründen? Bzw. wie lässt sich die *Wahrheits*-Deutung begründen?

Man bestimmt eine Tautologie auch so, dass sie in *allen* möglichen (relevanten) Welten wahr ist. Z. B. ist $X \wedge Y \Rightarrow Y$, laut Wahrheitstafel, in 4 von 4 möglichen Welten wahr. Dagegen ist $X \rightarrow Y$ nur in 3 von 4 Welten wahr. Man kann das zu Recht wie folgt interpretieren:

$X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist vollständig, zu 100%, (theoretisch) wahr

$X \rightarrow Y$ ist nur zu 75% (theoretisch) wahr.

Wie sich später noch zeigen wird, ist gerade bei *Schlüssen* die Wahrheits-Deutung sinnvoll.

3-1-5-3 INFORMATIONSGEHALT

Ich habe die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T beschrieben, die mit dem *Tautologie-Grad* identisch ist. Sie gibt an, wie wahrscheinlich eine Relation ist, wenn man *zufällige Verhältnisse* voraussetzt.

Man kann aber einen Gegenwert dazu aufstellen, dies ist der *Informationsgehalt* oder Informationsgrad p^I, quasi die *theoretische Unwahrscheinlichkeit.*

Der Informationsgehalt ist also *umgekehrt proportional* zur theoretischen Wahrscheinlichkeit. Das erklärt sich folgendermaßen: Je (theoretisch) wahrscheinlicher eine Relation ist, desto weniger Neues erfährt man durch die Information, dass sie tatsächlich gültig ist.

Z. B. $X \vee Y$, mit $p^T = 3/4$, konkret: „Peter geht ins Kino *oder* Hans geht ins Kino". Diese Relation ist mit 3/4 *Wahrscheinlichkeit* wahr, hat aber nur 1/4 *Informationsgehalt*. Wenn ich erfahre, dass „Peter geht ins Kino" *wirklich (empirisch)* wahr ist, ist der *Informationsgewinn* hoch. Dagegen $X \wedge Y$, „Peter geht ins Kino *und* Hans geht ins Kino", ist mit $p^T = 1/4$ unwahrscheinlich, besitzt aber 3/4 Informationsgehalt; wenn ich erfahre, dass „Peter geht ins Kino" wirklich wahr ist, gibt es keinen (empirischen) Informationsgewinn.

Allerdings haben wir zunächst mit einem *theoretischen Informationsbegriff* – entsprechend der theoretischen Wahrscheinlichkeit – gearbeitet, der darf nicht mit einem *empirischen Informationsbegriff* verwechselt werden. Wenn ich etwas *sicher weiß*, könnte ich einen empirischen Informationswert von 1 ansetzen, aber der theoretische Wert ändert sich nicht.

Theoretisch stimmt: Je tautologischer eine Struktur ist, desto geringer ist ihre Aussage, also ihr Informationsgehalt. So hat eine Tautologie überhaupt keinen Informationswert.

Allgemein gilt: $p^I = 1 - p^T$ ($p^I = 1$ wird im Folgenden nur als theoretischer Wert verstanden.)

Bzw. wenn man p^I direkt berechnet: $p^I = \dfrac{q(-Welten)}{q(+/-Welten)}$

z. B.	Wahrheits-werte		p^T	p^I
$X \top Y$	+ + + +	Tautologie	4/4 = 1	0/4 = 0
$X \rightarrow Y$	+ – + +		3/4 = 0,75	1/4 = 0,25
$X \leftrightarrow Y$	+ – – +		2/4 = 0,5	2/4 = 0,5
$X \wedge Y$	+ – – –		1/4 = 0,25	3/4 = 0,75
$X \perp Y$	– – – –	Kontradiktion	0/4 = 0	4/4 = 1

Dabei gilt:

$p^I = 1$	maximaler Informationsgehalt (nicht definiert: Kontradiktion)
$p^I = 0$	kein Informationsgehalt (Tautologie)
$0 < p^I < 1$	relevanter Informationsgehalt

Eine *synthetische* Tautologie oder Kontradiktion ist aber wie gesagt sehr problematisch.

3-1-5-4 BESTIMMTHEIT

Man kann die *Bestimmtheit* einer Relation berechnen. Ich schreibe dafür p^B. Wie ich schon erläutert habe, p kann allgemein für „relative Größe" stehen, nicht nur für *Wahrscheinlichkeit* im engeren Sinn. Die Bestimmtheit einer Relation gibt an, wie exakt ich aus einer Relation ableiten kann, welche *Möglichkeit* auch *Wirklichkeit* ist.

Z. B. die *Disjunktion*, hier gilt:

$[X \vee Y] \Leftrightarrow [(X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)]$

Wenn ich weiß, dass $X \vee Y$ gültig ist, weiß ich nur, dass $(X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)$ *real* gilt, aber nicht, welche der 3 Möglichkeiten. Daher $p^B = 1/3$.

Dagegen die *Konjunktion* $X \wedge Y$: Hier gilt (trivialerweise): $X \wedge Y \Leftrightarrow X \wedge Y$. D. h. $X \wedge Y$ verweist nur auf sich selbst, $X \wedge Y$ ist nur in *einem* Fall wahr, es ist somit *maximal* bestimmt, daher $p^B = 1$.

Die Bestimmtheit einer Struktur p^B berechnet sich durch:

$$\frac{1}{\text{Anzahl der gültigen Welten}}.$$

Kurz: $p^B = \dfrac{1}{q(+Welten)}$

Beispiel	Wahrhheits-Verlauf	p^B
$X \wedge Y$	+ – – –	1/1 = 1 (maximal)
$X \leftrightarrow Y$	+ – – +	1/2 = 0,75
$X \rightarrow Y$	+ – + +	1/3 = 0,33
X T X	+ + + +	1/4 = 0,25 (minimal)
X K X	– – – –	1/0 (nicht definiert)

T = Tautologie, K = Kontradiktion (anstelle von $\top$ und $\perp$)

Für die Konjunktion schreibt man also z. B.: $p^B(X \wedge Y) = 1/1 = 1$

Unbestimmtheit

Genauso, wie zu der theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T als Umkehrwert den Informationsgehalt p^I gibt, so gibt es zur Bestimmtheit p^B den Gegenwert: *Unbestimmtheit* p^{UB}

Es lassen sich allerdings *zwei Modelle* der Unbestimmtheit vorstellen:

- $p^{UB} = 1 - p^B$

Hier ist die Unbestimmtheit der *direkte Umkehrwert* der Bestimmtheit.

Beispiel: $p^B(X \wedge Y) = 1$, dann wäre $p^{UB}(X \wedge Y) = 1 - 1 = 0$

- $p^{UB} = \dfrac{1}{q(-Welten)}$

Die Unbestimmtheit berechnet sich hier also: 1 / Anzahl der negativen Welten.

Beispiel: $p^B(X \wedge Y) = 1/1$, dann wäre $p^{UB}(X \wedge Y) = 1/3 = 0{,}33$

3-1-5-5 BESTIMMTHEIT UND INFORMATIONSGEHALT

Der Grad der *Bestimmtheit* und der *Information* stehen im Zusammenhang. Man könnte auch die Bestimmtheit also einen Informationsgehalt ansehen, der eben nur anders definiert ist.

Wenn gilt: $p^T = r/n$, somit $p^I = 1 - r/n$, dann gilt $p^B = 1/r$. Die Bestimmtheit nimmt also nur auf die *absolute* Größe r (die Welten, in denen die Relation gültig ist) Bezug.

Beispiel	Wahrheits-Verlauf	p^B	p^I
$X \wedge Y \wedge Z$	$+ - - - - - - -$	1/1	7/8
$X \wedge Y$	$+ - - -$	1/1	3/4
$X \leftrightarrow Y$	$+ - - +$	1/2	1/2
$X \rightarrow Y$	$+ - + +$	1/3	1/4
$X \vee Y \vee Z$	$+ + + + + + + -$	1/7	1/8

Bei der *Konjunktion* nähern sich p^B und p^I an, wenn die Anzahl der Variablen = n ansteigt:

Beispiel	n	p^B	p^I	p^I dezimal
$X \wedge Y$	2	1	3/4	0,75
$X \wedge Y \wedge Z$	3	1	7/8	0,88
$X \wedge Y \wedge Z \wedge V$	4	1	15/16	0,94
$X \wedge Y \wedge Z \wedge V \wedge W$	5	1	31/32	0,97

Beide Informations-*Definitionen* p^I und p^B sind *theoretische* Größen. Davon ist ein *empirischer* (und ein psychologischer) Zugang zu unterscheiden. Und beide Ansätze und haben Vor- und Nachteile, wie ich an verschiedenen Fällen zeigen möchte.

• $X \wedge Y$

Geht man von dem *Bestimmtheits-Modell* p^B aus, kann man argumentieren: Wenn ich weiß, dass $X \wedge Y$ wahr ist, dann weiß ich genau über beide Variablen X und Y Bescheid, es gibt nur *eine* Möglichkeit, nämlich $X \wedge Y$. Andere Kombinationen wie z. B. $X \wedge \neg Y$ sind ausgeschlossen. Daher besteht ein Informations-Wert von 1.

Geht man von dem *Modell der umgekehrten theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^I aus, dann fragt man: Wie viele Kombinationsmöglichkeiten von X und Y gibt es überhaupt? Und in wie vielen dieser Fälle ist $X \wedge Y$ falsch? Antwort hier: in 3 von 4 Welten, also erhält man den Informations-Wert 3/4. In diesem Fall von $X \wedge Y$ scheint mir das Modell p^B überzeugender.

• Tautologie, z. B. $X \wedge Y \Rightarrow X$

$p^I[X \wedge Y \Rightarrow X] = 0/4 = 0$, dagegen $p^B(X \wedge Y \Rightarrow X) = 1/4 = 0{,}25$. Hier ist der Ansatz p^I plausibler, denn man versteht eine Tautologie als „inhaltsleer“, als *redundant*, was gut zu dem Wert $p^I = 0$ passt. Der Wert $p^B(X \wedge Y \Rightarrow X) = 1/4 = 0{,}25$ ist dagegen nicht unmittelbar einleuchtend. Auch überzeugt mehr, dass *immer* gilt p^I[Tautologie] = 0, während sich dagegen der Wert p^B(Tautologie) in Abhängigkeit von n verändert: bei n = 2: 1/4, bei n = 3: 1/8 usw.

• Kontradiktion, z. B. $(X \wedge Y)\ \bar{\wedge}\ \neg(X \wedge Y)$

$p^{I[}[(X \wedge Y) \wedge \neg(X \wedge Y)] = 4/4 = 1$. Generell gilt: p^I[Kontradiktion] = 1. Dies ist natürlich problematisch, denn warum soll die Kontradiktion – als logischer Widerspruch, als etwas Unmögliches – einen Informationsgehalt von 1 besitzen? Zwar ergibt sich das aus dem System, aber es ist doch adäquater zu postulieren: Bei der Kontradiktion ist *kein Informationsgehalt* p^I *definiert*. $p^B((X \wedge Y) \wedge \neg(X \wedge Y)) = 1/0$. Und es gilt generell p^B(Kontradiktion) = 1/0. Eine Division durch 0 ist aber nicht „erlaubt“, insofern kann man auch hier davon sprechen, dass bei der Kontradiktion kein Informationsgehalt definiert ist.

Abschließend eine Übersicht für *Implikation* und *Positiv-Implikation:*

	$X \rightarrow Y$	$\neg(X \rightarrow Y)$	$X \ast\!\!\rightarrow Y$	$\neg(X \ast\!\!\rightarrow Y)$
Theoret. Wahrsch. p^T	3/4	1/4	1/2	1/2
Informationsgehalt p^I	1/4	3/4	1/2	1/2
Bestimmtheit p^B	1/3	1	1	1

3 – 2 QUANTOREN- UND PRÄDIKATEN-LOGIK

3-2-1 Einführung

3-2-1-1 BESTIMMUNG

In der traditionellen *Quantoren-Logik* werden, wie beschrieben, 4 Quantitäts-Stufen unterschieden. *alle*, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*.

Es geht dabei vor allem um folgende *Kopula*-Relationen:

- *All-Relationen* (All-Sätze)
  - positiv: Alle X sind Y
  - negativ: Alle X sind nicht Y
- *Partikulär-Relationen* (Partikulär-Sätze)
  - positiv: Einige X sind Y
  - negativ: Einige X sind nicht Y

3-2-1-2 PROBLEM DER ZUORDNUNG VON META-WERTEN

Ich habe früher dargelegt, dass „alle“ bzw. „einige“ sich primär auf *relative* Größen beziehen (wobei nur in geringem Ausmaß Erkenntnisse über *absolute* Größen abzuleiten sind).

Die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T verlangt zur Berechnung aber die *absoluten* Größen. Es ist also nicht möglich, einem All-Satz oder Partikulär-Satz *direkt* eine theoretische Wahrscheinlichkeit p^T zuzuweisen. Es sei denn, man führt bei „alle“ $\Lambda(X \rightarrow Y)$ bzw. klassisch $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ auf aussagen-logisch $X \rightarrow Y$ zurück und wählt den strukturellen Wert der Implikation, also $p^T = 3/4$, was jedoch sehr unbefriedigend wäre (und bei „einige“ auch nicht weiterführte, weil es hierfür keinen aussagen-logischen Ausdruck gibt).

Es ist aber möglich, eine Berechnung vorzunehmen, wenn man den *quantoren-logischen* Ausdruck in einen *prädikaten-logischen* umformt bzw. in meiner Terminologie, die *allgemein-logische* Relation in eine *individual-logische* Relation übersetzt. Das werde ich im nächsten Punkt erläutern (genauer aber erst im Unterkapitel 3-3, Quantitative Logik).

3-2-1-3 EINZEL-BERECHNUNG

Wie beschrieben, gibt es verschiedene Möglichkeiten, All-Relationen und Partikulär-Relationen zu formalisieren.

Nehmen wir als erstes Beispiel den All-Satz in der Formalisierung: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$. Diese All-Satz-Implikation lässt sich folgendermaßen in *Prädikaten-Logik* übersetzen:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \quad \Leftrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$$

Zur Berechnung von p^T gehen wir Schritt für Schritt vor:

Voraussetzung ist, wie dargelegt wurde: $p^T[X \rightarrow Y] = 3/4$

- $n = 1$ $\quad p^T[Fx_1 \rightarrow Gx_1] = 3^1/4^1 = 3/4 = 0{,}75$
- $n = 2$ $\quad p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = 3^2/4^2 = 9/16 = 0{,}56$
- $n = 3$ $\quad p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge (Fx_3 \rightarrow Gx_3)] = 3^3/4^3 = 27/64 = 0{,}42$

3-2-1-4 GESAMT-BERECHNUNG

Die Lösung ist leicht zu erkennen:

- $n = 1$ $3^1/4^1$ bzw. $(3/4)^1$
- $n = 2$ $3^2/4^2$ bzw. $(3/4)^2$
- $n = 3$ $3^3/4^3$ bzw. $(3/4)^3$

Offensichtlich gilt also allgemein:

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)] = 3^n/4^n$$

Ein strenger Beweis soll hier nicht durchgeführt werden. Im Punkt 3-4-2 wird die Formel für die Berechnung des All-Satzes (und der meisten nachfolgenden Satz-Strukturen) erläutert.

Wenn also gilt:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \quad \Leftrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$$

Und:

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)] = 3^n/4^n$$

So kann man indirekt bestimmen:

$$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = 3^n/4^n$$

3-2-1-5 UNTERSCHIEDLICHE BERECHNUNGS-METHODEN

Dieser Punkt ist für Spezialisten und kann von anderen Lesern ggf. übergangen werden.
Man kann hier 2 Ansätze unterscheiden:

- n = Anzahl der x, Nenner 4^n

Nach dieser Methode bin ich oben vorgegangen;

z. B.: $p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = 3^n/4^n = 3^2/4^2 = 9/16$

Hier wurde festgesetzt: $n = 2$, weil es 2 x gibt (x_1 und x_2) oder auch weil es 2 *Teil-Relationen* (in den Klammern) gibt.

- n = Anzahl aller Variablen, Nenner 2^m

Man könnte für n aber auch die Anzahl der *Variablen* (x_1, x_2, F, G) oder der *Elementarrelationen* (Fx_1, Gx_1, Fx_2, Gx_2) nehmen, dann gälte aber für dieses Beispiel $n = 4$. Noch deutlicher wird das, wenn man 4 ganz verschiedene, aussagen-logische Variablen einsetzt:

$$(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W) \text{ bzw. } (X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_3 \rightarrow X_4)$$

Hier wäre es ganz offensichtlich, dass man bestimmen würde $n = 4$ (und nicht $n = 2$).
Als *Basis* für den Nenner würde man dann andererseits nicht mehr 4 nehmen, sondern 2 (entsprechend der Aufteilung in + und – in der Wahrheitstafel).

Natürlich müsste dann die Formel auf der Basis 2 anders lauten, und zwar z. B.:

$p^T = 3^{m/2}/2^m$ anstatt $p^T = 3^n/4^n$ (ich verwende hier ‚m' zur Unterscheidung von ‚n').

Man erhielte im Beispiel:

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = 3^{m/2}/2^m = 3^{4/2}/2^4 = 3^2/2^4 = 9/16$$

- Wurzel-Darstellung

Allgemein kann man für den Nenner bestimmen:
4^n sei 2^m. Wenn die *Basis* 2 ist statt 4, dann muss die *Potenz* um den Faktor 2 erhöht sein. Denn $2 = \sqrt{4}$. Somit gilt: $n \times 2 = m$.
Daher $4^1 = 2^2$, $4^2 = 2^4$, $4^3 = 2^6$, $4^4 = 2^8$ usw.

Noch deutlicher wird der Zusammenhang zwischen Potenz und Wurzel, wenn man folgendermaßen schreibt:

$$4^1 = (\sqrt{4})^2,\ 4^2 = (\sqrt{4})^4,\ 4^3 = (\sqrt{4})^6,\ 4^4 = (\sqrt{4})^8 \text{ usw.}$$

Da $(\sqrt{4})^n = \sqrt{4^n}$ kann man die Klammern auch weglassen.

Kommen wir zurück zu der konkreten Formel $(3/4)^n$: Will man für die Basis 2 (wie bei der Basis 4) dieselbe Hochzahl verwenden, so muss man unter Verwendung des *Wurzelzeichens* schreiben: $(\sqrt{3})^m / (\sqrt{4})^m = (\sqrt{3}/\sqrt{4})^m = (\sqrt{3}/\sqrt{4})^{2n}$. Da wie gesagt gilt $\sqrt{4} = 2$, kann man auch schreiben: $(\sqrt{3}/2)^{2n}$.

Im Beispiel ergibt sich: $p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = (\sqrt{3}/2)^4 = 9/16$
$(\sqrt{3})^4$ hat also denselben Wert wie in der ersten Formel $3^{4/2}$.

• Dezimal-Darstellung
Mit *Dezimalzahlen* ist der Sachverhalt vielleicht noch prägnanter darzustellen:
Die Formel auf der Basis 4 lautet: $(3/4)^n$. Dafür kann man *dezimal* schreiben: $(0{,}75)^n$.
$(3/4)^n = (0{,}75)^n$, somit: $(3/4)^1 = (0{,}75)^1 = 0{,}75$, $(3/4)^2 = (0{,}75)^2 = 0{,}56$, $(3/4)^3 = (0{,}75)^3 = 0{,}42$, $(3/4)^4 = (0{,}75)^4 = 0{,}32$ usw.

Die Formel auf der Basis 2 lautet wie beschrieben:
$(\sqrt{3}/\sqrt{4})^m$ bzw. $(\sqrt{3}/\sqrt{4})^{2n}$.
Dafür kann man dezimal schreiben: $(\sqrt{0{,}75})^m = (\sqrt{0{,}75})^{2n}$
Somit:
$(3/4)^n = (0{,}75)^n = (\sqrt{0{,}75})^{2n}$, folglich: $(3/4)^1 = (0{,}75)^1 = (\sqrt{0{,}75})^2 = 0{,}75$
$(3/4)^2 = (0{,}75)^2 = (\sqrt{0{,}75})^4 = 0{,}56$ $(3/4)^3 = (0{,}75)^3 = (\sqrt{0{,}75})^6 = 0{,}42$ usw.

Man erhielte im Beispiel:
$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = (\sqrt{0{,}75})^4 = 0{,}56$

Diese Umformungen – vom Nenner 4^n zum Nenner 2^m bzw. dezimal formuliert – lassen sich auch auf alle hier verwendeten (strukturgleichen) Gleichungen anwenden, es soll aber genügen, dies hier einmal demonstriert zu haben.

• *Vergleich*: Beide Berechnungsmethoden haben Vorteile und Nachteile. Aber gerade bei einer komplexen Relation in prädikaten-logischer Formalisierung (mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$) bietet sich die erste Methode mit dem Nenner 4^n an, weil dann die Indizes von x mit den Parametern in der Formel übereinstimmen. Außerdem ist so die Unterscheidung von einfachen Relationen mit 2^n als Nenner und komplexen Relationen mit 4^n als Basis besser möglich.

3-2-2 Implikation

3-2-2-1 NEGATIVER ALL-SATZ
Den *positiven* All-Satz $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ habe ich bereits im vorigen Punkt analysiert.
Hier geht es jetzt um den *negativen* All-Satz $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$.
Für den gelten vergleichbare Verhältnisse.
• Umsetzung in Prädikaten-Logik

$$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$$

• Schritt-für-Schritt-Analyse

$$p^T[Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1] = 3^1/4^1 = 3/4 = 0{,}75$$
$$p^T[(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2)] = 3^2/4^2 = 9/16 = 0{,}56$$
$$p^T[(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge (Fx_3 \rightarrow \neg Gx_3)] = 3^3/4^3 = 27/64 = 0{,}42$$

- Allgemeine Berechnung

  $p^T[(Fx_1 \to \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \to \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \to \neg Gx_n)] = 3^n/4^n$
- Übertragung

  $p^T[\Lambda x(Fx \to \neg Gx)] = 3^n/4^n$

3-2-2-2 NEGIERTER ALL-SATZ

Nun geht es um den *negierten* All-Satz $\Lambda x \neg(Fx \to Gx)$.
Für den gelten veränderte Verhältnisse.

- Umsetzung in Prädikaten-Logik

  $\Lambda x \neg(Fx \to Gx) \Leftrightarrow \neg(Fx_1 \to Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \to Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n \to Gx_n)$
- Schritt-für-Schritt-Analyse

  $p^T[\neg(Fx_1 \to Gx_1)] = 1/4^1 = 1/4 = 0{,}25$

  $p^T[\neg(Fx_1 \to Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \to Gx_2)] = 1/4^2 = 1/16 = 0{,}06$

  $p^T[\neg(Fx_1 \to Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \to Gx_2) \wedge \neg(Fx_3 \to Gx_3)] = 1/4^3 = 1/64 = 0{,}02$
- Allgemeine Berechnung

  $p^T[\neg(Fx_1 \to Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \to Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n \to Gx_n)] = 1/4^n$
- Übertragung

  $p^T[\Lambda x \neg(Fx \to Gx)] = 1/4^n$

Natürlich kann man für $1/4^n$ auch $1^n/4^n$ oder $(1/4)^n$ schreiben und für $3^n/4^n$ auch $(3/4)^n$.
$p^T[\Lambda x \neg(Fx \to Gx)] + p^T[\Lambda x(Fx \to Gx)] \neq 1$, außer im Ausnahmefall $n = 1$. Und das ist auch plausibel, denn $\Lambda x \neg(Fx \to Gx)$ ist nicht die *Kontradiktion* von $\Lambda x(Fx \to Gx)$. Das ist nämlich $\neg \Lambda x(Fx \to Gx)$. Und: $p^T[\Lambda x (Fx \to Gx)] + p^T[\neg \Lambda x(Fx \to Gx)] = 1$.
Zur genaueren Begründung dieser und folgender Berechnungen vgl. 3-4-2.

3-2-2-3 PARTIKULÄR-SAT Z

Es geht hier um den Partikulär-Satz (die Partikulär-Relation): $Vx(Fx \to Gx)$

- Umsetzung in Prädikaten-Logik

  $Vx(Fx \to Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \to Gx_1) \vee (Fx_2 \to Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \to Gx_n)$
- Schritt-für-Schritt-Analyse

  $p^T[Fx_1 \to Gx_1] = (4^1 - 1)/4^1 = 3/4 = 0{,}75$

  $p^T[(Fx_1 \to Gx_1) \vee (Fx_2 \to Gx_2)] = (4^2 - 1)/4^2 = 15/16 = 0{,}94$

  $p^T[(Fx_1 \to Gx_1) \vee (Fx_2 \to Gx_2) \vee (Fx_3 \to Gx_3) = (4^3 - 1)/4^3 = 63/64 = 0{,}98$
- Allgemeine Berechnung

  $p^T[(Fx_1 \to Gx_1) \vee (Fx_2 \to Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \to Gx_n)] = (4^n - 1)/4^n$
- Übertragung

  $p^T[Vx(Fx \to Gx)] = (4^n - 1)/4^n$

Die Formel $(4^n - 1)/4^n$ ist anders als die bisherigen Formeln nicht direkt aus der aussagen-logischen Wahrheitstafel herzuleiten; sie wird im *quantitativen* Bereich noch erläutert werden.

3-2-2-4 NEGATIVER PARTIKULÄR-SATZ

Nun geht es um den *negativen* Partikulär-Satz (negative Partikulär-Relation): $Vx(Fx \to \neg Gx)$.
Hier ergeben sich dieselben Verhältnisse wie bei dem *positiven* Partikulär-Satz.

- Umsetzung in Prädikaten-Logik

  $Vx(Fx \to \neg Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 \to \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \to \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \to \neg Gx_n)$
- Schritt-für-Schritt-Analyse

$p^T[Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1] = (4^1 - 1)/4^1 = 3/4 = 0{,}75$
$p^T[(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2)] = (4^2 - 1)/4^2 = 15/16 = 0{,}94$
$p^T[(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \vee (Fx_3 \rightarrow \neg Gx_3) = (4^3 - 1)/4^3 = 63/64 = 0{,}98$

- Allgemeine Berechnung

$p^T[(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)] = (4^n - 1)/4^n$

- Übertragung

$p^T[Vx(Fx \rightarrow \neg Gx)] = (4^n - 1)/4^n$

3-2-2-5 NEGIERTER PARTIKULÄR-SATZ

Es geht hier um den *negierten* Partikulär-Satz: $Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$ bzw. $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$

- Umsetzung in Prädikaten-Logik

$Vx\neg(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee ... \vee \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)$

- Schritt-für-Schritt-Analyse

$p^T[\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1)] = (4^1 - 3^1)/4^1 = 1/4 = 0{,}25$
$p^T[\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = (4^2 - 3^2)/4^2 = 7/16 = 0{,}44$
$p^T[\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee \neg(Fx_3 \rightarrow Gx_3) = (4^3 - 3^3)/4^3 = 37/64 = 0{,}58$

- Allgemeine Berechnung

$p^T[\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee ... \vee \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)] = (4^n - 3^n)/4^n$

- Übertragung

$p^T[Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)] = (4^n - 3^n)/4^n$

Abschließend hierzu sei *eine* Verbindung quantoren-logischer Relationen untersucht:

$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \ {}^{+}\!\!>\!<^{+} Vx(Fx \rightarrow Gx)$

Diese beiden Relationen sind also k*ontradiktorisch*.

Somit muss gelten: $p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] + p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)] = 1$

Wir hatten angegeben:

$p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] = 1/4^n$ bzw. $p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)] = (4^n - 1)/4^n$

Daher muss gelten:

$p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] = 1 - (4^n - 1)/4^n$ bzw. $p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)] = 1 - 1/4^n$

Beispiel : n = 2, somit

$p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] = 1/4^2 = 1/16$
$p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] = (4^2 - 1)/4^2 = 15/16$

Es gilt also wie gefordert:

$p^T[\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)] = 1 - (4^2 - 1)/4^2 = 1 - 15/16 = 16/16 - 15/16 = 1/16$
$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)] = 1 - (1/4^2) = 1 - 1/16 = 16/16 - 1/16 = 15/16$

Wie beschrieben kann man vor allem die *Partikulär-Sätze* auch anders formalisieren, wodurch sich auch andere p^T-Werte ergeben. Dazu komme ich im Punkt 3-3.

3-2-3 Positiv-Implikation

Nun hatte ich schon mehrfach gezeigt, dass die *All- und Partikulär-Aussagen* mit der *herkömmlichen Implikation* $\rightarrow$ zu Problemen führen. Dagegen ist die Verwendung der *Positiv-Implikation* $*\!\!\rightarrow$ weitgehend unproblematisch. Daher seien nachfolgend dieselben Aussagenformen noch einmal mit der Positiv-Implikation untersucht.

3-2-3-1 ALL-SATZ

Hier geht es um den *positiven* All-Satz $\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)$.

- Umsetzung in Prädikaten-Logik

$$\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n *\!\rightarrow Gx_n)$$

- Schritt-für-Schritt-Analyse

$$p^T[Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1] = 1/2^1 = 1/2 = 0{,}5$$
$$p^T[(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2)] = 1/2^2 = 1/4 = 0{,}25$$
$$p^T[(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2) \wedge (Fx_3 *\!\rightarrow Gx_3)] = 1/2^3 = 1/8 = 0{,}13$$

- Allgemeine Berechnung

$$p^T[(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n *\!\rightarrow Gx_n)] = 1/2^n$$

- Übertragung

$$p^T[\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)] = 1/2^n$$

3-2-3-2 NEGATIVER ALL-SATZ

Jetzt geht es um den *negativen* All-Satz $\Lambda x(Fx *\!\rightarrow \neg Gx)$. Dabei gilt dasselbe.

- Umsetzung in Prädikaten-Logik

$$\Lambda x(Fx *\!\rightarrow \neg Gx) \Leftrightarrow (Fx_1 *\!\rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\rightarrow \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n *\!\rightarrow \neg Gx_n)$$

- Schritt-für-Schritt-Analyse

$$p^T[Fx_1 *\!\rightarrow \neg Gx_1] = 1/2^1 = 1/2 = 0{,}5$$
$$p^T[(Fx_1 *\!\rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\rightarrow \neg Gx_2)] = 1/2^2 = 1/4 = 0{,}25$$
$$p^T[(Fx_1 *\!\rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\rightarrow \neg Gx_2) \wedge (Fx_3 *\!\rightarrow \neg Gx_3)] = 1/2^3 = 1/8 = 0{,}13$$

- Allgemeine Berechnung

$$p^T[(Fx_1 *\!\rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\rightarrow \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n *\!\rightarrow \neg Gx_n)] = 1/2^n$$

- Übertragung

$$p^T[\Lambda x(Fx *\!\rightarrow \neg Gx)] = 1/2^n$$

3-2-3-3 NEGIERTER ALL-SATZ

Nun zum negierten All-Satz $\Lambda x\neg(Fx *\!\rightarrow Gx)$.

- Umsetzung in Prädikaten-Logik

$$\Lambda x\neg(Fx *\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n *\!\rightarrow Gx_n)$$

- Schritt-für-Schritt-Analyse

$$p^T[\neg(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1)] = 1/2^1 = 1/2 = 0{,}5$$
$$p^T[\neg(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2)] = 1/2^2 = 1/4 = 0{,}25$$
$$p^T[\neg(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2) \wedge \neg(Fx_3 *\!\rightarrow Gx_3)] = 1/2^3 = 1/8 = 0{,}13$$

- Allgemeine Berechnung

$$p^T[\neg(Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n *\!\rightarrow Gx_n)] = 1/2^n$$

- Übertragung

$$p^T[\Lambda x\neg(Fx *\!\rightarrow Gx)] = 1/2^n$$

Auch hier ergibt sich also dieselbe Formel.

3-2-3-4 PARTIKULÄR-SATZ

Hier sei der Partikulär-Satz $Vx(Fx *\!\rightarrow Gx)$ analysiert.

- Umsetzung in Prädikaten-Logik

$$Vx(Fx *\!\rightarrow Gx) \ *\!\Leftrightarrow (Fx_1 *\!\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n *\!\rightarrow Gx_n)$$

• Schritt-für-Schritt-Analyse

$p^T[Fx_1 *\rightarrow Gx_1] = (2^1 - 1)/2^1 = 1/2 = 0{,}5$

$p^T[(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\rightarrow Gx_2)] = (2^2 -1)/2^2 = 3/4 = 0{,}75$

$p^T[(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\rightarrow Gx_2) \vee (Fx_3 *\rightarrow Gx_3)] = (2^3 - 1)/2^3 = 7/8 = 0{,}88$

• Allgemeine Berechnung

$p^T[(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n *\rightarrow Gx_n)] = (2^n - 1)/2^n$

• Übertragung

$p^T[\Lambda x(Fx *\rightarrow Gx)] = (2^n - 1)/2^n$

3-2-3-5 NEGIERTER PARTIKULÄR-SATZ

Jetzt zum negierten Partikulär-Satz $Vx\neg(Fx *\rightarrow Gx)$. Dabei ergibt sich dasselbe Ergebnis wie beim positiven Partikulär-Satz.

• Umsetzung in Prädikaten-Logik

$Vx\neg(Fx *\rightarrow Gx) \; *\Leftrightarrow \; \neg(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 *\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee \neg(Fx_n *\rightarrow Gx_n)$

• Schritt-für-Schritt-Analyse

$p^T[\neg(Fx_1 *\rightarrow Gx_{1)}] = (2^1 -1)/2^1 = 1/2 = 0{,}5$

$p^T[\neg(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 *\rightarrow Gx_2)] = (2^2 -1)/2^2 = 3/4 = 0{,}75$

$p^T[\neg(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 *\rightarrow Gx_2) \vee \neg(Fx_3 *\rightarrow Gx_3)] = (2^3 -1)/2^3 = 7/8 = 0{,}88$

• Allgemeine Berechnung

$p^T[(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n *\rightarrow Gx_n)] = (2^n -1)/2^n$

• Übertragung

$p^T[\Lambda x(Fx *\rightarrow Gx)] = (2^n -1)/2^n$

3-2-4 Systematik

Ich habe in den früheren Kapiteln *5 Modelle* unterschieden, wie man *All-Relationen* und *Partikulär-Relationen* darstellen kann, und die Vor- und Nachteile dieser Modelle diskutiert. Hier soll nun die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T für die 5 Modelle berechnet werden.

3-2-4-1 MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

Modell 1 ist besonders systematisch: Es werden *alle* Strukturen mit der *Implikation* formalisiert (bei der Negation steht das Negationszeichen vor der Klammer). Ein Problem beim ersten Modell ist aber, dass der p^T-Wert von „alle F sind G“ und „alle F sind nicht G“ ganz unterschiedlich ist, entsprechend der für „einige“ und „einige nicht“; das wirkt wenig plausibel. Dieses Problem tritt bei den folgenden Modellen 2 und 3 nicht auf, aber sie haben andere (früher aufgezeigte) Schwierigkeiten, vor allem das reine Konjunktions-Modell 3.

1. alle F sind G

Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

$p^T = 3^n/4^n$

2. alle F sind nicht G

Quantoren-Logik: $\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$

Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)$

$p^T = 1/4^n$

3. einige F sind G
Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
$p^T = (4^n - 1)/4^n$

4. einige F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\vee x\neg(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \neg(Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee...\vee \neg(Fx_n \rightarrow Gx_n)$
$p^T = (4^n - 3^n)/4^n$

3-2-4-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G
Quantoren-Logik: $\wedge x(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
$p^T = 3^n/4^n$

2. alle F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\wedge x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$
$p^T = 3^n/4^n$

3. einige F sind G
Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
$p^T = (4^n - 1)/4^n$

4. einige F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$
$p^T = (4^n - 1)/4^n$

3-2-4-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G
Quantoren-Logik: $\wedge x(Fx \wedge Gx)$ [dies ist äquivalent $\wedge x\neg(Fx \rightarrow \neg Gx)$]
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \wedge (Fx_2 \wedge Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \wedge Gx_n)$
$p^T = 1/4^n$

2. alle F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\wedge x(Fx \wedge \neg Gx)$ [dies ist äquivalent $\wedge x\neg(Fx \rightarrow Gx)$]
Prädikaten-Logik:$(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$
$p^T = 1/4^n$

3. einige F sind G
Quantoren-Logik: $\vee x(Fx \wedge Gx)$ [dies ist äquivalent $\vee x\neg(Fx \rightarrow \neg Gx)$]
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$
$p^T = (4^n - 3^n)/4^n$

4. einige F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\mathrm{V}x(Fx \wedge \neg Gx)$ [dies ist äquivalent $\mathrm{V}x\neg(Fx \rightarrow Gx)$]
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$
$p^T = (4^n - 3^n)/4^n$

3-2-4-4 MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION
Dieses Modell ist das am weitesten verbreitetste. Danach werden All-Sätze und Partikulär-Sätze unterschiedlich formalisiert, *All-Sätze mit der Implikation* und *Partikulär-Sätze mit der Konjunktion*. Dieses Modell hat wie beschrieben erhebliche Schwächen, sein Vorteil ist, dass die p^T-Werte von *positiven* und *negativen* All-Sätzen übereinstimmen und ebenso die von positiven und negativen Partikulär-Sätzen.

1. alle F sind G
Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
$p^T = 3^n/4^n$

2. alle F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
Prädikaten-Logik:$(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$
$p^T = 3^n/4^n$

3. einige F sind G
Quantoren-Logik: $\mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$
$p^T = (4^n - 3^n)/4^n$

4. einige F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\mathrm{V}x(Fx \wedge \neg Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$
$p^T = (4^n - 3^n)/4^n$

3-2-4-5 MODELL 5: (NEGIERTE) POSITIV-IMPLIKATION
Das folgende Modell hat, wie frühere Analysen gezeigt haben, viele Vorteile. Und ist auch hinsichtlich der p^T-Werte überzeugend. Denn auch hier gilt, dass die p^T-Werte von *positiven* und *negativen* All-Sätzen übereinstimmen und ebenso die von positiven und negativen Partikulär-Sätzen.

1. alle F sind G
Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \ {*}{\rightarrow} \ Gx)$
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \ {*}{\rightarrow} \ Gx_1) \wedge (Fx_2 \ {*}{\rightarrow} \ Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \ {*}{\rightarrow} \ Gx_n)$
$p^T = 1/2^n$

2. alle F sind nicht G
Quantoren-Logik: $\Lambda x\neg(Fx \ {*}{\rightarrow} \ Gx)$
Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 \ {*}{\rightarrow} \ Gx_1) \wedge \neg(Fx_2 \ {*}{\rightarrow} \ Gx_2) \wedge ... \wedge \neg(Fx_n \ {*}{\rightarrow} \ Gx_n)$
$p^T = 1/2^n$

3. einige F sind G
Quantoren-Logik: Vx(Fx *→ Gx)
Prädikaten-Logik: $(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \lor (Fx_2 *\rightarrow Gx_2) \lor ... \lor (Fx_n *\rightarrow Gx_n)$
$p^T = (2^n - 1)/2^n$

4. einige F sind nicht G
Quantoren-Logik: Vx¬(Fx *→ Gx)
Prädikaten-Logik: $\neg(Fx_1 *\rightarrow Gx_1) \lor \neg(Fx_2 *\rightarrow Gx_2) \lor ... \lor \neg(Fx_n *\rightarrow Gx_n)$
$p^T = (2^n - 1)/2^n$

3-2-5 Erweiterungen

Hier soll die *Entwicklung* der theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T (bei steigendem n) für verschiedene Formalisierungen quantoren-logischer Relationen aufgezeigt werden.

3-2-5-1 ALL-SATZ

Es geht hier zunächst um die *All-Relation* bzw. den *All-Satz* Λx(Fx → Gx).
Nun gilt, wie beschrieben: p^T[All-Satz] = $3^n/4^n$, formal:
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \land (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \land ... \land (Fx_n \rightarrow Gx_n)] = 3^n/4^n$

n	Formel	Bruch	dezimal
1	$3^1/4^1$	3/4	0,75
2	$3^2/4^2$	9/16	0,56
3	$3^3/4^3$	27/64	0,42
4	$3^4/4^4$	81/256	0,32
5	$3^5/4^5$	243/1024	0,24

n steht also für also die Anzahl der x bzw. die Anzahl der Implikationen $Fx_n \rightarrow Gx_n$.
Und mit steigendem n nimmt p^T ab. Dies heißt konkret, dass die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T eines All-Satzes gegen 0 geht, wenn n gegen ∞ geht.
Umgekehrt gilt: Je größer n, desto höher der *Informationsgehalt* p^I des All-Satzes.
Dabei gilt: $p^T = 1 - p^I$ bzw. $p^I = 1 - p^T$
Schon bei n = 3 hat sich das Größenverhältnis von p^T und p^I umgekehrt. p^T ist nur noch 0,42, p^I ist 1 – 0,42 = 0,58.

3-2-5-2 PARTIKULÄR-SATZ MIT IMPLIKATION

Es geht hier um die Relation Vx(Fx → Gx). Dabei gilt:
$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)] = p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \lor (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \lor ... \lor (Fx_n \rightarrow Gx_n)] = (4^n - 1)/4^n$

n	Formel	Bruch	dezimal
1	$(4^1 - 1)/4^1$	3/4	0,75
2	$(4^2 - 1)/4^2$	15/16	0,94
3	$(4^3 - 1)/4^3$	63/64	0,98
4	$(4^4 - 1)/4^4$	255/256	0,99 (≈ 1)
5	$(4^5 - 1)/4^5$	1023/1024	≈ 1

p^T[Vx(Fx → Gx)] hat als Minimum den Wert 0,75. Es steigt sehr steil an, schon bei n = 4 ist quasi der Wert 1 erreicht (beim Aufrunden bei 2 Stellen erhält man bereits $p^T = 1$). Umgekehrt ist der Informationsgehalt p^I von Vx(Fx → Gx) gering, und so ist schon bei n = 4 der Wert von p^I[Vx(Fx → Gx)] nahe 0.

3-2-5-3 PARTIKULÄR-SATZ MIT KONJUNKTION

Es geht hier um die Relation Vx(Fx ∧ Gx). Dabei gilt:

$p^T[Vx(Fx \wedge Gx)] = p^T[(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge Gx_n)] = (4^n - 3^n)/4^n$

n	Formel	Bruch	dezimal
1	$(4^1 - 3^1)/4^1$	1/4	0,25
2	$(4^2 - 3^2)/4^2$	7/16	0,44
3	$(4^3 - 3^3)/4^3$	37/64	0,58
4	$(4^4 - 3^4)/4^4$	175/256	0,68
5	$(4^5 - 3^5)/4^5$	781/1024	0,76

Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T von Vx(Fx ∧ Gx) beträgt also minimal 0,25, und sie bewegt sich wesentlich langsamer auf 1 zu als p^T[Vx(Fx → Gx)].

3-2-5-4 ALL-SATZ MIT POSITIV-IMPLIKATION

Es geht hier um die Relation Λx(Fx *→ Gx). Dabei gilt:

$p^T[\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)] = p^T[(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)] = 1/2^n$

n	Formel	Bruch	dezimal
1	$1/2^1$	1/2	0,5
2	$1/2^2$	1/4	0,25
3	$1/2^3$	1/8	0,13
4	$1/2^4$	1/16	0,06
5	$1/2^5$	1/32	0,03

Der All-Satz mit *Positiv*-Implikation unterscheidet sich deutlich von dem All-Satz mit *Normal*-Implikation. p^T[Λx(Fx *→ Gx)] geht viel schneller gegen 0, es fällt jeweils um die Hälfte, bei n = 5 ist der Wert nur noch: 0,03. Dagegen ist p^T[Λx(Fx → Gx)] = 0,24 bei n = 5. Umgekehrt ist der *Informationsgehalt* von Λx(Fx *→ Gx) deutlich höher als bei Λx(Fx → Gx).

3-2-5-5 PARTIKULÄR-SATZ MIT POSITIV-IMPLIKATION

Es geht hier um die Relation Vx(Fx *→ Gx). Dabei gilt:

$p^T[Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx)] = p^T[(Fx_1 *\!\!\rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 *\!\!\rightarrow Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n *\!\!\rightarrow Gx_n)] = (2^n - 1)/2^n$

Nun gilt: p^T[Vx(Fx *→ Gx)] = 1 – p^T[Λx(Fx *→ Gx)]

Somit gilt auch: p^T[Vx(Fx *→ Gx)] = $1 - 1/2^n$. Dies lässt sich leicht erklären: Ersetzt man die 1 in $1 - 1/2^n$ durch $2^n/2^n$, dann erhält man $(2^n - 1)/2^n$.

Somit ergibt sich die Folge: 1/2, 3/4, 7/8, 15/16, 31/32 usw.

Hier ist p^T = 0,5 der Minimalwert, dann steigt p^T schnell in Richtung 1. p^T[Vx(Fx → Gx)] mit der *Normal*-Implikation nähert sich allerdings noch schneller der 1 an.

3 – 3 QUANTITATIVE LOGIK

3-3-1 Einführung

3-3-1-1 OBJEKT-EBENE UND META-EBENE QUANTITATIV

Bei einer logischen Relation kann man unterscheiden:

- *Objekt-Ebene* (Basis-Ebene, empirische Ebene)
- *Meta-Ebene* (theoretische Ebene)

Dies wurde schon bei der Aussagen-Logik erläutert. Aber jetzt geht es darum, dies im *quantitativen* Bereich zu präzisieren.

Die Objekt-Ebene ist die *vorgegebene* Ebene. Die Meta-Ebene ist eine *übergeordnete* Ebene. Auf der Objekt-Ebene wird angegeben, welche *Größe* eine Relation besitzt.

Dabei kann es um die *absolute* oder *relative*, die *implizite* oder *explizite* Größe gehen.

- Explizite Größen
  - absolute Größe: $q(X \rightarrow Y) = r$
  - relative Größe: $p(X \rightarrow Y) = r/n$
- Implizite (relative) Größen
  - Relation mit impliziter Größe: $X \rightarrow Y$
  - verborgene Größe von $X \rightarrow Y$: $p(X \rightarrow Y) = 1$

„$X \rightarrow Y$“ in der Aussagen-Logik steht wie beschrieben für $p(X \rightarrow Y) = 1$, die 1 wird nur *nicht genannt*. Und $p(X \rightarrow Y) = 1$ steht wiederum für $p(X \rightarrow Y) = r/n = 1$, wobei $r = n$. Nur bleibt der Wert von r und n *verborgen* – der aber gerade für die Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit von Wichtigkeit ist.

Die Logik bezieht sich im Wesentlichen auf *relative* Größen, wobei die herkömmliche Logik überwiegend mit *impliziten* Größen arbeitet.

Ich habe in den vorherigen Kapiteln 1 und 2 fast ausschließlich die Objekt-Ebene behandelt. Hier geht es quantitativ vorrangig um die *relative Häufigkeit* oder *empirische Wahrscheinlichkeit*. Davon zu unterscheiden ist eine Meta-Ebene. Dort wird der *Objekt-Größe* eine *Meta-Größe* zugeordnet, und zwar primär die *theoretische Wahrscheinlichkeit*.

Diese Meta-Größe zeigt an, wie viele Möglichkeiten der *Verteilung* es gibt nach den Regeln der *Kombinatorik*. Anders gesagt, wie wahrscheinlich die Objekt-Größe ist, wenn man *zufällige* Verhältnisse voraussetzt. Dieses Maß dient dazu, den *Tautologie-Grad* bzw. den *Informationsgehalt* der Relation anzugeben, und zwar von synthetischen *und* analytischen Relationen.

3-3-1-2 OBJEKT- UND META-WAHRSCHEINLICHKEIT

Ich gehe zunächst von der *Kopula-Grundstruktur* „X ist (ein) Y“ aus, und zwar folgendem Beispiel: 2 von 3 X sind Y. Das kann *empirisch* ermittelt sein oder eine *Festsetzung*.

- Objekt-Ebene: 2 von 3 X sind Y
  absolute Größe $q = 2$

relative Größe (bzw. Wahrscheinlichkeit) p = 2/3 = 0,66

• Mögliche *Verteilung*
Für „X ist Y“ steht ein +, für „X ist nicht Y“ steht ein –.
In der nachfolgenden Tabelle bedeutet konkret z. B.
X_1 +: X_1 ist Y X_1 –: X_1 ist nicht Y

	X_1	X_2	X_3
1.	+	+	+
2.	+	+	–
3.	+	–	+
4.	+	–	–
5.	–	+	+
6.	–	+	–
7.	–	–	+
8.	–	–	–

Wie man sieht, gibt es 8 mögliche Verteilungen. Und in 3 von den 8 Verteilungen gilt: 2 von 3 X sind Y. Nämlich in der 2. 3, und 5. Zeile.
Man kann auch sagen: Es gibt 8 *mögliche Welten*. Und in 3 von den 8 Welten sind 2 X von 3 X auch Y. Diesen Wert 3/8 kann man ‚Meta-Wahrscheinlichkeit’ nennen.

• *Meta-Werte*
absolute Größe: q = 3
relative Größe (Wahrscheinlichkeit): $p^T = 3/8 = 0{,}375$
Auch bei den Meta-Werten ist die *relative Größe* entscheidend.
Man kann also formulieren: ‚Es gibt 3 von 8 Möglichkeiten, dass 2 von 3 X auch Y sind’.

Diese relative Meta-Größe nennt man meistens ‚*Wahrscheinlichkeit’*. Aber man muss eben unterscheiden zwischen der *Objekt-Wahrscheinlichkeit* und der *Meta-Wahrscheinlichkeit*.
Andere Begriffe dafür sind:
• *Objekt-Wahrscheinlichkeit*
= Empirische Wahrscheinlichkeit = Basis-Wahrscheinlichkeit = Faktische Wahrscheinlichkeit = Real-Wahrscheinlichkeit = Statistische Wahrscheinlichkeit
• *Meta-Wahrscheinlichkeit*
= Theoretische Wahrscheinlichkeit = Zufalls-Wahrscheinlichkeit.
Ich habe im bisherigen Text überwiegend nur die *Objekt-Wahrscheinlichkeit* (empirische Wahrscheinlichkeit) verwendet, und habe die mit ‘p’ bezeichnet. Das behalte ich auch so bei.
Dagegen verwende ich zur Kennzeichnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit den *Index* $_T$, schreibe diesen Index aber zur besseren Sichtbarkeit als *Hochzeichen*, also p^T bzw. $p^T[X]$, $p^T[X \rightarrow Y]$ usw. Zur besseren Unterscheidung verwende ich für die theoretische Wahrscheinlichkeit zusätzlich *eckige Klammern* [...]; allerdings habe ich eckige Klammern manchmal auch bei der empirischen Wahrscheinlichkeit aus Gründen der Übersichtlichkeit verwendet. Das Zeichen p^T kann ebenfalls stehen für den *Tautologie-Grad = relative Größe der Tautologie*, denn dieser Wert ist *quantitativ* identisch mit der theoretischen Wahrscheinlichkeit.
Allgemein kann man also schreiben $p^T[\Psi] = s/m$. Oder mit Bezug auf die Objekt-Wahrscheinlichkeit: $p^T[p(\Phi) = r/n] = s/m$.
Jetzt kann man für unser Beispiel formulieren: ‚Die *Objekt-Wahrscheinlichkeit* für „X ist Y“ beträgt p = 2/3. Die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T für die Objekt-Wahrscheinlichkeit

beträgt 3/8. Oder kombiniert: ‚Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T, dass 2 von 3 X auch Y sind (Objekt-Wahrscheinlichkeit), beträgt $p^T = 3/8$'.

p^T gibt also an, welche Verteilung auf Grund der *Kombinatorik* wie wahrscheinlich ist, sie ist quasi umgesetzte Kombinatorik. *Je mehr Kombinationen* es für eine Verteilung gibt, *desto theoretisch wahrscheinlicher* ist sie. Dabei wird eben vorausgesetzt, dass die Variablen *unabhängig* sind, sich also *zufällig* – in jeder Weise – kombinieren können. Wenn sich feststellen lässt, dass die *realen* Werte sehr abweichen, dass z. B. eine seltene Kombination weit überdurchschnittlich häufig auftritt, dann ist das ein Hinweise darauf, dass die Variablen z. B. in *kausaler* Beziehung stehen oder in anderer Weise *abhängig* sind.

3-3-1-3 SYSTEMATISCHES BEISPIEL

Nehmen wir ein modifiziertes Beispiel. Greifen wir zurück auf: r von n X sind Y. Jetzt soll aber gelten: 3 X von 4 sind auch Y, somit p = 3/4.

Insgesamt erhalten wir eine Verteilung von 16 Möglichkeiten (vgl. unten). Hier ergeben sich folgende Werte: Jede Zeile (Welt) hat einen p^T-Wert von 1/16. Dass 3 X auch Y sind, gilt in 4 Zeilen, Nr. 2, 3, 5 und 9, also insgesamt $p^T = 4/16 = 1/4 = 0{,}25$

	X_1	X_2	X_3	X_4
1.	+	+	+	+
2.	+	+	+	–
3.	+	+	–	+
4.	+	+	–	–
5.	+	–	+	+
6.	+	–	+	–
7.	+	–	–	+
8.	+	–	–	–
9.	–	+	+	+
10.	–	+	+	–
11.	–	+	–	+
12.	–	+	–	–
13.	–	–	+	+
14.	–	–	+	–
15.	–	–	–	+
16.	–	–	–	–

Wir können diese 16 Möglichkeiten in folgender Weise ordnen:

Objekt-Wahrscheinlichkeit: p		*Meta-Wahrscheinlichkeit* p^T		
0 von 4 X sind auch Y:	0/4	1/16		
1 von 4 X sind auch Y:	1/4	4/16	2/8	1/4
2 von 4 X sind auch Y:	2/4	6/16	3/8	
3 von 4 X sind auch Y:	3/4	4/16	2/8	1/4
4 von 4 X sind auch Y:	4/4	1/16		
		16/16 = 1		

3-3-1-4 ARTEN VON WAHRSCHEINLICHKEITEN

Wir sind bisher nur von 2 Arten von Wahrscheinlichkeit ausgegangen: *empirische* und *theoretische* Wahrscheinlichkeit (bzw. Objekt- und Meta-Wahrscheinlichkeit). Jetzt möchte ich *wei-*

tere Arten von Wahrscheinlichkeiten unterscheiden. Dabei gehe ich von obiger Verteilung mit r = 3 und n = 4 aus, konkret davon, dass gilt: 3 von 4 X sind Y.

1. Wahrscheinlichkeit
- *empirische* Wahrscheinlichkeit: p = 3/4
- *theoretische* Wahrscheinlichkeit (der empirischen Wahrscheinlichkeit): p^T = 4/16 = 2/8 =1/4

2. Erwartungs-Wahrscheinlichkeit
- *empirische Erwartungs*-Wahrscheinlichkeit: p^E = 2/4
  (das ist der empirische Wert, der die höchste theoretische Wahrscheinlichkeit besitzt, also am ehesten zu erwarten ist, man nennt ihn auch ‚Zufallserwartung')
- *theoretische Erwartungs*-Wahrscheinlichkeit: p^{TE} = 6/16 = 3/8
  (das ist die theoretische Wahrscheinlichkeit der empirischen Erwartungs-Wahrscheinlichkeit)

3. Differenz-Wahrscheinlichkeit
- *empirische Differenz*-Wahrscheinlichkeit: $p^D = |p^E - p| = 1/4$
  Differenz zwischen der realen empirischen Wahrscheinlichkeit, hier: p = 3/4, und der empirischen Erwartungs-Wahrscheinlichkeit, hier: p^E = 2/4, also p^D = |2/4 - 3/4| = 1/4
- *theoretische Differenz*-Wahrscheinlichkeit: $p^{TD} = |p^{TE} - p^T| = 1/8$
  Differenz zwischen der theoretischen Wahrscheinlichkeit, hier p^T = 2/8, und der theoretischen Erwartungs-Wahrscheinlichkeit, hier p^{TE} = 3/8, also p^{TD} = |2/8 – 3/8| = 1/8

Die Differenz-Wahrscheinlichkeit dient dazu abzuschätzen, inwieweit eine Relation *zufällig* ist. Je weiter ein Wert von der *Erwartungs-Wahrscheinlichkeit* abweicht, also je größer die Differenz-Wahrscheinlichkeit ist, desto unwahrscheinlicher ist ein *Zufallsergebnis*. Sondern man wird an eine zugrunde liegende Ordnung, z. B. eine *Kausal-Beziehung* denken müssen.

3-3-1-5 BERECHNUNG

Bei den *qualitativen*, aussagen- oder quantoren-logischen Relationen war die *theoretische Wahrscheinlichkeit* folgendermaßen *berechnet* worden:

Gemäß der Wahrheitstafel *addiert* man die Anzahl der *Welten*, in denen die Relation positiv ist, kurz der *positiven Welten* (d. h. es steht ein + unter dem Relator).

Dann *dividiert* man diese Zahl durch die Anzahl *aller (möglichen) Welten*, bei 2 Relata X, Y also durch $2^2 = 4$.

Bei den *quantitativen* Relationen muss man modifiziert vorgehen:
- Berechnung der *empirischen* Wahrscheinlichkeit

Zunächst addiert man die *Fälle*, die in den *positiven Welten* der Relation vorkommen (vgl. Punkt 1-3-1-3), zum Beispiel a + c + d, und dividiert sie durch *alle Fälle* (in *allen Welten*), bei 2 Variablen: a + b + c + d. So erhält man die Formel für die *empirische* Wahrscheinlichkeit z. B. bei der Implikation X → Y:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d}$$

- Berechnung der *theoretischen* Wahrscheinlichkeit

Dies geschieht nach einer *Binomial-Formel* (wie unten gezeigt werden wird).

.

Ich hatte als allgemeine quantitative Form einer *synthetischen* Relation angegeben:

$p(X\ R^S\ Y) = r/n$. Oder kürzer: $p(R) = r/n$

Die allgemeine Form der theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T lautet dann:

$p^T[p(X\ R^S\ Y) = r/n] = s/m$ oder $p^T[p(X\ R^S\ Y) = r/n] = r^T/n^T$

3-3-2 Implikation

Als Berechnung der *empirischen* Wahrscheinlichkeit der Implikation hatte ich bestimmt:

$$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

Die theoretische *Wahrscheinlichkeit* p^T berechnet sich nun nach folgender Formel der *Binomial-Verteilung*:

$$p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n] = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$$

Das Symbol $\binom{n}{r}$ heißt *Binomial-Koeffizient* und wird gelesen als ‘n über r’.

$\binom{n}{r}$ steht für $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

n! (gelesen als ‘n Fakultät’) steht für: $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1$

Der Wert 3/4 in der Formel erklärt sich folgendermaßen: $p^T(X \rightarrow Y) = 3/4$. Der Wert 3/4 ist die strukturelle *theoretische* Wahrscheinlichkeit von $X \rightarrow Y$ bzw. von $p(X \rightarrow Y) = 1/1$ (also bei $n = 1$), was man als *Basis* von $p(X \rightarrow Y) = r/n$ ansehen kann.

Dagegen ist der Wert 1/4 in der Formel der *Umkehrwert*: $1 - 3/4 = 1/4$. Man kann auch sagen, dass 1/4 die theoretische Wahrscheinlichkeit der *Negation* ist:

$p^T[\neg(X \rightarrow Y)] = 1/4$ bzw. $p^T[p(X \rightarrow Y) = 0/1] = 1/4$.

Ein Beispiel: $p(X \rightarrow Y) = r/n = 4/5 = 0{,}8$ also: $r = 4$, $n = 5$

$$p^T[p(X \rightarrow Y) = 4/5] = \binom{5}{4}(3/4)^4(1/4)^{5-4}$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{120}{24} = 5 \qquad (3/4)^4 = 81/265 \qquad (1/4)^1 = 1/4$$

Daraus folgt: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 4/5] = 5 \times (81/256) \times 1/4 = 405/1024 = 0{,}40$

Lies: ‚Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T, dass $p(X \rightarrow Y) = 4/5$, beträgt 405/1024’.

Genauer: ‚Die *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T, dass die *empirische* Wahrscheinlichkeit p von $X \rightarrow Y = 4/5$ ist, beträgt 405/1024'.

Da dieser Sachverhalt kompliziert ist, sei er noch einmal erläutert.
Für n = 5 seien die möglichen Werte von $p(X \rightarrow Y)$ und die resultierenden p^T-Werte genannt:

$p(X \rightarrow Y)$	$p^T[p(X \rightarrow Y)]$	
5/5	243/1024 = 0,237	(jeweils auf 3 Stellen gerundet)
4/5	405/1024 = 0,396	
3/5	270/1024 = 0,264	
2/5	90/1024 = 0,088	
1/5	15/1024 = 0,015	
0/5	1/1024 = 0,001	
	1024/1024 = 1	

D. h. wenn man sich die Frage stellt: ‚Welchen Wert hat $p(X \rightarrow Y)$ am wahrscheinlichsten (bei n = 5)?' Dann kann man antworten: ‚Am wahrscheinlichsten ist $p(X \rightarrow Y) = 4/5$, denn dafür besteht die höchste theoretische Wahrscheinlichkeit, nämlich $p^T = 405/1024 = 0{,}396$'.

Man muss dabei unterscheiden:

1. Die Struktur $X \rightarrow Y$ hat (wie erläutert) grundsätzlich den Wert $p^T = 3/4 = 0{,}75$. ist somit zu 3/4 tautologisch (*struktureller Wert von* p^T).
2. Für quantitative Ausprägungen von $X \rightarrow Y$ ergeben sich jeweils unterschiedliche Werte von p^T (*quantitativer Wert von* p^T).

Wie man sieht, erreicht aber bei dieser Verteilung von n = 5 kein einziger Objekt-Wert einen Tautologie-Grad von auch nur 0,5. Somit sind alle Werte *unwahrscheinlich*, denn „unwahrscheinlich" wird ja so definiert: $p^T < 0{,}5$. Den empirischen Wert mit der höchsten p^T kann man wie gesagt auch ‚*Zufallserwartung*' nennen. Im obigen Beispiel ist also $p(X \rightarrow Y) = 4/5$ die Zufallserwartung.

3-3-3 Positiv-Implikation

Bei der Positiv-Implikation berechnet man die *empirische* Wahrscheinlichkeit p wie folgt:

$$p(X *\!\rightarrow Y) = \frac{a}{a+b} = \frac{r}{n}$$

Dann berechnet sich die *theoretische* Wahrscheinlichkeit wie folgendermaßen:

$$p^T[p(X *\!\rightarrow Y) = r/n] = \binom{n}{r}(1/2)^r(1/2)^{n-r}$$

$$\text{Beispiel: } p(X *\!\rightarrow Y) = \frac{6}{6+3} = \frac{6}{9}$$

$$p^T[p(X *\!\rightarrow Y) = 6/9] = \binom{9}{6}(1/2)^6(1/2)^3 = 84 \times (1/64) \times 1/8 = 84/512 = 0{,}16$$

Die Beziehungen zwischen der theoretischen Wahrscheinlichkeit von *Implikation* und *Positiv-Implikation* sind komplex, je nach den eingesetzten Werten kann $p^T[p(X *\!\rightarrow Y)$ größer oder kleiner sein als $p^T[p(X \rightarrow Y)$.

3-3-4 Systematik

Die *Relatoren* (bzw. Junktoren) unterscheiden sich generell in der Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit danach, wie viele + (bzw. wie viele –) in der Wahrheitstafel unter dem Relator stehen. Anders gesagt, in wie vielen Welten die Relation als gültig (belegt) gilt.

- Relatoren mit 3+ (in 3 von 4 Welten gültig): $X\ R^{3+}\ Y$ oder $R^{3+}(X, Y)$
  $X \vee Y$, $X \leftarrow Y$, $X \mid Y$. Hier erfolgt die Berechnung wie bei $X \rightarrow Y$.

$$p^T[p(X\ R^{3+}\ Y) = r/n] = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$$

Beispiel: $p^T[p(X \vee Y) = 4/5] = 405/1024 = 0{,}396$

- Relatoren mit 2+ (in 2 von 4 Welten positiv) : $X\ R^{2+}\ Y$
  $X \leftrightarrow Y$, $X >< Y$, aber auch $X \rfloor Y$, $X \lfloor Y$, $X \rceil Y$, $X \lceil Y$

$$p^T[p(X\ R^{2+}\ Y) = r/n] = \binom{n}{r}(2/4)^r(2/4)^{n-r}$$

Beispiel: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 4/5] = 160/1024 = 5/32 = 0{,}156$

Anstatt der Quotienten 3/4 und 1/4 stehen hier also zweimal 2/4. Anstatt 2/4 könnte man natürlich auch 1/2 einsetzen, aber wegen der *Parallelität* der Formeln ziehe ich 2/4 vor.

Die theoretische Wahrscheinlichkeit dieser Relatoren ist somit gleich der *Positiv-Implikation*, es gilt z. B.: $p^T[X \leftrightarrow Y] = p^T[X *\!\rightarrow Y]$ bzw. quantitativ:

$$p^T[p(X \leftrightarrow Y) = r/n] = p^T[p(X *\!\rightarrow Y) = r/n]$$

- Relatoren mit 1+ (in 1 von 4 Welten positiv): $X\ R^{1+}\ Y$
  $X \wedge Y$, $X \nabla Y$, $X -\!< Y$, $X >\!- Y$

$$p^T[p(X\ R^{1+}\ Y) = r/n] = \binom{n}{r}(1/4)^r(3/4)^{n-r}$$

Beispiel: $p^T[p(X \wedge Y) = 4/5] = 15/1024 = 0{,}015$

Hier werden die *Quotienten* 1/4 und 3/4 im Vergleich zur ersten Gleichung *vertauscht*, es ergeben sich die gleichen Zahlenwerte, aber quasi vertauscht.

Noch eine Anmerkung:
$p^T[p(X) = r/n *\!\rightarrow p(Y) = s/n] = p^T[p(Y) = s/n]$, weil p(X) und p(Y) eben völlig *unabhängig* voneinander sind. Daher kann man nach der Formel für p(X) oder p(Y) berechnen:

$p^T[p(X) = r/n *\!\!\rightarrow p(Y) = s/n] = \binom{n}{r}(2/4)^s(2/4)^{n-s}$

3-3-5 Erweiterungen

Man kann eine *logische Bestimmung der Korrelation* aufbauen.

Die Korrelation zeigt den *Zusammenhang* zwischen Faktoren bzw. Variablen an. Es gibt verschiedene *Korrelations-Koeffizienten* in der *Statistik*. Aber es lässt sich auch direkt aus der Logik eine Bestimmung der Korrelation aufbauen, basierend auf:

der logischen *Äquivalenz* $X \leftrightarrow Y$.

Dabei ist zu bedenken, dass gilt: $X \leftrightarrow Y \Leftrightarrow \neg X \leftrightarrow \neg Y$.

In der *quantitativen Logik* bietet sich natürlich an, den quantitativen Ausdruck zu verwenden. Dabei gilt:

$p(X \leftrightarrow Y) = p(\neg X \leftrightarrow \neg Y)$

Die Korrelation wird aber nicht, wie die *Wahrscheinlichkeit*, mit Werten zwischen 1 und 0 angegeben. Sondern die Korrelation wird immer mit Werten zwischen +1 und –1 angegeben, wobei gilt:

$k = +1$ totale Korrelation (positive Abhängigkeit)
$k = -1$ totaler Gegensatz (negative Abhängigkeit)
$k = 0$ Unabhängigkeit

Aus diesen Überlegungen habe ich folgende Formel entwickelt:

$\text{Korrelation}(X,Y) = 2[p(X \leftrightarrow Y)] - 1$ bzw. kurz: $k(X,Y) = 2[p(X \leftrightarrow Y)] - 1$

Dazu zwei Beispiele :
$p(X \leftrightarrow Y) = 3/4$. Dann gilt: $k(X,Y) = 2 \text{ x } (3/4) - 1 = 6/4 - 1 = 6/4 - 4/4 = 2/4 = 0,5$
$p(X \leftrightarrow Y) = 1$ Dann gilt: $k(X,Y) = (2 \text{ x } 1) - 1 = 2 - 1 = 1$

Man kann die Korrelation auch in *modifizierter* Weise bestimmen, indem man $p(X \leftrightarrow \neg Y)$ mit einbezieht. Dann ergibt sich:

$k(X,Y) = p(X \leftrightarrow Y) - p(X \leftrightarrow \neg Y)$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass gilt: $p(X \leftrightarrow \neg Y) = 1 - p(X \leftrightarrow Y)$

Auch hierzu die zwei Beispiele:
$p(X \leftrightarrow Y) = 3/4$. Dann gilt: $k(X,Y) = 3/4 - 1/4 = 2/4 = 0,5$
$p(X \leftrightarrow Y) = 1$ Dann gilt: $k(X,Y) = 1 - 0 = 1$
Die folgende Tabelle zeigt die wichtigsten Werte:

k(X,Y)	$p(X \leftrightarrow Y)$	$p(X \leftrightarrow \neg Y)$
1	1	0
0,5	0,75	0,25
0	0,5	0,5
- 0,5	0,25	0,75
-1	0	1

Man kann auch für die Korrelation die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T angeben. Dabei sei daran erinnert, dass dazu die *absoluten* Größen bekannt sein müssen.
Ich nehme als Beispiele n = 4 und n = 8.

• n = 4

k(X,Y)	p(X ↔ Y)	p(X ↔ Y)	p^T	p^T (dezimal)
1	1	4/4	1/16	0,06
0,5	0,75	3/4	4/16	0,25
0	0,5	2/4	6/16	0,38
- 0,5	0,25	1/4	4/16	0,25
-1	0	0/4	1/16	0,06

• n = 8

k(X,Y)	p(X ↔ Y)	p(X ↔ Y)	p^T	p^T (dezimal)
1	1	8/8	1/256	≈ 0,00
0,5	0,75	6/8	28/256	0,11
0	0,5	4/8	70/256	0,27
- 0,5	0,25	2/8	28/256	0,11
- 1	0	0/8	1/256	≈ 0,00

Bei n = 8 addieren sich die angegeben Werte von p^T nicht zu 1, weil die Werte p = 7/8, p = 5/8, p = 3/8 und p = 1/8 aus Gründen der Vereinfachung nicht in die Rechnung einbezogen wurden.

Man sieht z. B.:

Bei n = 4: $p^T[k(X,Y) = 0] = 0,38$
Bei n = 8: $p^T[k(X,Y) = 0] = 0,27$

3 – 4 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

3-4-1 Einführung

In der *Aussagen-Logik* kommen wie schon mehrfach erläutert nur 2 Werte vor:

- *bejaht* bzw. *positiv = ja* (ohne Markierung), z. B. $X \wedge Y$
- *negiert* bzw. *negativ = nein* (mit dem Negator $\neg$ als Markierung), z. B. $\neg(X \wedge Y)$.

Da die Aussagen-Logik eben *qualitativ* ist, werden diesen beiden Werten keine Zahlenwerte zugewiesen, aber *implizit* enthalten „ja" und „nein" doch genaue quantitative, numerische Bestimmungen.

Diese aufzuweisen, ist eine Funktion der *quantitativen* bzw. *quantifizierten Aussagen-Logik*. Als Quantifizierung von aussagen-logischen Relationen war bestimmt worden:

- positiv: $X\ R\ Y =_{df} p(X\ R\ Y) = 1$
- negativ: $X \neg R\ Y =_{df} p(X\ R\ Y) = 0$ oder $\neg(X\ R\ Y) =_{df} p(X\ R\ Y) = 0$

Man kann p = 1 auch als *deterministisch positiv* und p = 0 als *deterministisch negativ* (kurz „nullistisch") kennzeichnen.

Am Beispiel der *Konjunktion*

- positiv: $X \wedge Y =_{df} p(X \wedge Y) = 1$
- negativ: $\neg(X \wedge Y) =_{df} p(X \wedge Y) = 0$

Hier geht es nun darum, den Werten der *empirischen* Wahrscheinlichkeit von p = 1 oder p = 0 die entsprechende *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T zuzuweisen.

3-4-2 Implikation

• *Positiver Fall*

$p(X \rightarrow Y) = r/n = 1$

Hier gilt: r = n. Somit gilt: n – r = 0

Für die Formel $p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n] = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$ bedeutet das:

$$p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n = 1] = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^0 = 1 \times (3/4)^r \times 1 = (3/4)^r$$

Da r = n, gilt auch: $(3/4)^r = (3/4)^n$

Beispiel: $p(X \rightarrow Y) = 5/5$

$$p^T[p(X \to Y) = 5/5] = \binom{5}{5}(3/4)^5(1/4)^{5-5} = 1 \times 243/1024 \times 1 = 243/1024 = 0{,}24$$

Quantoren-logisch gesehen wird hier also die allgemeine Formel zur Berechnung des p^T-Wertes eines *All-Satzes* entwickelt und dargeboten, während vorher eher eine beispiel-orientierte Herleitung vollzogen wurde. Zur *quantitativen Quantoren-Logik* und deren Meta-Werten kommen wir aber in 3-5.

$p^T[p(X \to Y) = r/n]$ fällt mit steigendem n, geht gegen 0. Das lässt sich an $p^T[p(X \to Y) = 1]$ besonders gut verdeutlichen.

Zur Veranschaulichung die Werte von n = 1 bis n = 8.

$p(X \to Y)$	$p^T[p(X \to Y)]$		
1/1	3/4	= 0,75	(jeweils auf 2 Stellen gerundet)
2/2	9/16	= 0,56	
3/3	27/64	= 0,42	
4/4	81/256	= 0,32	
5/5	243/1024	= 0,24	
6/6	729/4096	= 0,18	
7/7	2187/16385	= 0,13	
8/8	6561/65536	= 0,10	

• *Negativer Fall*

$p(X \to Y) = r/n = 0$

Hier gilt: r = 0, somit: n – r = n

Gemäß der Formel $p^T[p(X \to Y) = r/n] = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$ ergibt sich dann:

$$p^T[p(X \to Y) = r/n = 0] = \binom{n}{0}(3/4)^0(1/4)^n = 1 \times 1 \times 1/4^n = 1/4^n$$

Auch diese Werte stimmen mit denen überein, die wir bei der quantoren-logischen Analyse herausgefunden haben (vgl. 3-2-2-2).

3-4-3 Positiv-Implikation

• *Positiver Fall*

Für $p(X *\!\to Y) = r/n = 1$ gilt: r = n

Dann ergibt sich:

$$p^T[p(X *\!\to Y) = r/n = 1] = \binom{n}{r}(1/2)^r(1/2)^{n-r} = 1 \times (1/2)^r \times 1 = (1/2)^r$$

Da: r = n, gilt: $(1/2)^r = (1/2)^n$

Beispiel: $p^T[p(X *\rightarrow Y) = 7/7] = 1/128 = 0{,}01$

• Negativer Fall
Für $p(X *\rightarrow Y) = r/n = 0$ gilt: $r = 0$

Dann ergibt sich:

$$p^T[p(X *\rightarrow Y) = r/n = 0] = \binom{n}{r}(1/2)^r (1/2)^{n-r} = 1 \times 1 \times (1/2)^n = (1/2)^n$$

3-4-4 Systematik

Ich beschränke mich hier jeweils auf *positive* Fälle (p = 1).
Dabei gilt: r = n, somit: n – r = 0.

• Relatoren mit 3+ (in 3 von 4 Welten gültig)

$X \vee Y$, $X \leftarrow Y$, $X \mid Y$. Hier erfolgt die Berechnung wie bei $X \rightarrow Y$, z. B. für $X \leftarrow Y$:

$$p^T[p(X \leftarrow Y) = r/n = 1] = \binom{n}{r}(3/4)^r (1/4)^{n-r} = 1 \times (3/4)^r \times 1 = (3/4)^r$$

Beispiel: $p^T[p(X \leftarrow Y) = 5/5] = 243/1024 = 0{,}24$

• Relatoren mit 2+ (in 2 von 4 Welten positiv)

$X \leftrightarrow Y$, $X >< Y$, aber auch $X \rfloor Y$, $X \lfloor Y$, $X \rceil Y$, $X \lceil Y$. Z. B. für $X \leftrightarrow Y$:

$$p^T[p(X \leftrightarrow Y) = r/n = 1] = \binom{n}{r}(2/4)^r (2/4)^{n-r} = 1 \times (2/4)^r \times 1 = (2/4)^r$$

Beispiel: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 5/5] = 32/1024 = 1/32 = 0{,}03$

• Relatoren mit 1+ (in 1 von 4 Welten positiv)

$X \wedge Y$, $X \nabla Y$, $X -< Y$, $X >- Y$, z. B. $X \wedge Y$

$$p^T[p(X \wedge Y) = r/n = 1] = \binom{n}{r}(1/4)^r (3/4)^{n-r} = 1 \times (1/4)^r \times 1 = (1/4)^r$$

Beispiel: $p^T[p(X \wedge Y) = 5/5] = 1/1024 \approx 0{,}00$

3-4-5 Erweiterungen

Wir sind bisher von *2* Variablen, X und Y ausgegangen. Ich möchte jetzt ein Beispiel mit 3 Variablen bringen: aussagen-logisch $X \wedge Y \wedge Z$, Wahrheitsverlauf: + – – – – – – –
Quantifiziert ergibt sich: $p(X \wedge Y \wedge Z) = r/n$

Gemäß der Formel $p^T[p(X \wedge Y \wedge Z) = r/n] = \binom{n}{r}(1/8)^r(7/8)^{n-r}$ ergibt sich:

• *positiv* (p = 1): zur Erinnerung: r = n, n – r = 0

$$p^T[p(X \wedge Y \wedge Z) = r/n = 1] = \binom{n}{r}(1/8)^r(7/8)^0 = 1 \times (1/8)^r \times 1 = (1/8)^r$$

Beispiel:

$$p^T[p(X \wedge Y \wedge Z) = 5/5] = \binom{5}{5}(1/8)^5(7/8)^{5-5} = 1 \times (1/8)^5 \times 1 = (1/8)^5 = 1/32768 \approx 1$$

• *negativ* (p = 0): zur Erinnerung: r = 0, n – r = n

$$p^T[p(X \wedge Y \wedge Z) = r/n = 0] = \binom{n}{0}(1/8)^0(7/8)^n = 1 \times 1 \times (7/8)^n = (7/8)^n$$

Beispiel:

$$p^T[p(X \wedge Y \wedge Z) = 0/5] =$$

$$\binom{5}{0}(1/8)^0(7/8)^5 =$$

$$1 \times 1 \times (7/8)^5 = (7/8)^5 =$$

$$16807/32768 = 0{,}51$$

3 – 5 QUANTITATIVE QUANTOREN-LOGIK

3-5-1 Einführung

In der quantitativen Quantoren-Logik hatte ich den *Quantoren* folgende *empirische Wahrscheinlichkeiten* p zugeordnet:

Alle:	$p = 1$
Alle nicht:	$p = 0$
Einige:	$p > 0$
Einige nicht:	$p < 1$

Es geht jetzt darum, diesen *empirischen Wahrscheinlichkeiten* p jeweils die *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T zuzuordnen.

3-5-2 Implikation

Bei der Verwendung der Implikation $X \to Y$ ergeben sich vor allem folgende 4 Relationen:

Alle	$p(X \to Y) = 1$
Alle nicht	$p(X \to Y) = 0$
Einige	$p(X \to Y) > 0$
Einige nicht	$p(X \to Y) > 1$

Die Formeln für „alle“ und „alle nicht“ wurden schon behandelt, weil sie *aussagenlogischen* Strukturen entsprechen.

- alle: $p^T[p(X \to Y) = r/n = 1] = (3/4)^n$ bzw. $(3/4)^r$
- alle nicht: $p^T[p(X \to Y) = r/n = 0] = (1/4)^n$

Daraus sollen jetzt die Werte für „einige“ und „einige nicht“ hergeleitet werden.

- *einige*: $p(X \to Y) > 0$

Wie beschrieben gilt: $p^T[p(X \to Y) = 0] = 1/4^n$.
Somit gilt: $p^T[p(X \to Y) > 0] = 1 - (1/4)^n = (4^n - 1)/ 4^n$
Denn es muss ja gelten: $p^T[p(X \to Y) = 0] + p^T[p(X \to Y) > 0] = 1$.
Und: $(1/4)^n + (4^n - 1)/4^n = 1$

Dazu muss man sich klarmachen: Wenn $p > 0$, dann werden ja alle Werte außer 0 erfasst. 0 und > 0 bilden also eine *vollständige Disjunktion*, einen *kontradiktorischen* Gegensatz. Und die Wahrscheinlichkeiten einer vollständigen Disjunktion addieren sich zu $p = 1$.

Zur Verdeutlichung noch einmal anders geschrieben: $\frac{1^n}{4^n} + \frac{4^n - 1^n}{4^n} = \frac{1^n}{4^n} + \frac{4^n}{4^n} - \frac{1^n}{4^n} = \frac{4^n}{4^n} = 1$

• *einige nicht*: $p(X \rightarrow Y) < 1$
Wie beschrieben, gilt: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 1] = (3/4)^n$.
Daher: $p^T[p(X \rightarrow Y) < 1] = 1 - (3/4)^n = (4^n - 3^n)/4^n$.
Denn es muss gelten: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 1] + p^T[p(X \rightarrow Y) < 1] = 1$.
Weil wiederum gilt: p = 1 und p < 1 bilden einen *kontradiktorischen* Gegensatz.
Und $(3/4)^n + (4^n - 3^n)/4^n = 1$.

Zur Verdeutlichung noch einmal anders geschrieben: $\frac{3^n}{4^n} + \frac{4^n - 3^n}{4^n} = \frac{3^n}{4^n} + \frac{4^n}{4^n} - \frac{3^n}{4^n} = \frac{4^n}{4^n} = 1$

Es sei daran erinnert, dass folgende *Rechenregeln* gelten:
$(3/4)^n = 3^n/4^n$
$(1/4)^n = 1^n/4^n = 1/4^n$

Beispiel: für n = 5 (alle = 5/5, einige nicht < 5/5)

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 5/5] = (3/4)^5 = 243/1024 = 0,24$. Daraus folgt:

$p^T[p(X \rightarrow Y) < 5/5] = (4^5 - 3^5)/4^5 = (1024 - 243)/1024 = 781/1024 = 0,76$

Die erste Formel besagt also: Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T, dass *alle* X auch Y sind, beträgt (bei n = alle = 5) 0,24.

Die zweite Formel besagt: Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T, dass *nicht alle* X auch Y sind (also *einige* X *nicht* Y sind), beträgt (bei n = alle = 5) 0,76. Und 0,24 + 0,76 = 1.

3-5-3 Positiv-Implikation

Bei der Verwendung der Positiv-Implikation $X *\rightarrow Y$ ergeben sich vor allem folgende 4 Relationen:

Alle	$p(X *\rightarrow Y) = 1$
Alle nicht	$p(X *\rightarrow Y) = 0$
Einige	$p(X *\rightarrow Y) > 0$
Einige nicht	$p(X *\rightarrow Y) > 1$

Die Formeln für „alle" und „alle nicht" wurden schon behandelt, weil sie *aussagenlogischen* Strukturen entsprechen.

• alle: $p^T[p(X *\rightarrow Y) = r/n = 1] = (1/2)^n$
• alle nicht: $p^T[p(X *\rightarrow Y) = r/n = 0] = (1/2)^n$

Es gilt also: $p^T[p(X *\rightarrow Y) = 1] = p^T[p(X *\rightarrow Y) = 0] = (1/2)^n$

Daraus sollen jetzt die Werte für „einige" und „einige nicht" hergeleitet werden.

• *einige*: $p(X *\rightarrow Y) > 0$
Wie beschrieben gilt: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 0] = 1/2^n$.
Somit gilt: $p^T[p(X \rightarrow Y) > 0] = 1 - (1/2)^n = (2^n - 1)/ 2^n$
Denn es muss ja gelten: $p^T[p(X *\rightarrow Y) = 0] + p^T[p(X *\rightarrow Y) > 0] = 1$.
Und: $(1/2)^n + (2^n - 1)/2^n = 1$

Besser verständlich, wenn wie folgt geschrieben: $\frac{1}{2^n} + \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{2^n}{2^n} - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n}{2^n} = 1$

• *einige nicht*: p(X *→ Y) < 1
Wie beschrieben, gilt: p^T[p(X *→ Y) = 1] = $(1/2)^n$.
Daher: p^T[p(X *→ Y) < 1] = 1 – $(1/2)^n$ = $(2^n – 1)/2^n$.
Denn es muss gelten: p^T[p(X *→ Y) = 1] + p^T[p(X *→ Y) < 1] = 1.
Weil wiederum gilt: p = 1 und p < 1 bilden einen kontradiktorischen Gegensatz.
Und: $(1/2)^n + (2^n – 1)/2^n = 1$

Zur Verdeutlichung noch einmal anders geschrieben: $\frac{1}{2^n} + \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$ (vgl. auch oben)

Es zeigt sich also: p^T[p(X *→ Y) > 0] = p^T[p(X *→ Y) < 1]
Und ebenso gilt: p^T[p(X *→ Y) = 0] = p^T[p(X *→ Y) = 1]

Diese Verhältnisse bei der *Positiv-Implikation* weichen stark von den Verhältnissen bei der *normalen* Implikation ab.

3-5-4 Systematik

Wir hatten auf verschiedenen Ebenen 5 unterschiedliche Modelle von All-Sätzen (All-Relationen) und Partikulär-Sätzen (Partikulär-Relationen) vorgestellt und diskutiert. Hier sollen jetzt für die quantitativen Relationen die theoretischen Wahrscheinlichkeiten p^T angegeben werden:

• MODELL 1: IMPLIKATION

			p^T
1. alle F sind G	p(Fx → Gx) = 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$	$(3/4)^n$
2. alle F sind nicht G	p(Fx → Gx) = 0	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$	$(1/4)^n$
3. einige F sind G	p(Fx → Gx) > 0	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$	$(4^n – 1)/4^n$
4. einige F sind nicht G	p(Fx → Gx) < 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$	$(4^n – 3^n)/4^n$

• MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G	p(Fx → Gx) = 1	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$	$(3/4)^n$
2. alle F sind nicht G	p(Fx → ¬Gx) = 1	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$	$(3/4)^n$

3. einige F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) > 0$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$	$(4^n - 1)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow \neg Gx) > 0$	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} > 0$	$(4^n - 1)/4^n$

• MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G	$p(Fx \wedge Gx) = 1$	$\frac{a}{a+b+c+d} = 1$	$(1/4)^n$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) = 1$	$\frac{b}{a+b+c+d} = 1$	$(1/4)^n$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$	$\frac{a}{a+b+c+d} > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$	$\frac{b}{a+b+c+d} > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$

• MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

1. alle F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$	$(3/4)^n$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1$	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$	$(3/4)^n$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$	$\frac{a}{a+b+c+d} > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$	$\frac{b}{a+b+c+d} > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$

• MODELL 5: POSITIV-IMPLIKATION

1. alle F sind G	$p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) = 1$	$\frac{a}{a+b} = 1$	$(1/2)^n$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) = 0$	$\frac{a}{a+b} = 0$	$(1/2)^n$
3. einige F sind G	$p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) > 0$	$\frac{a}{a+b} > 0$	$(2^n - 1)/2^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) < 1$	$\frac{a}{a+b} < 1$	$(2^n - 1)/2^n$

3-5-5 Erweiterungen

1) *Inklusives und exklusives „einige" in unterschiedlicher Formalisierung*

• *mindestens* einige F sind G		p^T
$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$p(Fx \rightarrow Gx) > 0$	$(4^n - 1)/4^n$
$Vx(Fx \wedge Gx)$	$p(Fx \wedge Gx) > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
$Vx(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$	$p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) > 0$	$(2^n - 1)/2^n$

• *genau* einige F sind G		
$\exists x(Fx \rightarrow G)$	$0 < p(Fx \rightarrow G) < 1$	$(4^n - 3^n - 1)/4^n$
$\exists x(Fx \wedge G)$	$0 < p(Fx \wedge G) < 1$	$(4^n - 3^n - 1)/4^n$
$\exists x(Fx \ast\!\!\rightarrow G)$	$0 < p(Fx \ast\!\!\rightarrow G) < 1$	$(2^n - 2)/2^n$

Für „*genau* einige F sind *nicht* G" gelten dieselben Zahlen.

2) *Verhältnis von theoretischer Wahrscheinlichkeit und Informationsgehalt:*

	Theoret. Wahrsch. p^T	Informationsgehalt p^I
• $\Lambda(X \rightarrow Y)$ $p(X \rightarrow Y) = 1$	$(3/4)^n$	$1 - (3/4)^n = (4^n - 3^n)/4^n$
• $\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$ $p(X \rightarrow Y) = 0$	$(1/4)^n$	$1 - (1/4)^n = (4^n - 1)/4^n$
• $V(X \rightarrow Y)$ $p(X \rightarrow Y) > 0$	$(4^n - 1)/4^n$	$1 - (4^n - 1)/4^n = (1/4)^n$
• $V\neg(X \rightarrow Y)$ $p(X \rightarrow Y) < 1$	$(4^n - 3^n)/4^n$	$1 - (4^n - 3^n)/4^n = (3/4)^n$

Zur Erläuterung:

$$1-\frac{3^n}{4^n}=\frac{4^n}{4^n}-\frac{3^n}{4^n}=\frac{4^n-3^n}{4^n} \qquad 1-\frac{1}{4^n}=\frac{4^n}{4^n}-\frac{1}{4^n}=\frac{4^n-1}{4^n}$$

$$1-(\frac{4^n-1}{4^n})=\frac{4^n}{4^n}-\frac{4^n}{4^n}+\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4^n} \qquad 1-(\frac{4^n-3^n}{4^n})=\frac{4^n}{4^n}-\frac{4^n}{4^n}+\frac{3^n}{4^n}=\frac{3^n}{4^n}$$

Somit gilt also:

$$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1] = p^I[p(X \rightarrow Y) < 1] \qquad p^T[p(X \rightarrow Y) = 0] = p^I[p(X \rightarrow Y) > 0]$$

$$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0] = p^I[p(X \rightarrow Y) = 0] \qquad p^T[p(X \rightarrow Y) < 1] = p^I[p(X \rightarrow Y) = 1]$$

4 META-LOGIK ANALYTISCHER RELATIONEN

ÜBERSICHT

4-1 Aussagen-Logik

Hier wird noch einmal das wichtige Thema der *Abgrenzung von synthetischen und analytischen Relationen* aufgegriffen. Diese Abgrenzung wird, am Fall der Implikation, unter verschiedenen Aspekten diskutiert und – durch die neue Heranziehung der *theoretischen Meta-Wahrscheinlichkeit* – weiter präzisiert.

4-2 Quantoren-Logik

Es werden Formeln zur Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit und damit des logischen Ableitungsgrades von *quantoren-logischen Schlüssen* dargestellt. Zur Untermauerung und Veranschaulichung werden diese Formeln immer wieder durch *Wahrheitstafeln* ergänzt.

4-3 Quantitative Logik

Dieser Punkt ist womöglich der schwierigste in dem ganzen Text. Es werden verschiedene *Formeln* zur Berechnung (des Folgegrades) *quantitativer Schlüsse* unterschiedlicher logischer Struktur vorgestellt. Dabei konzentriere ich mich in erster Linie auf die *Positiv-Implikation*. Ein weiterer wesentlicher Punkt ist die Unterscheidung zwischen empirischer und logischer Abhängigkeit.

4-4 Quantitative Aussagen-Logik

Hier werden die Formeln aus 4-3 auf *deterministische* Schlüsse (mit $p = 1$ oder $p = 0$) angewandt. Auch dabei wird die *Positiv-Implikation* wieder gegenüber der *Normal-Implikation* bevorzugt, weil die quantitativen Schlüsse mit der Positiv-Implikation nicht zu solchen Paradoxien führen wie bei der Normal-Implikation.

4-5 Quantitative Quantoren-Logik

Im Rückgriff auf 4-2 wird der Grad der Folgerichtigkeit für quantoren-logische Schlüsse angegeben, bei denen der Quantor *numerisch präzisiert* ist. Es geht also um Schlüsse mit $p = 1$, $p < 1$, $p = 0$ und $p > 0$.

Im Kapitel 3 wurde die *Meta-Logik* für *synthetische* Relationen dargelegt. Dabei definierte ich Meta-Logik primär über *Meta-Werte*, insbesondere über die *theoretische Wahrscheinlichkeit*, die man als *Meta-Wahrscheinlichkeit* verstehen kann.

Diese *theoretische Wahrscheinlichkeit* gibt bei *synthetischen* Relationen an:
– einerseits den *Grad der Tautologie*
– andererseits die Größe oder Sicherheit der *empirischen Abhängigkeit* (Korrelation)

In diesem Kapitel 4 wird nun gleichermaßen die Bedeutung der *Meta-Wahrscheinlichkeit* für *semi-analytische* und *analytische* Relationen, vor allem logische *Schlüsse*, dargelegt; es wird sich zeigen, dass die Meta-Wahrscheinlichkeit hier grundsätzlich die gleichen Funktionen besitzt; sie gibt an:

– den *Grad der Tautologie* (oder Kontradiktion) der Relation.
Vor allem geht es darum, wie die Meta-Wahrscheinlichkeit den Grad einer *logischen Folge* $\Phi \Rightarrow \Psi$ bzw. $\Phi \longrightarrow \Psi$ anzeigt.
– den Grad der logischen bzw. *analytischen Abhängigkeit* zwischen den Komponenten der Relation.

Allerdings besteht hier folgender Unterschied: Bei einer *synthetischen* Relation sind die Relata (bzw. die Variablen) *logisch* von einander *unabhängig*. Die theoretische Wahrscheinlichkeit gibt den Grad der *synthetischen Abhängigkeit* an.

Bei einer *(semi-)analytischen* Relation sind die Relata teilweise oder vollständig *logisch* voneinander *abhängig*. Und die theoretische Wahrscheinlichkeit gibt den Grad dieser *logischen* (bzw. analytischen) *Abhängigkeit* an.

Vor allem in diesem Kapitel 4 werden viele, von mir entwickelte *logisch-mathematische Formeln* zur Berechnung der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T vorgestellt. In erster Linie geht um die Berechnung der p^T von *Schlüssen*, womit der *Grad der Folgerichtigkeit* eines Schlusses angegeben wird. Diese Formeln wurden sorgfältig entwickelt und geprüft, aber es hätte den Rahmen der Arbeit gesprengt, strenge Beweisverfahren für jede Formel vorzulegen.

4 – 1 AUSSAGEN-LOGIK

4-1-1 Einführung

4-1-1-1 DEFINITIONEN

Es wurde bereits genau unterschieden zwischen:

- *analytischen*
- *synthetischen*
- *partiell analytischen*

Relationen bzw. Strukturen oder Sätzen bzw. Aussagen.

Jetzt soll diese wesentliche Unterscheidung noch weiter präzisiert und quantifiziert werden. Warum ich von vielen, lange geprüften Unterscheidungen gerade diese 3-Teilung hier vorziehe, wurde schon in 2-1-1-2 erläutert.

Zunächst fasse ich noch einmal zentrale bisherige Bestimmungen zusammen:

• *analytische Relationen bzw. Strukturen*

Bei diesen Strukturen gilt: „Eine Struktur Φ wird als (partiell) analytisch in Relation zu einer Struktur Ω bestimmt".

In der *klassischen Philosophie* galt als analytisch: Das *Prädikat* ist im *Subjekt* bereits *enthalten*, z. B. „alle Junggesellen sind unverheiratet". Solche sprachlichen, *material-analytischen* Bestimmungen (vgl. Kapitel 0) werden hier aber beiseite gelassen.

Doch man kann entsprechend bestimmen, z. B. bei einer Folge: *Die Konklusion ist in der Prämisse (bzw. den Prämissen) bereits enthalten.* Z. B. $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Y ist ja Bestandteil von $X \wedge Y$. Wenn also die Prämissen $X \wedge Y$ wahr sind, kann man durch *Analyse* der Prämissen bereits die Wahrheit der Konklusion Y beweisen, ohne empirische Prüfung von Y.

Syntaktisch zeigt sich das dadurch, dass *rechts* und *links* vom Relator (z. B. $\Rightarrow$) wenigstens partiell die *gleichen* deskriptiven Zeichen stehen; so steht bei $X \wedge Y \Rightarrow Y$ das Y rechts und links vom Relator $\Rightarrow$.

Logische Folgen $\Rightarrow$ sind die wichtigsten analytischen Strukturen, aber man kann Analyzität für alle Junktoren definieren.

Genauer kann man bei den analytischen Strukturen unterscheiden zwischen *tautologisch* und *kontradiktorisch.*

• *synthetische Relationen bzw. Strukturen*

Hier ist keine *logische* Abhängigkeit vorgegeben, allerdings kann eine empirische Abhängigkeit ausgedrückt werden. Z. B. die Implikation $X \rightarrow Y$: Bei ihr ist Y in keiner Weise schon (logisch) in X enthalten.

Auch *syntaktisch* gilt: Es stehen rechts und links vom Relator nur unterschiedliche Objekt-Zeichen (vgl. $X \rightarrow Y$).

Andererseits ist $X \rightarrow Y$ in der Wahrheits-Tafel so definiert, dass es in 3 von 4 möglichen Welten wahr ist. Man kann also allein durch Kenntnis von $X \rightarrow Y$ konstatieren, dass der Satz mit einer theoretischen Wahrscheinlichkeit von $p^T = 3/4$ wahr ist, ohne Kenntnis der Wahrheit von X und Y.

Daher kann man $X \rightarrow Y$ als *partiell tautologisch* bezeichnen. Es mag ungewöhnlich scheinen, auch *synthetische* Strukturen als *partiell tautologisch* darzustellen, aber nach langen Abwägungen verschiedener Modelle scheint mir das die beste Lösung.

Eventuell könnte man *synthetische*, *partiell-tautologische* Relationen im Sinne der *synthetisch-apriorischen* Aussagen von Kant verstehen.

Ob synthetische Strukturen sogar *vollständig* tautologisch oder vollständig widersprüchlich sein können, ist diskutabel, aber ich halte es letztlich für falsch bzw. nicht sinnvoll – solche synthetischen *streng* tautologischen Relationen würden natürlich noch exakter zum synthetisch-apriorischen Modell passen; dies wird an späterer Stelle weiter diskutiert.

• semi-analytische Relationen bzw. Strukturen

Problematisch einzuordnen sind vor allem die Strukturen, die ich *partiell analytisch* oder *semi-analytisch* genannt habe.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Strukturen einzuordnen
- als eigene (dritte) Kategorie
- bei den analytischen Strukturen
- bei den synthetischen Strukturen, denn man kann *partiell analytische* Strukturen genauso gut *partiell synthetisch* nennen.

Ich werde die semi-analytischen Relationen vorwiegend bei den *analytischen* Strukturen behandeln.

4-1-1-2 THEORETISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT

Als neues Kriterium zur Bestimmung analytischer Relationen verwenden wir jetzt die *theoretische Wahrscheinlichkeit*. Entscheidend ist, dass zur näheren Kennzeichnung *sowohl von analytischen wie synthetischen* Strukturen auf die *theoretische Wahrscheinlichkeit* zurückgegriffen werden kann. Diese gibt an, wie wahrscheinlich eine Struktur ist, allein auf Grund der möglichen Kombinationen (bzw. der möglichen, logischen Welten oder der numerischen Fälle in den logischen Welten).

Ich schreibe die *theoretische* Wahrscheinlichkeit (wie schon eingeführt) ‚p^T', sie nimmt Werte zwischen 0 und 1 an, ebenso wie auch die empirische Wahrscheinlichkeit p.

Man unterscheidet in *Wahrscheinlichkeits*- oder *Modal*-Begriffen:

$p^T = 1$	sicher	notwendig
$p^T = 0$	sicher nicht	unmöglich
$0 < p^T < 1$	(genau) unsicher	(genau) möglich

(„unsicher" reicht von wahrscheinlich bis unwahrscheinlich)

Diese theoretische Wahrscheinlichkeit können wir zugleich als Gradmesser nehmen für die *theoretische Wahrheit*, nämlich die *Tautologie*, deren Werte sind also identisch:

Tautologischer Grad (auch als p^T abzukürzen oder ggf. als w^T für theoretische Wahrheit)

$p^T = 1$	tautologisch
$p^T = 0$	kontradiktorisch
$0 < p^T < 1$	partiell tautologisch

Man könnte allerdings auch umgekehrt einen *Grad der Kontradiktion* p^K einführen. Dessen Werte verhielten sich umgekehrt zu p^T, so dass z. B. die Tautologie einen Kontradiktions-Grad von $p^K = 0$ besitzt. Dessen Werte entsprechen dem *Informations-Grad*.

Beispiele sind:

Tautologie, z. B.: $p^T[(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y] = 4/4 = 1$

Semi-analytisch, z. B.: $p^T[X \longrightarrow X \wedge Y] = 3/4 = 0{,}75$
$p^T[(X \vee Y) \longrightarrow (X \wedge Y)] = 2/4 = 0{,}5$
$p^T[(X \vee Y) \longrightarrow (X \nabla Y)] = 1/4 = 0{,}25$

Kontradiktion, z. B.: $p^T[(X {}^+\!\vee^+ \neg X) \not\Rightarrow (X {}^-\!\wedge^- \neg X)] = 0/4 = 0$

Hier ist grundsätzlich noch anzumerken: Relatoren sind *synthetisch* definiert, z. B. der Implikator $\rightarrow$ durch $X \rightarrow Y$. Dabei besitzen sie gemäß ihrer Wahrheitstafel eine bestimmte – *strukturelle* – theoretische Wahrscheinlichkeit, bei $X \rightarrow Y$ gilt z. B.: $p^T[X \rightarrow Y] = 3/4$. Wird dieser Relator nun aber in einer analytischen oder semi-analytischen Relation eingesetzt, so muss die p^T dieser Relation natürlich nicht der strukturellen Wahrscheinlichkeit des Relators entsprechen. Wie die obigen Beispiele zeigen, kann in der Tat aus der Verwendung von $\rightarrow$ jede (hier) mögliche p^T resultieren: 4/4, 3/4, 2/4, 1/4, 0/4.

4-1-1-3 PRÄZISIERUNGEN

Man kann den Bereich von semi-analytischen Relationen weiter präziseren. Wie eben bemerkt, kann man sowohl von *partiell-tautologisch* wie von *partiell kontradiktorisch* sprechen. So bietet sich (bei 2 Variablen) folgende Unterteilung an:

Semi-analytische Relationen:

- *Partiell tautologisch*: wahrscheinlich
  z. B. $X \vee Y \longrightarrow Y$ $p^T = 3/4$ $p^T > 2/4$ $p^T > 0{,}5$
- *Partiell kontradiktorisch*: unwahrscheinlich
  z. B. $X / Y \longrightarrow X \wedge Y$ $p^T = 1/4$ $p^T < 2/4$ $p^T < 0{,}5$
- *Kontingent*: zufällig
  z. B. $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ $p^T = 2/4$ $p^T = 2/4$ $p^T = 0{,}5$

Kontingente Relationen – hier z. B. $p^T = 2/4$ – liegen also zwischen partiell tautologischen und partiell kontradiktorischen Relationen. Ich nenne ich daher auch *‚neutral'*. Man kann allgemeiner bestimmen: l*ogisch neutral* sind Strukturen, deren Wert $p^T = 0{,}5$ beträgt, also *genau mittig* zwischen dem Wert $p^T = 1$ der Tautologie und $p^T = 0$ der Kontradiktion liegt.

Nach den bisher vollzogenen Präzisierungen kann man bestimmen:
analytisch $\Leftrightarrow$ tautologisch $\vee$ kontradiktorisch
semi-analytisch $\Rightarrow$ partiell tautologisch $\vee$ neutral $\vee$ partiell kontradiktorisch
Hier kann man nicht die Äquivalenz verwenden, denn es gilt eben auch:
synthetisch $\Rightarrow$ partiell tautologisch $\vee$ neutral $\vee$ partiell kontradiktorisch
(Natürlich könnte man anstelle des *einschließenden* „oder“ $\vee$ auch das *ausschließende* „oder“ $><$ verwenden, denn es geht hier um ausschließende Bestimmungen.)

4-1-1-4 ÜBERSICHT

Ich gebe nachfolgend eine Übersicht über *synthetische* und *(semi)analytische Relationen*; im analytischen Bereich beschränke ich mich auf Relationen mit der Implikation:

analytische Strukturen	z. B.	p^T (theoret. Wahrscheinlichkeit)	
• streng analytisch			
Tautologie	$X \wedge Y \Rightarrow Y$	$p^T = 4/4$	1,0
Kontradiktion	$X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$	$p^T = 0$	0,0
• partiell analytisch			
semi-tautologisch	$X \vee Y \longrightarrow Y$	$p^T = 3/4$	0,75
logisch neutral	$X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$	$p^T = 2/4$	0,5
semi-kontradiktorisch	$X / Y \longrightarrow X \wedge Y$	$p^T = 1/4$	0,25
synthetische Strukturen			
semi-tautologisch	$X \rightarrow Y$	$p^T = 3/4$	0,75
logisch neutral	$X \leftrightarrow Y$	$p^T = 2/4$	0,5
semi-kontradiktorisch	$X \wedge Y$	$p^T = 1/4$	0,25

Für die *Positiv-Implikation* $X \ast\!\!\rightarrow Y$ gilt: $p^T = 1/2 = 0{,}5$

4-1-1-5 ABGRENZUNGEN

Die theoretische Wahrscheinlichkeit reicht,

- um synthetisch und analytisch abzugrenzen, wenn man sinnvollerweise bei *synthetisch* Tautologien mit $p^T = 1$ und Kontradiktionen mit $p^T = 0$ ausschließt. Dann gilt:
  analytisch: $p^T = 1$ oder $p^T = 0$,
  synthetisch $0 < p^T < 1$.
- um semi-analytisch und analytisch abzugrenzen, mit der gleichen Begründung:
  analytisch: $p^T = 1$ oder $p^T = 0$
  semi-analytisch: $0 < p^T < 1$

Offensichtlich reicht die theoretische Wahrscheinlichkeit aber *nicht*, um *synthetisch* und *semi-analytisch* voneinander abzugrenzen. Außerdem würde man sich auch zusätzliche Kriterien wünschen, um analytisch und semi-analytisch, aber auch um tautologisch und kontradiktorisch abzugrenzen. Dazu waren früher schon mehrfach verschiedene Kriterien genannt worden; diese sollen jetzt beim Thema *Implikation* noch einmal systematisch geprüft werden – dieser Abschnitt wendet sich vor allem an Experten.

4-1-2 Implikation

Wir wollen hier folgende Möglichkeiten der Implikation unterscheiden:

	Beispiele:
• Analytisch / Tautologie (logischer Schluss):	$X \wedge Y \Rightarrow Y$
• Analytisch / Kontradiktion:	$X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$
• Semi-analytisch:	$X \vee Y \longrightarrow Y$
• Synthetisch:	$X \rightarrow Y$

Der *synthetische* Fall $X \rightarrow Y$ gehört zwar nicht in den analytischen Bereich, aber wir ziehen ihn zur Abgrenzung mit heran.

Es sollen nun folgende Kriterien genauer untersucht werden, die geeignet sind, analytische, semi-analytische und synthetische Relationen genauer abzugrenzen. Diese Kriterien sind:

- syntaktische Folge
- Enthaltensein
- Abhängigkeit
- Analyzität

Die meisten folgenden Aussagen gelten nicht nur für die Implikation, sondern auch für andere Relatoren. Aber die *Implikation* spielt eine besondere Rolle in der Logik.

4-1-2-1 SYNTAKTISCHE FOLGE

• synthetisch

Bei einer synthetischen Relation wie $X \rightarrow Y$ stehen *vor* und *hinter* dem Relator $\rightarrow$ nur *unterschiedliche* Objektzeichen, also hier X und Y.

• semi-analytisch

Hier stehen *partiell oder vollständig gleiche* Objekt-Zeichen vor und hinter dem Relator $\longrightarrow$
Partiell gleich: $X \vee Y \longrightarrow Y$, vollständig gleich: $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$

• analytisch-tautologisch

Hier stehen auch *partiell oder vollständig gleiche* Objekt-Zeichen vor und hinter dem Relator
Partiell gleich: $X \Rightarrow X \vee Y$, vollständig gleich: $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$

Allerdings ist der *Schluss auf eine Tautologie* logisch wahr, gleichgültig, was die Prämisse beinhaltet. Z. B. $X \Rightarrow Y \vee \neg Y$. Hier liegt also eine (streng analytische) Tautologie vor, obwohl vor und hinter dem Relator *nur unterschiedliche* Zeichen vorkommen. Ich möchte dies aber als einen Sonderfall verstehen.

• analytisch-kontradiktorisch

$X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$

Die *Kontradiktion* ist insgesamt ein Sonderfall. Wie schon mehrfach beschrieben, ist bei der normalen Implikation nur in *einem* extremen Fall eine Kontradiktion gegeben, wenn aus einer *Tautologie* eine *Kontradiktion* „folgt". Deswegen ist hier das obige Kriterium kaum verwendbar (es können ganz unterschiedliche, ja beliebige Zeichen auftreten).

Man sieht, dieses syntaktische Kriterium ist geeignet, um synthetisch und (semi-)analytisch abzugrenzen, aber innerhalb des analytischen Bereichs nicht. Doch als ein *meta-sprachliches* Kriterium ist es in seiner *ontischen* Verwendbarkeit natürlich prinzipiell begrenzt. Es lässt sich allerdings auch ontologisch interpretieren, wie der nächste Punkt zeigt.

4-1-2-2 ENTHALTENSEIN

Zunächst kann man dabei an ein Enthaltensein entsprechend der *syntaktischen Analyse* denken. Dabei ist bei einer implikativen Relation immer primär die Frage, ob die *Konklusion* (das Nachglied) in der *Prämisse* (dem Vorglied) bereits enthalten ist.

• synthetisch

$X \rightarrow Y$: Hier ist Y (Konklusion) keineswegs in X (Prämisse) enthalten.

• semi-analytisch

$X \vee Y \longrightarrow Y$: Hier ist Konklusion Y *vollständig* in Prämisse $X \vee Y$ enthalten
$X \longrightarrow X \wedge Y$: Hier ist die Konklusion *partiell* in der Prämisse enthalten; denn X ist eben in X enthalten, Y aber nicht.

• analytisch-tautologisch

$X \wedge Y \Rightarrow Y$: Hier ist Y (Konklusion) *vollständig* in $X \wedge Y$ (Prämisse) enthalten
$X \Rightarrow X \vee Y$: Hier ist die Konklusion *partiell* in der Prämisse enthalten.

• analytisch-kontradiktorisch
Bei der Kontradiktion mit der Normal-Implikation ergeben sich wieder die o. g. Schwierigkeiten. Verwendet man die Positiv-Implikation, so kann man sagen:

$X *\not\Rightarrow \neg X$: Hier ist die Konklusion (zunächst) vollständig in der Prämisse enthalten.

$X *\not\Rightarrow \neg X \wedge Y$: Hier ist die Konklusion (zunächst) partiell in der Prämisse enthalten. (allerdings wird sie dann durch die *Negation* logisch *ausgeschlossen*)

Zum ersten sieht man: Zwar ist so wiederum eine Abgrenzung von synthetisch zu (semi-) analytisch möglich, aber nicht zwischen analytisch und semi-analytisch.

Zum zweiten ergibt sich aber noch folgendes Problem:
Wir müssen hier *2* Modelle von – *logischem* – Enthaltensein unterscheiden, bei $\Phi \Rightarrow \Psi$:
1) Φ ist vollständig in Ψ enthalten (Ψ ist partiell in Φ enthalten)
2) Ψ ist vollständig in Φ enthalten (Φ ist partiell in Ψ enthalten)

Das klären wir am besten zunächst anhand einer analytischen Relation, z. B. $X \wedge Y \Rightarrow Y$:

	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	−	+	+
4.	−	+	−

Wir können also 2 Modelle unterscheiden:
1) *Prämisse ist in Konklusion enthalten*
$X \wedge Y$ ist in Y enthalten
- die Menge der Welten, in denen $X \wedge Y$ gültig ist (nur 1 Welt), ist eine Teilmenge der Welten, in denen Y gültig ist (2 Welten)
- Y umfasst $X \wedge Y$ und $\neg X \wedge Y$; denn es gilt: $Y \Leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y)$, also ist $X \wedge Y$ Teil von Y
- die Schnittmenge $X \cap Y$ ist eine Teilmenge von Y: $(X \cap Y) \subset Y$

2) *Konklusion ist in Prämisse enthalten*
Y ist in $X \wedge Y$ enthalten
- syntaktisch: hier ist das Zeichen ‚Y' in der Zeichenkombination ‚$X \wedge Y$' enthalten
- der Informationsgehalt von Y ist im Informationsgehalt von $X \wedge Y$ enthalten
- die Menge der Welten, in denen Y ungültig ist (2 Welten), ist eine Teilmenge der Welten, in denen $X \wedge Y$ ungültig ist (3 Welten)

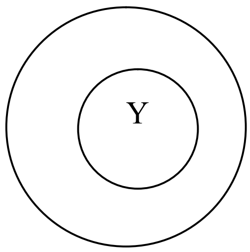
Zusammenfassend ist ein Schluss gültig, wenn:
- der Informationsgehalt der Konklusion (Y) im Informationsgehalt der Prämisse ($X \wedge Y$) enthalten ist.
- die Menge der Welten, in denen die Prämisse ($X \wedge Y$) gültig ist, in der Menge der Welten enthalten ist, in denen die Konklusion (Y) gültig ist.

Noch kurz zur analytischen *Kontradiktion* (unter dem Aspekt möglicher Welten):

Bei $X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$ sind die gültigen und ungültigen Welten völlig disjunkt, denn bei der Tautologie $X \vee \neg X$ gibt es *nur gültige* Welten und bei $X \wedge \neg X$ *nur ungültige* Welten.

• semi-analytisch
Wir nehmen das Beispiel $X \vee Y \longrightarrow Y$

$X \vee Y$



$X \vee Y$	$\longrightarrow$	Y
+	+	+
+	−	−
+	+	+
−	+	−

Hier gilt: Der Informationsgehalt der Konklusion (Y) ist *nicht vollständig* in dem der Prämisse ($X \vee Y$) enthalten, daher ist der Schluss nur semi-analytisch bzw. semi-tautologisch.

Und: Die Menge der gültigen Welten der Konklusion Y ist eine Teilmenge der Menge der gültigen Welten der Prämisse $X \vee Y$. Wir haben also genau umgekehrte Verhältnisse wie bei $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Das ist leicht erklärt: $X \vee Y \longrightarrow Y$ ist eben eine semi-analytische Relation, aber wenn man Prämisse und Konklusion umkehrt, erhält man $X \vee Y \Leftarrow Y$. Und das ist ein *gültiger* Schluss, entsprechend $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Somit gelten bei $X \vee Y \longrightarrow Y$ genau umgekehrte Verhältnisse wie bei $X \vee Y \Leftarrow Y$. (Von daher könnte man die Grafik auch umkehren).

• synthetisch

Man spricht zwar auch bei der Implikation $X \rightarrow Y$ gerne davon, dass *X in Y enthalten* ist. Aber hier muss man vorsichtig sein, es ist nur ein *empirisches* Enthaltensein möglich. *Logisch* darf man bei $X \rightarrow Y$ im Grunde gar nicht von Enthaltensein sprechen.

Zwar könnte man postulieren, dass bei zwei Variablen X, Y gilt: X ist Y und $\neg Y$ enthalten, und Y ist in X und $\neg X$ enthalten; aber dass *alles in allem* enthalten ist, heißt logisch genau so viel, wie dass *nichts in nichts* enthalten ist.

Abschließend hierzu: Der Begriff des „Enthaltensein" leistet einiges zur Abgrenzung von synthetisch, analytisch und semi-analytisch, aber alleine reicht er auch nicht aus, zumal die Mengenlehre für quantitative Teilmengen-Relationen nicht wirklich geeignet ist.

4-1-2-3 BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

Es wurde als These aufgestellt, dass gilt:

Synthetisch:	logisch unabhängig
Semi-analytisch:	partiell abhängig (partiell unabhängig)
Analytisch-tautologisch:	(vollständig) abhängig
Analytisch-kontradiktorisch:	(vollständig) abhängig

Abhängigkeit hängt eng zusammen mit *Enthaltensein*. Wenn X logisch in Y enthalten ist, dann besteht Abhängigkeit. Es lassen sich verschiedene Modelle der Abhängigkeit aufstellen. Auch die theoretische Wahrscheinlichkeit kann dazu dienen, Abhängigkeit quantitativ zu bestimmen. Aber hier kann es zu Problemen kommen.

So gilt: $p^T[X \rightarrow Y] = p^T[X \vee Y \longrightarrow Y] = 3/4$

Das ist aber unbefriedigend, denn dann hätte ja eine *synthetische* Relation den gleichen Abhängigkeits-Wert wie eine *semi-analytische* und könnte so nicht unabhängig sein.

Ich verwende daher die *bedingte Wahrscheinlichkeit*, bei der man *nur die positiven Fälle* berücksichtigt; die bedingte (theoretische) Wahrscheinlichkeit gibt an, wie wahrscheinlich die Konklusion ist, wenn die Prämisse gültig ist. Es geht also nur darum, die Abhängigkeit der Konklusion von der (positiven) Prämisse abzubilden. Man kann diese Wahrscheinlichkeit auch *logische Wahrscheinlichkeit* nennen. Ich schreibe sie formal p^L.

Sie entspricht allerdings der (analytischen) *Positiv-Implikation*, so dass keine neue Theorie eingeführt werden muss. Diese Wahrscheinlichkeit ist aber nur bei implikativen Relationen anzugeben.

• synthetisch

	$X \to Y$
1.	+ + +
2.	+ − −
3.	− + +
4.	− + −

Wenn ich weiß, dass X gültig (+) ist, dann ist Y einmal gültig (+), in der 1. Zeile, und einmal ungültig (–), in der 2. Zeile. Es besteht also eine Wahrscheinlichkeit von $p^T = 1/2$, das Y gültig ist und ebenfalls 1/2, dass es ungültig ist. $p^T = 1/2$ ist aber genau die *Zufallserwartung*, das zeigt die Unabhängigkeit von X und Y. Um zu prüfen, ob Y (bei gültigem X) ebenfalls gültig ist, muss ich empirische Untersuchungen machen.

Dabei kommen alle Kombinationen von X und Y vor: + +, + –, – +, – –.
Die Fälle von negativem X (–) lasse ich hier einmal beiseite, sie führen durch die Definition der Implikation zu irrelevanten Ergebnisse. Die Betrachtung nur der positiven Fälle entspricht der Positiv-Implikation $X *\!\to Y$. $p^T[X \to Y] = 1/2 = 0{,}5$. Ansonsten schreibt man:

$$p^L[X \to Y] = 1/2 = 0{,}5$$

• semi-analytisch
Beispiel wieder: $X \vee Y \longrightarrow Y$
Der Wahrheitsverlauf ist hier gleich wie bei $X \to Y$: + – + +, dennoch ergeben sich ganz andere Verhältnisse. Wenn ich hier weiß, dass $X \vee Y$ gültig (+) ist [1., 2., 3. Zeile], dann ist Y 2x ebenfalls gültig (+), nämlich [1. und 3. Zeile]. Es besteht somit eine Wahrscheinlichkeit von $p^L = 2/3$ (0,67), was deutlich über der Zufallserwartung (0,5) liegt. D. h. man kann rein logisch *partielle* Erkenntnisse über Y gewinnen; um aber genau festzustellen, ob (bei gültigem $X \vee Y$) auch Y gültig ist, muss ich dennoch *empirische* Untersuchungen vornehmen. Genau deshalb nenne ich einen solchen Schluss eben *partiell analytisch*.

Dass $X \vee Y$ und Y nicht logisch unabhängig, sondern partiell abhängig sind, zeigt auch, dass in der Wahrheitstafel *nicht alle* Kombinationen auftreten, nämlich nicht:

$X \vee Y$: – und Y: +. Denn: $\neg(X \vee Y)\ {}^{-}\!\wedge^{-}\ Y$ ist eine Kontradiktion.

Ich schreibe: $p^L[X \vee Y \longrightarrow Y] = 2/3$. Auch dabei kann man alternativ wieder die Positiv-Implikation einsetzen: $p^T[X \vee Y *\!\longrightarrow Y] = 2/3$. Hier besteht also der gewünschte Unterschied zwischen $p^T[X *\!\to Y] = 1/2$ und $p^T[X \vee Y *\!\longrightarrow Y] = 2/3$.

• analytisch

	$X \wedge Y \Rightarrow Y$
1.	+ + +
2.	− + −
3.	− + +
4.	− + −

Im analytischen-tautologischen Fall gilt: Wenn ich weiß, dass $X \wedge Y$ gültig (+) sind, dann weiß ich sicher, dass auch Y gültig (+) ist, denn es gibt nur *eine* Welt, in der $X \wedge Y$ gültig ist, und in der ist Y auch gültig (1. Zeile). Somit ergibt sich für die theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = 1/1 = 1$. (Davon ist unberührt, dass auch die Relation $X \wedge Y \Rightarrow Y$ als ganze eine theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = 4/4 = 1$ besitzt). Man braucht also keine empirischen Untersuchungen, um die Wahrheit von Y zu beweisen. Es genügt, $X \wedge Y$ zu *analysieren*, daher auch der Begriff „*analytische* Relation".

Dass $X \vee Y$ und Y voneinander logisch abhängig sind, zeigt auch, dass in der Wahrheitstafel *nicht alle* Kombinationen auftreten, nämlich nicht: $X \vee Y$: + und Y: –. Denn:

$X \wedge Y \;{}^-\!\wedge^-\; \neg Y$ ist eine Kontradiktion.

Vielmehr kann man sagen, dass Y *vollständig* abhängig von $X \wedge Y$ ist.

Hier gilt: $p^T[X \wedge Y \Rightarrow Y] = p^L[X \wedge Y \Rightarrow Y] = 1$

Zur Kontradiktion: Da gelten bei der normalen Implikation wie gesagt extreme Verhältnisse. Wir wollen sie nicht weiter analysieren.

Ist die logische *Abhängigkeit* eine Möglichkeit, synthetische, semi-analytische und analytische Relationen voneinander abzugrenzen? Die Frage geht noch weiter: Lässt sich ein *quantitatives* Modell der logischen Abhängigkeit verwenden?

Ich habe hier das Modell der *Positiv-Implikation* bzw. der *bedingten Wahrscheinlichkeit* verwendet. Dies bezieht sich primär nur auf implikative Beziehungen (man könnte es aber ggf. modifiziert auch auf andere Relatoren anwenden).

Allerdings gelingt es damit nicht, *synthetische* und *semi-analytische* Strukturen klar voneinander abzugrenzen: synthetische Relationen haben zwar einen Wert von 0,5, aber semi-analytische Relationen können auch diesen Wert aufweisen, z. B.: $p^L[X *\!\rightarrow (X >\!< Y)] = 0{,}5$.

Allgemein kann man für p^L festhalten:

Analytisch-tautologisch: 1
Analytisch-kontradiktorisch: 0
Synthetisch: 0,5
Semi-analytisch: verschiedene Werte möglich, 0,75, 0,5, 0,25.

4-1-2-4 ABHÄNGIGKEIT

Man kann aber auch auf andere Weise logische *Abhängigkeit* bestimmen. Es bleibt nämlich das Problem, dass bei einer *Tautologie* $\Phi \Rightarrow \Psi$ die beiden Relata genauso voneinander abhängig sind wie bei einer *Kontradiktion* $\Phi \nRightarrow \Psi$.

Die theoretische (oder logische) Wahrscheinlichkeit ist dabei nicht geeignet, denn hier gilt:

p^T (Tautologie) = 1, p^T(Kontradiktion) = 0

die semi-analytischen Relationen liegen dazwischen: p^T = 0,75, 0,5, 0,25.

Insofern kann es *keine lineare* Funktion geben. Denn Tautologie und Kontradiktion sind beide vollständig analytisch. Man kann sich das folgendermaßen erklären:
Eine Tautologie gilt für *alle* Welten, also p(Welten) = 1, sie ist deterministisch.
Eine Kontradiktion gilt für *alle* Welten *nicht*, sie ist somit auch deterministisch.

Man kann einen *Grad von logischer Abhängigkeit* konstruieren: p(Abhängigkeit) = p^A. p^A muss für Tautologie und Kontradiktion den Wert 1 besitzen. Für alle anderen Relationen gilt $p^A < 1$. Man kann das wie folgt berechnen: $p^A = |p^T - (1 - p^T)|$. Und zwar gilt:

- Tautologie: $p^A = |1 - 0| = 1$
- Kontradiktion: $p^A = |0 - 1| = 1$
- semi-analytisch:
  z. B. bei $X \vee Y \longrightarrow Y$: $p^A = |0{,}75 - 0{,}25| = 0{,}5$
  zu 3/4 positiv deterministisch, an 4/4 (Tautologie) dran,
  zu 1/4 negativ deterministisch, an Kontradiktion (0/4) dran.
  z. B. bei $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$: $p^A = |0{,}5 - 0{,}5| = 0$
  z. B. bei $X \vee Y \longrightarrow X \nabla Y$: $p^A = |0{,}25 - 0{,}75| = 0{,}5$

Der *quantitative Abhängigkeits-Begriff* p^A ist geeignet, *analytische* und *semi-analytische* Relationen voneinander abzugrenzen. *Synthetische* Relationen muss man allerdings per Definition ausschließen, denn sonst müssten sie alle den Wert $p^A = 0$ besitzen, was sich aber in diesem Modell nicht ergeben würde. Der Vorteil dieses Ansatzes ist vor allem, dass er Tautologie und Kontradiktion *denselben* Wert zumisst (was z. B. bei der theoretischen Wahrscheinlichkeit nicht gegeben ist).

4-1-2-5 SYNTHETISCH, ANALYTISCH, SEMI-ANALYTISCH

Nach diesen Vorklärungen kann man noch einmal präziser bestimmen:

- *synthetische Strukturen*
  - *syntaktisch*: nur unterschiedliche Objekt-Zeichen rechts und links vom Junktor
  - *theoretische Wahrscheinlichkeit*: $0 < p^T < 1$
  - *logische Wahrscheinlichkeit* (bei Implikationen): 0,5
  - *Abhängigkeit*: es besteht keine logische Abhängigkeit, p^A nicht definiert
  - *Enthaltensein*: logisch sind Vorderglied und Nachglied nicht ineinander enthalten

- *analytische Strukturen*
  - *syntaktisch*: rechts und links vom Junktor partiell oder vollständig gleiche Objekt-Zeichen
  - *theoretische Wahrscheinlichkeit*: von $p^T = 1$ bei Tautologien, $p^T = 0$ bei Kontradiktionen
  - *logische Wahrscheinlichkeit* (bei Implikationen): $p^L = 1$ bei Tautologien, $p^L = 0$ bei Kontradiktionen
  - *Abhängigkeit*: es besteht grundsätzlich ein logischer Zusammenhang zwischen den Relata: bei Tautologien und Kontradiktionen gleichermaßen $p^A = 1$
  - *Enthaltensein* (bei Implikationen): die Konklusion ist vollständig in der Prämisse enthalten (ein Ausgeschlossensein bei Kontradiktionen)

- *semi-analytische Strukturen*
  - *syntaktisch*: heißt das, dass rechts und links vom Junktor partiell oder vollständig gleiche Objekt-Zeichen stehen
  - *theoretische Wahrscheinlichkeit*: $0 < p^T < 1$
  - *logische Wahrscheinlichkeit* (bei Implikationen): $0 < p^L < 1$
  - *Abhängigkeit*: es besteht grundsätzlich ein partieller logischer Zusammenhang zwischen den Relata: $p^A < 1$
  - *Enthaltensein*: ein partielles Enthaltensein

Es bleibt abschließend die Frage, ob man auch den Begriff „analytisch" *quantifizieren* kann, ob man einen *Grad von Analyzität* angeben kann. Es scheint mir berechtigt, eine strikte Grenze zwischen synthetisch, semi-analytisch und analytisch andererseits zu ziehen. Es wäre zwar denkbar, hier fließende Übergänge zu postulieren, aber ist m. E. nicht sinnvoll. Man darf sich eben nicht vom Modell eines *Tautologie-Grades* irritieren lassen, der nicht einen Grad von Analyzität angibt.

4-1-3 Positiv-Implikation

4-1-3-1 TAUTOLOGIE

Z. B. *Modus ponens*
Die *vollständige* Wahrheitstafel lautet:

$$\begin{array}{ccccccc}
(X & {*}{\rightarrow} & Y) & \wedge & X & {*}{\Rightarrow} & Y \\
+ & + & + & + & + & + & + \\
+ & - & - & - & + & \square & - \\
- & \square & + & - & - & \square & + \\
- & \square & - & - & - & \square & -
\end{array}$$

Bei der Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T werden aber nur die unter dem Relator $*\Rightarrow$ stehenden + mitgerechnet, nicht das Symbol $\square$ (für *undefiniert*). Somit erfolgt die Berechnung anhand der *verkürzten* Wahrheitstafel (vgl. 1-1-3-2).

$$\begin{array}{ccccccc}
(X & {*}{\rightarrow} & Y) & \wedge & X & {*}{\Rightarrow} & Y \\
+ & + & + & + & + & + & + \\
+ & - & - & - & + & &
\end{array}$$

$$p^T[(X *\rightarrow Y) \wedge X \;\; *\Rightarrow \; Y] = 1/1 = 1$$

Dies entspricht wie beschrieben der *bedingten theoretischen Wahrscheinlichkeit*.

4-1-3-2 KONTRADIKTION

Kontradiktionen sind bei der Positiv-Implikation viel eher möglich als bei der Normal-Implikation.

Kontradiktionen ergeben sich bei:

- Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion: $^+\Phi^+ *\not\Rightarrow {}^-\Psi^-$
- Position $\not\Rightarrow$ Negation: $\Phi *\not\Rightarrow \neg\Phi$, $\neg\Phi *\not\Rightarrow \Phi$
- Relation $*\not\Rightarrow$ (negative) Folge: $\Phi *\not\Rightarrow \neg\Psi$ (wenn gilt $\Phi \Rightarrow \Psi$)

Z. B.:

- $p^T[(X \,^+\!\vee^+ \neg X) \;\; *\not\Rightarrow \;\; (X \,^-\!\wedge^- \neg X] = 0/4 = 0$
- $p^T[(X *\rightarrow Y) \;\; *\not\Rightarrow \;\; \neg(X \;\; *\rightarrow Y)] = 0/1 = 0$
- $p^T[X \;\; *\not\Rightarrow \;\; (X \;\, \nabla \; Y)] = 0/2 = 0$ Denn $p^T[X \;\; *\Rightarrow \;\; \neg(X \;\, \nabla \; Y)] = 2/2 = 1$

4-1-3-3 SEMI-ANALYTISCHE POSITIV-IMPLIKATION

Die semi-analytische Positiv-Implikation wirft einige Probleme auf.

Z. B.

$$\begin{array}{ccccc}
(X & \vee & Y) & {*}{\longrightarrow} & Y \\
+ & + & + & + & + \\
+ & + & - & - & - \\
- & + & + & + & + \\
- & - & - & \square & -
\end{array}$$

Hier gilt also: $p^T[(X \vee Y) \ {*}\!\!\longrightarrow Y] = 2/3$
Im Gegensatz zur herkömmlichen Implikation:
Denn bei der gilt wie schon erläutert: $p^T[(X \vee Y) \longrightarrow Y] = 3/4$

Problematisch ist aber eine semi-analytische Relation wie:

(X	→	Y)	*⟶	(X	*→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	□	+	−	−
−	+	+	?	−	□	+
−	+	−	?	−	□	−

Hier scheint sich ein Wert $p^T = 1/1 = 1$ zu ergeben, und das ist nach der Primär-Deutung der Positiv-Implikation $*\!\!\rightarrow$ falsch, denn danach handelt es sich um eine *semi-analytische* Relation.

Eine vollständig ausgearbeitete Lösung steht noch aus. Vermutlich liegt die Lösung aber darin, dass man für die Berechnung das Symbol ? (für „unbestimmt“) mitrechnen muss, im Gegensatz zu dem Symbol □ (für „undefiniert“). Dann erhält man in diesem Fall folgenden Wert:

$$p^T[p(X \rightarrow Y) \ {*}\!\!\longrightarrow (X *\!\!\rightarrow Y)] = 1/3$$

4-1-3-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

Z. B.:

(X	*→	Y)	*⇔	¬	(X	*→	¬	Y)
+	+	+	+	+	+	+	−	+
+	−	+	□	−	+	−	+	−
−	□	+	□	□	−	□	−	+
−	□	−	□	□	−	□	+	−

$$p^T[(X *\!\!\rightarrow Y) \ {*}\!\!\Leftrightarrow \neg(X *\!\!\rightarrow \neg Y)] = 1/1 = 1$$

Entsprechend gilt:

$$p^T[\neg(X *\!\!\rightarrow Y) \ {*}\!\!\Leftrightarrow (X *\!\!\rightarrow \neg Y)] = 1$$

4-1-3-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

(X	*→	Y)	*⇒	(X	→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	□	+	−	−
−	□	+	□	−	+	+
−	□	−	□	+	+	−

$$p^T[(X *\!\!\rightarrow Y) \ {*}\!\!\Rightarrow (X \rightarrow Y)] = 1$$

Bei s*emi-analytischen* Relationen ergeben sich z. B. folgende quantitative Unterschiede:

	$X \vee Y$	$\longrightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	+	+	+
4.	−	+	−

$p^T[X \vee Y \longrightarrow Y] = 3/4 = 0{,}75$

	$X \vee Y$	$*\!\!\longrightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	+	+	+
4.	−	□	−

$p^T[X \vee Y *\!\!\longrightarrow Y] = 2/3 = 0{,}67$

Kontradiktion. Hier ergeben sich die deutlichsten Unterschiede:

Normale Implikation	p^T	Positiv-Implikation	p^T
$X \longrightarrow \neg X$:	$2/4 = 0{,}5$	$X *\not\Rightarrow \neg X$:	0
$\neg X \longrightarrow X$:	$2/4 = 0{,}5$	$\neg X *\not\Rightarrow X$:	0

4-1-4 Systematik

Anhand ausgesuchter Relatoren, die eine *strukturelle* theoretische Wahrscheinlichkeit von 3/4 (= 0,75), 2/4 (= 0,5) oder 1/4 (= 0,25) haben, sollen *Beispiele* für eine theoretische Wahrscheinlichkeit von $p^T = 1$, $p^T = 0$ und $0 < p^T < 1$ gegeben werden.

4-1-4-1 KONJUNKTION

Tautologie $p^T[(X \vee \neg X) \;{}^{+}\!\wedge^{+} (Y \vee \neg Y)] = 4/4 = 1$

Semi-analytisch $p^T[(X \mid Y) \;{}^{+}\!\wedge^{-} (X \rightarrow Y)] = 2/4 = 0{,}5$

Kontradiktion $p^T[(X \nabla Y) \;{}^{-}\!\wedge^{-} (X >< Y)] = 0/4 = 0$

4-1-4-2 ÄQUIVALENZ

Tautologie $p^T[X \wedge Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)] = 4/4 = 1$

Semi-analytisch $p^T[(X \vee Y) \longleftrightarrow (X \mid Y)] = 3/4 = 0{,}75$

Kontradiktion $p^T[X \wedge Y \not\Leftrightarrow X \mid Y] = 0$

4-1-4-3 REJEKTION
Die Rejektion X ∇ Y steht für „nicht X und nicht Y“.

Tautologie $p^T[(X \wedge \neg X) \,{}^{+}\nabla^{+}\, (Y \wedge \neg Y)] = 4/4 = 1$

Semi-analytisch $p^T[(X \wedge Y) \,{}^{+}\nabla^{-}\, (X \vee Y)] = 1/4 = 0{,}25$

Kontradiktion $p^T[(X \nabla Y) \,{}^{-}\nabla^{-}\, (X \vee Y)] = 0/4 = 0{,}0$

4-1-4-4 REPLIKATION

Tautologie $p^T[(X \rightarrow X) \Leftarrow (X \leftrightarrow Y)] = 4/4 = 1$

Semi-analytisch $p^T[(X \rightarrow Y) \longleftarrow (X \leftarrow Y)] = 3/4 = 0{,}75$

Kontradiktion $p^T[(X \wedge \neg X) \not\Leftarrow (Y \vee \neg Y)] = 0/4 = 0$

4-1-4-5 RELATIONEN MIT MEHR ALS ZWEI VARIABLEN
Bisher habe ich immer 2 Variablen verwendet, jetzt sollen 3 oder 4 Variablen genommen werden X, Y, Z bzw. X, Y, V, W. Die folgenden Werte lassen sich anhand der *Wahrheitstafeln* berechnen, was hier aber nicht ausgeführt werden soll.

• 3 Variablen
$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \;\Rightarrow\; (X \rightarrow Z)] = 8/8 = 1$

$p^T[(X \wedge Y \wedge Z) \;\Rightarrow\; (X \vee Y \vee Z)] = 8/8 = 1$

• 4 Variablen
$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W) \longleftrightarrow (X \wedge Y) \rightarrow (V \wedge W)] = 12/16 = 3/4 = 0{,}75$

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W) \longrightarrow (X \leftarrow Y) \vee (V \leftarrow W)] = 15/16 = 0{,}94$

$p^T[(X \rightarrow Y) \wedge (V \rightarrow W) \;\Rightarrow\; (X \rightarrow Y) \vee (V \rightarrow W)] = 16/16 = 1$

4-1-5 Erweiterungen

Hier soll es um M*odalität* gehen. Die eigentliche, *alethische* Modal-Logik behandelt die Beziehungen zwischen Begriffen bzw. Operatoren wie: *notwendig*, *möglich*, *nicht notwendig*, *nicht möglich* u. ä.

Wie ich schon gezeigt habe, ist die Modal-Logik auf eine *normale* Logik zurückzuführen. Allerdings lässt sich auf der *Aussagen-Logik* ausschließlich eine Modal-Logik aufzubauen, die nur *zwei* Werte unterscheidet: „*notwendig*“ und „*unmöglich*“ (bzw. „notwendig, dass nicht“). Für Einbeziehung von „möglich“ und „möglich, dass nicht“ benötigt man die *Quantoren-Logik* oder eine höhere, *quantitative* Logik, wie sie in diesem Buch vorgestellt wird.

Im vorliegenden Kapitel über Aussagen-Logik beschränke ich mich daher auf die Analyse der Modal-Werte „notwendig“ und „unmöglich“. Dabei kann man die modal-logischen Werte mittels der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T quantifizieren, ja diese quantitativen Werte zur Definition verwenden.

Und zwar gilt folgende Entsprechung:
Notwendig (N) = tautologisch $p^T = 1$ bzw. $w^T = 1$
Unmöglich (U) = kontradiktorisch $p^T = 0$ bzw. $w^T = 1$

Notwendig ist somit eine Relation, die *sicher* ist, deren Gültigkeit 100%ig zu erwarten ist, die andererseits keine Information beinhaltet.
Unmöglich ist eine Relation, die mit 0% zu erwarten ist, deren Ungültigkeit somit sicher ist.

Man kann unterscheiden *absoluter* und *relativer* Modalität.
Absolut: eine logische Relation ist *für sich* tautologisch bzw. kontradiktorisch
Relativ: eine logische Relation (bzw. ein logischer Ausdruck) ist *in Beziehung* zu einer anderen Relation tautologisch bzw. kontradiktorisch, konkret sie ist *logische Folge* oder kontradiktorische „Folge" der anderen Relation.

- *Notwendigkeit* (Tautologie)
  - absolut
    z. B.: $X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$ Notwendig($X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$) $p^T[X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X] = 1$
    Hier kann man auch nur schreiben 'Notwendig($X \vee \neg X$)', denn durch den Modal-Ausdruck „notwendig" wird bereits ausgedrückt, dass eine Tautologie vorliegt.
    Allgemein: notwendig(Φ) $=_{df}$ $p^T[{}^{+}\Phi^{+}] = 1$ oder einfacher $p^T[\Phi] = 1$ (vgl. unten)
  - relativ
    z. B.: $X \wedge Y \Rightarrow Y$ Notwendig($Y, X \wedge Y$) $p^T[Y, X \wedge Y] = 1$
    Hier bietet sich die *Implikation* oder die *Positiv-Implikation* an, z. B.:
    $p^T[X \wedge Y \Rightarrow Y] = 1$
    Allgemein: notwendig(Ψ, Φ) $=_{df}$ $p^T[\Phi \Rightarrow \Psi] = 1$

- *Unmöglichkeit* (Kontradiktion)
  Man kann Unmöglichkeit als „notwendig nicht" oder „nicht möglich" darstellen, aber ich verwende hier zur Einfachheit keinen abgeleiteten Begriff.
  - absolut
    z. B. $X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ Unmöglich($X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$) $p^T[X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X] = 0$
    Allgemein: unmöglich(Φ) $=_{df}$ $p^T[{}^{-}\Phi^{-}] = 0$
  - relativ
    z. B.: $(X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$
    Unmöglich[$(X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X), (X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X)$] $p^T[(X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X), (X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X)] = 0$
    z. B. $p^T[(X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)] = 0$

Die Bestimmung des *relativen* „Unmöglich" mittels der normalen Implikation ist nicht sehr überzeugend, denn $X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ ist ja bereits *absolut* unmöglich (weil kontradiktorisch), es ist wenig informativ, dass es zusätzlich auch noch *relativ* unmöglich ist. Verwendet man aber die *Positiv-Implikation*, ergibt sich ein anderes Bild. Man bestimmt nämlich „Unmöglich(Ψ)" über (Φ *$\Rightarrow \neg\Psi$) bzw. (Φ *$\not\Rightarrow \Psi$). Somit: Unmöglich(Ψ, Φ) $=_{df}$ Φ *$\not\Rightarrow \Psi$

Mit Verwendung von p^T: Unmöglich(Ψ, Φ) $=_{df}$ $p^T[\Phi$ *$\not\Rightarrow \Psi] = 0$

z. B. : *Unmöglich(Y, (X *$\rightarrow \neg Y) \wedge X$) $\Leftrightarrow$ ((X *$\rightarrow \neg Y) \wedge X$) *$\not\Rightarrow Y$

mit p^T: *Unmöglich(Y, (X *$\rightarrow \neg Y) \wedge X$) $\Leftrightarrow$ $p^T[((X$ *$\rightarrow \neg Y) \wedge X)$ *$\not\Rightarrow Y] = 0$

4 – 2 QUANTOREN- UND PRÄDIKATEN-LOGIK

4-2-1 Einführung

Ich will in 4-2, wie schon manchmal zuletzt und auch zukünftig, partiell auf eine *numerische Differenzierung* der *Unterkapitel* (z. B. in 4-2-1-1- bis 4-2-1-5) verzichten, wenn der Inhalt es nicht erforderlich macht, weil der Text nicht zu sehr ausgedehnt werden soll.

4-2-2 Implikation

4-2-2-1 EINFACHE TAUTOLOGIEN

Einfache Relationen sind solche, in denen – grammatisch gesprochen – nur *eine* Prädikat-Variable vorkommt, z. B. Fx mit der Prädikatvariable ‚F'.

Generell gilt für die tautologische Implikation: $p^T[\Phi \Rightarrow \Psi] = 1$.

Ich nehme hier das Beispiel des *Schlusses* von „alle": Λ auf „einige": V.

• *Quantoren-logisch*: $p^T[\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)] = 1$

• *Prädikaten-logisch*: $p^T[(Fx_1 \wedge ... \wedge Fx_n) \Rightarrow (Fx_1 \vee ... \vee Fx_n] = (2/2)^n = 1$

Die *Berechnung von p^T* sei am Beispiel n = 2 (mit x_1, x_2) – mittels der *Wahrheitstafel* – veranschaulicht. Auch bei den folgenden Fällen werde ich die Tabellen-Wahrheitstafel nutzen.

	Fx_1	$\wedge$	Fx_2	$\Rightarrow$	Fx_1	$\vee$	Fx_2
1	+	+	+	+	+	+	+
2	+	–	–	+	+	+	–
3	–	–	+	+	–	+	+
4	–	–	–	+	–	–	–
		1+		4+		3+	

Hier gilt: $p^T[(Fx_1 \wedge Fx_2) \Rightarrow (Fx_1 \vee Fx_2] = (2/2)^n = (2/2)^2 = 4/4 = 1$

4-2-2-2 KOMPLEXE TAUTOLOGIEN

Komplexe Relationen sind solche, in denen, grammatisch gesprochen, mindestens *zwei* Prädikatvariablen vorkommen, z. B. ‚F' und ‚G' (außerdem außen-logische Relatoren wie →).

Ich nehme hier das Beispiel des Schlusses von $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ auf $Vx(Fx \rightarrow Gx)$.

• *Quantoren-logisch*: $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)] = 1$

• *Prädikaten-logisch*:
$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \Rightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)] = (4/4)^n = 1$
Die *Berechnung von* p^T sei wieder am Beispiel n = 2 (mit x_1, x_2) veranschaulicht:

$$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)],\ \textit{für } n = 2 \textit{ (vereinfacht)}$$

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\Rightarrow$	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	**+**	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	**–**	+	–	–	+	+	+	+	+	+	–	–
3	+	+	+	**+**	–	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+
4	+	+	+	**+**	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–
5	+	–	–	**–**	+	+	+	+	+	–	–	+	+	+	+
6	+	–	–	**–**	+	–	–	+	+	–	–	–	+	–	–
7	+	–	–	**–**	–	+	+	+	+	–	–	+	–	+	+
8	+	–	–	**–**	–	+	–	+	+	–	–	+	–	+	–
9	–	+	+	**+**	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+
10	–	+	+	**–**	+	–	–	+	–	+	+	+	+	–	–
11	–	+	+	**+**	–	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+
12	–	+	+	**+**	–	+	–	+	–	+	+	+	–	+	–
13	–	+	–	**+**	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+
14	–	+	–	**–**	+	–	–	+	–	+	–	+	+	–	–
15	–	+	–	**+**	–	+	+	+	–	+	–	+	–	+	+
16	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
				9+				16+				15+			

Prädikaten-logisch (konkret bei n = 2)
$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \Rightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = (4/4)^2 = 16/16 = 1$

Quantoren-logisch (generell und konkret bei n = 2)
Hier werden, wie auch bei den folgenden Beispielen, zusätzlich die p^T-Werte für die *synthetischen Teil-Relationen* und für den Schluss mit der *Positiv-Implikation* *⇒ angegeben.
– synthetisch:
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = (3/4)^n = (3/4)^2 = 9/16 = 0{,}56$
$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)] = (4^n - 1)/4^n = (4^2 - 1)/4^2 = 15/16 = 0{,}94$
– analytisch:
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)] = (4/4)^n = (4/4)^2 = 16/16 = 1$
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \ {*\Rightarrow}\ Vx(Fx \rightarrow Gx)] = (3/3)^n = (3/3)^2 = 9/9 = 1$

Die *Dezimal-Werte* sind immer auf *2* (zwei) Stellen nach dem Komma *gerundet*.
Auf die Werte für die *Positiv-Implikation* *⇒ wird gesondert noch näher eingegangen.
Es mag irritieren, dass man z. B. $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$ eine Formel mit ‚n' zuordnet, obwohl ‚n' in dem logischen Ausdruck gar nicht vorkommt. Man muss für Λ(alle) hier n/n einsetzen.

4-2-2-3 SEMI-ANALYTISCH: UMKEHRSCHLUSS

Ich habe eben den *strengen* Schluss „alle ⇒ einige" behandelt. Jetzt geht es um den *Umkehr-Schluss* „einige ⟶ alle", der aber nur *semi-analytisch* gilt.

• *Einfache* Relationen

„Wenn *einige* Objekte x die Eigenschaft F haben, dann haben *alle* x die Eigenschaft F“.

$Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$

Dieser Schluss ist nicht kontradiktorisch, aber offensichtlich auch nicht streng folgerichtig, daher gilt grundsätzlich die theoretische Wahrscheinlichkeit: $0 < p^T < 1$.

$p^T[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)] > 0 \wedge < 1$

Man kann p^T auch *genauer* berechnen, wenn man – wie schon beschrieben – eine prädikatenlogische Umformung vollzieht: $p^T\ [(Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n)] = 1/2^{n-1}$

Als Beispiel wieder n = 2.

	Fx_1	$\vee$	Fx_2	$\longrightarrow$	Fx_1	$\wedge$	Fx_2
1	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	–	–	+	–	–
3	–	+	+	–	–	–	+
4	–	–	–	+	–	–	–
		3+		2+		1+	

Konkret gilt bei n = 2: $p^T\ [(Fx_1 \vee Fx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2)] = 1/2^{2-1} = 1/2 = 0{,}5$

Die Formel $1/2^{n-1}$ gibt allerdings den *gekürzten* Wert wieder. Wie man an obiger Wahrheitstabelle sieht, ist der reale, ungekürzte Wert $p^T = 2/4$.

• *Komplexe Relationen*

Hier lautet der Umkehrschluss:

Quantoren-Logik: $Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$

Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$

Ich berechne p^T wieder am Beispiel n = 2:

$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$ für n = 2

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\longrightarrow$	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	–	+	–	–
3	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+
4	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–
5	+	–	–	+	+	+	+	–	+	–	–	–	+	+	+
6	+	–	–	–	+	–	–	+	+	–	–	–	+	–	–
7	+	–	–	+	–	+	+	–	+	–	–	–	–	+	+
8	+	–	–	+	–	+	–	–	+	–	–	–	–	+	–
9	–	+	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+
10	–	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	–	+	–	–
11	–	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+
12	–	+	+	+	–	+	–	+	–	+	+	+	–	+	–
13	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+
14	–	+	–	+	+	–	–	–	–	+	–	–	+	–	–
15	–	+	–	+	–	+	+	+	–	+	–	+	–	+	+
16	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
				15+				10+				9+			

Prädikaten-logisch (konkret bei n = 2)

$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] =$

$(3^2 + 1)/ 4^2 = 10/16 = 5/8 = 0{,}63$

Quantoren-logisch (allgemein und konkret bei n = 2)

– synthetisch:

$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)]$	$= (4^n - 1)/4^n$	$= (4^2 - 1)/4^2$	$= 15/16 = 0{,}94$
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$	$= (3/4)^n$	$= (3/4)^2$	$= 9/16 = 0{,}56$

– analytisch:

$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$	$= (3^n + 1)/4^n$	$= (3^2 + 1)/4^2$	$= 10/16 = 0{,}63$
$p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx)\ {*}\!\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$	$= 3^n/(4^n - 1)$	$= 3^2/(4^2 - 1)$	$= 9/15 = 0{,}60$

4-2-2-4 SEMI-ANALYTISCH: EXTRA

Hier geht es wiederum um den Schluss von „alle“ auf „einige“, aber in einer anderen, nämlich der allgemein verbreiteten Formalisierung, mit der *Konjunktion* beim *Partikulär*-Satz:

Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$

Es wurde schon gezeigt, dass hier *kein strenger Schluss* vorliegt. Somit gilt:

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] > 0 \wedge < 1$

Prädikaten-Logik:

$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$

Auch hier soll p^T wieder am Beispiel n = 2 hergeleitet werden:

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)]$ für n = 2

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\longrightarrow$	Fx_1	$\wedge$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\wedge$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	−	+	−	−	+	+	+	+	+	+	−	−
3	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+
4	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	−	−
5	+	−	−	−	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+
6	+	−	−	−	+	−	−	+	+	−	−	−	+	−	−
7	+	−	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−	−	+
8	+	−	−	−	−	+	−	+	+	−	−	−	−	−	−
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	−	+	+	+	+	+
10	−	+	+	−	+	−	−	+	−	−	+	−	+	−	−
11	−	+	+	+	−	+	+	−	−	−	+	−	−	−	+
12	−	+	+	+	−	+	−	−	−	−	+	−	−	−	−
13	−	+	−	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+
14	−	+	−	−	+	−	−	+	−	−	−	−	+	−	−
15	−	+	−	+	−	+	+	−	−	−	−	−	−	−	+
16	−	+	−	+	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−
				9+				12+				7+			

Prädikaten-logisch (konkret für n = 2):
$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2)] = (4^2 - 2^2)/4^2 = 12/16$

Quantoren-logisch (allgemein und konkret bei n = 2):

– *Synthetisch*

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)]$	$= (3/4)^n$	$= (3/4)^2$	= 9/16	= 0,56
$p^T[Vx(Fx \wedge Gx)]$	$= (4^n - 3^n)/4^n$	$= (4^2 - 3^2)/4^2$	= 7/16	= 0,44

– *Analytisch*

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)]$	$= (4^n - 2^n)/4^n$	$= (4^2 - 2^2)/4^2$	= 12/16	= 0,75
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\!\!\longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)]$	$= (3^n - 2^n)/3^n$	$= (3^2 - 2^2)/3^2$	= 5/9	= 0,56

Dieser Fall ist besonders interessant. Denn in der hier gezeigten Weise werden *All-Sätze* und *Existenz-Sätze* meistens formalisiert; es geht um das Modell 4 (vgl. 1-2-3-4 u. a.)

Es zeigt sich, dass bei dieser Formalisierung aus „alle F sind G“ nicht sicher folgt „einige F sind G“, obwohl dies i. allg. als sichere Folge, als gültiger Schluss gilt.

Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit dieses Schlusses hoch: Schon bei n = 2 ist $p^T = 0{,}75$ und *steigt* mit steigendem n:

bei n = 3	$p^T = 56/64 = 0{,}88$
bei n = 4:	$p^T = 240/256 = 0{,}94$
bei n = 5	$p^T = 992/1024 = 0{,}97$
bei n = 6	$p^T = 4032/4094 = 0{,}98$
bei n = 7	$p^T = 16256/16384 = 0{,}99$

4-2-2-5 KONTRADIKTION

Auf die komplizierte Situation der *Kontradiktion* bei der Implikation bin ich schon ausführlich eingegangen. Hier gilt ausschließlich: Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion. Natürlich gilt dies auch für die Quantoren-Logik, z. B.:

$$p^T[\Lambda x(Fx \vee \neg Fx) \not\Rightarrow Vx(Fx \wedge \neg Fx)] = 0$$

4-2-3 Positiv-Implikation

4-2-3-1 TAUTOLOGIE

Es wurden oben schon Beispiele für Berechnungen der p^T bei der *Positiv-Implikation* gebracht, im Vergleich zum Wert der *normalen* Implikation.

Wählen wir auch hier das Beispiel: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\!\!\Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$

In *prädikaten-logischer* Formalisierung:

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) *\!\!\Rightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee ... \vee (Fx_n \rightarrow Gx_n)$$

Berechnen wir als Beispiel wieder *prädikaten-logisch* n = 2.

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) *\!\!\Rightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2)$$

Bei der Positiv-Implikation werden nur die Welten berücksichtigt, in denen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ *gültig* (+) ist.

Konkret werden also nur die *Welten* bzw. Zeilen berücksichtigt, bei denen in der Wahrheitstafel unter dem $\wedge$ das Zeichen + steht. Bei den anderen Welten wird das Feld unter dem $*\!\!\Rightarrow$ leergelassen (man könnte auch □ für „nicht definiert“ hinschreiben).

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \ {*}{\Rightarrow}\ Vx(Fx \rightarrow Gx)]$ für $n = 2$

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$*\Rightarrow$	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	−	+	−	−		+	+	+	+	+	−	−
3	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+
4	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−
5	+	−	−	−	+	+	+		+	−	−	+	+	+	+
6	+	−	−	−	+	−	−		+	−	−	−	+	−	−
7	+	−	−	−	−	+	+		+	−	−	+	−	+	+
8	+	−	−	−	−	+	−		+	−	−	+	−	+	−
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+
10	−	+	+	−	+	−	−		−	+	+	+	+	−	−
11	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+
12	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−
13	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+
14	−	+	−	−	+	−	−		−	+	−	+	+	−	−
15	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+
16	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
				9+				9+				15+			

Prädikaten-logisch (konkret für n = 2):
$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \ {*}{\Rightarrow}\ (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] = (3/3)^2 = 9/9 = 1$

Quantoren-logisch (allgemein):
$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \ {*}{\Rightarrow}\ Vx(Fx \rightarrow Gx)] = (3/3)^n = 1$

4-2-3-2 TAUTOLOGIE EXTRA

Im obigen Fall habe ich *nur* als *Zentral-Relator* die *Positiv-Implikation* verwendet. Man könnte sie aber auch *in jedem Fall* verwenden (= *strikte* Positiv-Implikation). Dann folgt:

- *Quantoren-logisch*: $\Lambda x(Fx \ {*}{\rightarrow}\ Gx) \ {*}{\Rightarrow}\ Vx(Fx \ {*}{\rightarrow}\ Gx)$
- *Prädikaten-logisch*:

$(Fx_1 \ {*}{\rightarrow}\ Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \ {*}{\rightarrow}\ Gx_n) \ {*}{\Rightarrow}\ (Fx_1 \ {*}{\rightarrow}\ Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n \ {*}{\rightarrow}\ Gx_n)$

Berechnet man wieder n = 2, dann bleibt in der Tabelle nur *ein einziger* Fall übrig.
In der folgenden Tabelle gebe ich auch nur diesen Fall an, alle *negativen* werden gestrichen.

	Fx_1	$*\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$*\rightarrow$	Gx_2	$*\Rightarrow$	Fx_1	$*\rightarrow$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$*\rightarrow$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Alle anderen Möglichkeiten fallen heraus, weil gilt:
Fx_1 ist ungültig oder Fx_2 ist ungültig oder $(Fx_1 \ {*}{\rightarrow}\ Gx_1) \wedge (Fx_2 \ {*}{\rightarrow}\ Gx_2)$ ist ungültig, also:

$\neg(Fx_1) \vee \neg(Fx_2) \vee \neg[(Fx_1 \ {*}{\rightarrow}\ Gx_1) \wedge (Fx_2 \ {*}{\rightarrow}\ Gx_2)]$

Daraus folgt für die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T:

- *Prädikaten-logisch* (konkret für n = 2):
  $p^T[(Fx_1 \ {*}{\rightarrow}\ Gx_1) \wedge (Fx_2 \ {*}{\rightarrow}\ Gx_2) \ {*}{\Rightarrow}\ (Fx_1 \ {*}{\rightarrow}\ Gx_1) \vee (Fx_2 \ {*}{\rightarrow}\ Gx_2)] = (1/1)^2 = 1/1 = 1$
- *Quantoren-logisch* (allgemein): $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \ {*}{\Rightarrow}\ Vx(Fx \ {*}{\rightarrow}\ Gx)] = (1/1)^n = 1$

4-2-3-3 SEMI-ANALYTISCHER UMKEHRSCHLUSS

Es geht um den *Umkehrschluss* zu 4-2-3-2, zunächst als generelle, *strikte* Positiv-Implikation.

• Strikte Positiv-Implikation (nur Verwendung der Positiv-Implikation)
Hier lautet der Umkehrschluss:
quantoren-logisch: $\mathrm{V}x(Fx *\!\to Gx) *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx *\!\to Gx)$
prädikaten-logisch:

$$(Fx_1 *\!\to Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n *\!\to Gx_n) \;*\!\longrightarrow\; (Fx_1 *\!\to Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n *\!\to Gx_n)$$

Ich berechne p^T wieder am Beispiel n = 2:

	Fx_1	$*\to$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$*\to$	Gx_2	$*\longrightarrow$	Fx_1	$*\to$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$*\to$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	−	+	−	−
5	+	−	−	+	+	+	+	−	+	−	−	−	+	+	+
				3+				1+				1+			

Prädikaten-logisch (konkret für n = 2):

$$p^T[(Fx_1 *\!\to Gx_1) \vee (Fx_2 *\!\to Gx_2) *\!\longrightarrow (Fx_1 *\!\to Gx_2) \wedge (Fx_n *\!\to Gx_2)] =$$
$$1/(2^2 - 1) = 1/(4 - 1) = 1/3$$

Quantoren-logisch (allgemein): $p^T[\mathrm{V}x(Fx *\!\to Gx) *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx *\!\to Gx)] = 1/(2^n - 1)$

• partielle Positiv-Implikation (Positiv-Implikation nur als *Zentral-Relator*)
Hier lautet der Umkehrschluss wie folgt:
Quantoren-logisch: $\mathrm{V}x(Fx \to Gx) *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$
Prädikaten-logisch:
$(Fx_1 \to Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n \to Gx_n) *\!\longrightarrow (Fx_1 \to Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \to Gx_n)$

$p^T[\mathrm{V}x(Fx \to Gx) *\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)]$ für n = 2

	Fx_1	$\to$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\to$	Gx_2	$*\longrightarrow$	Fx_1	$\to$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\to$	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	−	+	−	−
3	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+
4	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−
5	+	−	−	+	+	+	+	−	+	−	−	−	+	+	+
6	+	−	−	−	+	−	−	□	+	−	−	−	+	−	−
7	+	−	−	+	−	+	+	−	+	−	−	−	−	+	+
8	+	−	−	+	−	+	−	−	+	−	−	−	−	+	−
9	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+
10	−	+	+	+	+	−	−	−	−	+	+	−	+	−	−
11	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+	+
12	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−
13	−	+	−	+	+	+	+	+	−	+	−	+	+	+	+
14	−	+	−	+	+	−	−	−	−	+	−	−	+	−	−
15	−	+	−	+	−	+	+	+	−	+	−	+	−	+	+
16	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
				15+				9+				9+			

Hier steht nur *ein* – unter dem ∨, und zwar in der 6. Zeile, die daher als *nicht definiert* (□) gilt. So ergibt sich ein Resultat, das dem bei der *normalen Implikation* sehr ähnlich ist:
dort ist $p^T = 10/16$, hier ist $p^T = 9/15$.

Prädikaten-logisch (konkret für n = 2):

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \vee (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \ {*}\!\!\longrightarrow (Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2)] =$$
$$3^2/(4^2 - 1) = 9/(16 - 1) = 9/15 = 0{,}6$$

Quantoren-logisch (allgemein): $p^T[Vx(Fx \rightarrow Gx) \ {*}\!\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = 3^n/(4^n - 1)$

4-2-3-4 SEMI-ANALYTISCH EXTRA

Hier wird wieder die *gebräuchlichste Formalisierung* für den Schluss von „alle“ auf „einige“ verwendet, mit der *Konjunktion* beim Partikulär-Satz $Vx(Fx \wedge Gx)$:

Quantoren-logisch: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \ {*}\!\!\longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$

Prädikaten-logisch:

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \ {*}\!\!\longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee \ldots \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$$

Berechnung der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T bzw. des *Grades der logischen Folge* wiederum am Beispiel n = 2. Ich lösche alle *nicht definierten* Zeilen bzw. Relationen.

$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \ {*}\!\!\longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)]$ für n = 2

	Fx_1	→	Gx_1	∧	Fx_2	→	Gx_2	*⟶	Fx_1	∧	Gx_1	∨	Fx_2	∧	Gx_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2															
3	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+
4	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+	+	–	–	–
5															
6															
7															
8															
9	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+	+	+	+	+
10															
11	–	+	+	+	–	+	+	–	–	–	+	–	–	–	+
12	–	+	+	+	–	+	–	–	–	–	+	–	–	–	–
13	–	+	–	+	+	+	+	+	–	–	–	+	+	+	+
14															
15	–	+	–	+	–	+	+	–	–	–	–	–	–	–	+
16	–	+	–	+	–	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–
				9+				5+				5+			

prädikaten-logisch (konkret für n = 2):

$$p^T[(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \ {*}\!\!\longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2)]$$
$$= (3^2 - 2^2)/3^2 = (9 - 4)/9 = 5/9 = 0{,}56.$$

quantoren-logisch (allgemein): $p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \ {*}\!\!\longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] = (3^n - 2^n)/3^n$

Wie gesagt gilt für den Schluss von „alle“ auf „einige“:

Erstens, er wird üblicherweise formalisiert als: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$
Zweitens, er gilt als strenger Schluss, also mit $\Rightarrow$.
Aber ich habe gezeigt, dass dieser Schluss mit der *normalen Implikation* nicht gültig ist; und wie sich jetzt zeigt, ist er auch mit der Positiv-Implikation nicht streng gültig. Es handelt sich nur um einen *semi-analytischen* Schluss.

4-2-3-5 KONTRADIKTION
Bei der Kontradiktion ergibt sich immer $p^T = 0$. Bei der *normalen* Implikation gibt es nur *eine* Kontradiktion im extremen Fall: Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion. Bei der *Positiv*-Implikation gibt es dagegen (wie beschrieben) verschiedene Möglichkeiten der Kontradiktion, etwa Position $*\not\Rightarrow$Negation. Daher ist es auch leicht, ein Beispiel zu geben, z. B. der Schluss von „alle" auf „nicht alle".

$$p^T[\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\not\Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = 0$$

4-2-4 Systematik

Es werden hier nur *ausgewählte Beispiele* gebracht, um den Text nicht zu umfangreich zu gestalten. Dabei wird immer die einfachere *quantoren-logische* Form verwendet (anstatt der *prädikaten-logischen* Form).
Und es sei daran erinnert, dass gilt: Λ(alle) = n/n. „Alle" kann also sein:
1/1 (einer von einem), 2/2 (zwei von zwei), 3/3 (drei von drei), 4/4, 5/5, 6/6, 7/7 usw. usw.

4-2-4-1 EINFACHE TAUTOLOGIE
$p^T = (2/2)^n = 1$

- $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$
- $\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$

- $\neg Vx\neg(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda\neg(Fx)$
- $\neg Vx(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda(Fx)$

4-2-4-2 KOMPLEXE TAUTOLOGIE
$p^T = (4/4)^n$

- $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$
- $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow \neg Gx)$

- $\neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$
- $\neg Vx\neg(Fx \rightarrow \neg Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow \neg Gx)$

- $\neg Vx(Fx \wedge \neg Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$
- $\neg Vx(Fx \wedge Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \wedge Gx)$

4-2-4-3 EINFACH SEMI-ANALYTISCH
$p^T = 1/2^{n-1}$

- $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$

- $Vx\neg(Fx) \longrightarrow \Lambda x\neg(Fx)$

- $\neg\Lambda x\neg(Fx) \longrightarrow \neg Vx\neg(Fx)$
- $\neg\Lambda(Fx) \longrightarrow \neg Vx(Fx)$

4-2-4-4 KOMPLEX SEMI-ANALYTISCH

$p^T = (3^n + 1)/4^n$

- $Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
- $Vx(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$

- $\neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$
- $\neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow \neg Gx)$

- $\neg\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx) \longrightarrow \neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
- $\neg\Lambda x(Fx \wedge Gx) \longrightarrow \neg Vx(Fx \wedge Gx)$

$p^T = (4^n - 2^n)/4^n$

- $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$
- $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge \neg Gx)$

- $\neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge Gx)$
- $\neg Vx\neg(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge \neg Gx)$

- $\neg Vx(Fx \wedge \neg Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge Gx)$
- $\neg Vx(Fx \wedge Gx) \longrightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx \wedge \neg Gx)$

4-2-4-5 VERGLEICH VON IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLKATION

	Implikation	Positiv-Implikation
• einfach	$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ $p^T = (2/2)^n = 1$	$\Lambda x(Fx)\ {*}{\Rightarrow}\ Vx(Fx)$ $p^T = (1/1)^n = 1$
	$Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$ $p^T = 1/2^{n-1}$	$Vx(Fx)\ {*}{\longrightarrow}\ \Lambda x(Fx)$ $p^T = 1/(2^n - 1)$
• komplex	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$ $p^T = (4/4)^n = 1$	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)\ {*}{\Rightarrow}\ Vx(Fx \rightarrow Gx)$ $p^T = (3/3)^n = 1$
	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ $p^T = (4^n - 2^n)/4^n$	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)\ {*}{\longrightarrow}\ Vx(Fx \wedge Gx)$ $p^T = (3^n - 2^n)/3^n$
	$Vx(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ $p^T = (3^n + 1)/4^n$	$Vx(Fx \rightarrow Gx)\ {*}{\longrightarrow}\ \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ $p^T = 3^n/(4^n - 1)$

4-2-5 Erweiterungen

4-2-5-1 INKLUSIVE MODAL-LOGIK

Ich habe schon mehrfach auf die Verbindungen von *Quantoren-Logik* und *Modal-Logik* hingewiesen. Es lassen sich entsprechend auch Verbindungen zur *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T herstellen. Und zwar gilt (für eine *inklusive* Modal-Logik):

Quantoren	Modalität	p^T
• alle	notwendig	1
• nicht alle	nicht notwendig	< 1
• einige	möglich	> 0
• nicht einige	nicht möglich	0

Man könnte entsprechend zu p^T einen Wert *p(modal)*: p^M einführen. Dieser gibt dann den *Grad der Modalität* an, am besten sagt man, den *Grad der Notwendigkeit*. Andererseits ist ein solcher zusätzlicher Wert auch verzichtbar, denn offensichtlich gilt: $p^M = p^T$

Z. B. $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$.

Dieser Schluss ist, wie ausführlich erläutert, nicht notwendig (nicht tautologisch) und nicht unmöglich (nicht kontradiktorisch). Man kann ihn aber in Abhängigkeit von *n* genauer bestimmen.

Ich hatte gezeigt, das gilt:

quantoren-logisch: $p^T[Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)] = 1/2^{n-1}$ bzw.

prädikaten-logisch: $p^T [(Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n)] = 1/2^{n-1}$

z. B. $p^T [(Fx_1 \vee Fx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2)] = 1/2^{2-1} = 1/2$

Dafür kann man auch sagen: ‚Der *Notwendigkeits-Grad* von $(Fx_1 \vee Fx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2)$ beträgt 1/2'. Oder: ‚$Fx_1 \vee Fx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Fx_2)$ ist zu 50% notwendig'.

Es geht hier nur um eine *logische* (analytische) Bestimmung von Notwendigkeit usw. Man könnte Modal-Begriffe zwar auch *empirisch* begründen, z. B. im Hinblick auf *Kausalität*. Aber auch dann bleibt die logische Bestimmung fundamental.

4-2-5-2 EXKLUSIVE MODAL-LOGIK

Die *exklusive* Modal-Logik bestimmt „möglich" als „*genau* möglich", es schließt somit „notwendig" aus. D. h. konkret: p^T[genau möglich] $< 1 \wedge > 0$. Anders formuliert:

$0 < p^T$[genau möglich] < 1

Wir hatten oben folgenden Schluss vorgeführt:

$p^T[\exists x(Fx \wedge Gx)] \Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)] = (4/4)^n = 1$

Modal-logisch wäre allgemein zu formulieren: Aus „genau möglich" folgt notwendig „möglich", es folgt also mit einem *Notwendigkeits-Grad* von $p^M = 1$.

4-2-5-3 ZEIT

Es wurde schon gezeigt, dass man vor allem die Quantoren-Logik auf die Dimension *Zeit* anwenden kann. Natürlich lässt sich dann auch p^T zuordnen. Allerdings geht es im Unterschied zur Modalität hier erst einmal um die *empirische* Wahrscheinlichkeit p, nicht um die *theoretische* p^T. Dabei gibt es folgende Entsprechungen:

Quantoren	Zeit	p
• alle	immer	1
• nicht alle	nicht immer	< 1
• einige	manchmal	> 0
• nicht einige	nicht manchmal	0

Generell kann man hier z. B. folgende „Zeit-Schlüsse“ aufstellen bzw. folgende Werte von p^T feststellen:

p^T[immer $\Rightarrow$ manchmal] = 1

0 < p^T[nicht immer $\longrightarrow$ manchmal] < 1

Genauer kann man etwa folgendermaßen berechnen:
Es gilt quantoren-logisch: $p^T[\mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)] = (3^n + 1)/ 4^n$

Man kann *zeit-logisch* umformulieren: $p^T[\mathrm{V}t(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow \Lambda t(Fx \rightarrow Gx)] = (3^n + 1)/ 4^n$
Soll heißen: Wenn für *einige* Zeitpunkte (t) gilt: $Fx \rightarrow Gx$, dann gilt auch für *alle* Zeitpunkte (t): $Fx \rightarrow Gx$ mit der Wahrscheinlichkeit $(3^n + 1)/ 4^n$.
Angenommen, alle Zeitpunkte sind n = 10, dann ist $p^T = (3^{10} + 1)/ 4^{10}$

4-2-5-4 RAUM

Bei der Dimension *Raum* ergeben sich im Grunde dieselben Verhältnisse wie bei der Dimension *Zeit*:

Quantoren	Raum	p
• alle	überall	1
• nicht alle	nicht überall	< 1
• einige	mancherorts	> 0
• nicht einige	nirgends	0

Hier gilt „raum-logisch“ z. B.:

p^T[überall $\Rightarrow$ mancherorts] = 1

p^T[nirgends $\Rightarrow$ nicht überall] = 1

4-2-5-5 KAUSALITÄT

Auch *kausal* kann man ähnliche Strukturen aufweisen:
Eine (vollständige) Ursache enthält *alle* Kausalfaktoren.
Eine Teil-Ursache enthält (mindestens) *einige* Kausalfaktoren.
Dann gilt z. B.

p^T[Ursache $\Rightarrow$ Teilursache] = 1

Oder etwas ausführlicher:

p^T[Φ ist Ursache von Ψ $\Rightarrow$ Φ ist (mindestens) Teilursache vonΨ] = 1

Auf *synthetisch-logische* Strukturen der Kausalität wurde bereits eingegangen.

4 – 3 QUANTITATIVE LOGIK

4-3-1 Einführung

Ich werde mich in diesem Unter-Kapitel 4-3 vorwiegend mit *Schlüssen* beschäftigen, mit dem *Grad ihrer Folgerichtigkeit*, und zwar primär unter Verwendung der *Positiv-Implikation*.
Bei der Berechnung der *theoretischen Wahrscheinlichkeit* p^T eines Schlusses sind verschiedene Fälle zu unterscheiden:
Ich erläutere das am Beispiel des *semi-analytischen* Schlusses $p(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = r/n$.
Betrachten wir zunächst die *aussagen-logische*, qualitative Struktur des Schlusses, nämlich:

X	∨	Y	⟶	X	∧	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	+	–	–	+	–	–
–	+	+	–	–	–	+
–	–	–	+	–	–	–

Strukturell hat $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ eine *theoretische* Wahrscheinlichkeit $p^T = 2/4 = 1/2 = 0,5$.
Die *Implikation* $X \rightarrow Y$ bzw. $\Phi \rightarrow \Psi$ besitzt zwar grundsätzlich eine theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = 3/4$, aber bei einer (semi-)analytischen Relation kann sich das eben ändern, wenn für Φ und Ψ *komplexe* Relationen wie hier $X \vee Y$ und $X \wedge Y$ eingesetzt werden.
Man kann verschiedene Formen bzw. Varianten eines solchen Schlusses unterscheiden:

- $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ + – – + $p^T = 2/4$
- $(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) \longrightarrow (X \wedge Y)$ + + + – $p^T = 3/4$
- $(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) \wedge (X \vee Y)$ + – – – $p^T = 1/4$
- $[(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) \wedge (X \vee Y)] \Rightarrow (X \wedge Y)$ + + + + $p^T = 4/4$

Wir werden nun die entsprechenden *quantitativen* Formen dieses Schlusses untersuchen, insbesondere auf ihre theoretische Wahrscheinlichkeit; quantitativ ergibt sich allerdings eine *zusätzliche* Möglichkeit, weil den *Einzel-Komponenten* unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten zugewiesen werden können.

- Gesamt-Relation:
  $p(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = r/n$
- Einzel-Komponenten:
  $p(X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$
- Zusätzlicher Schluss auf Konklusion
  $(p(X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n) \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$
- Bestätigung der Prämisse:
  $p((X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n) \wedge p(X \vee Y) = r/n$
- Modus ponens:
  $(p(X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n) \wedge p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) = s/n$

Natürlich kann man diese Unterscheidungen auch für die *Positiv-Implikation* $*\!\rightarrow$ treffen.

4-3-1-1 BERECHNUNG VON p^T EINER GESAMT-RELATION

Hier wird der Relation *als ganzes* eine *empirische* Wahrscheinlichkeit p zugewiesen, und zwar z. B. p = 1/5. Davon wird dann die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T berechnet. Nun gilt:

$(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) \Leftrightarrow (X \leftrightarrow Y)$, entsprechend

$p((X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = p(X \leftrightarrow Y)$

Daher kann man auch den p^T-Wert von $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ dem Wert der *synthetischen* Ä-quivalenz $X \leftrightarrow Y$ gleichsetzen. Also:

$p^T[X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y] = p^T[X \leftrightarrow Y]$

Quantitativ: $p^T[p(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = 1/5] = p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 1/5]$

Und wie sich p^T-Wert von synthetischen (quantitativen) Relationen berechnen lässt, wurde bereits im Punkt 3-3 beschrieben.

$p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 1/5] = 160/1024 = 5/32 = 0{,}16$

Somit: $p^T[p(X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y) = 1/5] = 160/1024 = 5/32 = 0{,}16$

4-3-1-2 BERECHNUNG VON p^T BEI EINZEL-KOMPONENTEN

Hier werden der Prämisse $X \vee Y$ und der Konklusion $X \wedge Y$ *getrennt* empirische Wahrscheinlichkeiten p zugewiesen. Wählen wir z. B.: $p(X \vee Y) = 2/3$ und $p(X \wedge Y) = 1/3$.

Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T gibt dann an, mit welchem Grad die Konklusion aus der Prämisse logisch folgt, also den *Grad der logischen Folge*. Es ergibt sich als theoretische Wahrscheinlichkeit bzw. als Folge-Grad p^T:

$p^T[p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 49/64 = 0{,}77$

Wie sich diese und die folgenden Resultate berechnen lassen, wird später erläutert.

4-3-1-3 BERECHNUNG VON p^T BEI ZUSÄTZLICHEM SCHLUSS

Hier wird vom Schluss $p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3$ zusätzlich auf die Konklusion $p(X \wedge Y) = 1/3$ geschlossen. Dabei ergibt sich:

$p^T[(p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3) \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 27/64 = 0{,}42$

4-3-1-4 BERECHNUNG VON p^T BEI BESTÄTIGTER PRÄMISSE

Man kann beim Schluss in 4-3-0-2 die Prämisse $p(X \vee Y) = 2/3$ noch *bestätigen*.

$(p(X \vee Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n) \wedge p(X \vee Y) = r/n$

Dies spielt gerade bei der *normalen Implikation* eine Rolle, die ja auch als wahr gilt, wenn die Prämisse falsch ist.

Wir haben es hier also mit einer *Konjunktion* zu tun. Man könnte vielleicht denken, man erhalte hier den p^T-Wert durch *Multiplikation*. Wie wir oben gesehen haben:

$p^T[p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 49/64$, andererseits gilt wiederum:

$p^T[p(X \vee Y) = 2/3] = 27/64$.

Gilt also im Beispiel $p^T = 49/64 \times 27/64 = 1323/4096 = 0{,}32$? Nein, denn man darf Wahrscheinlichkeiten nur *multiplizieren*, wenn die Glieder logisch *unabhängig* sind.

$p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3$ und $p(X \vee Y) = 2/3$ sind aber logisch abhängig.

Die richtige Rechnung lautet vielmehr:

$p^T[p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3 \wedge p(X \vee Y) = 2/3] = 49/64 - 37/64 = 12/64 = 0{,}19$

4-3-1-5 BERECHNUNG VON p^T BEIM MODUS PONENS

Hier wird aus der in 4-3-1-4 genannten Konjunktion auf die Konklusion $p(X \wedge Y) = 1/3$ geschlossen. Damit haben wir insgesamt das logische Gesetz des *Modus ponens* vor uns (wenn auch eben in einer quantitativen Form).

$$p^T[(p(X \vee Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/3) \wedge p(X \vee Y) = 2/3$$
$$\Rightarrow p(X \wedge Y) = 1/3] = 64/64 = 1$$

Wie man sieht, auch in diesem Fall ist der Modus ponens ein *strenges* Gesetz, führt zur einer strengen logischen Folge $\Rightarrow$.

Auf Berechnungen der Form in 4-3-1-2, auf Berechnungen des *Grades einer logischen Folge*, werde ich mich im Weiteren konzentrieren.

4-3-2 Implikation

4-3-2-1 HERLEITUNG DER THEORETISCHEN WAHRSCHEINLICHKEIT

Ich will hier nun herleiten, wie man die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T für die (semi-) analytische *Implikation* berechnen kann. Dazu muss ich etwas ausholen.

Gehen wir von 3 *Individuen* x, y, und z aus (also n = 3) und fragen, wie sie auf 2 *Variablen* F und G verteilt sein können. F und G können als *Eigenschaften* oder auch als *Mengen* interpretiert werden. Es sind 4 Kombinationen von F und G möglich:

F+, G+ / F+, G– / F–, G+ /F–, G–.

Besser schreibt man mittels *Konjunktion* und *Negation*:

$F \wedge G$ / $F \wedge \neg G$ / $\neg F \wedge G$ / $\neg F \wedge \neg G$

Jedes Individuum kann nur *eine* Eigenschaftskombination besitzen bzw. nur Element *einer* Menge sein. Dabei ergeben sich insgesamt $2^6 = 64$ Möglichkeiten.

Der eine Extremfall ist, dass für x, y, z alle nur 1 Kombination gilt, z. B. nur $F \wedge G$, somit:

$Fx \wedge Gx$, $Fy \wedge Gy$, $Fz \wedge Gz$ (auf Indizes verzichte ich hier).

Da es hierfür nur 1 von insgesamt 64 Kombinations-Möglichkeiten gibt, gilt also: $p^T = 1/64$.

Welche Möglichkeiten gibt es, dass für 2 Elemente $F \wedge G$ gilt und für 1 Element $F \wedge \neg G$?

$Fx \wedge Gx$, $Fy \wedge Gy$, $Fz \wedge \neg Gz$
$Fx \wedge Gx$, $Fz \wedge Gz$, $Fy \wedge \neg Gy$
$Fy \wedge Gy$, $Fz \wedge Gz$, $Fx \wedge \neg Gx$

Man kann nun von den speziellen *Verteilungen* abstrahieren und nur sagen, es gibt 3 Fälle, dass für 2 Elemente $F \wedge G$ gilt und für 1 Element $F \wedge \neg G$. Somit $p^T = 3/64$.

Präzise: $p^T[p(F \wedge G) = 2/3 \wedge p(F \wedge \neg G) = 1/3] = 3/64$.

Die genauen Tabellen hierfür bringe ich im Systematik-Teil (vgl. 5-3-2).

So kommt man zu folgender Verteilung. (Da im Folgenden von konkreten *Elementen* x, y, z abgesehen wird und nur die quantitativen Relationen zählen, verwende ich hier jetzt wieder die allgemeineren Variablen X und Y, also für F = X, für G = Y.)

4-3-2-2 TABELLE ZUR VERTEILUNG BEI n = 3

Erläuterung zur folgenden Tabelle (S. 33):

Die *2) Zeile* bedeutet z. B.: Die theoretische Wahrscheinlichkeit dafür, dass 2 (von 3) Individuen die Eigenschaftskombination $X \wedge Y$ zukommt und 1 (von 3) Individuen die Eigenschaftskombination $X \wedge \neg Y$, beträgt 3/64. $p^T[(p(X \wedge Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge \neg Y) = 1/3] = 3/64$

Oder allgemeiner: Die theoretische Wahrscheinlichkeit dafür, dass 2 (von 3) Individuen die Eigenschaftskombination $X \wedge Y$ zukommt, beträgt 9/64. $p^T[(p(X \wedge Y) = 2/3] = 9/64$.

Dies ergibt sich durch Addition der p^T-Werte aus den Zeilen 2), 5) und 6).

	$X \wedge Y$	$X \wedge \neg Y$	$\neg X \wedge Y$	$\neg X \wedge \neg Y$	p^T
	a	b	c	d	
1)	3	0	0	0	1/64
2)	2	1	0	0	3/64
3)	1	2	0	0	3/64
4)	0	3	0	0	1/64
5)	2	0	1	0	3/64
6)	2	0	0	1	3/64
7)	1	1	1	0	6/64
8)	1	1	0	1	6/64
9)	0	2	1	0	3/64
10)	0	2	0	1	3/64
11)	1	0	2	0	3/64
12)	1	0	1	1	6/64
13)	1	0	0	2	3/64
14)	0	1	2	0	3/64
15)	0	1	1	1	6/64
16)	0	1	0	2	3/64
17)	0	0	3	0	1/64
18)	0	0	2	1	3/64
19)	0	0	1	2	3/64
20)	0	0	0	3	1/64
					64/64

Wir wollen nun das analytische Verhältnis von $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$ untersuchen, zunächst als *Konjunktion*, dann als *Implikation*.

4-3-2-3 DIE KONJUNKTION $p(X \rightarrow Y) = r/n \ {}^{+}\!\wedge^{-}\ p(X \wedge Y) = s/n$

Ehe wir uns der semi-analytischen *Implikation* zuwenden, betrachten wir zunächst die semi-analytische *Konjunktion*, weil sich so die Implikation anschließend besser verstehen lässt. Wenden wir also die obige Verteilungs-Tabelle erst einmal auf folgende allgemeine semi-analytische Konjunktion an:

$$p(X \rightarrow Y) = r/n \ {}^{+}\!\wedge^{-}\ p(X \wedge Y) = s/n$$

Dabei ist daran zu erinnern, dass gilt:

$$p(X \rightarrow Y) \geq p(X \wedge Y) \quad \text{bzw.} \quad r \geq s, \text{ entsprechend:}$$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} \geq \frac{a}{a+b+c+d}$$

Wir untersuchen diese Relation für den Fall n = 3.

Z. B.: Wenn $p(X \rightarrow Y) = 2/3$, dann kann $p(X \wedge Y)$ folgende Werte annehmen: 2/3, 1/3, 0/3 (aber nicht 3/3).

Wenden wir nun die obige Tabelle auf diese *Konjunktion* an:

$$p(X \rightarrow Y) = r/3 \ {}^{+}\!\wedge^{-}\ p(X \wedge Y) = s/3$$

Dann erhalten wir für n = 3 die folgende Tabelle:

r	$p(X \rightarrow Y)$	$^{+}\wedge^{-}$	$p(X \wedge Y)$	p^T	Zeile
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a}{a+b+c+d}$		In Tabelle 4-3-1-2
3	3/3		3/3	1/64	1
			2/3	6/64	5, 6
			1/3	12/64	11,12,13
			0/3	8/64	17,18,19,20
2	**2/3**		2/3	3/64	2
			1/3	**12/64**	**7,8**
			0/3	12/64	14,15,16
1	1/3		1/3	3/64	3
			0/3	6/64	9,10
0	0/3		0/3	1/64	4
				64/64	

Erläuterung:
Nehmen wir als Beispiel: $p^T[(p(X \rightarrow Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) = 1/3] = 12/64$
Dies bedeutet in Formeln:

$$p(X \rightarrow Y) = 2/3 \qquad \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 2/3 \qquad \text{somit } b = 1 \qquad a + c + d = 2$$

$$p(X \wedge Y) = 1/3 \qquad \frac{a}{a+b+c+d} = 1/3 \qquad \text{somit } a = 1 \qquad b + c + d = 2$$

(wichtig: p ist immer die reale, *ungekürzte* Häufigkeit, kein gekürzter Wert)
Am *einfachsten* ist also, wie suchen nach Zeilen in der Tabelle, in denen gilt: b = 1 und a = 1.
Hierfür sind zwei Zeilen aus der Tabelle 4-3-2-2 relevant:

	a	b	c	d	p^T
7)	1	1	1	0	6/64
8)	1	1	0	1	6/64

Nur in diesen zwei Zeilen gilt: $(a = 1) \wedge (b = 1)$. Man *addiert* die Wahrscheinlichkeiten p^T aus diesen beiden Zeilen: 6/64 + 6/64 = 12/64 = 3/16 = 0,19.

4-3-2-4 PARTIELLER SCHLUSS $p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3$
Wenden wir nun die obigen Erkenntnisse über die semi-analytische *Konjunktion* auf verschiedene semi-analytische *Schlüsse* an, und zwar auf zwei Varianten des Schlusses.
$p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n.$

Zunächst $p(X \rightarrow Y) = 3/3 = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3 = 1$

Wir formen als erstes, beim *Zentral-Relator*, die *Implikation* in eine *Konjunktion* um, weil sich der Schluss so einfacher berechnen lässt:

$\neg(p(X \rightarrow Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = \neg 3/3)$

Für $\neg 3/3$ schreiben wir $\neq 3/3$, und das bedeutet hier konkret: < 3/3. Somit:

$\neg(p(X \rightarrow Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) < 3/3)$

D. h. wenn $p(X \wedge Y) = 3/3$ falsch ist, kann es sein: 2/3, 1/3 oder 0/3.

Ich schließe aus, dass ¬3/3 auch für einen Wert > 1 oder < 0 steht, und dass ein *anderer Nenner* in Frage kommt; ¬3/3 darf also z. B. nicht für 3/4 oder 2/5 stehen.

Für die Berechnung des gesamten Schlusses $p(X \to Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3$ zählen aber nicht nur die *Welten*, in denen gilt: $p(X \to Y) = 3/3$ und $p(X \wedge Y) = 3/3$. Sondern – gemäß der Definition der Implikation – zählen auch die Welten, in denen $p(X \to Y) = 3/3$ falsch ist, d. h. hier in denen $p(X \to Y) < 3/3$ ist (nämlich 2/3, 1/3 oder 0/3).

Konkret: *ungültig* (falsch) sind nur folgende Kombinationen:

$p(X \to Y)$	$p(X \wedge Y)$	p^T
3/3	2/3	6/64
	1/3	12/64
	0/3	8/64
		26/64

D. h. mit einer $p^T = 26/64$ ist der Schluss ungültig, somit ist er gültig mit einer $p^T = 1 – 26/64 = 38/64$. Also: $p^T[p(X \to Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = 38/64 = 19/32 = 0{,}59$.

Nach diesen Vorüberlegungen können wir jetzt eine allgemeine Tabelle für die Beispiel-Implikation aufstellen:

$$p(X \to Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n, \text{ für } n = 3.$$

Dabei sei daran erinnert, dass gilt:

$$p(X \to Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n \text{ bzw. } p(X \to Y) \geq p(X \wedge Y)$$

r	$p(X \to Y)$	$\longrightarrow$	$p(X \wedge Y)$	$p^T \longrightarrow$	$p^T \wedge \neg$	$p^T \wedge$
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a}{a+b+c+d}$		Negative Fälle: 1 – …	
3	3/3		3/3	38/64	6/64+12/64+8/64	1/64
			2/3	21/64	1/64+12/64+8/64	6/64
			1/3	49/64	1/64+6/64 + 8/64	12/64
			0/3	45/64	1/64+6/64+12/64	8/64
2	2/3		2/3	40/64	12/64+12/64	3/64
			1/3	49/64	3/64+12/64	12/64
			0/3	49/64	3/64+12/64	12/64
1	1/3		1/3	58/64	6/64	3/64
			0/3	61/64	3/64	6/64
0	0/3		0/3	64/64= 1	0/64	1/64
						64/64

Zur Erläuterung: Die 1. Zeile (unser Beispiel) ist z. B. wie folgt zu lesen:

$p^T[p(X \to Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = p^T[\neg(p(X \to Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) < 3/3)] =$

$1 – p^T[p(X \to Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = 2/3] – p^T[p(X \to Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = 1/3] –$
$p^T[p(X \to Y) = 3/3 \wedge p(X \wedge Y) = 0/3] =$

$1 – (6/64 – 12/64 – 8/64) = 1 – 26/64 = 64/64 – 26/64 = 38/64$

Für den *deterministischen* Fall (beide Relationen p = 1) habe ich nun aus obiger und weiteren Tabellen eine *allgemeine Formel* zur Berechnung von p^T aufgestellt, nämlich:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = n/n = 1] = (4^n - 3^n + 1)/4^n$

Für unser Beispiel mit n = 3 ergibt sich, als Bestätigung des Wertes aus der Tabelle:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = (4^3 - 3^3 + 1)/4^3 = (64 - 27 + 1)/64 = 38/64 = 0{,}59$

4-3-2-5 PARTIELLER SCHLUSS $p(X \rightarrow Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 2/3$

Als zweites Beispiel nehmen wir diesen *statistischen* Schluss.
Was ergibt sich hier für die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T?

1) Negative Fälle: Ungültig ist die Relation, wenn gilt:
$p(X \rightarrow Y) = 2/3 \;\wedge\; p(X \wedge Y) \neq 2/3$, d. h.:
erstens: $p(X \rightarrow Y) = 2/3 \;\wedge\; p(X \wedge Y) = 1/3$
zweitens: $p(X \rightarrow Y) = 2/3 \;\wedge\; p(X \wedge Y) = 0/3$
$p(X \rightarrow Y) = 2/3 \;\wedge\; p(X \wedge Y) = 3/3$ ist logisch unmöglich, besäße also eine $p^T = 0$,
denn $p(X \rightarrow Y) \geq p(X \wedge Y)$.

2) p^T der negativen Fälle
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) = 1/3] = 12/64$
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) = 0/3] = 12/64$
also: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \wedge p(X \wedge Y) \neq 2/3] = 12/64 + 12/64 = 24/64$

3) Subtraktion der negativen Fälle
$1 - 24/64 = 64/64 - 24/64 = 40/64$

4) Resultat
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 2/3] = 40/64 = 5/8 = 0{,}63$

Eine *allgemeingültige* Formel für $p^T[p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n]$ habe ich bisher noch nicht entwickelt. Ich habe schon öfters darauf hingewiesen, dass die Verwendung der *normalen Implikation* $\rightarrow$ im quantitativen Bereich zu problematischen bis unbrauchbaren Ergebnissen führen kann. Das lässt sich auch hier wieder gut erkennen.

Plausibel für unseres normales Verständnis von Wenn-Dann-Relationen wäre (laut obiger Tabelle): $p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = 1/64$
Real ist aber: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = 38/64$
Dazwischen liegen Welten.

Das ist ein Hinweis darauf, auch hier wieder mit der *Positiv-Implikation* $*\!\!\rightarrow$ zu arbeiten.

4-3-3 Positiv-Implikation

Konzentrieren wir uns also jetzt auf die *Positiv-Implikation*: Die folgende Tabelle gibt die Werte für $p(X \rightarrow Y) = r/n \;*\!\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$ (u. g. steht für „ungekürzt"): Wie man sieht, ergeben sich starke Abweichungen zu den Werten der Normal-Implikation:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \;*\!\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3] = 1/27 = 0{,}04$ (Normal-Implikation: 0,59)
$p^T[p(X \rightarrow Y) = 2/3 \;*\!\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = 2/3] = 3/27 = 0{,}11$ (Normal-Implikation: 0,63)

r	$p(X \rightarrow Y)$	$*\longrightarrow$	$p(X \wedge Y)$	$p^T*\rightarrow$ u.g.	$p^T*\rightarrow$	$p^T*\rightarrow$ dez.
	$\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\dfrac{a}{a+b+c+d}$			
3	3/3		3/3	1/27	1/27	0,04
			2/3	6/27	6/27	0,22
			1/3	12/27	12/27	0,44
			0/3	8/27	8/27	0,30
				27/27 = 1	27/27 = 1	
2	2/3		2/3	3/27	1/9	0,11
			1/3	12/27	4/9	0,44
			0/3	12/27	4/9	0,44
				27/27 = 1	9/9 = 1	
1	1/3		1/3	3/9	1/3	0,33
			0/3	6/9	2/3	0,66
				9/9 = 1	3/3 = 1	
0	0/3		0/3	1/1	1/1	1,00
				1/1 = 1	1/1 = 1	

Es geht nun darum, eine *Formel* anzugeben, durch die man allgemein die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T und damit den *Grad der Folgerichtigkeit* des hier gezeigten Schlusses berechnen kann. Ich habe folgende Formel entwickelt:

$$p^T[(p(X \rightarrow Y) = r/n \;*\!\!\longrightarrow\; p(X \wedge Y) = s/n] = \binom{r}{r-s}(2/3)^{r-s}(1/3)^s$$

Diese und entsprechende andere Formeln werde ich im folgenden Punkt 4-3-4 erläutern.

4-3-4 Systematik

In diesem Punkt beschränke ich mich (für den Zentral-Relator) nur auf Formeln für die *Positiv-Implikation* $*\rightarrow$, weil diese wie beschrieben gerade im quantitativen Bereich der *Normal-Implikation* $\rightarrow$ deutlich überlegen ist. (Außerdem habe ich auch noch keine allgemeingültigen Formeln für die normale Implikation entwickelt.)

Es geht also allgemein um Schlüsse der Form: $p(\Phi) = r/n \;*\!\!\longrightarrow\; p(\Psi) = s/n$

Dabei möchte ich hier 6 unterschiedliche Formeln vorstellen.

Grundsätzlich gibt es 2 Typen von Formeln, welche *mit n* und welche *ohne n* (ausschließlich mit *r* und *s*); beide Typen werden verwendet.

Es mag verwundern, dass Formeln, die nicht auf den *Nenner n* Bezug nehmen, gültig sein können. Aber in der Tat ist der p^T-Wert von s/n in bestimmten Fällen nur von r abhängig (und unabhängig von n).

Strukturell unterscheide ich die Formeln nach:

• der *Prämisse* und • der *Konklusion*

• *Prämisse*: Bei der *Prämisse* $p(\Phi) = r/n$ differenziere ich zwischen Relationen mit $p^T = 3/4$, 2/4 und 1/4.

• *Konklusion*: Auch hier unterscheide ich wie bei der Prämisse nach p^T ($p^T = 3/4$, 2/4 oder 1/4), aber das ist keine vollständig überzeugende Lösung.

In jedem Fall erfasst man mit den 6 Formeln *nicht alle* möglichen Schlüsse der Positiv-Implikation. So zeige ich 2 Formeln für einen Schluss von p(X → Y) = r/n aus. Aber z. B. für Schlüsse wie p(X → Y) *⟶ p(X ← Y) oder p(X → Y) *⟶ p(X) benötigte man modifizierte Formeln, wie die Tabellen in Kap. 5 zeigen. Ohnehin geht es hier nur um Schlüsse mit *zwei* Variablen, für mehrere Variablen wären die Formeln zu modifizieren. Es ist weiterer Forschungsarbeit vorbehalten, zusätzliche Formeln aufzustellen.

4-3-4-1 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 3/4$

Das sind X → Y, X ← Y, X ∨ Y oder X | Y.

Dabei unterscheide ich, in wie vielen Welten die *Konklusion* strukturell in der Wahrheitstafel positiv ist, also ein + unter dem Zentral-Relator besitzt; anders gesagt, wie hoch *strukturell* die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T der Konklusion ist.

Z. B.: X ↔ Y + – – +, also $p^T = 2/4$, X ∧ Y: + – – –, $p^T = 1/4$

Die folgende Angabe „semi-analytisch“ oder „analytisch“ bezieht sich auf die *qualitative* Struktur der Schlüsse, quantitativ kann sich eine Veränderung ergeben.

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 2/4$

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden, jeweils in *quantitativer* Form:

(X → Y) *⟶ (X ↔ Y) quantitativ: p(X → Y) = r/n *⟶ p(X ↔ Y) = s/n
(X ∨ Y) *⟶ (Y) quantitativ: p(X ∨ Y) = r/n *⟶ p(Y) = s/n

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 1/4$

$$\binom{r}{r-s}(1/3)^s(2/3)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden (jeweils in quantitativer Form):

(X → Y) *⟶ (X ∧ Y) quantitativ: p(X → Y) = r/n *⟶ p(X ∧ Y) = s/n
(X ∨ Y) *⟶ (X ∧ Y) quantitativ: p(X ∨ Y) = r/n *⟶ p(X ∧ Y) = s/n

4-3-4-2 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 2/4$

(Z. B. X ↔ Y, X >< Y)

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 3/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(1/2)^{n-s}(1/2)^{s-r}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (analytische) Schlüsse anzuwenden

(X ↔ Y) *⇒ (X → Y) quantitativ: p(X ↔ Y) = r/n *⟶ p(X → Y) = s/n
X *⇒ (X ∨ Y) quantitativ: p(X) = r/n *⟶ p(X ∨ Y) = s/n

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 1/4$

$$\binom{r}{r-s}(1/2)^s(1/2)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \leftrightarrow Y)$ *⟶ $(X \wedge Y)$ quantitativ: $p(X \leftrightarrow Y) = r/n$ *⟶ $p(X \wedge Y) = s/n$

X *⟶ $(X \wedge Y)$ quantitativ: $p(X) = r/n$ *⟶ $p(X \wedge \ Y) = s/n$

4-3-4-3 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 1/4$ (Z. B. $X \wedge Y$, $X \nabla Y$)

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 3/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(2/3)^{s-r}(1/3)^{n-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \wedge Y)$ *⇒ $(X \rightarrow Y)$ quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n$ *⟶ $p(X \rightarrow Y) = s/n$

$(X \wedge Y)$ *⇒ $(X \vee Y)$ quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n$ *⟶ $p(X \vee Y) = s/n$

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 2/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(1/3)^{s-r}(2/3)^{n-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \wedge Y)$ *⇒ X quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n$ *⟶ $p(X) = s/n$

$(X \wedge Y)$ *⇒ Y quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n$ *⟶ $p(Y) = s/n$

4-3-4-4 DEMONSTRATION: VOLLSTÄNDIGER SCHLUSS

Ich möchte mich für eine genaue Demonstration auf zwei Beispiele beschränken (zunächst in 4-3-4-4 einen *strukturell gültigen* Schluss, dann in 4-3-4-5 einen *strukturell partiell gültigen* Schluss).

Dabei bringe ich jeweils:

- zunächst den Schluss, der die mögliche *empirische* Wahrscheinlichkeit p der *Konklusion* angibt (aus dem Wert p der *Prämisse* ableitet)
- dann die Formel, mit der man die zugehörige *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T des obigen Schlusses bestimmt.

Als Beispiel für den strukturell *vollständigen*, d. h. gültigen Schluss nehme ich die *Abtrennungsregel* bzw. *Simplifikationsregel* (die gilt auch für die Normal-Implikation $X \wedge Y \Rightarrow Y$).

Für die *Abtrennungsregel* $X \wedge Y$ *⇒ Y (mit Positiv-Implikation) ergibt sich:

- Schluss von der empirischen Wahrscheinlichkeit p der *Prämisse* auf die empirische Wahrscheinlichkeit p der *Konklusion*

 qualitative Basis: $X \wedge Y$ *⇒ Y

 quantitative Form: $p(X \wedge Y) = r/n$ *⇒ $p(Y) \geq r/n$

bzw. $p(X \wedge Y) = r/n$ *⟶ $p(Y) = s/n$

 Bruch-Form: $\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$ *⇒ $\frac{a+c}{a+b+c+d} \geq \frac{r}{n}$

bzw. $$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \quad {*}{\longrightarrow} \quad \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{s}{n}$$

Dabei gilt r ≤ s, also s = r, r + 1, r + 2, ... , n. Nur, wenn man r ≤ s bzw. diese alternativen Werte hinzufügt, gilt der *strenge* Schluss auch in der Form p(X ∧ Y) = r/n *⇒ p(Y) = s/n.

Ansonsten muss man p(X ∧ Y) = r/n *⟶ p(Y) = s/n als *partiellen* Schluss deuten.
Es gibt nämlich 2 Alternativen zu unterscheiden:

Erstens, man gibt für p(Y) nicht eine bestimmte Lösung an, sondern eine *Auswahl* mehrerer Möglichkeiten, dann gilt der *strenge* Schluss: p(X ∧ Y) = r/n *⇒ p(Y) ≥ r/n.

Zweitens, man gibt für die Konklusion p(Y) einen *bestimmten* Wert an, z. B. soll gelten: s/n = (r + 1)/n. Hier besteht nur ein *partieller* Schluss p(X ∧ Y) = r/n *⟶ p(Y) = (r + 1)/n

Schreiben wir p(Y) ≥ r/n, dann gibt es also verschiedene mögliche *Lösungen* für die Konklusion p(Y): p(Y) = r/n, p(Y) = (r + 1)/n, ... , p(Y) = n/n.

• Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit des Schlusses
Um zu berechnen, mit welcher *theoretischen* Wahrscheinlichkeit p^T, mit welchem *Grad von Folgerichtigkeit,* eine *bestimmte Lösung* gilt, habe ich die folgende Formel entwickelt:

$$p^T[(p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\longrightarrow}\ p(Y) = s/n] = \binom{n-r}{n-s}(2/3)^{n-s}(1/3)^{s-r}$$

Man könnte das auch als Schluss angeben:

$$[p(X \wedge Y) = r/n \ {*}{\longrightarrow}\ p(Y) = s/n] \ \Rightarrow\ [p^T = \binom{n-r}{n-s}(2/3)^{n-s}(1/3)^{s-r}]$$

• Beispiel
p(X ∧ Y) = 1/4 *⇒ p(Y) ≥ 1/4.
Somit: r/n = 1/4. Dann gibt es für s/n: 4 Lösungen
L_1 = 1/4, L_2 = 2/4, L_3 = 3/4, L_4 = 4/4

Z. B. will man die Wahrscheinlichkeit p^T für L_3 = 3/4 berechnen.
Also: r = 1, n = 4, s = 3

$$p^T[(p(X \wedge Y) = 1/4 \ {*}{\longrightarrow}\ p(Y) = 3/4] =$$

$$\binom{4-1}{4-3}(2/3)^{4-3}(1/3)^{3-1} = 3 \times 2/3 \times 1/9 = 6/27 = 2/9 = 0{,}22$$

In Worten: wenn p(X ∧ Y) = 1/4 dann besteht eine theoretische Wahrscheinlichkeit von p^T = 2/9, dass p(Y) = 3/4.

Anders gesagt: p(Y) = 3/4 folgt logisch mit einem Grad von 2/9 aus p(X ∧ Y) = 1/4.
Man muss hier den Pfeil *⟶ für *partielle* logische Folge verwenden. Zwar ist der Schluss p(X ∧ Y) = r/n *⇒ p(Y) ≥ r/n (unter Verwendung von Variablen) *vollständig*, aber mit den Beispiel-Werten (Konstanten) gilt er nur *partiell*, eben nur mit einem Grad von 0,22.

4-3-4-5 DEMONSTRATION: PARTIELLER SCHLUSS
Es geht hier um einen *Schluss, dessen Struktur nur partiell analytisch ist,* als Beispiel:
Umgekehrte Abtrennungsregel X *⟶ X ∧ Y

Bei einem solchen Schluss muss ich in der *Basisform* den Pfeil $*\longrightarrow$ (für *partielle* logische Folge) verwenden. Dennoch gilt der Schluss in der *quantitativen* Form bzw. in der Bruchform *vollständig*, daher ist hier der Doppelpfeil $*\Rightarrow$ einzusetzen.

• Schluss von der empirischen Wahrscheinlichkeit p der *Prämisse* auf die empirische Wahrscheinlichkeit p der *Konklusion*

□ qualitative Basis: $X \ast\!\longrightarrow X \wedge Y$
□ quantitative Form: $p(X) = r/n \ast\!\Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n$

□ Bruch-Form: $\dfrac{a+b}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \ast\!\Rightarrow \dfrac{a}{a+b+c+d} \leq \dfrac{r}{n}$

bzw. $\dfrac{a+b}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \ast\!\longrightarrow \dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{n}$

• Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeit des Schlusses
Wie berechnet man nun die Wahrscheinlichkeit p^T für diese Lösungen?
Ich habe folgende Formel aufgestellt:

$$p^T[(p(X) = r/n \ast\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n] = \binom{r}{r-s}(1/2)^{r-s}(1/2)^s$$

• Beispiel
$p(X) = 4/5 \ast\!\Rightarrow p(X \wedge Y) \leq 4/5$. Folglich: $r = 4$, $n = 5$.

Folgende fünf Lösungen für $p(X \wedge Y)$: $L_1 = 4/5$, $L_2 = 3/5$, $L_3 = 2/5$, $L_4 = 1/5$, $L_5 = 0/5$.
Berechnung für Lösung: $L_2 = 3/5$. Es gilt also: $n = 5$, $r = 4$, $s = 3$.

$$p^T[(p(X) = 4/5 \ast\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/5] =$$

$$\binom{4}{4-3}(1/2)^{4-3}(1/2)^3 = 4 \times 1/2 \times 1/8 = 4/16 = 1/4 = 0{,}25$$

4-3-5 Erweiterungen

In den Erweiterungen möchte ich mich *Pseudo-Schlüssen* widmen. Ein Pseudo-Schluss ist z. B.: $X \rfloor Y \ast\!\longrightarrow X \lfloor Y$, quantitativ $p(X \rfloor Y) = r/n \ast\!\longrightarrow p(X \lfloor Y) = s/n$.
Nehmen wir als Beispiel $n = 4$, so ergibt sich:

$p(X \rfloor Y) \ast\!\longrightarrow$	$p(X \lfloor Y)$	p^T
4/4	4/4	1/16
	3/4	4/16
	2/4	6/16
	1/4	4/16
	0/4	1/16

Wenn wir für $p(X \rfloor Y)$ nicht 4/4 , sondern 0/4, 1/4, 2/4 oder 3/4 einsetzen, folgt dasselbe:

z. B.

$p(X \rfloor Y)$ $*\!\longrightarrow$	$p(X \lfloor Y)$	p^T
3/4	4/4	1/16
	3/4	4/16
	2/4	6/16
	1/4	4/16
	0/4	1/16

Hier zeigt sich nun Folgendes:
- Wenn man $p(X \lfloor Y)$ mit $n = 4$ für sich alleine betrachtet, so erhält man denselben Verlauf von p^T wie in Abhängigkeit von $p(X \rfloor Y)$:

z. B.: $p^T[p(X \lfloor Y) = 4/4] = p^T[p(X \rfloor Y) = 4/4 \ *\!\longrightarrow p(X \lfloor Y) = 4/4] = 1/16$

$p(X \lfloor Y)$	p^T
4/4	1/16
3/4	4/16
2/4	6/16
1/4	4/16
0/4	1/16

- Gleichgültig, welchen Wert 0/n bis n/n man für $p(X \rfloor Y)$ einsetzt, $p(X \lfloor Y)$ kann ebenfalls jeden *beliebigen* Wert 0/n bis n/n annehmen.
- Gleichgültig, welchen Wert 0/n bis n/n, konkret von 0/4 bis 4/4 man für $p(X \rfloor Y)$ einsetzt, $p(X \lfloor Y)$ hat immer die *gleiche* p^T-Verteilung, konkret 1/16, 4/16, 6/16, 4/16, 1/16.

Das beweist aber alles, dass $p(X \lfloor Y)$ vollständig *unabhängig* von $p(X \rfloor Y)$ ist. Dies verwundert auch nicht, denn es gilt ja: $X \Leftrightarrow X \rfloor Y$ und $Y \Leftrightarrow X \lfloor Y$.

Bei $X \rfloor Y \ *\!\longrightarrow X \lfloor Y$ handelt es sich also gar nicht um einen echten Schluss, sondern in Wahrheit um eine *synthetische* Relation, entsprechend $X *\!\rightarrow Y$.

Daher kann man p^T von $p(X \rfloor Y) = r/n \ *\!\longrightarrow p(X \lfloor Y) = s/n$ nach einer Formel für synthetische *Gleichgewichts-Relationen* wie $p(X *\!\rightarrow Y) = r/n$ berechnen (vgl. 3-3-3).

Abschließend

Die *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T hat eine erstaunliche Doppelfunktion:

Bei *synthetischen* Relationen gibt sie die Größe und die Sicherheit der *empirischen Abhängigkeit* an (während die *empirische* Wahrscheinlichkeit p in anderer Weise die empirische Abhängigkeit quantifiziert). Bei *analytischen* Relationen gibt die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T den Grad der *analytischen Abhängigkeit* an.

In beiden Fällen gibt p^T aber zusätzlich den Grad *theoretischer Wahrheit* bzw. den *tautologischen Grad* an, bei einem Schluss ist das der *Grad der Folgerichtigkeit.*

Allerdings gilt für synthetische Relationen: $0 < p^T < 1$. D. h. synthetische Relationen sind nicht *vollständig* tautologisch oder *vollständig* kontradiktorisch. Dennoch können synthetische Relationen einen p^T-Wert beliebig nahe an 1 oder 0 besitzen. Das bedeutet nicht, dass bei ihnen eine *analytische* Abhängigkeit gegeben wäre. Z. B. gibt es bei $p^T[X \vee Y \vee Z] = 7/8$ *keine analytische Abhängigkeit* zwischen X, Y und Z. Synthetische Relationen beinhalten schon *definitorisch* keine analytische Abhängigkeit.

4 – 4 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

4-4-1 Einführung

Es geht hier um Schlüsse, bei denen Prämisse und Konklusion *deterministisch* sind, also den Wert p = 1 oder p = 0 besitzen. Im Gegensatz zu *statistischen* Schlüsse n, bei denen für die Prämissen (und/oder die Konklusion) gilt: $0 < p < 1$.

Ehe wir uns aber der *Analyse* eines Schlusses in seine Komponenten *Prämisse(n)* und *Konklusion* zuwenden, wollen wir die *Gesamtbetrachtung* eines Schlusses vornehmen. Um den Unterschied von p und p^T noch einmal herauszuarbeiten.

Denn gerade bei der *Tautologie* kann man leicht die *empirische* Wahrscheinlichkeit p und die *theoretische* Wahrscheinlichkeit p^T verwechseln. Beide haben nämlich prinzipiell den Wert 1.

Da jede Tautologie bzw. jeder gültige Schluss (bei 2 Variablen) die Wahrheitsfolge + + + + aufweist, kann man letztlich jede solche Tautologie durch den Bruch $\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$ darstellen.

Es gilt dann:

• *empirische Wahrscheinlichkeit* p

Für jede Tautologie (bei 2 Variablen X, Y) gilt:

$$\text{p(Tautologie)} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = n/n = 1$$

p hat also immer, *notwendig* den Wert 1, der kann aber für verschiedene konkrete Brüche stehen. p kann z. B. folgende Werte annehmen: 1/1, 2/2, 3/3, 4/4, 5/5 usw.

• *theoretische Wahrscheinlichkeit* p^T

Auch die theoretische Wahrscheinlichkeit einer Tautologie hat immer den Wert 1.
Dies kann man sich leicht verdeutlichen: p^T gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass gilt:

$$\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

Und diese Gleichung gilt sicher, d. h. sie gilt mit 100% (theoretischer) Wahrscheinlichkeit.
Allerdings kann $p^T = 1$ ebenfalls für verschiedene Brüche stehen. Im einfachsten Fall, nämlich bei n = 1 gibt es nur *ein* x, nämlich x_1. Dieses x_1 kann unter a, b, c oder d fallen; es ergeben sich hier also 4 Möglichkeiten. In jedem Fall beträgt aber der Wert des Bruches $p^T = 1$.

Denn es gilt:

p	p^T
1/1	$4^1/4^1$
2/2	$4^2/4^2$
....	
n/n	$4^n/4^n$

Als Formel können wir schreiben:

$$p^T[p = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = n/n = 1] = 4^n/4^n = 1$$

Es gilt also: p(Tautologie) = 1, p^T(Tautologie) = 1.
Entsprechend gilt bei Kontradiktionen: p(Kontradiktion) = 0 und p^T(Kontradiktion) = 0.

Die obigen Überlegungen gelten uneingeschränkt nur für Schlüsse (Tautologien), bei denen der *Gesamt-Schluss* quantifiziert ist. Anders sieht es bei Schlüssen aus, bei denen Prämisse und Konklusion *getrennt* quantifiziert sind, z. B.:

$p(X \wedge Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(Y) = 1$ $\qquad \frac{a}{a+b+c+d} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Hier gilt zwar auch p = 1 und $p^T = 1$, aber beim folgenden Schluss ist p = 0, dabei $p^T = 1$.

$p(Y) = 0 \;\Rightarrow\; p(X \wedge Y) = 0$ $\qquad \frac{a+c}{a+b+c+d} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{a}{a+b+c+d} = 0$

Nachfolgend werden wir uns auf solche, *getrennt quantifizierte*, Schlüsse, konzentrieren.
Dabei sollen wieder folgende Schlüsse unterschieden werden:

- *streng analytische*, z. B.: $p(X \wedge Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(Y) = 1$
  In diesem Fall ist $p^T = 1$, wenn die Prämissen *deterministisch* (p = 1 bzw. p = 0) sind.
- *partiell analytische*, z. B. $p(Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1$
  Dabei muss p^T nicht den Wert 1 haben, auch wenn die Prämissen deterministisch sind.

4-4-2 Implikation

Ich möchte mich hier auf *zwei* Beispiele beschränken:

- den *semi-analytischen* Schluss $(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \wedge Y)$
- und seine *analytische* Umkehrung $(X \wedge Y) \;\Rightarrow\; (X \rightarrow Y)$

Der erste Schluss lautet in quantitativer Form:

$p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1$, *allgemein* $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$

In der quantitativen Aussagen-Logik werden wie gesagt nur die *deterministischen* Werte p = 1 und p = 0 verwendet. Wir verwenden bei diesem Beispiel nur p = 1. Somit gilt: r = s = n

Durch *Wahrheitstafeln* kann man die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T ermitteln, deshalb stelle ich die Formen des Schlusses zunächst quasi *aussagen-logisch*, qualitativ dar:

n = 1 $(X_1 \to Y_1) \longrightarrow (X_1 \wedge Y_1)$ $p^T = 2/4$
n = 2 $(X_1 \to Y_1) \wedge (X_2 \to Y_2) \longrightarrow (X_1 \wedge Y_1) \wedge (X_2 \wedge Y_2)$ $p^T = 8/16$
n = 3 $(X_1 \to Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_3 \to Y_3) \longrightarrow (X_1 \wedge Y_1) \wedge \ldots \wedge (X_3 \wedge Y_3)$ $p^T = 38/64$

In quantitativer Darstellung:
n = 1 $p(X \to Y) = 1/1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1/1$ $p^T = 2/4$
n = 2 $p(X \to Y) = 2/2 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 2/2$ $p^T = 8/16$
n = 3 $p(X \to Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 3/3$ $p^T = 38/64$

(Falsch wäre dabei die Berechnung der *Gesamtformel*, *also* $p((X \to Y) \longrightarrow (X \wedge Y)) = 1/1$, denn bei diesem Schluss sind Prämisse und Konklusion *getrennt* quantifiziert.)

Hier ist ein Fall, der schön demonstriert, wie leicht man sich bei der Aufstellung von Formeln täuschen kann. Betrachtet man nur n = 1 und n = 2, so könnte man vermuten, dass $p^T = 1/2$, denn 2/4 und 8/16 sind beide gleich 1/2, und ein Zufall scheint unwahrscheinlich. Zieht man aber n = 3 hinzu, so ergibt sich ein anderes Bild. In Wirklichkeit ist die Formel viel komplizierter und lautet: $(4^n - 3^n + 1)/4^n$.

$p^T[p(X \to Y) = n/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = n/n] = (4^n - 3^n + 1)/4^n$
n = 1: $(4^1 - 3^1 + 1)/4^1 = (4 - 3 + 1)/4 = 2/4 = 0{,}5$
n = 2: $(4^2 - 3^2 + 1)/4^2 = (16 - 9 + 1)/16 = 8/16 = 0{,}5$
n = 3: $(4^3 - 3^3 + 1)/4^3 = (64 - 27 + 1)/64 = 38/64 = 0{,}59$ usw.

Kommen wir jetzt zum *Umkehr-Schluss*: $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \to Y)$, der *tautologisch* ist.
Er lautet in der quantitativen Aussagen-Logik:
$p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(X \to Y) = 1$ bzw. $p(X \wedge Y) = n/n \Rightarrow p(X \to Y) = n/n$.
Hier benötigt man keine komplizierte Formel zur Berechnung, denn bei einer Tautologie gilt immer $p^T = 1$.
$p^T[p(X \wedge Y) = n/n \longrightarrow p(X \to Y) = n/n] = 4^n/4^n = 1$.

4-4-3 Positiv-Implikation

Als Beispiel ein Schluss, der von der Struktur her *vollständig analytisch* ist:

Abtrennungsregel (Simplifikationsregel)

□ qualitative Basis: $X \wedge Y \ {*}{\Rightarrow}\ Y$
□ quantitative Form: $p(X \wedge Y) = r/n = 1 \ {*}{\Rightarrow}\ p(Y) = s/n = 1$

□ Bruch-Form: $\frac{a}{a+b+c+d} = 1 \ {*}{\Rightarrow}\ \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Ich gebe hier ein Zahlenbeispiel: $(X \wedge Y) = 4/4 \ {*}{\Rightarrow}\ p(Y) = 4/4$
also: r = 4, n = 4, s = 4

Nach der in 4-3-4-3 vorgestellten Formel ergibt sich:
$p^T[(p(X \wedge Y) = 4/4 \ {*}{\Rightarrow}\ p(Y) = 4/4] =$

$$\binom{4-4}{4-4}(2/3)^{4-4}(1/3)^{4-4} = 1 \times (2/3)^0 \times (1/3)^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Der Schluss hat also eine theoretische Wahrscheinlichkeit $p^T = 1$, er ist somit *vollständig*. Davon ist zu unterscheiden, dass auch beide Einzel-Relationen eine empirische Wahrscheinlichkeit p = 4/4 = 1 besitzen. Die Formel gilt generell, man muss keine konkreten Zahlenwerte einsetzen.

Auf die Berechnung eines *negativen* Beispiels, z. B. $p(Y) = 0 \ {*}\!\!\Rightarrow p(X \wedge Y) = 0$, verzichte ich hier.

4-4-4 Systematik

Ich habe in 4-3-4 sechs Formeln zur Berechnung von p^T bei quantitativen Schlüssen mit der *Positiv-Implikation* aufgestellt.

Es handelt sich um Schlüsse der Form:

– *semi-analytisch*: $p(\Phi) = r/n \ {*}\!\!\longrightarrow \ p(\Psi) = s/n$ oder

– *analytisch*: $p(\Phi) = r/n \ {*}\!\!\Rightarrow \ p(\Psi) = s/n$

Hier soll nun demonstriert werden, was sich ergibt:

- im *deterministischen* Fall: p = 1, konkret: $p(\Phi) = 1$ und $p(\Psi) = 1$, r = s = n, r > 0 (somit auch s > 0 und n > 0)
- im *nullistischen* Fall: p = 0, konkret: $p(\Phi) = 0$ und $p(\Psi) = 0$, r = s = 0 (allerdings n > 0, ein Nenner von 0 ist nicht erlaubt)

1. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 3/4$ (z. B. $X \rightarrow Y$)

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 2/4$ (z. B. $X \leftrightarrow Y$)

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s}$$

Für die erste Formel sei das genauer erklärt:

Positiver Fall: p = 1: $p^T = (2/3)^S$

Erklärung:

Wenn r = s, dann gilt: $\binom{r}{r-s} = 1$ und $(1/3)^{r-s} = 1$, somit:

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s} = 1 \times (2/3)^s \times 1 = (2/3)^s$$

Beispiel : $p^T[p(X \rightarrow Y) = s/s = 1 \ {*}\!\!\longrightarrow p(X \leftrightarrow Y) = s/s = 1] = (2/3)^s$

Negativer Fall: p = 0: $p^T = 1$

Erklärung:

Wenn r = s = 0, dann gilt ebenfalls: $\binom{r}{r-s}$ = 1 und $(1/3)^{r-s} = 1$, somit

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s} = 1 \times (2/3)^0 \times 1 = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Beispiel: $p^T[p(X \to Y) = 0 \ {*}{\longrightarrow}\ p(X \leftrightarrow Y) = 0] = 1$

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)

$$\binom{r}{r-s}(1/3)^s(2/3)^{r-s}$$

Positiver Fall: p = 1, $p^T = (1/3)^S$
Negativer Fall: p = 0, $p^T = 1$

Beispiel: $(X \to Y) \ {*}{\longrightarrow}\ (X \wedge Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \to Y) = s/s = 1 \ {*}{\longrightarrow}\ p(X \wedge Y) = s/s = 1] = (1/3)^s$
Negativer Fall: $p^T[p(X \to Y) = 0 \ {*}{\Rightarrow}\ p(X \wedge Y) = 0] = 1$

2. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 2/4$ (z. B. $X \leftrightarrow Y$)

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 3/4$ (z. B. $X \to Y$)

$$\binom{n-r}{n-s}(1/2)^{n-s}(1/2)^{s-r}$$

p = 1, $p^T = 1$
p = 0, $p^T = (1/2)^n$

Beispiel: $(X \leftrightarrow Y) \ {*}{\Rightarrow}\ (X \to Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 1 \ {*}{\Rightarrow}\ p(X \to Y) = 1] = 1$
Negativer Fall: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 0/n = 0 \ {*}{\longrightarrow}\ p(X \to Y) = 0/n = 0] = (1/2)^n$

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)

$$\binom{r}{r-s}(1/2)^s(1/2)^{r-s}$$

p = 1, $p^T = (1/2)^s$
p = 0, $p^T = 1$

Beispiel: $(X \leftrightarrow Y) \ {*}{\longrightarrow}\ (X \wedge Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = s/s = 1 \ {*}{\longrightarrow}\ p(X \wedge Y) = s/s = 1] = (1/2)^s$
Negativer Fall: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 0 \ {*}{\Rightarrow}\ p(X \wedge Y) = 0] = 1$

3. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 3/4$ (z. B. $X \rightarrow Y$)

$$\binom{n-r}{n-s}(2/3)^{s-r}(1/3)^{n-s}$$

$p = 1$, $p^T = 1$
$p = 0$, $p^T = (1/3)^n$

Beispiel: $(X \wedge Y)$ $*\!\Rightarrow (X \rightarrow Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \wedge Y) = 1 *\!\Rightarrow p(X \rightarrow Y) = 1] = 1$
Negativer Fall: $p^T[p(X \wedge Y) = 0/n = 0 *\!\longrightarrow p(X \rightarrow Y) = 0/n = 0] = (1/3)^n$

- auf eine Relation mit strukturell $p^T = 2/4$ (z. B. $X \leftrightarrow Y$)

$$\binom{n-r}{n-s}(1/3)^{s-r}(2/3)^{n-s}$$

$p = 1$, $p^T = 1$
$p = 0$, $p^T = (2/3)^n$

Beispiel: $(X \wedge Y)$ $*\!\Rightarrow (X \leftrightarrow Y)$
Positiver Fall: $p^T[p(X \wedge Y) = 1 *\!\Rightarrow p(X \leftrightarrow Y) = 1] = 1$
Negativer Fall: $p^T[p(X \wedge Y) = 0/n = 0 *\!\longrightarrow p(X \leftrightarrow Y) = 0/n = 0] = (2/3)^n$

4-4-5 Erweiterungen

Ich behandele hier folgende Schluss-Strukturen der *Normal*-Implikation (mit Beispielen):

$p = 1$ auf $p = 1$
$p = 1$ auf $p = 0$
$p = 0$ auf $p = 1$
$p = 0$ auf $p = 0$

Aber nur *echte* Schlüsse mit $p^T = 1$.

- $p = 1 \Rightarrow p = 1$

$p^T[p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(X \vee Y) = 1] = 1$

- $p = 0 \Rightarrow p = 0$

$p^T[p(X \vee Y) = 0 \Rightarrow p(X \wedge Y) = 0] = 1$

• $p = 1 \Rightarrow p = 0$

a) kontravalente Relation ($X \wedge Y$ steht in Kontravalenz zu $X \mid Y$)
$p^T[p(X \wedge Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \mid Y) = 0] = 1$

b) nicht kontravalente Relation ($X \wedge Y$ steht nicht in Kontravalenz zu $X \nabla Y$)
$p^T[p(X \wedge Y) = 1 \;\Rightarrow\; p(X \nabla Y) = 0] = 1$

• $p = 0 \Rightarrow p = 1$

a) kontravalente Relation
$p^T[p(X \vee Y) = 0 \;\Rightarrow\; p(X \nabla Y) = 1] = 1$

b) nicht kontravalente Relation
$p^T[p(X \vee Y) = 0 \;\Rightarrow\; p(X \leftrightarrow Y) = 1] = 1$

4 – 5 QUANTITATIVE QUANTOREN-LOGIK

4-5-1 Einführung

Dieses Kapitel knüpft vor allem an Unter-Kapitel 4 – 2, *Quantoren- und Prädikaten-Logik*. Entsprechend früheren Erläuterungen findet primär folgende *Quantifizierung* statt:

• alle	Λ	$p = 1$	n/n
• alle nicht	Λ¬	$p = 0$	0/n
• einige	V	$p > 0$	> 0/n
• einige nicht	V¬	$p < 1$	< n/n

Auf der Basis dieser Quantifizierungen werden die in 4 – 2 dargestellten Gesetze formuliert.

4-5-2 Implikation

• *Strenger Schluss: von alle auf einige*

Einfach:

$$p^T[p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0] = 1$$

Genauer: $p^T[p(X) = n/n \Rightarrow p(X) > 0/n] = (2/2)^n = 1$

Komplex:

$$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1 \Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0] = 1$$

Genauer: $p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0/n] = (4/4)^n = 1$

• *Semi-analytischer Schluss: von einige auf alle*

Einfach:

$p^T[p(X) > 0/n \longrightarrow p(X) = n/n] = (1/2)^{n-1}$ bzw. einfacher $1/2^{n-1}$

Beispiel: alle = n = 3: $p^T[p(X) > 0/3 \longrightarrow p(X) = 3/3] = (1/2)^{3-1} = (1/2)^2 = 1/4 = 0{,}25$

Komplex:

$$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/n \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = n/n] = (3^n + 1)/4^n$$

Beispiel für alle = n = 3:

$$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/3 \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = 3/3] = (3^3 + 1)/4^3 = 28/64 = 7/16 = 0{,}44$$

• *Semi-analytischer Schluss: von alle auf einige / Formalisierung mit* $\wedge$

$$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/n] = (4^n - 2^n)/4^n$$

Beispiel für n = 3:
$$p^T[p(X \rightarrow Y) = 3/3 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/3] = (4^3 - 2^3)/4^3 = 56/64 = 7/8 = 0{,}88$$

4-5-3 Positiv-Implikation

• *Strenger Schluss: von alle auf einige*

teilweise Verwendung der Positiv-Implikation:
$$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1 \;{*}{\Rightarrow}\; p(X \rightarrow Y) > 0] = 1$$

Genauer: $p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \;{*}{\Rightarrow}\; p(X \rightarrow Y) > 0/n] = (3/3)^n = 1$

vollständige Verwendung der Positiv-Implikation:

$$p^T[p(X \;{*}{\rightarrow}\; Y) = 1 \;{*}{\Rightarrow}\; p(X \;{*}{\rightarrow}\; Y) > 0] = 1$$

Genauer: $p^T[p(X \;{*}{\rightarrow}\; Y) = n/n \;{*}{\Rightarrow}\; p(X \;{*}{\rightarrow}\; Y) > 0/n] = (1/1)^n = 1$

• *Semi-analytischer Schluss: von einige auf alle*

teilweise Verwendung der Positiv-Implikation:
$$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/n \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \rightarrow Y) = n/n] = 3^n/(4^n - 1)$$

Beispiel für n = 2:
$$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/2 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \rightarrow Y) = 2/2] = 3^2/(4^2 - 1) = 9/15 = 3/5 = 0{,}6$$

vollständige Verwendung der Positiv-Implikation:
$$p^T[p(X \;{*}{\rightarrow}\; Y) > 0/n \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \;{*}{\rightarrow}\; Y) = n/n] = 1/(2^n - 1)$$

Beispiel für n = 2:
$$p^T[p(X \;{*}{\rightarrow}\; Y) > 0/2 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \;{*}{\rightarrow}\; Y) = 2/2] = 1/(2^2 - 1) = 1/3 = 0{,}33$$

• *Semi-analytischer Schluss: von alle auf einige / andere Formalisierung mit* $\wedge$

$$p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \wedge Y) > 0/n\ ] = (3^n - 2^n)/3^n$$

Beispiel für n = 4:
$$p^T[p(X \rightarrow Y) = 4/4 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \wedge Y) > 0/4] = (3^4 - 2^4)/3^4 = (81 - 16)/81 = 65/81 = 0{,}8$$

Dieses Beispiel will ich etwas genauer erläutern und zeigen, wie man das obige Ergebnis prüfen kann.

$$p(X \rightarrow Y) = 4/4 \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \wedge Y) > 0/4$$

Wenn $p(X \rightarrow Y) = 4/4$, ergibt sich für:

$p(X \wedge Y)$	p^T
4/4	1/81
3/4	8/81
2/4	24/81
1/4	32/81
0/4	16/81
	81/81

So kann man sagen:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 4/4 \text{ *}\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = 0/4] = 16/81 = 0{,}20$ Daraus folgt:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 4/4 \text{ *}\!\longrightarrow p(X \wedge Y) > 0/4] = 81/81 - 16/81 = 65/81 = 0{,}80$

Der einfachste Weg ist der oben beschrittene:
Man berechnet erst den Wert für $p(X \wedge Y) = 0$, hier $p^T = 16/81$.
Nun subtrahiert man diesen Wert von dem der Gesamtverteilung: $81/81 - 16/81 = 65/81$.
Da gilt: $p^T[p(\Phi) = 0] + p^T[p(\Phi) > 0] = 1$, hat man so das gewünschte Ergebnis.

Die Verwendung der *Implikation* $\rightarrow$ für All-Strukturen: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ und der *Konjunktion* $\wedge$ für Partikulär-Strukturen: $Vx(Fx \wedge Gx)$ ist wie gesagt gebräuchlich. Hier, bei der wahrscheinlichkeits-theoretischen Analyse, zeigt sich erneut, dass bei Verwendung dieser Relatoren der Schluss von „alle“ auf „einige“ nicht streng gilt (das hieße $p^T = 1$), sondern nur wahrscheinlich ist. Und zwar gilt das sowohl bei der Verwendung der *Implikation* $\rightarrow$ wie bei Verwendung der *Positiv-Implikation* $*\!\rightarrow$. Man hält aber den Schluss von „alle“ auf „einige“ normalerweise für *sicher*, wieder ein Hinweis auf die Problematik dieser Formalisierung.

4-5-4 Systematik

Es werden hier nur ausgewählte Beispiele gebracht, um den Text nicht zu umfangreich zu gestalten.

Dabei sei daran erinnert: Für $p = 1$ („alle“) ist ganz korrekt $p = 1{,}0$ oder $p = 100\%$ zu schreiben, da *p* eben eine *relative* Größe ist. Am klarsten ist es, wenn man $p = n/n$ schreibt, also mit Angabe der *absoluten* Größen von Zähler und Nenner, zumal auch p^T von den absoluten Werten *n* abhängt, also unterschiedlich ausfällt, je nachdem ob p ist: 1/1, 2/2, 3/3, 4/4, 5/5 usw.

Entsprechendes gilt für die anderen Werte wie $p < 1$, $p = 0$ und $p > 0$. Allerdings ist die 0 ein Sonderfall, weil hier *absoluter* und *relativer* Wert zusammenfallen: $p = 0 \Leftrightarrow p = 0\%$.

Der Einfachheit verwende ich aber nachfolgend die kürzere Schreibweise, ohne immer n einzusetzen, also z. B. nur $p = 1$ statt $p = n/n$ oder $p = 0$ statt $p = 0/n$.

• Einfache Tautologie

$p^T = (2/2)^n = 1$

$p^T[p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0]$

$p^T[p(X) = 0 \Rightarrow p(X) < 1]$

• Komplexe Tautologie

$p^T = (4/4)^n = 1$

$p^T[p(X \to Y) = 1 \Rightarrow p(X \to Y) > 0]$
$p^T[p(X \to \neg Y) = 1 \Rightarrow p(X \to \neg Y) > 0]$
$p^T[p(X \to Y) = 0 \Rightarrow p(X \to Y) < 1]$
$p^T[p(X \to \neg Y) = 0 \Rightarrow p(X \to \neg Y) < 1]$

• Einfach semi-analytisch

$p^T = 1/2^{n-1}$

$p^T[p(X) > 0 \longrightarrow p(X) = 1]$
$p^T[p(X) < 1 \longrightarrow p(X) = 0]$

• Komplex semi-analytisch

$p^T = (3^n + 1)/4^n$

$p^T[p(X \to Y) > 0 \longrightarrow p(X \to Y) = 1]$
$p^T[p(X \to \neg Y) > 0 \longrightarrow p(X \to \neg Y) = 1]$
$p^T[p(X \to Y) < 1 \longrightarrow p(X \to Y) = 0]$
$p^T[p(X \to \neg Y) < 1 \longrightarrow p(X \to \neg Y) = 0]$

$p^T = (4^n - 2^n)/4^n$

$p^T[p(X \to Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0]$
$p^T[p(X \to \neg Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge \neg Y) > 0]$?

4-5-5 Erweiterungen

Ich möchte hier einige Anmerkungen zur *Modal-Logik* machen. Schon mehrfach habe ich auf die *Verbindungen von Quantoren-Logik und Modal-Logik* hingewiesen. Es lassen sich entsprechend auch Verbindungen zur theoretischen Wahrscheinlichkeit p^T herstellen. Und zwar gilt:

Quantoren	Modalität	p^T
• alle	notwendig	1
• nicht alle	nicht notwendig	< 1
• einige	möglich	> 0
• nicht einige	nicht möglich	0

In 2-5-5-3 bzw. 2-5-5-4 habe ich – entsprechend zu p – einen Wert *p(modal)*: p^M eingeführt. Dieser gibt dann den *Grad der Modalität* an, am besten sagt man, den *Grad der Notwendigkeit*. Man kann aber auch entsprechend zu p^T einen Modal-Wert p^{TM} einführen, der den Grad der Notwendigkeit eines Schlusses bemisst. ‚p' wie ‚p^T' (in p^M oder p^{TM}) wird hier wieder allgemein für *relative Größe* genommen, steht nicht spezifisch für *Wahrscheinlichkeit*.

Z. B. $p(X) > 0 \longrightarrow p(X) = 1$

Dieser Schluss ist, wie ausführlich erläutert, nicht notwendig (nicht tautologisch) und nicht unmöglich (nicht kontradiktorisch). Man kann ihn aber in Abhängigkeit von n genauer bestimmen: $p(X) > 0/n \longrightarrow p(X) = n/n$

Ich hatte gezeigt, dass gilt:

$p^T[p(X) > 0/n \longrightarrow p(X) = n/n] = 1/2^{n-1}$

z. B. für n = 2: $p^T[p(X) > 0/2 \longrightarrow p(X) = 2/2] = 1/2^{2-1} = 1/2$

Dafür kann man auch sagen bzw. schreiben:

$$p^{TM}[p(X) > 0/2 \longrightarrow p(X) = 2/2] = 1/2^{2-1} = 1/2$$

Das bedeutet: Der Notwendigkeits-Grad von $p(X) > 0/2 \longrightarrow p(X) = 2/2$ beträgt 1/2.
Oder: „$p(X) > 0/2 \longrightarrow p(X) = 2/2$“ ist zu 50% notwendig.

Wir haben uns eben mit der *inklusiven* Modal-Logik befasst, die „möglich“ als „mindestens möglich“ bestimmt, also „notwendig“ nicht ausschließt. Pointiert: bei „mindestens möglich“ ist „notwendig“ möglich.

Die *exklusive* Modal-Logik bestimmt „möglich“ dagegen als „*genau* möglich“, es schließt somit Notwendigkeit aus. Man könnte formulieren:

genau möglich $\Rightarrow$ möglich	$0 < p < 1 \Rightarrow p > 0$
oder: p^T[genau möglich $\Rightarrow$ möglich] = 1	$p^T[0 < p < 1 \Rightarrow p > 0] = 1$
oder: p^{TM}[genau möglich $\Rightarrow$ möglich] = 1	$p^{TM}[0 < p < 1 \Rightarrow p > 0] = 1$

Die letzte Zeile wäre sprachlich zu formulieren: aus „genau möglich“ folgt *notwendig* „möglich“, also mit einem Notwendigkeits-Grad von $p^{TM} = 1$.

5 SYSTEM

In diesem Kapitel 5: „System“ werden *Übersichten*, *Tabellen*, *Listen*, *Diagramme* u. ä. aufgeführt. Manche davon finden sich bereits (modifiziert) im Text, die meisten sind aber neu. Während sich im Text die Darstellung meist auf wenige Relatoren konzentriert, vor allem auf die *Implikation*, werden hier oft *sämtliche* 14 (bzw. 16) Relatoren berücksichtigt.

Entsprechend der Aufteilung im Text wird auch dieser systematische Teil unterteilt in:

- Logik synthetischer Relationen
- Logik analytischer Relationen
- Meta-Logik synthetischer Relationen
- Meta-Logik analytischer Relationen

Dieses letzte Kapitel, Kapitel 5 „System“, zählt in seinen Unter-Kapiteln nicht von 1 bis 5, sondern von 0 bis 4, also: 5-0, 5-1, 5-2, 5-3, 5-4. Dies erklärt sich aber folgendermaßen: Kapitel 5 bezieht sich auf die vorausgegangenen Kapitel 1 bis 4 und zeigt dies auch in der Zählung an (mit gewisser Ausnahme von 5-0).

5 – 0 GESAMT-ÜBERSICHTEN

5-0-1 Überblick über Komponenten der Integralen Logik

1) OBJEKTE	z. B.:
1. Mengen	
• Individuen	x, y
• Klassen	F, G
2. Begriffe / Eigenschaften	
• Individual-Begriffe	E(x), E(y)
• Klassen-Begriffe	E(F), E(G)

2) RELATIONEN (nur Implikationen)

1. Synthetische Relationen	
a) *Qualitative*	
• Positive	$X \rightarrow Y$
• Negative	$\neg(X \rightarrow Y)$
b) *Quantitative*	
• Deterministische	$p(X \rightarrow Y) = 1$
• Statistische	$0 < p(X \rightarrow Y) < 1$
2. Analytische Relationen	
a) *Qualitative*	
• Streng analytische	
– Tautologie	$X \wedge Y \Rightarrow Y$
– Kontradikt.	$X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$
• Partiell analytische	
1. Wahrscheinliche	$X \vee Y \longrightarrow Y$
2. Unwahrscheinliche	$X \vee Y \longrightarrow \neg X \wedge \neg Y$
b) *Quantitative*	
• Streng analytische (Tautologien)	
– Determinist.	$p^T[p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1] = 1$
– Statistische	$p^T[p(X \wedge Y) = 0{,}5 \Rightarrow p(Y) \geq 0{,}5] = 1$
• Partiell analytische	
– Determinist.	$p^T[p(X \vee Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1] < 1$
– Statistische	$p^T[p(X \wedge Y) = 2/4 \longrightarrow p(Y) = 3/4] = 4/9$

5-0-2 Gesamt-Überblick

RELATA

1) Objekte (extensional)

- Individuen: x_i / x_1, x_2 / x_n (in der Logik geht es primär um abstrakte / unbestimmte Objekte)
- Mengen: M, N; Mengenverknüpfungen: Vereinigungs- und Schnitt-Menge: $M \cup N$, $M \cap N$
- Klassen: Mengen aller Individuen x, mit einer klassen-bildenden Eigenschaft F bzw. G.
  ganzheitlich: K(F) *kollektiv*: $\{x / Fx\}$; $\lambda x(Fx)$ *individuell*: $x_1[Fx_1] \cup ... \cup x_n[Fx_n]$

2) Eigenschaften / Begriffe bzw. Begriffs-Mengen (intensional)

- Individual-Eigenschaften: $E(x_i)$
- Klassen-Eigenschaften, Allgemein-Begriffe: E(F), E(G)
- Definitionen: $E(F) =_{df} E(G) \cup E(H)$ bzw. $E(F) =_{df} E(G_1) \cup \ldots \cup E(G_n)$

RELATIONEN BZW. STRUKTUREN

(Relationen können sein: *sprachlich*: Aussagen / *real*: Sachverhalte / *psychisch*: Urteile)

Logische Relationen sind nur *funktional*, nicht zeitlich, örtlich, kausal.

1) synthetische Relationen

Relatoren: aussagen-logische: $\rightarrow$, $*\!\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$ usw., mengen-theoretische $\subset$, $\in$, $=$ usw.

Besonders wichtig: *Implikation* $\rightarrow$ und *Positiv-Implikation* $*\!\rightarrow$.

Die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T gibt u. a. den *Tautologie-Grad* an.

		$p^T \rightarrow$	$p^{T} *\!\rightarrow$
Aussagen-Logik	$A \rightarrow B$	3/4	1/2
Quantoren-Logik	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$(3/4)^n$	$(1/2)^n$
Prädikaten-Logik	$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$	$(3/4)^n$	$(1/2)^n$
Quantitäts-Logik	$p(X \rightarrow Y) = n/n = 1$	$(3/4)^n$	$(1/2)^n$
generell	$p(X \rightarrow Y) = r/n \quad \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$	$p^T = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$	
	$p(X *\!\rightarrow Y) = r/n\ /n \quad \frac{a}{a+b} = \frac{r}{n}$	$p^T = \binom{n}{r}(1/2)^r(1/2)^{n-r}$	

2) Analytische Relationen (bei *Tautologien* gilt immer $p^T = 1$, bei *Kontradiktionen* $p^T = 0$)

analytische Relatoren: $\Rightarrow$, $*\!\Rightarrow$, ${}^+\!\wedge^+$, ${}^+\!\vee^+$ usw.

Aussagen-Logik	$A \wedge B \Rightarrow B$
Quantoren-Logik	$\Lambda x(Fx \wedge Gx) \Rightarrow \Lambda x(Gx)$
Prädikaten-Logik	$(Fx_1 \wedge Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \wedge Gx_n) \Rightarrow (Gx_1 \wedge ... \wedge Gx_n)$
Quantitäts-Logik	$p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$
generell	$p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$

3) Semi-analytische Relationen

		$p^T \rightarrow$	$p^T *\!\rightarrow$
Aussagen-Logik	$A \vee B \longrightarrow A \wedge B$	2/4	1/3
Quantoren-Logik	$\Lambda x(Fx \vee Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \wedge Gx)$	$(4^n - 3^n + 1)/4^n$	$(1/3)^n$
Prädikaten-Logik	$(Fx_1 \vee Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \vee Gx_n) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \wedge Gx_n)$	$(4^n - 3^n + 1)/4^n$	$(1/3)^n$
Quantitäts-Logik	$p(X \vee Y) = n/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = n/n$	$(4^n - 3^n + 1)/4^n$	$(1/3)^n$
generell	$p(X \vee Y) = r/n *\!\longrightarrow p(Y) = s/n$	$p^T = \binom{r}{r-s}(1/3)^s(2/3)^{r-s}$	

5-0-3 Grundstruktur der Integralen Logik

			Beispiele
Logische Relationen	synthetische	Aussagen-Logik	$X \rightarrow Y$
		Quantoren-Logik	$\Lambda(X \rightarrow Y)$
		Quantitative Logik	$p(X \rightarrow Y) = 1$
	partiell analytische	Aussagen-Logik	$X \vee Y \longrightarrow Y$
		Quantoren-Logik	$\Lambda(X \vee Y) \longrightarrow \Lambda(Y)$
		Quantitative Logik	$p(X \vee Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$
	analytische	Aussagen-Logik	$X \wedge Y \Rightarrow Y$
		Quantoren-Logik	$\Lambda(X \wedge Y) \Rightarrow \Lambda(Y)$
		Quantitative Logik	$p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$

5-0-4 Übersicht über ausgewählte Strukturen - Systematik

(Überwiegend systematisch, nicht anhand von Beispielen.)

	Struktur	p^T	p^T/dezimal
1) SYNTHETISCH			
1. Aussagen-Logik			
1.1 absolut (fragwürdig)			
Tautologie	$X \Rightarrow (Y \vee \neg Y)$	4/4	1
Kontradiktion	$(X \vee \neg X) \not\Rightarrow (Y \wedge \neg Y)$	0/4	0
Tautologator	$X \top Y$	4/4	1
Antilogator	$X \perp Y$	0/4	0
1.2 relativ			
semi-tautologisch	$X \rightarrow Y$	3/4	0,75
logisch neutral	$X \leftrightarrow Y$	2/4	0,5
semi-kontradiktorisch	$X \wedge Y$	1/4	0,25
Negationen	$\neg(X \rightarrow Y)$	1/4	0,25
	$\neg(X \leftrightarrow Y)$	2/4	0,5
	$\neg (X \wedge Y)$	3/4	0,75
2. Quantoren-Logik			
2.1 einfach			
alle	$\Lambda(X)$: $X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$	$1/2^n$	$0{,}5^n$
alle nicht	$\Lambda\neg(X)$: $\neg X_1 \wedge \ldots \wedge \neg X_n$	$1/2^n$	$0{,}5^n$
einige	$V(X)$: $X_1 \vee \ldots \vee X_n$	$1 - 1/2^n$	$1 - 0{,}5^n$
einige nicht	$V\neg(X)$: $\neg X_1 \vee \ldots \vee \neg X_n$	$1 - 1/2^n$	$1- 0{,}5^n$
2.2 komplex			
alle	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
	$(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge\ldots\wedge (X_n \rightarrow Y_n)$		
alle nicht	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
	$\neg(X_1 \rightarrow Y_1) \wedge\ldots\wedge \neg(X_n \rightarrow Y_n)$		
einige	$V(X \rightarrow Y)$	$(4^n - 1)/4^n$	$1 - 0{,}25^n$
	$(X_1 \rightarrow Y_1) \vee\ldots\vee (X_n \rightarrow Y_n)$		
einige nicht	$V\neg(X \rightarrow Y)$	$(4^n - 3^n)/4^n$	$1 - 0{,}75^n$
	$\neg(X_1 \rightarrow Y_1) \vee\ldots\vee \neg(X_n \rightarrow Y_n)$		
Alternative:			
alle	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
alle nicht	$\Lambda(X \rightarrow \neg Y)$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
einige	$V(X \wedge Y)$	$(4^n - 3^n)/4^n$	$1 - 0{,}75^n$
einige nicht	$V(X \wedge \neg Y)$	$(4^n - 3^n)/4^n$	$1 - 0{,}75^n$

	Struktur	p^T	p^T/s

3. Quantitative Logik

3.1 semi-tautologisch	p(X → Y) = r/n	$\binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$	3/4
(strukturell)	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$		
3.2 logisch neutral	p(X ↔ Y) = r/n	$\binom{n}{r}(1/2)^r(1/2)^{n-r}$	1/2
(strukturell)	$\frac{a+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$		
3.3 semi-kontradiktor.	p(X ∧ Y) = r/n	$\binom{n}{r}(1/4)^r(3/4)^{n-r}$	1/4
(strukturell)	$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$		

4. Quantitative Aussagen-Logik

4.1 positiv	p(X → Y) = r/n = 1 r = n	$1 \times (3/4)^r \times 1 = (3/4)^r = (3/4)^n$	3/4
4.2 negativ	p(X → Y) = r/n = 0 r = 0	$1 \times 1 \times (1/4)^n = (1/4)^n$	3/4

p^T/ s = p^T *strukturell*: der p^T-Wert, den der Relator aussagen-logisch besitzt, unabhängig von der Quantifizierung.

	Struktur	p^T	p^T/dez.	p^T/s
5. Quantitative Quantoren-Logik				
einfach				
alle (= n)	$p(X) = 1$	$1/2^n$	$0{,}5^n$	1/2
alle nicht	$p(X) = 0$	$1/2^n$	$0{,}5^n$	1/2
einige	$p(X) > 0$	$1 - 1/2^n$	$1 - 0{,}5^n$	1/2
einige nicht	$p(X) < 1$	$1 - 1/2^n$	$1 - 0{,}5^n$	1/2
komplex				
alle (= n)	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$	3/4
alle nicht	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$	3/4
einige	$p(X \rightarrow Y) > 0$	$1 - (1/4)^n$	$1 - 0{,}25^n$	3/4
einige nicht	$p(X \rightarrow Y) < 1$	$1 - (3/4)^n$	$1 - 0{,}75^n$	3/4
Alternativen	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$	3/4
	$p(X \rightarrow \neg Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$	3/4
	$p(X \wedge Y) > 0$	$1 - (3/4)^n$	$1 - 0{,}75^n$	1/4
	$p(X \wedge \neg Y) > 0$	$1 - (3/4)^n$	$1 - 0{,}75^n$	1/4

2) ANALYTISCH

1. Aussagen-Logik

1.1 streng analytisch				
Tautologie	$X \wedge Y \Rightarrow Y$	4/4	1	3/4
Kontradiktion	$X \vee \neg X \nRightarrow Y \wedge \neg Y$	0/4	0	3/4
1.2 partiell analytisch				
semi-tautologisch	$X \vee Y \longrightarrow Y$	3/4	0,75	3/4
logisch neutral	$X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$	2/4	0,5	3/4
semi-kontradikt.	$X / Y \longrightarrow X \wedge Y$	1/4	0,25	3/4

2. Quantoren-Logik

2.1 streng analytisch				
Tautologie	$\Lambda(X) \Rightarrow V(X)$	$2^n/2^n$	1	3/4
Kontradiktion	$\Lambda(X)\ {*}\nRightarrow V\neg(X)$	0/1	0	1/2
2.2 partiell analytisch	$V(X) \longrightarrow \Lambda(X)$	$1/2^{n-1}$	$0{,}5^{\,n-1}$	3/4

Λ (alle) = n/n, V (einige) > 0/n. Kontradiktion nur mit der *Positiv-Implikation*: $*\nRightarrow$

Struktur	p^T

3. Quantitative Logik

3.1 streng analytisch $p(X \wedge Y) = r/n \; {*}\!\Rightarrow \; p(Y) \geq r/n$

allgemein: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \; {*}\!\longrightarrow \; \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{n}$ $\qquad \binom{n-r}{n-s}(2/3)^{n-s}(1/3)^{s-r}$

- tautologisch $r \leq s$
- kontradiktorisch $r > s$
- partiell tautologisch $r = s$ (bzw. bestimmte Werte)

3.2 partiell analytisch $p(X) = r/n \; {*}\!\longrightarrow \; p(X \wedge Y) = r/n$

allgemein: $\dfrac{a+b}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \; {*}\!\longrightarrow \; \dfrac{a}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{n}$ $\qquad \binom{r}{r-s}(1/2)^{r-s}(1/2)^{s}$

- tautologisch $r \geq s$
- kontradiktorisch $r < s$
- partiell tautologisch $r = s$ (bzw. bestimmte Werte)

4. Quantitative Aussagen-Logik

4.1 streng analytisch: Struktur: $X \wedge Y \; {*}\!\Rightarrow \; Y$
Tautologie/deterministisch: $r = s = n$

$p(X \wedge Y) = r/n = 1 \; {*}\!\Rightarrow \; p(Y) = s/n = 1$ $\qquad \binom{n-r}{n-s}(2/3)^{n-s}(1/3)^{s-r}$

4.2 partiell analytisch: Struktur: $X \; {*}\!\longrightarrow \; X \wedge Y$
partiell tautologisch/deterministisch: $r = s = n$

$p(X) = r/n = 1 \; {*}\!\longrightarrow \; p(X \wedge Y) = s/n = 1$ $\qquad \binom{r}{r-s}(1/2)^{r-s}(1/2)^{s} = (1/2)^{s}$

5. Quantitative Quantoren-Logik

5.1 streng analytisch	$p(X \rightarrow Y) = n/n = 1 \; {*}\!\Rightarrow$ $p(X \rightarrow Y) > 0/n$	$3^n/3^n = 1$
5.2 partiell analytisch	$p(X \rightarrow Y) > 0/n \; {*}\!\longrightarrow$ $p(X \rightarrow Y) = n/n = 1$	$3^n/(4^n - 1)$

Normale Implikation: $\rightarrow \;\; \longrightarrow \;\; \Rightarrow$ *Positiv*-Implikation ${*}\!\rightarrow \;\; {*}\!\longrightarrow \;\; {*}\!\Rightarrow$
Die Positiv-Implikation $X \; {*}\!\rightarrow \; Y$ ist nur für die Welten definiert, in den X gültig ist.

5-0-5 Übersicht über ausgewählte Strukturen - Beispiele

(Überwiegend anhand von Zahlen-Beispielen. Jeweils n =5.)

	Struktur	p^T	p^T /dez.
1) SYNTHETISCH			
1. Aussagen-Logik			
1.1 absolut (fragwürdig)			
Tautologie	$X \Rightarrow (Y \vee \neg Y)$	4/4	1
Kontradiktion	$(X \vee \neg X) \not\Rightarrow (Y \wedge \neg Y)$	0/4	0
Tautologator	$X \top Y$	4/4	1
Antilogator	$X \perp Y$	0/4	0
1.2 relativ			
semi-tautologisch	$X \rightarrow Y$	3/4	0,75
logisch neutral	$X \leftrightarrow Y$	2/4	0,5
semi-kontradiktorisch	$X \wedge Y$	1/4	0,25
Negationen	$\neg(X \rightarrow Y)$	1/4	0,25
	$\neg(X \leftrightarrow Y)$	2/4	0,5
	$\neg(X \wedge Y)$	3/4	0,75
2. Quantoren-Logik			
2.1 einfach			
alle (= n = 5)	$\Lambda(X)$: $X_1 \wedge \ldots \wedge X_5$	1/32	0,03
alle nicht	$\Lambda\neg(X)$: $\neg X_1 \wedge \ldots \wedge \neg X_5$	1/32	0,03
einige	$V(X)$: $X_1 \vee \ldots \vee X_5$	31/32	0,97
einige nicht	$V\neg(X)$: $\neg X_1 \vee \ldots \vee \neg X_5$	31/32	0,97
2.2 komplex			
alle (= n = 5)	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	243/1024	0,24
alle nicht	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	1/1024	≈ 0
einige	$V(X \rightarrow Y)$	1023/1024	≈ 1
einige nicht	$V\neg(X \rightarrow Y)$	781/1024	0,76
Alternative			
alle	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	243/1024	0,24
alle nicht	$\Lambda(X \rightarrow \neg Y)$	243/1024	0,24
einige	$V(X \wedge Y)$	781/1024	0,76
einige nicht	$V(X \wedge \neg Y)$	781/1024	0,76

(p^T /dezimal auf 2 Stellen hinter dem Komma gekürzt.)

	Struktur	p^T	p^T/dez.	p^T/s
3. Quantitative Logik				
3.1 semi-tautologisch (strukturell)	$p(X \rightarrow Y)$ = 5/5	243/1024	0,24	3/4
	4/5	*405/1024	0,40	
	3/5	270/1024	0,26	
	2/5	90/1024	0,09	
	1/5	15/1024	0,02	
	0/5	1/1024	≈0,00	
3.2 logisch neutral (strukturell)	$p(X \leftrightarrow Y)$ = 5/5	32/1024	0,03	2/4
	4/5	160/1024	0,16	
	3/5	*320/1024	0,31	
	2/5	*320/1024	0,31	
	1/5	160/1024	0,16	
	0/5	32/1024	0,03	
3.3 semi-kontradiktor. (strukturell)	$p(X \wedge Y)$ = 5/5	1/1024	≈0,00	1/4
	4/5	15/1024	0,02	
	3/5	90/1024	0,09	
	2/5	270/1024	0,26	
	1/5	*405/1024	0,40	
	0/5	243/1024	0,24	
4. Quantitative Aussagen-Logik				
4.1 positiv				
	$p(X \rightarrow Y)$ = 1/1	*3/4	0,75	3/4
	2/2	9/16	0,56	
	3/3	27/64	0,42	
	4/4	81/256	0,32	
	5/5	243/1024	0,24	
	6/6	729/4096	0,18	
	7/7	2187/16385	0,13	
	8/8	6561/65536	0,10	
4.2 negativ				
	$p(X \rightarrow Y)$ = 0/1	*1/4	0,25	3/4
	0/2	1/16	0,06	
	0/3	1/64	0,02	
	0/4	1/256	≈ 0,00	
	0/5	1/1024	≈ 0,00	

(* = jeweils der höchste Wert)

	Struktur		p^T	p^T/dez.	p^T/s
5. Quantitative Quantoren-Logik					
2.1 einfach					
alle (= n = 5)	$p(X) = 1$	$p(X) = 5/5$	1/32	0,03	1/2
alle nicht	$p(X) = 0$	$p(X) = 0/5$	1/32	0,03	1/2
einige	$p(X) > 0$	$p(X) > 0/5$	31/32	0,97	1/2
einige nicht	$p(X) < 1$	$p(X) < 5/5$	31/32	0,97	1/2
2.2 komplex					
alle (= n = 5)	$p(X \rightarrow Y) = 1$		243/1024	0,24	3/4
alle nicht	$p(X \rightarrow Y) = 0$		1/1024	≈0,00	3/4
einige	$p(X \rightarrow Y) > 0$		1023/1024	≈1,00	3/4
einige nicht	$p(X \rightarrow Y) < 1$		781/1024	0,76	3/4
Alternativen	$p(X \rightarrow Y) = 1$		243/1024	0,24	3/4
	$p(X \rightarrow \neg Y) = 1$		243/1024	0,24	3/4
	$p(X \wedge Y) > 0$		781/1024	0,76	1/4
	$p(X \wedge \neg Y) > 0$		781/1024	0,76	1/4

2) ANALYTISCH

1. Aussagen-Logik

1.1 streng analytisch			
Tautologie	$X \wedge Y \Rightarrow Y$	4/4	1
Kontradiktion	$X \vee \neg X \;\not\Rightarrow\; X \wedge \neg X$	0/4	0
1.2 partiell analytisch			
semi-tautologisch	$X \vee Y \longrightarrow Y$	3/4	0,75
logisch neutral	$X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$	2/4	0,5
semi-kontradikt.	$X / Y \longrightarrow X \wedge Y$	1/4	0,25

2. Quantoren-Logik

2.1 streng analytisch			
Tautologie	$\bigwedge(X) \Rightarrow \bigvee(X)$	32/32	1
Kontradiktion	$\bigwedge(X) *\!\not\Rightarrow \bigvee\neg(X)$	0/1	0
2.2 partiell analytisch	$\bigvee(X) \longrightarrow \bigwedge(X)$ $X_1 \vee \ldots \vee X_5 \longrightarrow$ $X_1 \wedge \ldots \wedge X_5$	2/32	0,06

	Struktur	p^T	p^T/dez.
3. Quantitative Logik			
3.1 streng analytisch			
Tautologie	$p(X \rightarrow Y) = 4/5 \;\wedge$ $p(X) = 5/5 \;{*}{\Rightarrow}\; p(Y) = 4/5$	5/5	1
Kontradiktion	$p(X \rightarrow Y) = 4/5 \;\wedge$ $p(X) = 5/5 \;{*}{\not\Rightarrow}\; p(Y) = 3/5$	0/5	0
3.2 partiell analytisch			
- quantitativ	$p(X \leftrightarrow Y) \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \rightarrow Y)$		
	2/5 — 5/5	40/320 (1/8)	0,13
	4/4	120/320 (3/8)	0,38
	3/5	120/320 (3/8)	0,38
	2/5	40/320 (1/8)	0,13
- strukturell	$p(X \rightarrow Y) \;{*}{\longrightarrow}\; p(X \leftarrow Y)$		
	5/5 — 5/5	32/243	0,13
	4/5	80/243	0,33
	3/5	80/243	0,33
	2/5	40/243	0,16
	1/5	10/243	0,04
	0/5	1/243	≈0,00
4. Quantitative Aussagen-Logik			
4.1 streng analytisch			
Tautologie	$p(X \leftrightarrow Y) = 5/5 \;{*}{\Rightarrow}$ $p(X \rightarrow Y) = 5/5$	32/32	1
Kontradiktion	$p(X \leftrightarrow Y) = 5/5 \;{*}{\not\Rightarrow}$ $p(X \rightarrow Y) = 3/5$	0/32	0
4.2 partiell analytisch	$p(X \rightarrow Y) = 5/5 \;{*}{\longrightarrow}$ $p(X \leftarrow Y) = 5/5$	32/243	0,13
5. Quantitative Quantoren-Logik			
5.1 streng analytisch	$p(X \rightarrow Y) = 5/5 \;{*}{\Rightarrow}$ $p(X \rightarrow Y) > 0/5$	243/243	1
5.2 partiell analytisch	$p(X \rightarrow Y) = 5/5 \;{*}{\longrightarrow}$ $p(X \wedge Y) > 0/5$	211/243	0,87

5 – 1 LOGIK SYNTHETISCHER RELATIONEN

5-1-1 Aussagen-Logik

5-1-1-1 ÜBERSICHT ÜBER DIE RELATOREN

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		
1) Tautologie	+	+	+	+	$X \top Y$	X oder nicht X und Y oder nicht Y
2) Disjunktion	+	+	+	−	$X \vee Y$	X oder Y (oder beide)
3) Replikation	+	+	−	+	$X \leftarrow Y$	nur wenn Y, auch X
4) Präpension	+	+	−	−	$X \rfloor Y$	jedenfalls X (vielleicht Y)
5) Implikation	+	−	+	+	$X \rightarrow Y$	immer wenn X, dann Y
6) Postpension	+	−	+	−	$X \lfloor Y$	jedenfalls Y (vielleicht X)
7) Äquivalenz	+	−	−	+	$X \leftrightarrow Y$	X ist äquivalent Y
8) Konjunktion	+	−	−	−	$X \wedge Y$	X und Y
9) Exklusion	−	+	+	+	$X \mid Y$	X oder Y (aber nicht beide nicht)
10) Kontravalenz	−	+	+	−	$X >\!< Y$	X entweder X oder Y
11) Postnonpension	−	+	−	+	$X \lceil Y$	keinesfalls Y
12) Postsektion	−	+	−	−	$X >\!- Y$	X und nicht Y
13) Pränonpension	−	−	+	+	$X \rceil Y$	keinesfalls X
14) Präsektion	−	−	+	−	$X -\!< Y$	nicht X und Y
15) Rejektion	−	−	−	+	$X \nabla Y$	nicht X und nicht Y
16) Antilogie	−	−	−	−	$X \perp Y$	X und nicht X und Y und nicht Y

Die hier genannten *Bedeutungen* sind zwar die wichtigsten, aber es lassen sich auch andere Bedeutungen angeben. Wenn man z. B. eine *mengentheoretische Semantik* wählt, ergeben sich ganz andere Interpretationen, z. B. für $X \rightarrow Y$: X ist Teilmenge von Y.

Grundsätzlich lassen sich alle Relatoren auf einen *einzigen* zurückführen, z. B. auf die Exklusion $X \mid Y$ (auch „nand“ für non-and genannt) und auf die Rejektion $X \nabla Y$ (auch „nor“ für non-or genannt). „nand“ und „nor“ spielen bei der Computer-Logik eine besondere Rolle.

5-1-1-2 DARSTELLUNG DER RELATOREN MIT $\wedge$ und $\neg$

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y	Relator	$\wedge , \neg$
1)	+	+	+	+	$X \top Y$	$\neg(X \wedge \neg X)$
2)	+	+	+	−	$X \vee Y$	$\neg(\neg X \wedge \neg Y)$
3)	+	+	−	+	$X \leftarrow Y$	$\neg(\neg X \wedge Y)$
4)	+	+	−	−	$X \rfloor Y$	$\neg(\neg X \wedge Y) \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y)$
5)	+	−	+	+	$X \rightarrow Y$	$\neg(X \wedge \neg Y)$
6)	+	−	+	−	$X \lfloor Y$	$\neg(X \wedge \neg Y) \wedge \neg(\neg X \wedge Y)$
7)	+	−	−	+	$X \leftrightarrow Y$	$\neg(X \wedge \neg Y) \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y)$
8)	+	−	−	−	$X \wedge Y$	$X \wedge Y$
9)	−	+	+	+	$X \mid Y$	$\neg(X \wedge Y)$
10)	−	+	+	−	$X >< Y$	$\neg(X \wedge Y) \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y)$
11)	−	+	−	+	$X \lceil Y$	$\neg(X \wedge Y) \wedge \neg(\neg X \wedge Y)$
12)	−	+	−	−	$X >- Y$	$X \wedge \neg Y$
13)	−	−	+	+	$X \rceil Y$	$\neg(X \wedge Y) \wedge \neg(X \wedge \neg Y)$
14)	−	−	+	−	$X -< Y$	$\neg X \wedge Y$
15)	−	−	−	+	$X \hookleftarrow Y$	$\neg X \wedge \neg Y$
16)	−	−	−	−	$X \; K \; Y$	$X \wedge \neg X$

5-1-1-3 EINTEILUNG DER RELATOREN NACH GÜLTIGEN WELTEN

- 4-Welt-Relator: $\top$
- 3-Welt-Relatoren: $\rightarrow \; \leftarrow \; \vee \; |$
- 2-Welt-Relatoren: $\leftrightarrow \; >< \; \rfloor \; \lfloor \rceil \lceil$
- 1-Welt-Relatoren: $\wedge \; -< \; >- \; \nabla$
- 0-Welt-Relator: $\perp$

5-1-1-4 ARTEN VON WAHRHEITS-TAFELN

• normale Wahrheitstafel

vollständig

	$(X$	$\rightarrow$	$Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	+	+	+	+	+
2.	+	−	−	+	−
3.	−	+	−	+	+
4.	−	+	+	−	−

konzentriert

	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	−	+	−
3.	+	+	+
4.	+	−	−

• konjunktive Wahrheitstafel

	$(X \rightarrow Y)$	$\wedge$	Y	$\Rightarrow$	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
1.	+	+ +	+		+
2.	−	− −	+		+
3.	+	+ +	+		+
4.	+	− −	+		−

konjunktive *Deutung*

1.	$(X \rightarrow Y) \quad \wedge Y \quad \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+ - + -) \Rightarrow (+ + + -)$
2.	$\neg(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(- + - -) \Rightarrow (+ + + -)$
3.	$(X \rightarrow Y) \quad \wedge Y \quad \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+ - + -) \Rightarrow (+ + + -)$
4.	$(X \rightarrow Y) \quad \wedge \neg Y \Rightarrow \neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$	$(- - - +) \Rightarrow (- - - +)$

• implikative Wahrheitstafel

Imp	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	+	±	+
2.	−	+	−
3.	+	±	+
4.	+	±	−

implikative *Deutung*

1.	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+ + + -)$
2.	$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$	$(+ + + +)$
3.	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	$(+ + + -)$
4.	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$	$(- + - +)$

Daneben gibt es noch die *verstärkte implikative* Wahrheitstafel.

5-1-1-5 VOLLSTÄNDIGE WAHRHEITSTAFEL FÜR $X \rightarrow Y$

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		$X \rightarrow Y$
1) Tautologie	+	+	+	+	X T Y	+/−
2) Disjunktion	+	+	+	−	$X \vee Y$	+/−
3) Replikation	+	+	−	+	$X \leftarrow Y$	+/−
4) Präpension	+	+	−	−	$X \rfloor Y$	+/−
5) Implikation	+	−	+	+	$X \rightarrow Y$	+
6) Postpension	+	−	+	−	$X \lfloor Y$	+
7) Äquivalenz	+	−	−	+	$X \leftrightarrow Y$	+
8) Konjunktion	+	−	−	−	$X \wedge Y$	+
9) Exklusion	−	+	+	+	$X \mid Y$	+/−
10) Kontravalenz	−	+	+	−	$X >< Y$	+/−
11) Postnonpension	−	+	−	+	$X \lceil Y$	+/−
12) Postsektion	−	+	−	−	$X >- Y$	−
13) Pränonpension	−	−	+	+	$X \rceil Y$	+
14) Präsektion	−	−	+	−	$X -< Y$	+
15) Rejektion	−	−	−	+	$X \nabla Y$	+
(16) Antilogie	−	−	−	−	X K Y	+)

Die *normale Wahrheitstafel* kennt nur die 4 Relationen: $X \wedge Y$, $X >- Y$, $X -< Y$, $X \nabla Y$.
Die obige *vollständige* Wahrheitstafel berücksichtigt alle 16 logischen Möglichkeiten.
Allerdings ist die 16) Möglichkeit, die *Antilogie*, eine Kontradiktion; daher kann man sie nicht als echte Möglichkeit dazuzählen. Auch die *Tautologie* ist problematisch.
Es tauchen in der Wahrheitstafel unter dem $X \rightarrow Y$ 3 Werte auf: 1. +, 2. − und 3. +/−.
Dies ist folgendermaßen zu verstehen:

+: $\Phi \Rightarrow \Psi$: Ψ folgt logisch aus Φ. Z. B. $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$
− : $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$: $\neg\Psi$ folgt logisch aus Φ. Z. B. $X >- Y \Rightarrow \neg(X \rightarrow Y)$
+/−: $\Phi \longrightarrow \Psi$: Ψ folgt semi-analytisch aus Φ. Z. B. $X \vee Y \longrightarrow X \rightarrow Y$
$\Phi \longrightarrow \neg\Psi$: $\neg\Psi$ folgt semi-analytisch aus Φ. Z. B. $X \vee Y \longrightarrow \neg(X \rightarrow Y)$

Bei +/− ist $X \rightarrow Y$ nicht partiell wahr (falsch), sondern nur nicht sicher abzuleiten.
Es gibt ohne Tautologie und Antilogie: 7 +, 6 ±, 1 −. Sonst 8 +, 7±, 1 −.
Allerdings kann man den Wert − auch dem ± unterordnen, dann erhält man 8+ und 8±.

5-1-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

5-1-2-1 EINFACHE ALL- UND PARTIKULÄR-RELATIONEN

	Intensional	Extensional	Kurz-Form
1. alle x sind F			
Quantoren-Logik	$\Lambda x(Fx)$	$\Lambda x(x \in F)$	$\Lambda(X)$
Prädikaten-Logik	$Fx_1 \wedge ... \wedge Fx_n$	$x_1 \in F \wedge ... \wedge x_n \in F$	$X_1 \wedge ... \wedge X_n$
2. alle x sind $\neg F$			
Quantoren-Logik	$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Lambda x(x \notin F)$	$\Lambda\neg(X)$
Prädikaten-Logik	$\neg Fx_1 \wedge ... \wedge \neg Fx_n$	$x_1 \notin F \wedge ... \wedge x_n \notin F$	$\neg X_1 \wedge ... \wedge \neg X_n$
3. einige x sind F			
Quantoren-Logik	$Vx(Fx)$	$Vx(x \in F)$	$V(X)$
Prädikaten-Logik	$Fx_1 \vee ... \vee Fx_n$	$x_1 \in F \vee ... \vee x_n \in F$	$X_1 \vee ... \vee X_n$
4. einige x sind $\neg F$			
Quantoren-Logik	$Vx\neg(Fx)$	$Vx(x \notin F)$	$V\neg(X)$
Prädikaten-Logik	$\neg Fx_1 \vee ... \vee \neg Fx_n$	$x_1 \notin F \vee ... \vee x_n \notin F$	$\neg X_1 \vee ... \vee \neg X_n$

5-1-2-2 KOMPLEXE ALL- UND PARTIKULÄR-RELATIONEN

1. alle F sind G
   Sprache: ‚für alle x gilt: wenn sie F sind, sind sie auch G'
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n)$
   Vereinfacht: $\Lambda(X \rightarrow Y)$

2. alle F sind nicht G
   Sprache: ‚für alle x gilt: wenn sie F sind, sind sie nicht G'
   Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \rightarrow \neg Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow \neg Gx_2) \wedge ... \wedge (Fx_n \rightarrow \neg Gx_n)$
   Vereinfacht: $\Lambda(X \rightarrow \neg Y)$

3. einige F sind G
   Sprache: ‚für einige x gilt: sie sind F und sie sind G'
   Quantoren-Logik: $Vx(Fx \wedge Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$
   Vereinfacht: $V(X \wedge Y)$

4. einige F sind nicht G
   Sprache: ‚für einige x gilt: sie sind F und sie sind nicht G'
   Quantoren-Logik: $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
   Prädikaten-Logik: $(Fx_1 \wedge \neg Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge \neg Gx_2) \vee ... \vee (Fx_n \wedge \neg Gx_n)$
   Vereinfacht: $V(X \wedge \neg Y)$

5-1-2-3 MODELLE FÜR ALL- UND PARTIKULÄR-RELATIONEN

MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

1. alle F sind G $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
2. alle F sind nicht G $\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$
3. einige F sind G $Vx(Fx \rightarrow Gx)$
4. einige F sind nicht G $Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$

MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
2. alle F sind nicht G $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
3. einige F sind G $Vx(Fx \rightarrow Gx)$
4. einige F sind nicht G $Vx\ (Fx \rightarrow \neg Gx)$

MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G $\Lambda x(Fx \wedge Gx)$
2. alle F sind nicht G $\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$
3. einige F sind G $Vx(Fx \wedge Gx)$
4. einige F sind nicht G $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$

MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

1. alle F sind G $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
2. alle F sind nicht G $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$
3. einige F sind G $Vx(Fx \wedge Gx)$
4. einige F sind nicht G $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$

MODELL 5: POSITIV-IMPLIKATION UND NEGATIVE POSITIV-IMPLIKATION

1. alle F sind G $\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)$
2. alle F sind nicht G $\Lambda x(Fx *\!\rightarrow \neg Gx)$
3. einige F sind G $Vx(Fx *\!\rightarrow Gx)$
4. einige F sind nicht G $Vx(Fx *\!\rightarrow \neg Gx)$

Bei der Positiv-Implikation gilt wie bereits dargestellt:
$\Lambda x(Fx *\!\rightarrow \neg Gx) \Leftrightarrow \Lambda x\neg(Fx *\!\rightarrow Gx)$ und entsprechend.
So kann man auch anders schreiben:

1. alle F sind G $\Lambda x(Fx *\!\rightarrow Gx)$
2. alle F sind nicht G $\Lambda x\neg(Fx *\!\rightarrow Gx)$
3. einige F sind G $Vx(Fx *\!\rightarrow Gx)$
4. einige F sind nicht G $Vx\neg(Fx *\!\rightarrow Gx)$

5-1-3 Quantitative Logik

5-1-3-1 ÜBERSICHT ÜBER DIE RELATOREN

	+X +Y	+X –Y	–X +Y	–X –Y		
1) Tautologie	+	+	+	+	p(X $\top$ Y)	$\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$
2) Disjunktion	+	+	+	–	p(X $\vee$ Y)	$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$
3) Replikation	+	+	–	+	X $\leftarrow$ Y	$\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$
4) Präpension	+	+	–	–	X $\rfloor$ Y	$\frac{a+b}{a+b+c+d}$
5) Implikation	+	–	+	+	X $\rightarrow$ Y	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$
6) Postpension	+	–	+	–	X $\lfloor$ Y	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$
7) Äquivalenz	+	–	–	+	X $\leftrightarrow$ Y	$\frac{a+d}{a+b+c+d}$
8) Konjunktion	+	–	–	–	X $\wedge$ Y	$\frac{a}{a+b+c+d}$
9) Exklusion	–	+	+	+	X $\mid$ Y	$\frac{b+c+d}{a+b+c+d}$
10) Kontravalenz	–	+	+	–	X $><$ Y	$\frac{b+c}{a+b+c+d}$
11) Postnonpension	–	+	–	+	X $\lceil$ Y	$\frac{b+d}{a+b+c+d}$
12) Postsektion	–	+	–	–	X $>-$ Y	$\frac{b}{a+b+c+d}$
13) Pränonpension	–	–	+	+	X $\rceil$ Y	$\frac{c+d}{a+b+c+d}$
14) Präsektion	–	–	+	–	X $-<$ Y	$\frac{c}{a+b+c+d}$

15) Rejektion	– – – +	X ∇ Y	$\frac{d}{a+b+c+d}$
16) Antilogie	– – – –	X ⊥ Y	$\frac{0}{a+b+c+d}$

Ich habe im Text mehrfach begründet, dass ich den *Tautologator* und den *Antilogator* nicht als echte Relatoren ansehe. Ich berücksichtige sie daher normalerweise nicht.

5-1-3-2 POSITIV-IMPLIKATION

p(X *→ Y)	p(X *→ ¬ Y)	p(¬X *→ Y)	p(¬X *→ ¬Y)
$\frac{b}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{c}{c+d}$	$\frac{d}{c+d}$
p(X ←* Y)	p(¬X ←* Y)	p(X ←* ¬Y)	p(¬X ←* ¬Y)
$\frac{a}{a+c}$	$\frac{c}{a+c}$	$\frac{b}{b+d}$	$\frac{d}{b+d}$

5-1-3-3 QUANTITÄT

A) absolute Quantität q

1) der Klasse	q(Klasse)	z. B.	800
2) einer Teilklasse	q(Teilklasse)	z. B.	200

B) relative Quantität p

1) der Klasse	$\frac{q(Klasse)}{q(Klasse)}$	z. B.	800/800 = 1
2) der Teilklasse	$\frac{q(Teilklasse)}{q(Klasse)}$		
a) echte relative Quantität		z. B.	200/800
b) rechnerische relative Quantität			
• Bruchdarstellung			
- beliebiger Bruch		z. B.	225/900
- maximal gekürzter Bruch (mit natürlichen Zahlen)		z. B.	1/4
• Prozentdarstellung		z. B.	25%
• Dezimaldarstellung		z. B.	0,25

5-1-4 Quantitative Aussagen-Logik

ÜBERSICHT ÜBER DIE RELATOREN, DETERMINISTISCH: p = 1

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		
1) Disjunktion	+	+	+	−	$p(X \vee Y) = \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1$	d = 0
2) Replikation	+	+	−	+	$p(X \leftarrow Y) = \frac{a+b+d}{a+b+c+d} = 1$	c = 0
3) Präpension	+	+	−	−	$p(X \rfloor Y) = \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$	c+d = 0
4) Implikation	+	−	+	+	$p(X \rightarrow Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$	b = 0
5) Postpension	+	−	+	−	$p(X \lfloor Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$	b+d = 0
6) Äquivalenz	+	−	−	+	$p(X \leftrightarrow Y) = \frac{a+d}{a+b+c+d} = 1$	b+c = 0
7) Konjunktion	+	−	−	−	$p(X \wedge Y) = \frac{a}{a+b+c+d} = 1$	b+c+d = 0
8) Exklusion	−	+	+	+	$p(X \mid Y) = \frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 1$	a = 0
9) Kontravalenz	−	+	+	−	$p(X >< Y) = \frac{b+c}{a+b+c+d} = 1$	a+d = 0
10) Postnonpension	−	+	−	+	$p(X \lceil Y) = \frac{b+d}{a+b+c+d} = 1$	a+c = 0
11) Postsektion	−	+	−	−	$p(X >- Y) = \frac{b}{a+b+c+d} = 1$	a +c+d = 0
12) Pränonpension	−	−	+	+	$p(X \rceil Y) = \frac{c+d}{a+b+c+d} = 1$	a+b = 0
13) Präsektion	−	−	+	−	$p(X -< Y) = \frac{c}{a+b+c+d} = 1$	a+b+d = 0
14) Rejektion	−	−	−	+	$p(X \nabla Y) = \frac{d}{a+b+c+d} = 1$	a+b+c = 0

5-1-5 Quantitative Quantoren-Logik

All-Sätze p = 1, Neg. All-Sätze p = 0, Partikulär-Sätze p > 0, Neg. Partikulär-Sätze p < 1

5-1-5-1 ÜBERSICHT ÜBER PARTIKULÄR-SÄTZE (p > 0)

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		
1) Disjunktion	+	+	+	−	$p(X \vee Y) = \dfrac{a+b+c}{a+b+c+d} > 0$	a+b+c > 0
2) Replikation	+	+	−	+	$p(X \leftarrow Y) = \dfrac{a+b+d}{a+b+c+d} > 0$	a+b+d > 0
3) Präpension	+	+	−	−	$p(X \rfloor Y) = \dfrac{a+b}{a+b+c+d} > 0$	a+b > 0
4) Implikation	+	−	+	+	$p(X \rightarrow Y) = \dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$	a+c+d > 0
5) Postpension	+	−	+	−	$p(X \lfloor Y) = \dfrac{a+c}{a+b+c+d} > 0$	a+c > 0
6) Äquivalenz	+	−	−	+	$p(X \leftrightarrow Y) = \dfrac{a+d}{a+b+c+d} > 0$	a+d > 0
7) Konjunktion	+	−	−	−	$p(X \wedge Y) = \dfrac{a}{a+b+c+d} > 0$	a > 0
8) Exklusion	−	+	+	+	$p(X \mid Y) = \dfrac{b+c+d}{a+b+c+d} > 0$	b+c+d > 0
9) Kontravalenz	−	+	+	−	$p(X >< Y) = \dfrac{b+c}{a+b+c+d} > 0$	b+c > 0
10) Postnonpension	−	+	−	+	$p(X \lceil Y) = \dfrac{b+d}{a+b+c+d} > 0$	b+d > 0
11) Postsektion	−	+	−	−	$p(X >\!- Y) = \dfrac{b}{a+b+c+d} > 0$	b > 0
12) Pränonpension	−	−	+	+	$p(X \rceil Y) = \dfrac{c+d}{a+b+c+d} > 0$	c+d > 0
13) Präsektion	−	−	+	−	$p(X -\!< Y) = \dfrac{c}{a+b+c+d} > 0$	c > 0
14) Rejektion	−	−	−	+	$p(X \nabla Y) = \dfrac{d}{a+b+c+d} > 0$	d < 0

5-1-5-2 MODELLE FÜR ALL- UND PARTIKULÄR-RELATIONEN

MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

1. alle F sind G	$p(Fx \to Gx) = 1$		
2. alle F sind nicht G	$p(\neg(Fx \to Gx)) = 1$	oder	$p(Fx \to Gx) = 0$
3. einige F sind G	$p(Fx \to Gx) > 0$		
4. einige F sind nicht G	$p(\neg(Fx \to Gx)) > 0$	oder	$p(Fx \to Gx) < 1$

MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

1. alle F sind G	$p(Fx \to Gx) = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \to \neg Gx) = 1$
3. einige F sind G	$p(Fx \to Gx) > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \to \neg Gx) > 0$

MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

1. alle F sind G	$p(Fx \wedge Gx) = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) = 1$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$

MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

1. alle F sind G	$p(Fx \to Gx) = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \to \neg Gx) = 1$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$

MODELL 5: POSITIV-IMPLIKATION UND NEG. POSITIV-IMPLIKATION

1. alle F sind G	$p(Fx *\!\!\to Gx) = 1$		
2. alle F sind nicht G	$p(Fx *\!\!\to \neg Gx) = 1$	oder	$p(Fx *\!\!\to Gx) = 0$
3. einige F sind G	$p(Fx *\!\!\to Gx) > 0$		
4. einige F sind nicht G	$p(Fx *\!\!\to \neg Gx) > 0$	oder	$p(Fx *\!\!\to Gx) < 1$

Bei der Positiv-Implikation gilt wie bereits dargestellt:

$$p(Fx *\!\!\to Gx) = 0 \Leftrightarrow p(Fx *\!\!\to \neg Gx) = 1$$

So kann man auch anders schreiben:

1. alle F sind G	$p(Fx *\!\!\to Gx) = 1$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx *\!\!\to Gx) = 0$
3. einige F sind G	$p(Fx *\!\!\to Gx) > 0$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx *\!\!\to Gx) < 1$

5 – 2 LOGIK ANALYTISCHER RELATIONEN

5-2-1 AUSSAGEN-LOGIK

5-2-1-1 TAUTOLOGIEN DER IMPLIKATION (*MIT WAHRHEITSTAFELN*)

⇒

1.	− − − −	+ − − −	+ + − −	+ + + −	**+ + + +**
2.				+ + − +	
3.			+ − + −	+ + + −	
4.				+ − + +	
5.			+ − − +	+ + − +	
6.				+ − + +	
7.		− + − −	+ + − −	+ + + −	
8.				+ + − +	
9.			− + + −	+ + + −	
10.				− + + +	
11.			− + − +	+ + − +	
12.				− + + +	
13.		− − + −	+ − + −	+ + + −	
14.				+ − + +	
15.			− + + −	+ + + −	
16.				− + + +	
17.			− − + +	+ − + +	
18.				− + + +	
19.		− − − +	+ − − +	+ + − +	
20.				+ − + +	
21.			− + − +	+ + − +	
22.				− + + +	
23.			− − + +	+ − + +	
24.				− + + +	

Aus einer *Kontradiktion* folgt logisch *alles*: − − − − ⇒ alles
Aus *allem* folgt logisch eine *Tautologie*: alles ⇒ + + + +

Bei der *Positiv-Implikation* *→ bzw. *⇒ ist es anders:
Eine Positiv-Ableitung aus einer Kontradiktion ist *vollständig unbestimmt*.
Selbst der Positiv-Schluss von einer Kontradiktion auf eine *Tautologie* ist unbestimmt.

5-2-1-2 TAUTOLOGIEN DER IMPLIKATION (*MIT RELATIONEN*)

			$\Rightarrow$		
1.	X K Y	$X \wedge Y$	X	$X \vee Y$	X T Y
2.				$X \leftarrow Y$	
3.			Y	$X \vee Y$	
4.				$X \rightarrow Y$	
5.			$X \leftrightarrow Y$	$X \leftarrow Y$	
6.				$X \rightarrow Y$	
7.		$X \wedge \neg Y$	X	$X \vee Y$	
8.				$X \leftarrow Y$	
9.			X >< Y	$X \vee Y$	
10.				$X \mid Y$	
11.			$\neg Y$	$X \leftarrow Y$	
12.				$X \mid Y$	
13.		$\neg X \wedge Y$	Y	$X \vee Y$	
14.				$X \rightarrow Y$	
15.			X >< Y	$X \vee Y$	
16.				$X \mid Y$	
17.			$\neg X$	$X \rightarrow Y$	
18.				$X \mid Y$	
19.		$\neg X \wedge \neg Y$	$X \leftrightarrow Y$	$X \leftarrow Y$	
20.				$X \rightarrow Y$	
21.			$\neg Y$	$X \leftarrow Y$	
22.				$X \mid Y$	
23.			$\neg X$	$X \rightarrow Y$	
24.				$X \mid Y$	

Aus einer *Kontradiktion* folgt logisch *alles*: Kontradiktion $\Rightarrow$ alles
Aus *allem* folgt logisch eine *Tautologie*: alles $\Rightarrow$ Tautologie

T = Tautologie
K = Kontradiktion

5-2-1-3 ALLE (SEMI)ANALYTISCHEN VERBINDUNGEN VON →

		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
	→	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧	$\mid$	><	⌈	>–	⌉	–<	∇	K
1.	T	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧	$\mid$	><	⌈	>–	⌉	–<	∇	K
2.	∨	T	T	←	←	→	→	↔	↔	$\mid$	$\mid$	⌈	⌈	⌉	⌉	∇	∇
3.	←	T	∨	T	∨	→	⌊	→	⌊	$\mid$	><	$\mid$	><	⌉	–<	⌉	–<
4.	⌋	T	T	T	T	→	→	→	→	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	⌉	⌉	⌉	⌉
5.	→	T	∨	←	⌋	T	∨	←	⌋	$\mid$	><	⌈	–<	$\mid$	><	⌈	–<
6.	⌊	T	T	←	←	T	T	←	←	$\mid$	$\mid$	⌈	⌈	><	><	⌈	⌈
7.	↔	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	$\mid$	><	$\mid$	><	$\mid$	><	$\mid$	><
8.	∧	T	T	T	T	T	T	T	T	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$	$\mid$
9.	$\mid$	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧	T	∨	←	⌋	→	⌊	↔	∧
10.	><	T	T	←	←	→	→	↔	↔	T	T	←	←	→	→	↔	↔
11.	⌈	T	∨	T	∨	→	⌊	→	⌊	T	∨	T	∨	→	⌊	→	⌊
12.	>–	T	T	T	T	→	→	→	→	T	T	T	T	→	→	→	→
13.	⌉	T	∨	←	⌋	T	∨	←	⌋	T	∨	←	⌋	T	∨	←	⌋
14.	–<	T	T	←	←	T	T	←	←	T	T	←	←	T	T	←	←
15.	∇	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨	T	∨
16.	K	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T

Diese Tabelle gibt alle analytischen oder semi-analytischen möglichen *Implikationen* an.
Die Relation in der Tabelle gibt dann an, welchem Relator (welcher synthetischen Relation) die Implikation entspricht: T = Tautologie, K = Kontradiktion.

Diese Tabelle ist folgendermaßen zu lesen (erst linke Nummer, dann rechte Nummer):
z. B.: 2.3. $[(X \vee Y) \longrightarrow (X \leftarrow Y)] \Leftrightarrow (X \leftarrow Y)$
z. B.: 7.15. $[(X \leftrightarrow Y) \longrightarrow (X \nabla Y)] \Leftrightarrow (X \mid Y)$
Es ist interessant, wie viele Symmetrien die Tabelle enthält.

5-2-1-4 LOGISCHES QUADRAT UND GEGENSATZ

Man kann Beziehungen zwischen bestimmten Relatoren durch das *logische Quadrat* angeben.

$X \wedge Y$	$^{+}\mid^{+}$	$X \nabla Y$
$\Downarrow$	$^{+}{><}^{+}$	$\Downarrow$
$X \vee Y$	$^{+}\vee^{+}$	$X \mid Y$

Vor allem lassen sich auf diese Weise *Gegensätze* darstellen, nach ihrer Stärke geordnet:

Kontradiktorisch	$X >< Y$:	entweder ist X gültig oder Y
Konträr	$X \mid Y$:	X und Y sind nicht beide gültig
Subkonträr	$X \vee Y$:	X und Y sind nicht beide ungültig
Subaltern	$X \rightarrow Y$:	wenn X gültig ist, dann auch Y

Man könnte zwar auch *synthetische* Gegensätze definieren (entsprechend den oben genannten Relatoren), aber normalerweise versteht man in der Logik die Gegensätze als *analytisch*; insofern kommen die analytischen Versionen der Relatoren zum Einsatz: $^{*}{><}^{+}$ $^{+}|^{+}$ $^{+}\vee^{+}$ $\Rightarrow$

		Konträr		
	$X \wedge Y$	$^{+}\mid^{+}$	$X \nabla Y$	
subaltern	$\Downarrow$	kontra- $^{+}{><}^{+}$ diktorisch	$\Downarrow$	subaltern
	$X \vee Y$	$^{+}\vee^{+}$	$X \mid Y$	
		subkonträr		

Zur besseren Übersicht die einzelnen Gegensatz-Relationen des Quadrats gelistet:

$X \wedge Y$ $^{+}{><}^{+}$ $X \mid Y$ kontradiktorisch
$X \nabla Y$ $^{+}{><}^{+}$ $X \vee Y$

$X \wedge Y$ $^{+}|^{+}$ $X \nabla Y$ konträr

$X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$ subaltern
$X \nabla Y \Rightarrow X \mid Y$

$X \vee Y$ $^{+}\vee^{+}$ $X \mid Y$ subkonträr

5-2-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

5-2-2-1 LOGISCHES QUADRAT

Normale Sprache

alle	$^{+}\vert^{+}$	alle nicht
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
einige	$^{+}\vee^{+}$	einige nicht

Einfache Relationen: Quantoren-Logik

$\Lambda x(Fx)$	$^{+}\vert^{+}$	$\Lambda x\neg(Fx)$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
$Vx(Fx)$	$^{+}\vee^{+}$	$Vx\neg(Fx)$

Einfache Relationen: Prädikaten-Logik

$Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n$	$^{+}\vert^{+}$	$\neg Fx_1 \wedge \ldots \wedge \neg Fx_n$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
$Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$	$^{+}\vee^{+}$	$\neg Fx_1 \vee \ldots \vee \neg Fx_n$

Komplexe Relationen: Quantoren-Logik

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$^{+}\vert^{+}$	$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$^{+}\vee^{+}$	$Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$

Das Zeichen $^{+}{>}{<}^{+}$ in der Mitte bezieht sich auf *beide* Diagonalen.
(Die Quadratform ist nicht exakt eingehalten, um die Abbildungen nicht zu groß zu machen.)

5-2-2-2 GESETZE

• einfache Relationen

Äquivalenzen

$\Lambda x(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx(Fx)$
$\neg\Lambda x(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx\neg(Fx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx(Fx)$

Schlüsse (die aus den Äquivalenzen folgen, eine Auswahl)

$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Rightarrow$	$\neg Vx(Fx)$
$\neg\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx\neg(Fx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$

Schlüsse (die nicht aus den Äquivalenzen folgen)

$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$
$\neg\Lambda x(Fx)$	$\Leftarrow$	$\neg Vx(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx\neg(Fx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx)$	$\Leftarrow$	$\neg Vx\neg(Fx)$

• komplexe Relationen

Äquivalenzen

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx \wedge \neg Gx)$
$\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx\neg(Fx \wedge \neg Gx)$

Schlüsse (die aus den Äquivalenzen folgen, eine Auswahl)

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$\Rightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$
$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$	$\Rightarrow$	$\neg Vx(Fx \rightarrow Gx)$
$\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$\Rightarrow$	$Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx \rightarrow Gx)$

Schlüsse (die nicht aus den Äquivalenzen folgen)

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx \rightarrow Gx)$
$\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$\Leftarrow$	$\neg Vx(Fx \rightarrow Gx)$
$\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$	$\Rightarrow$	$Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx)$	$\Leftarrow$	$\neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)$

Durch Verwendung einer spezifischen *Individuen-Konstante* x_i sind zusätzlich z. B. folgende Schlüsse möglich:

$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Fx_i$

$\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow \neg Fx_i$

$Fx_i \Rightarrow Vx(Fx)$

$\neg Fx_i \Rightarrow Vx\neg(Fx)$

5-2-2-3 MODAL- UND HYPER-LOGIK

Man kann auf der *Quantoren-Logik* eine *Modal-Logik* bzw. andere Logiken aufbauen. Dabei zeigt sich, dass sich Unterschiede z. B. zwischen *notwendig* und *möglich* rein quantitativ auffassen lassen, nämlich dem Unterschied zwischen *alle* und *einige* entsprechen.

Zur Orientierung über die logischen Beziehungen sei das *logische Quadrat* dargestellt:

alle	⁺|⁺	alle ¬
⇓	⁺><⁺	⇓
einige	⁺∨⁺	einige ¬

	ALLE ¬EINIGE¬	¬ALLE¬ EINIGE	¬ALLE EINIGE¬	ALLE¬ ¬EINIGE
1) MODALITÄT				
1.Alethisch	Notwendig	¬Notwendig¬	¬Notwendig	Notwendig¬
	¬Möglich¬	Möglich	Möglich¬	¬Möglich
	Unmöglich¬	*¬Unmöglich*	*¬Unmöglich¬*	*UNMÖGLICH*
2.Normativ	Müssen	(¬Müssen¬)	(¬Müssen)	Müssen¬
	(¬Dürfen¬)	Dürfen	Dürfen¬	(¬Dürfen)
3.Deontisch	Geboten	¬Geboten¬	¬Geboten	Geboten¬
	¬Erlaubt¬	Erlaubt	Erlaubt¬	¬Erlaubt
	Verboten¬	*¬Verboten*	*¬Verboten¬*	*VERBOTEN*
2) Sonstige				
1.Zeit	Immer	¬Immer¬	¬Immer	Immer¬
	¬Manchmal¬	Manchmal	Manchmal¬	¬Manchmal
	Niemals¬	*¬Niemals*	*¬Niemals¬*	*NIEMALS*
2.Ort	Überall	¬Überall¬	¬Überall	Überall¬
	¬Mancherorts¬	Mancherorts	Mancherorts¬	¬Mancherorts
	Nirgends¬	*¬Nirgends*	*¬Nirgends¬*	*NIRGENDS*

Jede Logik beruht primär auf 2 Operatoren, z. B. „notwendig“ und „möglich“. Es gibt aber immer einen dritten abgeleiteten Operator, hier „unmöglich“. Der wird *kursiv* geschrieben bzw. in seiner Normalform GROSS.

5-2-3 Quantitative Logik

5-2-3-1 SCHLÜSSE MIT UNGLEICHUNGEN

Die Schlüsse gelten auch für die *Positiv-Implikation* $*\!\rightarrow$ bzw. $*\!\Rightarrow$.

1. $p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \geq r/n$
2. $p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \leq r/n$
3. $p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \geq (n - r)/n$
4. $p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \geq (n - r)/n$

1. $\underline{p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \leq r/n}$

Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) nur *partiell* analytisch sind, aber Umkehrungen von vollständigen Schlüssen sind.
Z. B.: $X \vee Y \longrightarrow Y$ oder $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$
Die gültigen Welten der Konklusion sind eine Teilmenge der gültigen Welten der Prämisse.

- $p(X \vee Y) = r/n \;\Rightarrow\; p(Y) \leq r/n$
- $p(X \vee Y) = r/n \;\Rightarrow\; p(X \wedge Y) \leq r/n$

2. $\underline{p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \geq r/n}$

Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *streng* analytisch sind. Die gültigen Welten der Prämisse sind eine Teilmenge der gültigen Welten der Konklusion.

- $p(Y) = r/n \;\Rightarrow\; p(X \vee Y) \geq r/n$
- $p(X \wedge Y) = r/n \;\Rightarrow\; p(X \vee Y) \geq r/n$

3. $\underline{p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \geq (n - r)/n}$

Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *partiell* analytisch sind. Dabei schneiden sich die Mengen der gültigen Welten von Prämisse und Konklusion.

- $p(X \rightarrow Y) = r/n \;\Rightarrow\; p(X \leftarrow Y) \geq (n - r)/n$
- $p(X \rightarrow Y) = r/n \;\Rightarrow\; p(\neg Y) \geq (n - r)/n$

4. $\underline{p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \leq (n - r)/n}$

Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *partiell* analytisch sind. Dabei sind Prämisse und Konklusion in keiner Welt gemeinsam gültig.

- $p(X \wedge Y) = r/n \;\Rightarrow\; p(X \wedge \neg Y) \leq (n - r)/n$
- $p(X \wedge Y) = r/n \;\Rightarrow\; p(X \nabla Y) \leq (n - r)/n$

5-2-3-2 GLEICHUNGEN

1. *Negation*

$p(\Phi) = r/n \Leftrightarrow p\neg(\Phi) = 1 - r/n.$ $p\neg(\Phi) =_{df} p(\Psi)$

$p(\Phi) = r/n \Leftrightarrow p(\Psi) = 1 - r/n$

$p(\Phi) = 1 - p(\Psi)$ bzw. $p(\Psi) = 1 - p(\Phi)$ bzw. $p(\Phi) + p(\Psi) = 1$

2. *Addition*

$p(\Phi_1) + p(\Phi_2) = p(\Psi)$

Beispiel: $p(X \wedge Y) + p(X \nabla Y) = p(X \leftrightarrow Y)$

$p(\Phi_1) + p(\Phi_2) + ... + p(\Phi_n) = p(\Psi)$

Beispiel: $p(X \wedge Y) + p(X -< Y) + p(X \nabla Y) = p(X \rightarrow Y)$

3. *Subtraktion*

$p(\Phi_1) - p(\Phi_2) = p(\Psi)$

Beispiel: $p(X >< Y) - p(X -< Y) = p(X >- Y)$

$p(\Phi_1) - p(\Phi_2) - ... - p(\Phi_n) = p(\Psi)$

Beispiel: $p(X \vee Y) - (p(X -< Y) - p(X >- Y) = p(X \wedge Y)$

4. *Kombiniert*

Beispiel (Konjunktion): $p(X \rightarrow Y) + p(X \leftarrow Y) - 1 = p(X \leftrightarrow Y)$

Qualitativ: $(X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y) \Leftrightarrow X \leftrightarrow Y$

Beispiel (Disjunktion): $p(X >< Y) + p(X \mid Y) = p(X \mid Y)$

Qualitativ : $(X >< Y) \vee p(X \mid Y) \Leftrightarrow p(X \mid Y)$

(Hier muss man in der quantitativen Formel die *doppelten* Variablen bzw. Buchstaben streichen.)

5-2-3-3 TABELLE: (POSITIV-)SCHLUSS p(X ∧ Y) = r/n *⟶ p(X R Y) = s/n
Prämisse = Konjunktion ∧. Relation R = ⌋, →, >– u. ä. Für n = 1 bis n = 4
z. B. p(X ∧ Y) = 0/3, dann kann p(X → Y) folgende Werte annehmen: 3/3, 2/3, 1/3, 0/3

n	p(X ∧ Y)	⟶ *⟶	p(X) = p(X ⌋ Y)	p(X → Y)	p(X >– Y)
	$\frac{a}{a+b+c+d}$		$\frac{a+b}{a+b+c+d}$	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	$\frac{b}{a+b+c+d}$
1	1/1		1/1	1/1	0/1
	0/1		1/1	1/1	1/1
			0/1	0/1	0/1
2	2/2		2/2	2/2	0/2
	1/2		2/2	2/2	1/2
			1/2	1/2	0/2
	0/2		2/2	2/2	2/2
			1/2	1/2	1/2
			0/2	0/2	0/2
3	3/3		3/3	3/3	0/3
	2/3		3/3	3/3	1/3
			2/3	2/3	0/3
	1/3		3/3	3/3	2/3
			2/3	2/3	1/3
			1/3	1/3	0/3
	0/3		3/3	3/3	3/3
			2/3	2/3	2/3
			1/3	1/3	1/3
			0/3	0/3	0/3
4	4/4		4/4	4/4	0/4
	3/4		4/4	4/4	1/4
			3/4	3/4	0/4
	2/4		4/4	4/4	2/4
			3/4	3/4	1/4
			2/4	2/4	0/4
	1/4		4/4	4/4	3/4
			3/4	3/4	2/4
			2/4	2/4	1/4
			1/4	1/4	0/4
	0/4		4/4	4/4	4/4
			3/4	3/4	3/4
			2/4	2/4	2/4
			1/4	1/4	1/4
			0/4	0/4	0/4

5-2-4 Quantitative Aussagen-Logik

TAUTOLOGIEN DER IMPLIKATION - DETERMINISTISCH

		$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
1.	$p(X \wedge Y) = 1$	$p(X \rfloor Y) = 1$	$p(X \vee Y) = 1$
2.			$p(X \leftarrow Y) = 1$
3.		$p(X \lfloor Y) = 1$	$p(X \vee Y) = 1$
4.			$p(X \rightarrow Y) = 1$
5.		$p(X \leftrightarrow Y) = 1$	$p(X \leftarrow Y) = 1$
6.			$p(X \rightarrow Y) = 1$
7.	$p(X >\!- Y) = 1$	$p(X \rfloor Y) = 1$	$p(X \vee Y) = 1$
8.			$p(X \leftarrow Y) = 1$
9.		$p(X >\!< Y) = 1$	$p(X \vee Y) = 1$
10.			$p(X \mid Y) = 1$
11.		$p(X \lceil Y) = 1$	$p(X \leftarrow Y) = 1$
12.			$p(X \mid Y) = 1$
13.	$p(X -\!< Y) = 1$	$p(X \lfloor Y) = 1$	$p(X \vee Y) = 1$
14.			$p(X \rightarrow Y) = 1$
15.		$p(X >\!< Y) = 1$	$p(X \vee Y) = 1$
16.			$p(X \mid Y) = 1$
17.		$p(X \rceil Y) = 1$	$p(X \rightarrow Y) = 1$
18.			$p(X \mid Y) = 1$
19.	$p(X \nabla Y) = 1$	$p(X \leftrightarrow Y) = 1$	$p(X \leftarrow Y) = 1$
20.			$p(X \rightarrow Y) = 1$
21.		$p(X \lceil Y) = 1$	$p(X \leftarrow Y) = 1$
22.			$p(X \mid Y) = 1$
23.		$p(X \rceil Y) = 1$	$p(X \rightarrow Y) = 1$
24.			$p(X \mid Y) = 1$

Entsprechend gelten aussagen-logisch z. B.:

$$p(X \vee Y) = 0 \;\Rightarrow\; p(X \rfloor Y) = 0 \;\Rightarrow\; p(X \wedge Y) = 0$$

Und quantoren-logisch:

$$p(X \wedge Y) > 0 \;\Rightarrow\; p(X \rfloor Y) > 0 \;\Rightarrow\; p(X \vee Y) > 0$$

$$p(X \vee Y) < 1 \;\Rightarrow\; p(X \rfloor Y) < 1 \;\Rightarrow\; p(X \wedge Y) < 1$$

5-2-5 Quantitative Quantoren-Logik

LOGISCHES QUADRAT

Normale Sprache

Alle	$^{+}\mid^{+}$	Alle nicht
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
Einige	$^{+}\vee^{+}$	Einige nicht

Einfache Relationen

$p(Fx) = 1$	$^{+}\mid^{+}$	$p(Fx) = 0$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
$p(Fx) > 0$	$^{+}\vee^{+}$	$p(Fx) < 1$

Komplexe Relationen

$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$	$^{+}\mid^{+}$	$p(Fx \rightarrow Gx) = 0$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
$p(Fx \rightarrow Gx) > 0$	$^{+}\vee^{+}$	$p(Fx \rightarrow Gx) < 1$

5 – 3 META-LOGIK SYNTHETISCHER RELATIONEN

5-3-1 Aussagen-Logik

THEORETISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT DER RELATOREN

	+X +Y	+X −Y	−X +Y	−X −Y		p^T
1) Tautologie	+	+	+	+	X ⊤ Y	4/4 = 1
2) Disjunktion	+	+	+	–	X ∨ Y	3/4 = 0,75
3) Replikation	+	+	–	+	X ← Y	3/4 = 0,75
4) Implikation	+	–	+	+	X → Y	3/4 = 0,75
5) Exklusion	–	+	+	+	X | Y	3/4 = 0,75
6) Präpension	+	+	–	–	X ⌋ Y	2/4 = 0,5
7) Postpension	+	–	+	–	X ⌊ Y	2/4 = 0,5
8) Äquivalenz	+	–	–	+	X ↔ Y	2/4 = 0,5
9) Kontravalenz	–	+	+	–	X >< Y	2/4 = 0,5
10) Postnonpension	–	+	–	+	X ⌈ Y	2/4 = 0,5
11) Pränonpension	–	–	+	+	X ⌉ Y	2/4 = 0,5
12) Konjunktion	+	–	–	–	X ∧ Y	1/4 = 0,25
13) Postsektion	–	+	–	–	X >– Y	1/4 = 0,25
14) Präsektion	–	–	+	–	X –< Y	1/4 = 0,25
15) Rejektion	–	–	–	+	X ∇ Y	1/4 = 0,25
16) Antilogie	–	–	–	–	X ⊥ Y	0/4 = 0

5-3-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

5-3-2-1 MODELLE FÜR ALL- UND PARTIKULÄR-RELATIONEN

alle:	n/n	vereinfacht:	alle:	n
alle nicht:	0/n		alle nicht:	0
einige:	> 0/n		einige:	> 0
einige nicht:	< n/n		einige nicht:	< n

MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION		p^T
1. alle F sind G	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$3^n/4^n$
2. alle F sind nicht G	$\Lambda x \neg(Fx \rightarrow Gx)$	$1/4^n$
3. einige F sind G	$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$(4^n - 1)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$Vx \neg(Fx \rightarrow Gx)$	$(4^n - 3^n)/4^n$

MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION		
1. alle F sind G	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$3^n/4^n$
2. alle F sind nicht G	$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$	$3^n/4^n$
3. einige F sind G	$Vx(Fx \rightarrow Gx)$	$(4^n - 1)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$Vx\ (Fx \rightarrow \neg Gx)$	$(4^n - 1)/4^n$

MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION		
1. alle F sind G	$\Lambda x(Fx \wedge Gx)$	$1/4^n$
2. alle F sind nicht G	$\Lambda x(Fx \wedge \neg Gx)$	$1/4^n$
3. einige F sind G	$Vx(Fx \wedge Gx)$	$(4^n - 3^n)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$	$(4^n - 3^n)/4^n$

MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION		
1. alle F sind G	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$3^n/4^n$
2. alle F sind nicht G	$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$	$3^n/4^n$
3. einige F sind G	$Vx(Fx \wedge Gx)$	$(4^n - 3^n)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$	$(4^n - 3^n)/4^n$

MODELL 5: (NEGATIVE) POSITIV-IMPLIKATION		
1. alle F sind G	$\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$	$1/2^n$
2. alle F sind nicht G	$\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow \neg Gx)$	$1/2^n$
3. einige F sind G	$Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$	$(2^n - 1)/2^n$
4. einige F sind nicht G	$Vx(Fx *\!\!\rightarrow \neg Gx)$	$(2^n - 1)/2^n$

5-3-2-2 STATISTISCHE VERTEILUNG MIT 3 INDIVIDUEN: x, y, z (n = 3)

	X∧Y	X∧¬Y	¬X∧Y	¬X∧¬Y	p^T
	+ +	+ −	+ −	+ +	
	a	b	c	d	
1.	x,y,z				1/64
2.	x,y	z			1/64
3	x,z	y			1/64
4.	y,z	x			1/64
5.	x	y,z			1/64
6.	y	x,z			1/64
7.	z	x,y			1/64
8.		x,y,z			1/64
9.	x,y		z		1/64
10.	x,z		y		1/64
11.	y,z		x		1/64
12.	x,y			z	1/64
13.	x,z			y	1/64
14.	y,z			x	1/64
15.	x	y	z		1/64
16.	x	z	y		1/64
17.	y	x	z		1/64
18.	y	z	x		1/64
19.	z	x	y		1/64
20.	z	y	x		1/64
21.	x	y		z	1/64
22.	x	z		y	1/64
23.	y	x		z	1/64
24.	y	z		x	1/64
25.	z	x		y	1/64
26.	z	y		x	1/64
27.		x,y			1/64
28.		x,z			1/64
29.		y,z			1/64
30.		x,y		z	1/64
31.		x,z		y	1/64
32.		y,z		x	1/64
33	x		y,z		1/64
34	y		x,z		1/64
35	z		x,y		1/64
36	x		y	z	1/64
37	x		z	y	1/64
38	y		x	z	1/64
39	y		z	x	1/64
40	z		x	y	1/64
41	z		y	x	1/64
42	x			y,z	1/64
43	y			x,z	1/64
44	z			x,y	1/64
45		x	y,z		1/64
46		y	x,z		1/64

47		z	x,y		1/64
48		x	y	z	1/64
49		x	z	y	1/64
50		y	x	z	1/64
51		y	z	x	1/64
52		z	x	y	1/64
53		z	y	x	1/64
54		x		y,z	1/64
55		y		x,z	1/64
56		z		x,y	1/64
57			x,y,z		1/64
58			x,y	z	1/64
59			x,z	y	1/64
60			y,z	x	1/64
61			x	y,z	1/64
62			y	x,z	1/64
63			z	x,y	1/64
64				x,y,z	1/64
					64/64

5-3-2-3 STATISTISCHE VERTEILUNG, ZUSAMMENFASSUNG (n = 3)

Nr.	X∧Y	X∧¬Y	¬X∧Y	¬X∧¬Y	p^T
	a	b	c	d	
1)	3	0	0	0	1/64
2)	2	1	0	0	3/64
3)	1	2	0	0	3/64
4)	0	3	0	0	1/64
5)	2	0	1	0	3/64
6)	2	0	0	1	3/64
7)	1	1	1	0	6/64
8)	1	1	0	1	6/64
9)	0	2	1	0	3/64
10)	0	2	0	1	3/64
11)	1	0	2	0	3/64
12)	1	0	1	1	6/64
13)	1	0	0	2	3/64
14)	0	1	2	0	3/64
15)	0	1	1	1	6/64
16)	0	1	0	2	3/64
17)	0	0	3	0	1/64
18)	0	0	2	1	3/64
19)	0	0	1	2	3/64
20)	0	0	0	3	1/64
					64/64

5-3-3 Quantitative Logik

5-3-3-1 p^T SYNTHETISCHER RELATIONEN DES TYPS „IMPLIKATION“
Implikation →, Replikation ←, Disjunktion ∨, Exklusion | . Für n = 1 bis n = 8
z. B. die 1. Zeile ist für die Implikation → zu lesen: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 1/1] = 3/4 = 0{,}75 = 75\%$

Variablen n	Objekt-Werte p		Meta-Werte p^T		Meta-Werte	Meta-Werte
	Zähler	Nenner	Zähler	Nenner	dezimal	% (genauer)
1	1	1	3	4	0,75	75,00 %
	0	1	1	4	0,25	25,00 %
2	2	2	9	16	0,56	56,20 %
	1	2	6	16	0,38	37,50 %
	0	2	1	16	0,06	6,25 %
3	3	3	27	64	0,42	42,19 %
	2	3	27	64	0,42	42,19 %
	1	3	9	64	0,14	14,06 %
	0	3	1	64	0,02	1,56 %
4	4	4	81	256	0,32	32,64 %
	3	4	108	256	0,42	42,19 %
	2	4	54	256	0,21	21,09 %
	1	4	12	256	0,05	4,69 %
	0	4	1	256	≈ 0	0,39 %
5	5	5	243	1024	0,24	23,73 %
	4	5	405	1024	0,40	39,55 %
	3	5	270	1024	0,26	26,37 %
	2	5	90	1024	0,09	8,79 %
	1	5	15	1024	0,01	1,46 %
	0	5	1	1024	≈ 0	0,10 %
6	6	6	729	4096	0,18	17,80 %
	5	6	1558	4096	0,38	38,04 %
	4	6	1215	4096	0,30	29,66 %
	3	6	540	4096	0,13	13,18 %
	2	6	135	4096	0,03	3,30 %
	1	6	18	4096	≈ 0	0,44 %
	0	6	1	4096	≈ 0	0,02 %
7	7	7	2187	16384	0,13	13,35 %
	6	7	5103	16384	0,31	31,15 %
	5	7	5103	16384	0,31	31,15 %
	4	7	2835	16384	0,17	17,30 %
	3	7	945	16384	0,06	5,77 %
	2	7	189	16384	0,01	1,15 %
	1	7	21	16384	≈ 0	0,13 %
	0	7	1	16384	≈ 0	0,01 %
8	8	8	6561	65536	0,10	10,01 %
	7	8	17496	65536	0,27	26,70 %
	6	8	20412	65536	0,31	31,13 %
	5	8	13608	65536	0,21	20,76 %
	4	8	5607	65536	0,09	8,56 %
	3	8	1512	65536	0,02	2,31 %
	2	8	252	65536	≈ 0	0,38 %
	1	8	24	65536	≈ 0	0,04 %
	0	8	1	65536	≈ 0	≈ 0 %

5-3-3-2 p^T SYNTHETISCHER RELATIONEN DES TYPS „KONJUNKTION“

für Konjunktion $\wedge$, Präsektion $-<$, Postsektion $>-$, Rejektion ∇ . Für n = 1 bis n = 8
z. B. die 1. Zeile ist für die Konjunktion $\wedge$ zu lesen: $p^T[p(X \wedge Y) = 1/1] = 1/4 = 0,25 = 25\%$

Variablen n	Objekt-Werte p		Meta-Werte p^T		Meta-Werte	Meta-Werte
	Zähler	Nenner	Zähler	Nenner	Dezimal	% (genauer)
1	1	1	1	4	0,25	25,00 %
	0	1	3	4	0,75	75,00 %
2	2	2	1	16	0,06	6,25 %
	1	2	6	16	0,38	37,50 %
	0	2	9	16	0,56	56,20 %
3	3	3	1	64	0,02	1,56 %
	2	3	9	64	0,14	14,06 %
	1	3	27	64	0,42	42,19 %
	0	3	27	64	0,42	42,19 %
4	4	4	1	256	≈ 0	0,39 %
	3	4	12	256	0,05	4,69 %
	2	4	54	256	0,21	21,09 %
	1	4	108	256	0,42	42,19 %
	0	4	81	256	0,32	32,64 %
5	5	5	1	1024	≈ 0	0,10 %
	4	5	15	1024	0,01	1,46 %
	3	5	90	1024	0,09	8,79 %
	2	5	270	1024	0.26	26,37 %
	1	5	405	1024	0,40	39,55 %
	0	5	243	1024	0,24	23,73 %
6	6	6	1	4096	≈ 0	0,02 %
	5	6	18	4096	≈ 0	0,44 %
	4	6	135	4096	0,03	3,30 %
	3	6	540	4096	0,13	13,18 %
	2	6	1215	4096	0,30	29,66 %
	1	6	1558	4096	0,38	38,04 %
	0	6	729	4096	0,18	17,80%
7	7	7	1	16384	≈ 0	0,01 %
	6	7	21	16384	≈ 0	0,13 %
	5	7	189	16384	0,01	1,15 %
	4	7	945	16384	0,06	5,77 %
	3	7	2835	16384	0,17	17,30 %
	2	7	5103	16384	0,31	31,15 %
	1	7	5103	16384	0,31	31,15 %
	0	7	2187	16384	0,13	13,35 %
8	8	8	1	65536	≈ 0	≈ 0 %
	7	8	24	65536	≈ 0	0,04 %
	6	8	252	65536	≈ 0	0,38 %
	5	8	1512	65536	0,02	2,31 %
	4	8	5607	65536	0,09	8,56 %
	3	8	13608	65536	0,21	20,76 %
	2	8	20412	65536	0,31	31,13 %
	1	8	17496	65536	0,27	26,70 %
	0	8	6561	65536	0,10	10,01 %

5-3-3-3 p^T SYNTHETISCHER RELATIONEN DES TYPS „ÄQUIVALENZ“
für Äquivalenz ↔, Kontravalenz ><, auch Positiv-Implikation u. a. Für n = 1 bis n = 8
z. B. die 1. Zeile ist für die Äquivalenz ↔ zu lesen: $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 1/1] = 1/2 = 0{,}50 = 50\%$

Variablen n	Objekt-Werte p Zähler	Nenner	Meta-Werte p^T Zähler	Nenner	p^T gekürzt Zähler	Nenner	p^T dez.	p^T prozent.
1	1	1	2	4	1	2	0,50	50,00 %
	0	1	2	4	1	2	0,50	50,00 %
2	2	2	4	16	1	4	0,25	25,00 %
	1	2	8	16	2	4	0,50	50,00 %
	0	2	4	16	1	4	0,25	25,00 %
3	3	3	8	64	1	8	0,13	12,50 %
	2	3	24	64	3	8	0,38	37,50 %
	1	3	24	64	3	8	0,38	37,50 %
	0	3	8	64	1	8	0,13	12,50 %
4	4	4	16	256	1	16	0,06	6,25 %
	3	4	64	256	4	16	0,25	25,00 %
	2	4	96	256	6	16	0,38	37,50 %
	1	4	64	256	4	16	0,25	25,00 %
	0	4	16	256	1	16	0,06	6,25 %
5	5	5	32	1024	1	32	0,03	3,13 %
	4	5	160	1024	5	32	0,16	15,63 %
	3	5	320	1024	10	32	0,31	31,25 %
	2	5	320	1024	10	32	0,31	31,25 %
	1	5	160	1024	5	32	0,16	15,63 %
	0	5	32	1024	1	32	0,03	3,13 %
6	6	6	64	4096	1	64	0,02	1,56 %
	5	6	384	4096	6	64	0,09	9,38 %
	4	6	960	4096	15	64	0,23	23,44 %
	3	6	1280	4096	20	64	0,31	31,25 %
	2	6	960	4096	15	64	0,23	23,44 %
	1	6	384	4096	6	64	0,09	9,38 %
	0	6	64	4096	1	64	0,02	1,56 %
7	7	7	128	16384	1	128	0,01	0,78 %
	6	7	896	16384	7	128	0,06	5,47 %
	5	7	2688	16384	21	128	0,16	16,41 %
	4	7	4480	16384	35	128	0,27	27,34 %
	3	7	4480	16384	35	128	0,27	27,34 %
	2	7	2688	16384	21	128	0,16	16,41 %
	1	7	896	16384	7	128	0,06	5,47 %
	0	7	128	16384	1	128	0,01	0,78 %
8	8	8	256	65536	1	256	≈ 0	0,39 %
	7	8	2048	65536	8	256	0,03	3,13 %
	6	8	7168	65536	28	256	0,11	10,94 %
	5	8	14336	65536	56	256	0,22	21,88 %
	4	8	17920	65536	70	256	0,27	27,34 %
	3	8	14336	65536	56	256	0,22	21,88 %
	2	8	7168	65536	28	256	0,11	10,94 %
	1	8	2048	65536	8	256	0,03	3,13 %
	0	8	256	65536	1	256	≈ 0	0,39 %

5-3-3-4 FORMELN ZUR BERECHNUNG VON p^T

Hier geht es um *quantitative* Relationen, der Form $p(\Phi\ R\ \Psi) = r/n$

semi-tautologische Relationen:	p^T(Struktur) > 0,5	z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n$
semi-kontradiktorische Relationen:	p^T(Struktur) < 0,5	z. B. $p(X \wedge Y) = r/n$
neutrale Relationen:	p^T(Struktur) = 0,5	z. B. $p(X \leftrightarrow Y) = r/n$

Dabei kommen 3 Formeln zum Einsatz:

1) *semi-tautologische Relationen*: $p^T = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$

Für folgende Relatoren bzw. Relationen, jeweils in quantitativer Form, z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n$

- $X \rightarrow Y$
- $X \leftarrow Y$
- $X \vee Y$
- $X \mid Y$

2) *semi-kontradiktorische* Relationen: $p^T = \binom{n}{r}(1/4)^r(3/4)^{n-r}$

- $X \wedge Y$
- $X >\!- Y$
- $X -\!< Y$
- $X \nabla Y$

3) *neutrale* Relationen: $p^T = \binom{n}{r}(1/2)^r(1/2)^{n-r}$

- $X \leftrightarrow Y$
- $X >< Y$
- $X \rfloor Y$
- $X \lfloor Y$
- $X \rceil Y$
- $X \lceil Y$

Diese Formel gilt auch für die Positiv-*Implikation* $X *\!\rightarrow Y$.
Wenn man die Parallele zu den anderen Formeln betonen will, kann man hier statt 1/2 auch 2/4 einsetzen.

5-3-3-5 ÜBERSICHT: META-WERTE DER IMPLIKATION

IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

A) qualitativ	$X \rightarrow Y$	$\neg(X \rightarrow Y)$
1. theoret. Wahrsch.	$p^T = 3/4$	$p^T = 1/4$
2. Tautologie-Grad	$p^T = 3/4$	$p^T = 1/4$
3. Informationsgehalt	$p^I = 1/4$	$p^I = 3/4$
4. Bestimmtheit	$p^B = 1/3$	$p^B = 1/1$
5. Abhängigkeit	$p^A = 1/1 = 1$	$p^A = 1/1 = 1$

B) quantitativ (z. B.)		$p(X \rightarrow Y) = 4/4$	$p(X \rightarrow Y) = 2/4$	$p(X \rightarrow Y) = 0/4$
1. theoret. Wahrsch.	$p^T =$	81/256	54/256	1/256
2. Tautologie-Grad	$p^T =$	81/256	54/256	1/256
3. Informationsgehalt	$p^I =$	175/256	202/256	255/256
4. Bestimmtheit	$p^B =$	1/81	1/54	1/1 = 1
5. Abhängigkeit	$p^A =$	4/4 = 1	0/4 = 0	4/4 = 1

Anmerkungen
- Die Berechnungen der Werte sind im Text erläutert.
- Den Tautologie-Grad könnte man auch mit w^T angeben, für theoretische Wahrheit. Der Einheitlichkeit halber verwende ich aber immer ‚p', das allgemein für *relative Größe* steht, z. B. p^B für die relative Größe der Bestimmtheit.
- Bei „qualitativ" könnte man noch angeben:
  implizite Wahrscheinlichkeit von $X \rightarrow Y$: $p = 1$
  implizite Wahrscheinlichkeit von $\neg(X \rightarrow Y)$: $p = 0$
- Für synthetische Relationen ist nur eine *synthetische* Abhängigkeit definiert.
- Es gibt verschiedene Modelle zur Berechnung der *Abhängigkeit* (vgl. im Text). Hier wird wie folgt berechnet:

Qualitativ:

$p^A [X \rightarrow Y] = |1/1 - 0/1| = 1$ positive Abhängigkeit
$p^A [\neg(X \rightarrow Y)] = |0/1 - 1/1| = 1$ negative Abhängigkeit

Quantitativ:

$p^A [p(X \rightarrow Y) = 4/4] = |4/4 - 0/4| = 4/4 = 1$ positive Abhängigkeit
$p^A [p(X \rightarrow Y) = 2/4] = |2/4 - 2/4| = 0/4 = 0$ keine Abhängigkeit
$p^A [p(X \rightarrow Y) = 0/4] = |0/4 - 4/4| = 4/4 = 1$ negative Abhängigkeit

5-3-4 Quantitative Aussagen-Logik

5-3-4-1 p^T BEI DETERMINISTISCHEN RELATIONEN (p = 1)

Nummer	Name	Wahrheits-verteilung	Relator p = 1	p^T	p^T dez.
1)	Disjunktion	+ + + –	$p(X \vee Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
2)	Replikation	+ + – +	$p(X \leftarrow Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
3)	Präpension	+ + – –	$p(X \rfloor Y) = 1$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
4)	Implikation	+ – + +	$p(X \rightarrow Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
5)	Postpension	+ – + –	$p(X \lfloor Y) = 1$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
6)	Äquivalenz	+ – – +	$p(X \leftrightarrow Y) = 1$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
7)	Konjunktion	+ – – –	$p(X \wedge Y) = 1$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
8)	Exklusion	– + + +	$p(X \mid Y) = 1$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
9)	Kontravalenz	– + + –	$p(X >< Y) = 1$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
10)	Postnonpension	– + – +	$p(X \rceil Y) = 1$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
11)	Postsektion	– + – –	$p(X >- Y) = 1$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
12)	Pränonpension	– – + +	$p(X \rceil Y) = 1$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
13)	Präsektion	– – + –	$p(X -< Y) = 1$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
14)	Rejektion	– – – +	$p(X \nabla Y) = 1$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$

5-3-4-2 p^T BEI NULLISTISCHEN RELATIONEN (p = 0)

Nummer	Name	Wahrheits-verteilung	Relator p = 0	p^T	p^T dez.
1)	Disjunktion	+ + + –	$p(X \vee Y) = 0$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
2)	Replikation	+ + – +	$p(X \leftarrow Y) = 0$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
3)	Präpension	+ + – –	$p(X \rfloor Y) = 0$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
4)	Implikation	+ – + +	$p(X \rightarrow Y) = 0$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
5)	Postpension	+ – + –	$p(X \lfloor Y) = 0$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
6)	Äquivalenz	+ – – +	$p(X \leftrightarrow Y) = 0$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
7)	Konjunktion	+ – – –	$p(X \wedge Y) = 0$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
8)	Exklusion	– + + +	$p(X \mid Y) = 0$	$(1/4)^n$	$0{,}25^n$
9)	Kontravalenz	– + + –	$p(X >< Y) = 0$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
10)	Postnonpension	– + – +	$p(X \rceil Y) = 0$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
11)	Postsektion	– + – –	$p(X >- Y) = 0$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
12)	Pränonpension	– – + +	$p(X \rceil Y) = 0$	$(2/4)^n$	$0{,}50^n$
13)	Präsektion	– – + –	$p(X -< Y) = 0$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$
14)	Rejektion	– – – +	$p(X \nabla Y) = 0$	$(3/4)^n$	$0{,}75^n$

5-3-4-3 FORMELN ZUR BERECHNUNG VON p^T (bei p = 1 oder p = 0)

Hier geht es um *quantitative* Relationen der Form $p(\Phi \mathrm{R} \Psi) = 1$ oder $p(\Phi \mathrm{R} \Psi) = 0$

- *semi-tautologische* Relationen: $p^T(\text{Struktur}) > 0{,}5$ z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n$
- *semi-kontradiktorische* Relationen $p^T(\text{Struktur}) < 0{,}5$ z. B. $p(X \wedge Y) = r/n$
- *neutrale* Relationen: $p^T(\text{Struktur}) = 0{,}5$ z. B. $p(X \leftrightarrow Y) = r/n$

Dabei kommen 3 Formeln zum Einsatz:

1) *semi-tautologische Relationen*: $p^T = \binom{n}{r}(3/4)^r(1/4)^{n-r}$

$p^T[p = 1, r = n] = (3/4)^r$ oder $(3/4)^n$

$p^T[p = 0, r = 0] = (1/4)^n$

Für folgende Relatoren bzw. Relationen, jeweils in quantitativer Form, z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n$

- $X \rightarrow Y$
- $X \leftarrow Y$
- $X \vee Y$
- $X \mid Y$

2) *semi-kontradiktorische Relationen*: $p^T = \binom{n}{r}(1/4)^r(3/4)^{n-r}$

$p^T[p = 1, r = n] = (1/4)^r$ oder $(1/4)^n$

$p^T[p = 0, r = 0] = (3/4)^n$

- $X \wedge Y$
- $X >\!- Y$
- $X -\!< Y$
- $X \nabla Y$

3) *neutrale Relationen*: $p^T = \binom{n}{r}(1/2)^r(1/2)^{n-r}$

$p^T[p = 1, r = n] = (1/2)^r$ oder $(1/2)^n$

$p^T[p = 0, r = 0] = (1/2)^n$

(analog zu den anderen Formeln könnte man für 1/2 natürlich auch 2/4 einsetzen)

- $X \leftrightarrow Y$
- $X \rfloor Y$
- $X \rceil Y$
- $X >\!< Y$
- $X \lfloor Y$
- $X \lceil Y$

5-3-5 Quantitative Quantoren-Logik

MODELLE FÜR QUANTITATIVE ALL- UND PARTIKULÄR-RELATIONEN

alle: n/n	alle nicht: 0/n	einige: > 0/n	einige nicht: < n/n
$p = 1$: $p = n/n$	$p = 0$: $p = 0/n$	$p > 0$: $p > 0/n$	$p < 1$: $p < n/n$

		p^T
MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION		
1. alle F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$	$3^n/4^n$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow Gx) = 0$	$1/4^n$
3. einige F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) > 0$	$(4^n - 1)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow Gx) < 1$	$(4^n - 3^n)/4^n$
MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION		
1. alle F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$	$3^n/4^n$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1$	$3^n/4^n$
3. einige F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) > 0$	$(4^n - 1)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow \neg Gx) > 0$	$(4^n - 1)/4^n$
MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION		
1. alle F sind G	$p(Fx \wedge Gx) = 1$	$1/4^n$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) = 1$	$1/4^n$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION		
1. alle F sind G	$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$	$3^n/4^n$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1$	$3^n/4^n$
3. einige F sind G	$p(Fx \wedge Gx) > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$	$(4^n - 3^n)/4^n$
MODELL 5: (NEGATIVE) POSITIV-IMPLIKATION		
1. alle F sind G	$p(Fx *\rightarrow Gx) = 1$	$1/2^n$
2. alle F sind nicht G	$p(Fx *\rightarrow Gx) = 0$	$1/2^n$
3. einige F sind G	$p(Fx *\rightarrow Gx) > 0$	$(2^n - 1)/2^n$
4. einige F sind nicht G	$p(Fx *\rightarrow Gx) < 1$	$(2^n - 1)/2^n$

5 – 4 META-LOGIK ANALYTISCHER RELATIONEN

5-4-1 Aussagen-Logik

5-4-1-1 p^T BEI SCHLÜSSEN

- $p^T = 4/4 = 1{,}00$ $X \wedge Y \Rightarrow Y$
- $p^T = 2/4 = 0{,}50$ $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$
- $p^T = 1/4 = 0{,}25$ $X \vee Y \longrightarrow X \nabla Y$
- $p^T = 0/4 = 0{,}00$ $X \vee \neg X \nRightarrow Y \wedge \neg Y$

5-4-1-2 p^T BEI ANDEREN ANALYTISCHEN RELATIONEN

- $p^T = 4/4 = 1{,}00$ $X \;{}^{+}\!\vee^{+}\; \neg X$
- $p^T = 3/4 = 0{,}75$ $(X \vee Y) \;{}^{+}\!\vee^{-}\; (X \wedge Y)$
- $p^T = 2/4 = 0{,}50$ $(X \leftrightarrow Y) \;{}^{+}\!\vee^{-}\; (X \wedge Y)$
- $p^T = 1/4 = 0{,}25$ $(X \vee Y) \;{}^{+}\!\wedge^{-}\; (X \wedge Y)$
- $p^T = 0/4 = 0{,}00$ $X \;{}^{-}\!\wedge^{-}\; \neg X$

5-4-1-3 p^T BEI POSITIV-SCHLÜSSEN

Hier ergeben sich *mehr* unterschiedliche Werte als bei normalen Schlüssen.
Für $p^T = 1$ findet man verschiedene Möglichkeiten, z. B. 4/4, 3/3, 2/2, 1/1, ebenso bei $p^T = 0$.
Der Nenner berechnet sich jeweils nach der Anzahl der + der Prämisse.

- $p^T = 4/4 = 1{,}00$ $X \vee \neg X \;{*}{\Rightarrow}\; \neg(X \wedge \neg X)$ + + + +
- $p^T = 3/4 = 0{,}75$ $X \vee \neg X \;{*}{\longrightarrow}\; X \vee Y$ + + + –
- $p^T = 2/3 = 0{,}66$ $X \vee Y \;{*}{\longrightarrow}\; Y$ + – + □
- $p^T = 1/2 = 0{,}50$ $X \;{*}{\longrightarrow}\; X \wedge Y$ + – □ □
- $p^T = 1/3 = 0{,}33$ $X \vee Y \;{*}{\longrightarrow}\; X \wedge Y$ + – – □
- $p^T = 1/4 = 0{,}25$ $X \vee \neg X \;{*}{\longrightarrow}\; X \wedge Y$ + – – –
- $p^T = 0/1 = 0{,}00$ $X \wedge Y \;{*}{\nRightarrow}\; \neg(X \wedge Y)$ – □ □ □

5-4-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

5-4-2-1 WAHRHEITSTABELLEN FÜR $V(X \to Y) \longrightarrow \Lambda(X \to Y)$

$p^T[Vx(Fx \to Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)]$ bzw. $p^T[V(X \to Y) \longrightarrow \Lambda(X \to Y)]$ Bei n = 3

	X_1	$\to$	Y_1	$\vee$	X_2	$\to$	Y_2	$\vee$	X_3	$\to$	Y_3	$\vee$	$\longrightarrow$	$\wedge$	X_1	$\to$	Y_1	$\wedge$	X_2	$\to$	Y_2	$\wedge$	X_3	$\to$	Y_3
1	+	+	+		+	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+		+	+	+
2	+	+	+		+	+	+		+	−	−	+	−	−	+	+	+		+	+	+		+	−	−
3	+	+	+		+	+	+		−	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+		−	+	+
4	+	+	+		+	+	+		−	+	−	+	+	+	+	+	+		+	+	+		−	+	−
5	+	+	+		+	−	−		+	+	+	+	−	−	+	+	+		+	−	−		+	+	+
6	+	+	+		+	−	−		+	−	−	+	−	−	+	+	+		+	−	−		+	−	−
7	+	+	+		+	−	−		−	+	+	+	−	−	+	+	+		+	−	−		−	+	+
8	+	+	+		+	−	−		−	+	−	+	−	−	+	+	+		+	−	−		−	+	−
9	+	+	+		−	+	+		+	+	+	+	+	+	+	+	+		−	+	+		+	+	+
10	+	+	+		−	+	+		+	−	−	+	−	−	+	+	+		−	+	+		+	−	−
11	+	+	+		−	+	+		−	+	+	+	+	+	+	+	+		−	+	+		−	+	+
12	+	+	+		−	+	+		−	+	−	+	+	+	+	+	+		−	+	+		−	+	−
13	+	+	+		−	+	−		+	+	+	+	+	+	+	+	+		−	+	−		+	+	+
14	+	+	+		−	+	−		+	−	−	+	−	−	+	+	+		−	+	−		+	−	−
15	+	+	+		−	+	−		−	+	+	+	+	+	+	+	+		−	+	−		−	+	+
16	+	+	+		−	+	−		−	+	−	+	+	+	+	+	+		−	+	−		−	+	−
17	+	−	−		+	+	+		+	+	+	+	−	−	+	−	−		+	+	+		+	+	+
18	+	−	−		+	+	+		+	−	−	+	−	−	+	−	−		+	+	+		+	−	−
19	+	−	−		+	+	+		−	+	+	+	−	−	+	−	−		+	+	+		−	+	+
20	+	−	−		+	+	+		−	+	−	+	−	−	+	−	−		+	+	+		−	+	−
21	+	−	−		+	−	−		+	+	+	+	−	−	+	−	−		+	−	−		+	+	+
22	+	−	−		+	−	−		+	−	−	−	+	−	+	−	−		+	−	−		+	−	−
23	+	−	−		+	−	−		−	+	+	+	−	−	+	−	−		+	−	−		−	+	+
24	+	−	−		+	−	−		−	+	−	+	−	−	+	−	−		+	−	−		−	+	−
25	+	−	−		−	+	+		+	+	+	+	−	−	+	−	−		−	+	+		+	+	+
26	+	−	−		−	+	+		+	−	−	+	−	−	+	−	−		−	+	+		+	−	−
27	+	−	−		−	+	+		−	+	+	+	−	−	+	−	−		−	+	+		−	+	+
28	+	−	−		−	+	+		−	+	−	+	−	−	+	−	−		−	+	+		−	+	−
29	+	−	−		−	+	−		+	+	+	+	−	−	+	−	−		−	+	−		+	+	+
30	+	−	−		−	+	−		+	−	−	+	−	−	+	−	−		−	+	−		+	−	−
31	+	−	−		−	+	−		−	+	+	+	−	−	+	−	−		−	+	−		−	+	+
32	+	−	−		−	+	−		−	+	−	+	−	−	+	−	−		−	+	−		−	+	−
33	−	+	+		+	+	+		+	+	+	+	+	+	−	+	+		+	+	+		+	+	+
34	−	+	+		+	+	+		+	−	−	+	−	−	−	+	+		+	+	+		+	−	−
35	−	+	+		+	+	+		−	+	+	+	+	+	−	+	+		+	+	+		−	+	+
36	−	+	+		+	+	+		−	+	−	+	+	+	−	+	+		+	+	+		−	+	−
37	−	+	+		+	−	−		+	+	+	+	−	−	−	+	+		+	−	−		+	+	+
38	−	+	+		+	−	−		+	−	−	+	−	−	−	+	+		+	−	−		+	−	−
39	−	+	+		+	−	−		−	+	+	+	−	−	−	+	+		+	−	−		−	+	+
40	−	+	+		+	−	−		−	+	−	+	−	−	−	+	+		+	−	−		−	+	−
41	−	+	+		−	+	+		+	+	+	+	+	+	−	+	+		−	+	+		+	+	+
42	−	+	+		−	+	+		+	−	−	+	−	−	−	+	+		−	+	+		+	−	−
43	−	+	+		−	+	+		−	+	+	+	+	+	−	+	+		−	+	+		−	+	+

$Vx(Fx \to Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$ bzw. $V(X \to Y) \longrightarrow \Lambda(X \to Y)$ 2. Seite

	X_1	$\to$	Y_1	$\vee$	X_2	$\to$	Y_2	$\vee$	X_3	$\to$	Y_3	$\vee$	$\longrightarrow$	$\wedge$	X_1	$\to$	Y_1	$\wedge$	X_2	$\to$	Y_2	$\wedge$	X_3	$\to$	Y_3
44	−	+	+		−	+	+		−	+	−	+	+	+	−	+	+		−	+	+		−	+	−
45	−	+	+		−	+	−		+	+	+	+	+	+	−	+	+		−	+	−		+	+	+
46	−	+	+		−	+	−		+	−	−	+	−	−	−	+	+		−	+	−		+	−	−
47	−	+	+		−	+	−		−	+	+	+	+	+	−	+	+		−	+	−		−	+	+
48	−	+	+		−	+	−		−	+	−	+	+	+	−	+	+		−	+	−		−	+	−
49	−	+	−		+	+	+		+	+	+	+	+	+	−	+	−		+	+	+		+	+	+
50	−	+	−		+	+	+		+	−	−	+	−	−	−	+	−		+	+	+		+	−	−
51	−	+	−		+	+	+		−	+	+	+	+	+	−	+	−		+	+	+		−	+	+
52	−	+	−		+	+	+		−	+	−	+	+	+	−	+	−		+	+	+		−	+	−
53	−	+	−		+	−	−		+	+	+	+	−	−	−	+	−		+	−	−		+	+	+
54	−	+	−		+	−	−		+	−	−	+	−	−	−	+	−		+	−	−		+	−	−
55	−	+	−		+	−	−		−	+	+	+	−	−	−	+	−		+	−	−		−	+	+
56	−	+	−		+	−	−		−	+	−	+	−	−	−	+	−		+	−	−		−	+	−
57	−	+	−		−	+	+		+	+	+	+	+	+	−	+	−		−	+	+		+	+	+
58	−	+	−		−	+	+		+	−	−	+	−	−	−	+	−		−	+	+		+	−	−
59	−	+	−		−	+	+		−	+	+	+	+	+	−	+	−		−	+	+		−	+	+
60	−	+	−		−	+	+		−	+	−	+	+	+	−	+	−		−	+	+		−	+	−
61	−	+	−		−	+	−		+	+	+	+	+	+	−	+	−		−	+	−		+	+	+
62	−	+	−		−	+	−		+	−	−	+	−	−	−	+	−		−	+	−		+	−	−
63	−	+	−		−	+	−		−	+	+	+	+	+	−	+	−		−	+	−		−	+	+
64	−	+	−		−	+	−		−	+	−	+	+	+	−	+	−		−	+	−		−	+	−
													28+												

63+ 27+

Die Wahrheitstafel wurde zur Übersichtlichkeit modifiziert, die *zentralen* Relatoren stehen mittig. Für die theoretische Wahrscheinlichkeit p^T (hier am Beispiel n = 3) ergibt sich:

- Synthetisch:

$p^T[Vx(Fx \to Gx)] \quad = (4^n - 1)/4^n \quad = (4^3 - 1)/4^3 \quad = 63/64 = 0{,}98$

$p^T[\Lambda x(Fx \to Gx)] \quad = (3/4)^n \quad = (3/4)^3 \quad = 27/64 = 0{,}42$

- Analytisch:

$p^T[Vx(Fx \to Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)] \quad = (3^n + 1)/ 4^n \quad = (3^3 + 1)/ 4^3 \quad = 28/64 = 0{,}44$

Erläuterung zur *Implikation* $\to$:

Nenner: die Implikation ist für *alle* möglichen Welten definiert, der Nenner bei n = 3 ist daher: $4^3 = 64$

Zähler: den Zähler kann man unter dem Zentral-Relator $\longrightarrow$ ablesen. Die Implikation ist nur falsch, wenn die Prämisse wahr und die Konklusion falsch ist. Das ist in 36 Welten gegeben. Daher ergibt sich für den Zähler: 64 – 36 = 28. Also: $p^T = 28/64$.

$p^T[Vx(Fx \to Gx) *\!\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)] \quad = (3^n)/4^n - 1 \quad = (3^3)/4^3 - 1 \quad = 27/63 = 0{,}43$

Bei der *Positiv-Implikation* $*\!\!\to$ ergäben sich abweichende Werte:

Nenner: die Positiv-Implikation wird *nur* für die Welten definiert, in denen die Prämisse wahr (+) ist. In *einer* Welt (Zeile 22) ist die Prämisse falsch. Der Nenner ist also: 64 –1 = 63.

Zähler: auch für den Zähler ergibt sich *ein* + weniger, der Zähler beträgt somit 28 – 1 = 27. Also: $p^T = 27/63$.

5-4-2-2 p^T BZW. FOLGE-GRAD BEI QUANTOREN-LOGISCHEN SCHLÜSSEN

1. EINFACHE TAUTOLOGIE

$p^T = (2/2)^n = 1$

- $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ • $\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$
- $\neg Vx\neg(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda\neg(Fx)$ • $\neg Vx(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda(Fx)$

2. KOMPLEXE TAUTOLOGIE

$p^T = (4/4)^n = 1$

- $\Lambda x(Fx \to Gx) \Rightarrow Vx(Fx \to Gx)$ • $\Lambda x(Fx \to \neg Gx) \Rightarrow Vx(Fx \to \neg Gx)$

3. EINFACH SEMI-ANALYTISCH

$p^T = 1/2^{n-1}$

- $Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$ • $Vx\neg(Fx) \longrightarrow \Lambda x\neg(Fx)$

4. KOMPLEX SEMI-ANALYTISCH

$p^T = (3^n + 1)/4^n$

- $Vx(Fx \to Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$ • $Vx(Fx \to \neg Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to \neg Gx)$

$p^T = (4^n - 2^n)/4^n$

- $\Lambda x(Fx \to Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ • $\Lambda x(Fx \to \neg Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge \neg Gx)$

VERGLEICH von *Implikation* und *Positiv-Implikation*:

- einfach

Implikation	Positiv-Implikation
$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ $p^T = (2/2)^n = 1$	$\Lambda x(Fx)$ *$\Rightarrow Vx(Fx)$ $p^T = (1/1)^n = 1$
$Vx(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$ $p^T = 1/2^{n-1}$	$Vx(Fx)$ *$\longrightarrow \Lambda x(Fx)$ $p^T = 1/(2^n - 1)$

- komplex

$\Lambda x(Fx \to Gx) \Rightarrow Vx(Fx \to Gx)$ $p^T = (4/4)^n = 1$	$\Lambda x(Fx \to Gx)$ *$\Rightarrow Vx(Fx \to Gx)$ $p^T = (3/3)^n = 1$
$\Lambda x(Fx \to Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ $p^T = (4^n - 2^n)/4^n$	$\Lambda x(Fx \to Gx)$ *$\longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ $p^T = (3^n - 2^n)/3^n$
$Vx(Fx \to Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$ $p^T = (3^n + 1)/4^n$	$Vx(Fx\to Gx)$ *$\longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$ $p^T = 3^n/(4^n - 1)$

5-4-3 Quantitative Logik

5-4-3-1 FORMELN ZUR BERECHNUNG VON p^T BEI POSITIV-SCHLÜSSEN

Die Formeln sind jeweils auf *quantitative* Schlüsse mit der *Positiv-Implikation* anzuwenden, z. B. der Form $p(X \rightarrow Y) = r/n$ $*\!\longrightarrow$ $p(X \wedge Y) = s/n$ (genauer vgl. 4-3-3-1 bis 4-3-3-3)

1. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 3/4$ (z. B. $X \rightarrow Y$)

- auf eine Relation mit $p^T = 2/4$

$$\binom{r}{r-s}(2/3)^s(1/3)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden (jeweils in quantitativer Form):

$(X \rightarrow Y)$ $*\!\longrightarrow$ $(X \leftrightarrow Y)$
$(X \vee Y)$ $*\!\longrightarrow$ (Y)

- auf eine Relation mit $p^T = 1/4$

$$\binom{r}{r-s}(1/3)^s(2/3)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \rightarrow Y)$ $*\!\longrightarrow$ $(X \wedge Y)$
$(X \vee Y)$ $*\!\longrightarrow$ $(X \wedge Y)$

2. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 2/4$ (z. B. $X \leftrightarrow Y$)

- auf eine Relation mit $p^T = 3/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(1/2)^{n-s}(1/2)^{s-r}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (analytische) Schlüsse anzuwenden

$(X \leftrightarrow Y)$ $*\!\Rightarrow$ $(X \rightarrow Y)$
$(X$ $*\!\Rightarrow$ $(X \vee Y)$

- auf eine Relation mit $p^T = 1/4$

$$\binom{r}{r-s}(1/2)^s(1/2)^{r-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \leftrightarrow Y)$ $*\!\longrightarrow$ $(X \wedge Y)$
X $*\!\longrightarrow$ $(X \wedge Y)$

2. Schluss von einer Relation mit strukturell $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)

- auf eine Relation mit $p^T = 3/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(2/3)^{s-r}(1/3)^{n-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \wedge Y)$ $*\!\Rightarrow$ $(X \rightarrow Y)$
$(X \wedge Y)$ $*\!\Rightarrow$ $(X \vee Y)$

- auf eine Relation mit $p^T = 2/4$

$$\binom{n-r}{n-s}(1/3)^{s-r}(2/3)^{n-s}$$

Diese Formel ist z. B. auf folgende (semi-analytische) Schlüsse anzuwenden:

$(X \wedge Y)$ $*\!\Rightarrow$ X
$(X \wedge Y)$ $*\!\Rightarrow$ Y

5-4-3-2 TABELLE: POSITIV-SCHLUSS $p(X \to Y) = r/n$ *⟶ $p(X \wedge Y) = s/n$
für n = 1 bis n = 4 (Seite 1)

n	$p(X \to Y)$			*⟶			$p(X \wedge Y)$	p^T ungek.	p^T gekürzt	p^T dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c+d	b		a	c + d	$\frac{a}{a+b+c+d}$			
1	1/1	1	0		1	0	1/1	1/3	1/3	0,33
					0	1	0/1	2/3	2/3	0,67
	0/1	0	1		0	0	0/1	1/1	1/1	1,00
2	2/2	2	0		2	0	2/2	1/9	1/9	0,11
					1	1	1/2	4/9	4/9	0,44
					0	2	0/2	4/9	4/9	0,44
	1/2	1	1		1	0	1/2	2/6	1/3	0,33
					0	1	0/2	4/6	2/3	0,67
	0/2	0	2		0	0	0/2	1/1	1/1	1,00
3	3/3	3	0		3	0	3/3	1/27	1/27	0,04
					2	1	2/3	6/27	6/27	0,22
					1	2	1/3	12/27	12/27	0,44
					0	3	0/3	8/27	8/27	0,30
	2/3	2	1		2	0	2/3	3/27	1/9	0,11
					1	1	1/3	12/27	4/9	0,44
					0	2	0/3	12/27	4/9	0,44
	1/3	1	2		1	0	1/3	3/9	1/3	0,33
					0	1	0/3	6/9	2/3	0,67
	0/3	0	3		0	0	0/3	1/1	1/1	1,00
4	4/4	4	0		4	0	4/4	1/81	1/81	0,01
					3	1	3/4	8/81	8/81	0,10
					2	2	2/4	24/81	24/81	0,30
					1	3	1/4	32/81	32/81	0,40
					0	4	0/4	16/81	16/81	0,20
	3/4	3	1		3	0	3/4	4/108	1/27	0,04
					2	1	2/4	24/108	6/27	0,22
					1	2	1/4	48/108	12/27	0,44
					0	3	0/4	32/108	8/27	0,30
	2/4	2	2		2	0	2/4	6/54	1/9	0,11
					1	1	1/4	24/54	4/9	0,44
					0	2	0/4	24/54	4/9	0,44
	1/4	1	3		1	0	1/4	4/12	1/3	0,33
					0	1	0/4	8/12	2/3	0,67
	0/4	0	4		0	0	0/4	1/1	1/1	1,00

TABELLE POSITIV-SCHLUSS p(X → Y) = r/n *⟶ p(X ∧ Y) = s/n, für n = 5 (Seite 2)

n	p(X →Y)			*⟶			p(X ∧ Y)	p^T ungek.	p^T gekürzt	p^T dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c+d	b		a	c +d	$\frac{a}{a+b+c+d}$			
5	5/5	5	0		5	0	5/5	1/243	1/243	≈0,00
					4	1	4/5	10/243	10/243	0,04
					3	2	3/5	40/243	40/243	0,17
					2	3	2/5	80/243	80/243	0,33
					1	4	1/5	80/243	80/243	0,33
					0	5	0/5	32/243	32/243	0,13
	4/5	4	1		4	0	4/5	5/405	1/81	0,01
					3	1	3/5	40/405	8/81	0,10
					2	2	2/5	120/405	24/81	0,30
					1	3	1/5	160/405	32/81	0,40
					0	4	0/5	80/405	16/81	0,20
	3/5	3	2		3	0	3/5	10/270	1/27	0,04
					2	1	2/5	60/270	6/27	0,22
					1	2	1/5	120/270	12/27	0,44
					0	3	0/5	80/270	8/27	0,30
	2/5	2	3		2	0	2/5	10/90	1/9	0,11
					1	1	1/5	40/90	4/9	0,44
					0	2	0/5	40/90	4/9	0,44
	1/5	1	4		1	0	1/5	5/15	1/3	0,33
					0	1	0/5	10/15	2/3	0,67
	0/5	0	5		0	0	0/5	1/1	1/1	1,00

Jede einzelne Kolonne von p^T ergänzt sich zum Wert 1, z. B 729/729 = 1.
Nur in der Dezimaldarstellung ergeben sich durch Aufrundungen und Abrundungen auf 2 Stellen hinter dem Komma nicht immer genau 1,00.
Für die *ungekürzten* Werte ergeben sich im Vergleich zu den *gekürzten* Werten folgende *Multiplikationsfaktoren*:
z. B.: bei n = 5: x 1, x 5, x 10, x 10, x 5, x 1, bei n = 6: x 1, x 6, x 15, x 20, x 15, x 6, x 1

5-4-3-3 TABELLE SCHLUSS $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(X \wedge Y) = s/n$, *für n = 1 bis n = 4* (Seite 1)

n	$p(X \rightarrow Y)$			$\longrightarrow$			$p(X \wedge Y)$	$p^T \wedge$	$p^T \rightarrow$	p^Tdez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c+d	b		a	c+d	$\frac{a}{a+b+c+d}$			
1	1/1	1	0		1	0	1/1	1/4	2/4	0,50
					0	1	0/1	2/4	3/4	0,75
	0/1	0	1		0	0	0/1	1/4	4/4	1,00
								4/4 = 1	9/4	
2	2/2	2	0		2	0	2/2	1/16	8/16	0,50
					1	1	1/2	4/16	11/16	0,69
					0	2	0/2	4/16	11/16	0.69
	1/2	1	1		1	0	1/2	2/16	12/16	0,75
					0	1	0/2	4/16	14/16	0,88
	0/2	0	2		0	0	0/2	1/16	16/16	1,00
								16/16 = 1		
3	3/3	3	0		3	0	3/3	1/64	38/64	0,59
					2	1	2/3	6/64	43/64	0,67
					1	2	1/3	12/64	49/64	0,77
					0	3	0/3	8/64	45/64	0,70
	2/3	2	1		2	0	2/3	3/64	40/64	0,63
					1	1	1/3	12/64	49/64	0,63
					0	2	0/3	12/64	49/64	0,77
	1/3	1	2		1	0	1/3	3/64	58/64	0,91
					0	1	0/3	6/64	61/64	0,95
	0/3	0	3		0	0	0/3	1/64	64/64	1,00
								64/64 = 1		
4	4/4	4	0		4	0	4/4	1/256	176/256	0,69
					3	1	3/4	8/256	183/256	0,72
					2	2	2/4	24/256	199/256	0,78
					1	3	1/4	32/256	297/256	0,81
					0	4	0/4	16/256	191/256	0,75
	3/4	3	1		3	0	3/4	4/256	152/256	0,59
					2	1	2/4	24/256	172/256	0,67
					1	2	1/4	48/256	196/256	0,77
					0	3	0/4	32/256	180/256	0,70
	2/4	2	2		2	0	2/4	6/256	208/256	0,81
					1	1	1/4	24/256	226/256	0,88
					0	2	0/4	24/256	226/256	0,88
	1/4	1	3		1	0	1/4	4/256	248/256	0,97
					0	1	0/4	8/256	252/256	0,98
	0/4	0	4		0	0	0/4	1/256	256/256	1,00
								256/256=1		

TABELLE SCHLUSS p(X → Y) = r/n ⟶ p(X ∧ Y) = s/n, *für n = 5* (Seite 2)

n	p(X →Y)			⟶			p(X ∧ Y)	$p^T \wedge$	$p^T \rightarrow$	$p^T \rightarrow$ dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	a+c+d	b		a	c+d	$\frac{a}{a+b+c+d}$	Nenner 1024	Nenner 1024	
5	5/5	5	0		5	0	5/5	1/	782/	0,76
					4	1	4/5	10/	791/	0,77
					3	2	3/5	40/	821/	0,80
					2	3	2/5	80/	861/	0,84
					1	4	1/5	80/	861/	0,84
					0	5	0/5	32/	813/	0,79
	4/5	4	1		4	0	4/5	5/	624/	0,61
					3	1	3/5	40/	659/	0,64
					2	2	2/5	120/	739/	0,72
					1	3	1/5	160/	779/	0,76
					0	4	0/5	80/	699/	0,68
	3/5	3	2		3	0	3/5	10/	764/	0,75
					2	1	2/5	60/	814/	0,80
					1	2	1/5	120/	874/	0,85
					0	3	0/5	80/	834/	0,82
	2/5	2	3		2	0	2/5	10/	944/	0,92
					1	1	1/5	40/	974/	0,95
					0	2	0/5	40/	974/	0,95
	1/5	1	4		1	0	1/5	5/	1014/	0,99
					0	1	0/5	10/	1019/	≈1,00
	0/5	0	5		0	0	0/5	1/	1024/	1,00
								1024/		

5-4-3-4 TABELLE: POSITIV-SCHLUSS p(X → Y) = r/n *⟶ p(X R Y) = s/n (Seite 1)

Prämisse = Implikation →, R (Relation) = *→, ⌋, ∧ u. ä., für n = 1 bis n = 4

n	p(X → Y)	*⟶	p(X*→Y)	p(X) = p(X ⌋ Y)	p(X ∧ Y)	p^T ungek.	p^T gekürzt	p^T dez.
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a}{a+b}$	$\frac{a+b}{a+b+c+d}$	$\frac{a}{a+b+c+d}$			
1	1/1		1/1	1/1	1/1	1/3	1/3	0,33
			0/0	0/1	0/1	2/3	2/3	0,67
	0/1		0/1	1/1	0/1	1/1	1/1	1,00
2	2/2		2/2	2/2	2/2	1/9	1/9	0,11
			1/1	1/2	1/2	4/9	4/9	0,44
			0/0	0/2	0/2	4/9	4/9	0,44
	1/2		1/2	2/2	1/2	2/6	1/3	0,33
			0/1	1/2	0/2	4/6	2/3	0,67
	0/2		0/2	2/2	0/2	1/1	1/1	1,00
3	3/3		3/3	3/3	3/3	1/27	1/27	0,04
			2/2	2/3	2/3	6/27	6/27	0,22
			1/1	1/3	1/3	12/27	12/27	0,44
			0/0	0/3	0/3	8/27	8/27	0,30
	2/3		2/3	3/3	2/3	3/27	1/9	0,11
			1/2	2/3	1/3	12/27	4/9	0,44
			0/1	1/3	0/3	12/27	4/9	0,44
	1/3		1/3	3/3	1/3	3/9	1/3	0,33
			0/2	2/3	0/3	6/9	2/3	0,67
	0/3		0/3	3/3	0/3	1/1	1/1	1,00
4	4/4		4/4	4/4	4/4	1/81	1/81	0,01
			3/3	3/4	3/4	8/81	8/81	0,10
			2/2	2/4	2/4	24/81	24/81	0,30
			1/1	1/4	1/4	32/81	32/81	0,40
			0/0	0/4	0/4	16/81	16/81	0,20
	3/4		3/4	4/4	3/4	4/108	1/27	0,04
			2/3	3/4	2/4	24/108	6/27	0,22
			1/2	2/4	1/4	48/108	12/27	0,44
			0/1	1/4	0/4	32/108	8/27	0,30
	2/4		2/4	4/4	2/4	6/54	1/9	0,11
			1/3	3/4	1/4	24/54	4/9	0,44
			0/2	2/4	0/4	24/54	4/9	0,44
	1/4		1/4	4/4	1/4	4/12	1/3	0,33
			0/3	3/4	0/4	8/12	2/3	0,67
	0/4		0/4	4/4	0/4	1/1	1/1	1,00

5-4-3-5 ÜBERBLICK: META-WERTE VON SCHLÜSSEN

Analytisch versus semi-analytisch

	analytisch	*semi-analytisch*
A) *qualitativ* (z. B.)	$X \to Y \Rightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$	$X \to Y \longrightarrow X \wedge Y$
1. theoret. Wahrsch.	$p^T = 4/4 = 1$	$p^T = 2/4 = 0{,}5$
2. Tautologie-Grad	$p^T = 4/4 = 1$	$p^T = 2/4 = 0{,}5$
3. Informationsgehalt	$p^I = 0/4 = 0$	$p^I = 2/4 = 0{,}5$
4. Bestimmtheit	$p^B = 1/4 = 0{,}25$	$p^I = 1/2 = 0{,}5$
5. Modalität	$p^M = 4/4 = 1$ (notwendig)	$p^M = 2/4 = 0{,}5$ (möglich)
6. Abhängigkeit	$p^A = \|4/4 - 0/4\| = 4/4 = 1$	$p^A = \|2/4 - 2/4\| = 0/4 = 0$
B) *quantitativ* (z. B.)	$p(X \to Y) = 3/3 \Rightarrow$ $p(\neg(X \wedge \neg Y)) = 3/3$	$p(X \to Y) = 3/3 \longrightarrow$ $p(X \wedge Y) = 3/3$
1. theoret. Wahrsch.	$p^T = 64/64 = 1$	$p^T = 38/64 = 0{,}59$
2. Tautologie-Grad	$p^T = 64/64 = 1$	$p^T = 38/64 = 0{,}59$
3. Informationsgehalt	$p^I = 0/64 = 0$	$p^I = 26/64 = 0{,}41$
4. Bestimmtheit	$p^B = 1/64$	$p^B = 1/38$
5. Modalität	$p^M = 64/64 = 1$ (notwendig)	$p^M = 38/64 = 0{,}59$ (möglich)
6. Abhängigkeit	$p^A = \|64/64 - 0/64\| = 64/64 = 1$	$p^A = \|38/64 - 26/64\| = 12/64 = 0{,}19$

Man kann bei einem Schluss unterscheiden, ob die *Prämisse* (bzw. im Plural) oder der *Schlus-s-Satz* folgende *empirische* Wahrscheinlichkeit haben:

$p = 1$ oder $p = 0$ haben (deterministisch)
$0 < p < 1$ (statistisch)

Am wichtigsten sind die folgenden Unterscheidungen:

p	p^T	Beispiel
1 (oder 0)	$< 1 \wedge > 0$	$p(X \to Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) = 1$
$< 1 \wedge > 0$	1	$p(X \to Y) = 0{,}5 \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq 0{,}5$
1 (oder)	1	$p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(X \to Y) = 1$

Den letzten Fall kann man einen *vollständig deterministischen* Schluss nennen, weil p(Prämisse) = 1, p(Konklusion) = 1 und $p^T = 1$.

5-4-4 Quantitative Aussagen-Logik

Ich habe in 5-4-3-1 sechs *Formeln* zur Berechnung von p^T bei quantitativen Schlüssen mit der *Positiv-Implikation* zusammengefasst. Hier soll nun demonstriert werden, was sich ergibt im
deterministischen (*positiven*) Fall: r = n, s = n bzw. p = 1
im *nullistischen (negativen)* Fall: r = 0, s = 0 bzw. p = 0

5-4-4-1 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 3/4$
z. B. $X \rightarrow Y$:

- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 2/4$ (z. B. $X \leftrightarrow Y$)
  Positiver Fall: $p = 1$: $p^T = (2/3)^s$
  Beispiel : $p^T[p(X \rightarrow Y) = s/s = 1 \ {*}\!\longrightarrow p(X \leftrightarrow Y) = s/s = 1] = (2/3)^s$
  Negativer Fall: $p = 0$: $p^T = 1$
  Beispiel: $p^T[p(X \rightarrow Y) = 0 \ {*}\!\longrightarrow p(X \leftrightarrow Y) = 0] = 1$
- Schluss auf eine Relation mit $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)
  positiv: $p = 1$: $p^T = (1/3)^s$
  $p^T[p(X \rightarrow Y) = s/s = 1 \ {*}\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = s/s = 1] = (1/3)^s$
  negativ: $p = 0$: $p^T = 1$
  $p^T[p(X \rightarrow Y) = 0 \ {*}\!\Rightarrow p(X \wedge Y) = 0] = 1$

5-4-4-2 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 2/4$
z. B. $X \leftrightarrow Y$:

- auf eine Relation mit $p^T = 3/4$ (z. B. $X \rightarrow Y$)
  positiv: $p = 1$: $p^T = 1$
  $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 1 \ {*}\!\Rightarrow p(X \rightarrow Y) = 1] = 1$
  negativ: $p = 0$: $p^T = (1/2)^n$
  $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 0/n = 0 \ {*}\!\longrightarrow p(X \rightarrow Y) = 0/n = 0] = (1/2)^n$
- auf eine Relation mit $p^T = 1/4$ (z. B. $X \wedge Y$)
  positiv: $p = 1$: $p^T = (1/2)^s$
  $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = s/s = 1 \ {*}\!\longrightarrow p(X \wedge Y) = s/s = 1] = (1/2)^s$
  negativ: $p = 0$: $p^T = 1$
  $p^T[p(X \leftrightarrow Y) = 0 \ {*}\!\Rightarrow p(X \wedge Y) = 0] = 1$

5-4-4-3 SCHLUSS VON EINER RELATION MIT STRUKTURELL $p^T = 1/4$
z. B. $X \wedge Y$:

- auf eine Relation mit $p^T = 3/4$ (z. B. $X \rightarrow Y$)
  positiv: $p = 1$: $p^T = 1$
  $p^T[p(X \wedge Y) = 1 \ {*}\!\Rightarrow p(X \rightarrow Y) = 1] = 1$
  negativ: $p = 0$: $p^T = (1/3)^n$
  $p^T[p(X \wedge Y) = 0/n = 0 \ {*}\!\longrightarrow p(X \rightarrow Y) = 0/n = 0] = (1/3)^n$
- auf eine Relation mit $p^T = 2/4$ (z. B. X)
  positiv: $p = 1$: $p^T = 1$
  $p^T[p(X \wedge Y) = 1 \ {*}\!\Rightarrow p(X) = 1] = 1$
  negativ: $p = 0$: $p^T = (2/3)^n$
  $p^T[p(X \wedge Y) = 0/n = 0 \ {*}\!\longrightarrow p(X) = 0/n = 0] = (2/3)^n$

5-4-5 Quantitative Quantoren-Logik

5-4-5-1 SCHLÜSSE MIT DER NORMAL-IMPLIKATION

• Einfache Tautologie

$p^T = (2/2)^n = 1$

$p^T[p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0]$

$p^T[p(X) = 0 \Rightarrow p(X) < 1]$

• Komplexe Tautologie

$p^T = (4/4)^n = 1$

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1 \Rightarrow p(X \rightarrow Y) > 0]$

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 0 \Rightarrow p(X \rightarrow Y) < 1]$

• Einfach semi-analytisch

$p^T = 1/2^{n-1}$

$p^T[p(X) > 0 \longrightarrow p(X) = 1]$

$p^T[p(X) < 1 \longrightarrow p(X) = 0]$

• Komplex semi-analytisch

$p^T = (3^n + 1)/ 4^n$

$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0 \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = 1]$

$p^T[p(X \rightarrow Y) < 1 \longrightarrow p(X \rightarrow Y) = 0]$

$p^T = (4^n - 2^n)/4^n$

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0]$

$p^T[p(X \rightarrow \neg Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge \neg Y) > 0]$

Es gilt: $p = 1$: $p = n/n$, $p < 1$: $p < n/n$, $p = 0$: $p = 0/n$, $p > 0$: $p > 0/n$

Also wäre z. B. der erste Schluss *vollständig* wie folgt zu schreiben:

$p^T[p(X) = n/n = 1 \Rightarrow p(X) > 0/n] = (2/2)^n = 1$

5-4-5-2 SCHLÜSSE MIT DER POSITIV-IMPLIKATION

• *Strenger Schluss: von alle auf einige*

teilweise Verwendung der Positiv-Implikation:

$p^T[p(X \rightarrow Y) = 1 \ {*}{\Rightarrow}\ p(X \rightarrow Y) > 0] = 1$

genauer: $p^T[p(X \rightarrow Y) = n/n \ {*}{\Rightarrow}\ p(X \rightarrow Y) > 0/n] = (3/3)^n = 1$

vollständige Verwendung der Positiv-Implikation :

$p^T[p(X \ {*}{\rightarrow}\ Y) = 1 \ {*}{\Rightarrow}\ p(X \ {*}{\rightarrow}\ Y) > 0] = 1$

genauer: $p^T[p(X \ {*}{\rightarrow}\ Y) = n/n \ {*}{\Rightarrow}\ p(X \ {*}{\rightarrow}\ Y) > 0/n] = (1/1)^n = 1$

• *Semi-analytischer Schluss: von einige auf alle*

teilweise Verwendung der Positiv-Implikation:

$p^T[p(X \rightarrow Y) > 0 \ {*}{\longrightarrow}\ p(X \rightarrow Y) = 1] = 3^n/(4^n - 1)$

genauer: $p^T[p(X \rightarrow Y) > 0/n \ {*}{\longrightarrow}\ p(X \rightarrow Y) = n/n] = 3^n/(4^n - 1)$

LITERATUR - AUSWAHL

Aristoteles	Kategorien. Lehre vom Satz. Hamburg 1974
Ayer, Alfred Jules	Sprache, Wahrheit und Logik. Stuttgart 1970
Bamberg, Günter / Baur, Franz / Krapp, Michael	Statistik. 13. Aufl., München – Wien 2006
Barwise, Jon / Etchemendy, John	Sprache, Beweis und Logik, Bd. I. Paderborn 2005
Dies.	Sprache, Beweis und Logik, Bd. II. Paderborn 2006
Blau, Ulrich	Die dreiwertige Logik der Sprache. Berlin 1978
Bochenski, Joseph. M.	Die zeitgenössischen Denkmethoden. 5. Aufl., München 1971
Bohnke, Ben- Alexander	Untersuchungen zur Klassifikation und Prüfung von Sätzen. Magisterarbeit. Köln 1977
Ders.	Logische Analysen. Fortlaufende Arbeit, seit 1980 (unveröffentlicht)
Ders.	Integrale Logik. Ein neues Modell philosophischer und mathematischer Logik. Bad Neuenahr-Ahrweiler 2008
Bungarten, Theo (Hg.)	Wissenschaftssprache. München 1981
Carnap, Rudolf	Der logische Aufbau der Welt. Hamburg 1961
Ders.	Scheinprobleme der Philosophie. Frankfurt am Main 1971
Ders.	Grundlagen der Logik und Mathematik. München 1973
Carnap, Rudolf / Jeffrey, Richard C. (Ed.)	Studies in Inductive Logic and Probability, Volume 1. Berkeley – Los Angeles – 1971
Carnap, Rudolf / Stegmüller, Wolfgang	Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit. Wien 1959
Chomsky, Noam	Sprache und Geist. Frankfurt am Main 1973
Czayka, Lothar	Formale Logik und Wissenschaftsphilosophie. 2. Aufl., München – Wien 2000
Dowek, Gilles	Logik. Bergisch Gladbach 1998

Drösser, Christoph	Fuzzy Logic. Methodische Einführung in krauses Denken. Reinbek bei Hamburg 1994
Ebbinghaus, Heinz-Dieter / Flum, Jörg / Thomas, Wolfgang	Einführung in die mathematische Logik. 5. Aufl., Heidelberg 2007
Ehrig, Hartmut / Mahr, Bernd / Cornelius, Felix et al.	Mathematisch-strukturelle Grundlagen der Informatik. 2. Aufl., Berlin 2007
Davidson, Donald / Rorty, Richard	Wozu Wahrheit? Eine Debatte. Frankfurt am Main 2005
Essler, Wilhelm K.	Einführung in die Logik. 2. Aufl., Stuttgart 1969
Ders.	Induktive Logik. Freiburg – München 1970
Fahrmeir, Ludwig / Künstler, Rita / Pigeot, Iris / Tutz, Gerhard	Statistik. 6. Aufl., Berlin 2007
Frege, Gottlob	Logische Untersuchungen. Göttingen 1966
Ders.	Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien. 3. Auflage, Göttingen 1969
Gabbay, Dov M. / Guenthner, F. (Ed.)	Handbook of Philosophical Logic, Volume 3. Berlin – Heidelberg – New York 2007
Gabriel, Leo	Integrale Logik. Freiburg im Breisgau 1965
Hasenjaeger, Gisbert	Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik. Freiburg – München 1962
Hennigfeld, Jochem	Die Sprachphilosophie des 20. Jahrhunderts. Berlin – New York 1982
Hummell, Hans. J. / Ziegler, Rolf (Hg.)	Korrelation und Kausalität, Band 1. Stuttgart 1976
Immler, Manfred	Generative Syntax – Generative Semantik. München 1974
Kosko, Bart	Fuzzy Logisch. Eine neue Art des Denkens. Düsseldorf 1995
Kamlah, Wilhelm / Lorenzen, Paul	Logische Propädeutik: Vorschule des vernünftigen Redens. 3. Aufl., Stuttgart 1996
Künne, Wolfgang	Abstrakte Gegenstände. Semantik und Ontologie. Frankfurt am Main 1983

Kutschera, Franz von / Breitkopf, Alfred	Einführung in die moderne Logik. München 1971
Lakatos, Imre (Ed.)	The Problem of Inductive Logic. Amsterdam 1968
Lewis, David / Spohn, Wolfgang	Materialismus und Bewusstsein. Frankfurt am Main 2007
Lullus, Raimundus	Die neue Logik. Hamburg 1985
Meixner, Uwe	Theorie der Kausalität. Paderborn 2001
Ders.	Einführung in die Ontologie. Darmstadt 2004
Menne, Albert	Einführung in die formale Logik. 2. Aufl., München 1973
Ders.	Einführung in die Methodologie, Darmstadt 1984
Ders.	Einführung in die formale Logik. Darmstadt 1985
Ders.	Folgerichtig denken. Darmstadt 1988
Mittelstaedt, Peter	Quantum Logic. Dordrecht 1976
Mittelstraß, Jürgen	Der Konstruktivismus in der Philosophie im Ausgang von Wilhelm Kamlah und Paul Lorenzen. Paderborn 2008
Patzig, Günther	Sprache und Logik. Göttingen 1970
Popper, Karl R.	Logik der Forschung. 4. Aufl., Tübingen 1971
Priest, Graham	An Introduction to Non-Classical Logic. Cambridge 2001
Puntel, L. Bruno	Wahrheitstheorien in der neueren Philosophie. Darmstadt 1978
Quine, Williard v. Orman	Grundzüge der Logik. Frankfurt am Main 2005
Rautenberg, Wolfgang	Klassische und nichtklassische Aussagenlogik. Braunschweig – Wiesbaden 1979
Ders.	Einführung in die mathematische Logik. Wiesbaden 2002
Runggaldier, Edmund / Kanzian, Christian	Grundprobleme der Analytischen Ontologie. Paderborn – München – Wien – Zürich 1998
Russell, Bertrand	Einführung in die mathematische Philosophie. Darmstadt – Genf 1953
Salmon, Wesley C.	Logik. Stuttgart 1983
Scheid, Harald	Zufall. Mannheim – Leipzig – Wien – Zürich 1996

Schurz, Gerhard	Einführung in die Wissenschaftstheorie. Darmstadt 2006
Siebel, Wigand	Grundlagen der Logik. München 1975
Spohn, Wolfgang / Schroeder-Heister, Peter / Olsson, Erik J. (Hg.)	Logik in der Philosophie. Heidelberg 2005
Stegmüller, Wolfgang	Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie. 4. Auflage, Stuttgart 1969
Ders.	Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Bd. I., 2. Aufl. Berlin – Heidelberg – New York 1983
Stelzner, Werner / Kreiser, Lothar (Hg.)	Traditionelle und nichtklassische Logik. Paderborn 2004
Strobach, Niko	Einführung in die Logik. Darmstadt 2005
Strombach, Werner	Die Gesetze unseres Denkens. 2. Auflage, München 1971
Stuhlmann-Laeisz, Rainer	Philosophische Logik. Paderborn 2002
Tarski, Alfred	Einführung in die mathematische Logik. Göttingen 1977
Teichert, Dieter	Einführung in die Philosophie des Geistes. Darmstadt 2006
Vetter, Hermann	Wahrscheinlichkeit und logischer Spielraum. Tübingen 1967
Wittgenstein, Ludwig	Tractatus logico-philosophicus. 8. Aufl., Frankfurt am Main 1971
Ders.	Philosophische Untersuchungen. Frankfurt am Main 1971
Wolf, Fred Alan	Parallele Universen. Die Suche nach anderen Welten. Frankfurt am Main und Leipzig 1998
Zimmermann, Albert (Hg.)	Der Begriff der Repraesentatio im Mittelalter. Berlin – New York 1971
Zoglauer, Thomas	Einführung in die formale Logik für Philosophen. 2. Auflage, Göttingen 2002