2 LOGIK ANALYTISCHER RELATIONEN

ÜBERSICHT

2-1 Aussagen-Logik

Hier wird der Unterschied zwischen *synthetischen*, *analytischen* und *partiell analytischen* Relationen herausgearbeitet.

2-2 Quantoren- und Prädikaten-Logik

In diesem Punkt werden zuvorderst die verschiedenen Modelle für *All-Sätze* und *Partikulär-Sätze* auf ihre analytischen Eigenschaften geprüft und danach bewertet. Außerdem wird das *logische Quadrat* im Einzelnen vorgestellt. Dabei spielt auch die Übersetzung der *Quantoren-Logik* in *Prädikaten-Logik* eine wichtige Rolle.

2-3 Quantitative Logik

Hier gibt es eine wesentliche Erweiterung herkömmlicher logischer Gesetze durch Einführung *quantitativer Gesetze*.

2-4 Quantitative Aussagen-Logik

In diesem Unterkapitel werden die klassischen Gesetze der Aussagen-Logik in quantitativer Form dargestellt. Damit werden logische Schlüsse zu Rechenformeln. Es zeigt sich, dass sich so logische Schlüsse viel einfacher und präziser auf ihre Gültigkeit prüfen lassen.

2-5 Quantitative Quantoren-Logik

Die quantitative Quantoren-Logik stellt die quantoren-logischen Gesetze in numerischer Form vor. Es werden dabei auch auf der Quantoren-Logik basierende Modelle z. B. von *Modal-Logik* präsentiert, aber eben quantifizierte Modelle.

Jedes Unter-Kapitel ist wieder folgendermaßen unterteilt:
- Einführung
- Implikation
- Positiv-Implikation
- Systematik
- Erweiterungen

2 – 1 AUSSAGEN-LOGIK

2-1-1 Einführung

2-1-1-1 ANALYTISCHE RELATIONEN
Analytische Relationen (kurz *A-Relationen*) sind – *syntaktisch* gesehen – solche, bei denen auf beiden Seiten des *Relators* (partiell) gleiche Zeichen stehen. Auf die Definition analytischer Relationen bzw. Verknüpfungen bin ich schon in 0-5 eingegangen – und es wird an späterer Stelle, vor allem in 4-1, noch genauer darauf eingegangen werden.

Man kann unterscheiden:

- *Tautologien*
  Sie sind in *jeder* Welt wahr, man sagt auch L-wahr (*logisch* wahr). In der Wahrheitstafel steht nur + (plus = gültig) unter dem Junktor. Sie haben den Status von *Gesetzen*.

- *Kontradiktionen*
  Sie sind in *keiner* Welt wahr, also in jeder falsch, man sagt auch L-falsch. D. h. sie sind *widersprüchlich*. Es steht nur – (minus = ungültig) unter dem Junktor. Kontradiktionen sind natürlich weniger bedeutsam als Tautologien.

Eine herausragende Tautologie ist die *analytische Implikation* (= logische Folge oder Schluss), z. B.: $X \Rightarrow X \vee Y$ mit folgender Wahrheitstafel:

X	⇒	X	∨	Y
+	+	+	+	+
+	+	+	+	−
−	+	−	+	+
−	+	−	−	−

Man kann die Wahrheitstafel auch abkürzen, so dass man nur den – entscheidenden – Werteverlauf unter dem Zentral-Relator, hier ⇒, horizontal angibt.

$X \Rightarrow X \vee Y$ (+ + + +)

Eine wichtige *Kontradiktion* ist die folgende Konjunktion:

$X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ (– – – –)

Eine analytische Relation enthält meistens mehrere (synthetische) Relationen, die durch einen *Zentral-Relator* verbunden sind, z. B.:

$X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$

$X \wedge Y$ und $X \vee Y$ sind hier die *synthetischen* Relationen, der Zentral-Relator ist ⇒. *Synthetische* Relatoren (∧) *binden* mehr als *analytische* (⇒), so braucht man $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$ nicht mit Klammern als $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y)$ zu schreiben. Meint man aber eine ganz andere Relation, etwa $X \,{}^{+}\!\wedge^{--} (Y \Rightarrow X \vee Y)$, so muss man natürlich Klammern setzen.

Eine *Tautologie* (mit 2 Variablen) hat *immer* den Wahrheitswerteverlauf + + + +, unabhängig davon, mit welchem Relator sie konstruiert wird, z. B.:

$$X \wedge Y \Rightarrow X,\ \ X \Leftrightarrow X,\ X \,{}^{+}\!\vee^{+}\, \neg X \ \text{usw.}$$

Eine Kontradiktion (mit 2 Variablen) hat ebenfalls *immer* den Wahrheitswerteverlauf – – – –, gleichgültig, mit welchem Relator sie konstruiert wird, z. B.:

$$X \,{}^{-}\!\wedge^{-}\, \neg X,\ (X \wedge Y) \ \not\Leftrightarrow\ \neg(X \wedge Y),\ \ (X \,{}^{+}\!\vee^{+}\, \neg X) \not\Rightarrow (X \,{}^{-}\!\wedge^{-}\, \neg X) \ \text{usw.}$$

2-1-1-2 PARTIELL ANALYTISCHE RELATIONEN

Als Zwischen-Kategorie zwischen synthetischen und analytischen Relationen habe ich die *partiell-analytischen* oder *semi-analytischen* Relationen eingeführt (kurz *PA-Relationen*). Man könnte anstatt von ‘partiell-analytisch’ auch von ‘partiell synthetisch’ sprechen. Semi-analytische Relationen sind zugleich *semi-tautologisch* (dazu später). Ein Beispiel ist:

$$X \vee Y \longrightarrow X \ \ (+ + - +)$$

Auch bei partiell-analytischen Relationen gilt *syntaktisch*, dass links und rechts vom Relator (partiell) gleiche Zeichen stehen. Aber anders als die analytischen Relationen sind partiell analytische Relationen nicht tautologisch und nicht kontradiktorisch, d. h. in der Wahrheitstafel unter dem *Zentral-Relator* kommt sowohl + wie – vor. Z. B. folgende Wahrheitstafel:

X	→	Y	⟶	Y
+	+	+	+	+
+	–	–	+	–
–	+	+	+	+
–	+	–	–	–

Ein weiterer wesentlicher Unterschied zwischen *analytischen* und *partiell analytischen* Relationen ist: Eine Tautologie oder Kontradiktion hat immer den *gleichen Wahrheitsverlauf*. Dagegen gibt es (bei 2 Variablen) 14 mögliche Wahrheitsverläufe von semi-analytischen Relationen, entsprechend den 14 möglichen Wahrheitsverläufen von *synthetischen* Relationen.

2-1-1-3 NOTATION

Ich fasse hier die Notationen für Relatoren aber noch einmal systematisch zusammen.

Implikative Relationen formalisiere ich immer durch einen *Pfeil* (wie weit verbreitet):

Tautologien durch einen *Doppelpfeil*
Kontradiktionen durch den *durchgestrichenen Doppelpfeil*
semi-analytische Relationen durch den *verlängerten Pfeil*

• *Implikation*	• *Äquivalenz*	• *Replikation*
Tautologie: $\Rightarrow$	Tautologie: $\Leftrightarrow$	Tautologie: $\Leftarrow$
Kontradiktion: $\not\Rightarrow$	Kontradiktion: $\not\Leftrightarrow$	Kontradiktion: $\not\Leftarrow$
Semi-analytisch: $\longrightarrow$	Semi-analytisch: $\longleftrightarrow$	Semi-analytisch: $\longleftarrow$

Andere Tautologien formalisiere ich durch ++ über dem Junktor, z. B. ${}^{+}\!\vee^{+}$
Kontradiktionen durch – – über dem Junktor, z. B. ${}^{-}\!\wedge^{-}$
Semi-analytische Relationen durch + – über dem Junktor, z. B. ${}^{+}\!\!>\!\!<^{-}$.

• *Konjunktion*	• *Disjunktion*
Tautologie: ${}^{+}\!\wedge^{+}$	Tautologie: ${}^{+}\!\vee^{+}$
Kontradiktion: ${}^{-}\!\wedge^{-}$	Kontradiktion: ${}^{-}\!\vee^{-}$
Semi-analytisch: ${}^{+}\!\wedge^{-}$	Semi-analytisch: ${}^{+}\!\vee^{-}$

2-1-1-4 SYNTHETISCHE WAHRHEITSTAFEL

Man kann unterscheiden zwischen *Wahrheitstafeln* für *synthetische* und *analytische* Relationen (kurz *synthetische* bzw. *analytische Wahrheitstafel*). Ich behandele auch die synthetische Wahrheitstafel genauer erst hier im Kapitel über Analytik, weil man für die Deutung jeder Wahrheitstafel *analytische* Relationen benötigt. Im Detail und mit ausführlichen Erläuterungen für Experten gehe ich auf die Wahrheitstafeln in meinem Buch „Integrale Logik“ ein.

1) *Normale Wahrheitstafel*

Ein Beispiel für die *normale* Wahrheitstafel einer *synthetischen* Relation (Implikation) ist:

X	→	Y
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	+	−

Die (normale) Wahrheitstafel enthält verschiedene *Deutungsmöglichkeiten* bzw. Schlussmöglichkeiten. Die wichtigsten Deutungen sind die *konjunktive* und die *implikative* Deutung. Die konjunktive Deutung ist die *zentrale*, die normale Wahrheitstafel enthält implizit bereits die *konjunktive* Deutung. Die implikative Deutung ist bei *Implikationen* bzw. Schlüssen zusätzlich heranzuziehen, in der quantitativen Logik ist sie besonders wichtig.

Ich zeige diese Deutungsmöglichkeiten auf und entwickle daraus verschiedene Formen von Wahrheitstafeln. Das verdeutliche ich anhand der Implikation $X \to Y$.

2) *Konjunktive (Deutung der) Wahrheitstafel*

Bei der konjunktiven Deutung wird aus der *Konjunktion* der beiden Einzel-Komponenten X,Y auf die Gesamt-Relation, z. B. $X \to Y$ geschlossen.

Die konjunktive Interpretation verdeutlicht folgende Form der Wahrheitstafel:

	X	Y	X → Y
1.	+	+	+
2.	+	−	−
3.	−	+	+
4.	−	−	+

Noch deutlicher wird die konjunktive Deutung in der folgenden Darstellung, die man daher auch *konjunktive Wahrheitstafel* nennen kann. Die *Zeilen* der Wahrheitstafel werden zusätzlich durch *Relationen* formalisiert; dabei wird ein − (minus) in der Wahrheitstafel hier in ein ¬ (Negator) übersetzt:

	X ∧ Y ⇒ X → Y						
1.	+ + + +	+	$X \wedge Y$	⇒ $X \to Y$	+ − − −	⇒ + − + +	
2.	+ − − +	−	$X \wedge \neg Y$	⇒ $\neg(X \to Y)$	− + − −	⇒ − + − −	(⇔)
3.	− − + +	+	$\neg X \wedge Y$	⇒ $X \to Y$	− − + −	⇒ + − + +	
4.	− − − +	+	$\neg X \wedge \neg Y$	⇒ $X \to Y$	− − − +	⇒ + − + +	

Hier wird aus den *Konjunktionen* $X \wedge Y$, $X \wedge \neg Y$, $\neg X \wedge Y$ und $\neg X \wedge \neg Y$ auf die Gesamt-Relation $X \to Y$ geschlossen. Und zwar handelt es sich um *strenge* Schlüsse (⇒).

Der konjunktiven Deutung entspricht folgende *konjunktive Definition* von $X \to Y$:

$X \to Y \Leftrightarrow_{df} (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$ bzw. :

$X \rightarrow Y \;\Leftrightarrow_{df} \neg(X \wedge \neg Y)$

Also wird $X \rightarrow Y$ definiert durch *Disjunktion* der Konjunktionen, die $X \rightarrow Y$ analytisch implizieren. Bzw. durch die Negation der Konjunktion, welche die Kontradiktion von $X \rightarrow Y$ ist.

3) *Implikative (Deutung der) Wahrheitstafel*

Sie bietet sich nur bei *implikativen* Beziehungen wie $X \rightarrow Y$ an, ist dort aber von besonderer Bedeutung. Hier wird von dem *Vorderglied* (z. B. X) auf das *Nachglied* (z. B. Y) gefolgert.

Imp	$X \rightarrow Y$		
1.	+ + +	$X \rightarrow Y$	(+ − + +)
2.	+ − −	$X \rightarrow \neg Y$	(− + + +)
3.	− ± +	$\neg X \rightarrow Y$	(+ + + −)
4.	− ± −	$\neg X \rightarrow \neg Y$	(+ + − +)

Ich schreibe die *implikative Wahrheitstafel* mit einem ‚Imp' am Anfang. Wie man aber in der *normalen* Wahrheitstafel von $X \rightarrow Y$ sieht, folgt in der 3. Zeile Y aus $\neg X$ und in der 4. Zeile $\neg Y$ aus $\neg X$ (und in beiden Fällen gilt $X \rightarrow Y$ als wahr). Daher wird in der *implikativen* Wahrheitstafel an beiden Stellen ein ± (für „möglich") unter den Relator geschrieben. Das liest sich wie folgt (3. Zeile): ‚Wenn X falsch ist, dann ist es *möglich* (±), dass Y wahr ist'. Dies ähnelt der *Positiv-Implikation*, bei der die 3. und 4. Stelle „nicht definiert" sind.

Der implikativen Darstellung entspricht folgende Bestimmung der Implikation:

- $(X \rightarrow Y) \;\Leftrightarrow\; \neg(X \rightarrow \neg Y) \vee \neg(\neg X \rightarrow Y) \vee \neg(\neg X \rightarrow \neg Y)$
- $\neg(X \rightarrow Y) \;\Leftrightarrow\; (X \rightarrow \neg Y) \wedge (\neg X \rightarrow Y) \wedge (\neg X \rightarrow \neg Y)$

4) Verstärkte implikative (Deutung der) Wahrheitstafel

Bei der *konjunktiven* Deutung der Wahrheitstafel erhält man ausschließlich *analytische* Relationen wie $X \wedge Y \Rightarrow X \rightarrow Y$. Bei der *implikativen* Deutung sind dagegen wie beschrieben alle vier aufgeführten Relationen der Wahrheitstafel *synthetisch*, nämlich:

$X \rightarrow Y,\ X \rightarrow \neg Y,\ \neg X \rightarrow Y,\ \neg X \rightarrow \neg Y$

Und bei synthetischen Relationen gilt: Wenn man nur weiß, dass X gültig (+) ist, kann man noch nichts über Y aussagen, es kann gültig sein oder ungültig (und entsprechend). Erst indem man die Gültigkeit bzw. Ungültigkeit der *Gesamt-Relation*, also $X \rightarrow Y$, mit berücksichtigt, kann man aus X (in gewissen Grenzen) auf Y schließen. Man kann dies eine *verstärkte implikative* Deutung bzw. verstärkte implikative Wahrheitstafel nennen.

Imp	X	$\wedge$	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y		
1.	+	+	+	+	+	$X \wedge (X \rightarrow Y) \;\Rightarrow\; Y$	(+ + + +)
2.	+	−	−	+	−	$X \wedge \neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$	(+ + + +)
3.	−	−	+	±	+	$\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	(+ + + −)
4.	−	−	+	±	−	$\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$	(+ + − +)

$X \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$ ist eine *Tautologie*, nämlich der *Modus ponens*. Dies bedeutet aber nicht, dass auch alle *einzelnen* Relationen Tautologien sind. So ist in der 3. bzw. 4. Zeile kein eindeutiger Schluss möglich. Denn in der 3. Zeile wird von $\neg X \wedge (X \rightarrow Y)$ auf Y geschlossen, in der 4. Zeile vom gleichen $\neg X \wedge (X \rightarrow Y)$ auf $\neg Y$.

Damit können hier keine strengen Schlüsse vorliegen, sondern es gilt nur:
$\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ bzw. $\neg X \wedge (X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$. So schreibe ich hier wieder ±.

5) *Weitere mögliche Schlüsse aus der Wahrheitstafel*

- Schluss von X auf $X \rightarrow Y$

  $\neg X \Rightarrow X \rightarrow Y$
- Schluss von Y auf $X \rightarrow Y$

  $Y \Rightarrow X \rightarrow Y$
- Schluss von X auf Y (dies geht nur, wenn man $X \rightarrow Y$ hinzunimmt, vgl. oben)

  $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$

  $\neg(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow \neg Y$
- Schluss von Y auf X (dies geht nur, wenn man $X \rightarrow Y$ hinzunimmt)

  $(X \leftarrow Y) \wedge Y \Rightarrow X$

  $\neg(X \leftarrow Y) \wedge Y \Rightarrow \neg X$
- Schluss von $X \rightarrow Y$ auf X, Y

  Ein strenger Schluss von $X \rightarrow Y$ auf X, Y, $\neg X$ oder $\neg Y$ ist nicht möglich

  Aber es gilt: $\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow X$ und $\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$

2-1-1-5 ANALYTISCHE WAHRHEITSTAFEL

Die Wahrheitstafel einer (semi-)analytischen Relation nenne ich wie gesagt kurz '*analytische Wahrheitstafel'*. Grundsätzlich sind hier die gleichen Unterscheidungen möglich wie bei der synthetischen Wahrheitstafel. Ich nehme als Beispiel die Wahrheitstafel einer *semi-analytischen* Relation, weil die aussagekräftiger ist, und zwar $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$.

1) N*ormale Wahrheitstafel*:

Zunächst die normale Wahrheitstafel von $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$:

X	→	Y	⟶	Y
+	+	+	+	+
+	–	–	+	–
–	+	+	+	+
–	+	–	–	–

Es sind wieder vor allem 2 Möglichkeiten der Deutung zu unterscheiden: die *konjunktive* und die *implikative* Interpretation der Wahrheitstafel.

2) *Konjunktive (Deutung der) Wahrheitstafel*

Bei einer Relation $\Phi \longrightarrow \Psi$ wird aus der *Konjunktion* von *Prämisse* (Φ) und *Schluss-Satz* (Ψ) auf die Gesamtrelation ($\Phi \longrightarrow \Psi$) geschlossen. Generell ist die konjunktive Interpretation aber bei jeder beliebigen Relation möglich. Bei $(X \vee Y) \;^{+}{><}^{-}\; Y$ wird z. B. aus der Konjunktion von $X \vee Y$ und Y auf $(X \vee Y) \;^{+}{><}^{-}\; Y$ geschlossen.

Die konjunktive Interpretation demonstriert folgende *konjunktive Wahrheitstafel:*

	$(X \rightarrow Y)$	$\wedge$ Y	$\Rightarrow$ $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	
1.	+	+ + +	+	$(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
2.	–	– – +	+	$\neg(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
3.	+	+ + +	+	$(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
4.	+	– – +	–	$(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$

Grundsätzlich wäre zwar auch eine andere Kombination denkbar, nämlich: $\neg(X \rightarrow Y) \wedge Y$.

Aber die ist *kontradiktorisch* und somit in der Wahrheitstafel nicht enthalten, die Wahrheitstafel berücksichtig eben nur die *möglichen* Kombinationen. Das ist bei der *analytischen* Wahrheitstafel anders als bei der *synthetischen*, bei der *alle* Kombinationen bzw. Welten vertreten sind (wobei synthetisch allerdings *alle* Kombinationen *möglich* sind).

3) *Implikative (Deutung der) Wahrheitstafel*
Hier wird bei einer (semi)analytischen Relation $\Phi \longrightarrow \Psi$ aus der Prämisse (Φ) auf den Schluss-Satz (Ψ) geschlossen. Es wird also gefragt: Wenn die Prämisse (Φ) wahr ist, ist dann auch der Schluss-Satz (Ψ) wahr usw.? Diese Deutung ist nur bei *implikativen* Relationen wie $\rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow$ u. ä. relevant, dort aber besonders wichtig.

Bei *(semi)analytischen* Relationen ist es möglich, allein aus der Prämisse (Φ) in gewissem Ausmaß auf den Schluss-Satz (Ψ) zu schließen, anders als bei den *synthetischen* Relationen: dort ist wie beschrieben ein Schluss nur möglich, wenn man die Gesamt-Relation $\Phi \rightarrow \Psi$ mit berücksichtigt.

Als Beispiel zunächst wieder *der* semi-analytische Schluss $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$.

Imp	$(X \rightarrow Y)$	$\longrightarrow$	Y	
1.	+	±	+	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
2.	−	+	−	$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$
3.	+	±	+	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
4.	+	±	−	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg Y$

In der 1. (bzw. 3.) und 4. Zeile hier wird einmal von $X \rightarrow Y$ auf Y und einmal auf $\neg Y$ geschlossen, somit können diese Schlüsse nur *partiell analytisch* sein. Daher wird hier in der Wahrheitstafel unter dem $\longrightarrow$ wieder ± für „möglich" eingesetzt.
Es gilt:

+ entspricht $\Rightarrow$ tautologisch (notwendige Folge)
± entspricht $\longrightarrow$ semi-analytisch (mögliche Folge)
− (wäre Kontradiktion, das kann hier unter dem Zentral-Relator nicht vorkommen)

4) *Verstärkte implikative Deutung der Wahrheitstafel*
Hier wird noch berücksichtigt, ob die Gesamtrelation ($\Phi \longrightarrow \Psi$) wahr oder falsch ist. D. h. es wird aus der Prämisse Φ und der Gesamtrelation $\Phi \longrightarrow \Psi$ auf die Konklusion Ψ geschlossen. So ergeben sich in allen Fällen *strenge* Schlüsse.

Nehmen wir als Beispiel zunächst wieder den *semi-analytischen Schluss* $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$. Hier wird also noch die Gesamtrelation $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ als *Verstärkung* hinzugefügt (oder aus anderer Sicht wird die Prämisse $X \rightarrow Y$ hinzugefügt).

Die *verstärkte implikative Wahrheitstafel* mit sämtlich *tautologischen* Relationen lautet:

Imp	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$	$\wedge$	$(X \rightarrow Y)$	$\Rightarrow Y$	
1.	+	+	+	+ +	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$
2.	+	−	−	+ −	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \wedge \neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$
3.	+	+	+	+ +	$[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow Y$
4.	−	−	+	+ −	$\neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y] \wedge (X \rightarrow Y) \Rightarrow \neg Y$

5) *Funktionen der Wahrheitstafel*
Die primäre Funktion der Wahrheitstafel ist, die *Wahrheitsbedingungen* einer Relation bzw. eines Relators, eines Satzes oder einer Aussage aufzuzeigen. Dabei ist zu unterscheiden:

- *konjunktive* Wahrheitstafel: sie zeigt die Wahrheitsbedingungen des *Gesamt-Satzes* (z. B.

$X \rightarrow Y$) auf, in Abhängigkeit von der *Konjunktion* von Vorder-Satz (X) und Nach-Satz (Y).
• *implikative* Wahrheitstafel: sie zeigt (z. B. bei $X \rightarrow Y$) die Wahrheitsbedingungen des *Nach-Satzes* (Y) auf, in Abhängigkeit vom Vorder-Satz (X).
• *verstärkte implikative* Wahrheitstafel: sie zeigt (z.B. bei $X \rightarrow Y$) die Wahrheitsbedingungen des *Nach-Satzes* (Y) auf, in Abhängigkeit von Vorder-Satz (X) und Gesamt-Satz ($X \rightarrow Y$).

Speziell die *synthetische* Wahrheitstafel hat noch folgende *Funktionen*:
Erstens dient die Wahrheitstafel dazu, die *Relatoren zu definieren*.
Zweitens erlaubt sie, für einen realen, empirischen Sachverhalt die treffende Relation zu finden. Hat man z. B. den Sachverhalt bzw. die Menge von Sachverhalten X: „es regnet", Y: „die Strasse ist nass", und untersucht, in welchen Kombinationen (die in der Wahrheitstafel aufgeführt sind) diese Sachverhalte auftreten, wird man z. B. als zutreffende Relation herausfinden: „Es regnet → die Strasse ist nass".

Speziell die *analytische* Wahrheitstafel hat folgende Aufgaben:
den *logischen Zusammenhang* zwischen zwei Relationen herauszufinden, also vor allem zu prüfen, ob
- eine *Tautologie* vorliegt (nur + unter dem Zentral-Relator)
- eine *Kontradiktion* vorliegt (nur – unter dem Zentral-Relator)
- eine *semi-analytische* Verbindung vorliegt (+ und – unter dem Zentral-Relator).

2-1-2 Implikation

2-1-2-1 WAS IST EIN SCHLUSS?
Was macht eine *tautologische Implikation*, also einen *logischen Schluss* wesentlich aus?
Hier greifen wir zurück auf zwei bereits eingeführte Modelle (vgl. vor allem 0-4):
1) *aussagen-logischer* Ansatz
2) *mengen-theoretischer* Ansatz

Das erläutern wir anhand des folgenden Schlusses $X \wedge Y \Rightarrow Y$ mit seiner Wahrheitstafel:

	$X \wedge Y$	$\Rightarrow$	Y
1.	+	+	+
2.	–	+	–
3.	–	+	+
4.	–	+	–

1) *aussagen-logischer Ansatz*
Aussagen-logisch gilt für einen Schluss: Wenn die Prämisse (hier $X \wedge Y$) wahr ist, dann muss auch der Schluss-Satz (hier Y) wahr sein.
Generell ist für die Aussagen-Logik prototypisch, dass sie *wahrheitswert-funktional* bestimmt ist. D. h. die Wahrheit (oder Falschheit) eines Satzes ist eine *Funktion* der Wahrheit (oder Falschheit) eines anderen Satzes bzw. mehrerer anderer Sätze. Dies bezeigt sich besonders bei der *Implikation* bzw. dem *Schluss*: Z. B. ist bei $X \wedge Y \Rightarrow Y$ die Wahrheit von Y eine Funktion der Wahrheit von $X \wedge Y$. Aber diese Wahrheits-Funktionalität gilt generell für die Aussagen-Logik. Allgemeine Formalisierung bzw. Formulierung eines strengen Schlusses wäre: $\Phi \Rightarrow \Psi$, d. h.: ‚Wenn Φ wahr ist, dann ist Ψ logisch notwendig wahr'.

Wir können weiter bestimmen: Ein *logischer Schluss* ist eine *Implikation*, die ihn allen Welten wahr ist (es kommt nur + unter dem Zentral-Relator vor).

Wir können aber zusätzlich alle möglichen Konjunktionen aus Prämisse und Konklusion *disjunktiv* zusammenfassen, gemäß der Definition (wie sie im Abschnitt über die Wahrheitstafel eingeführt wurde). Dann erhalten wir:

$$[X \wedge Y \Rightarrow Y] \;\Leftrightarrow\; [(X \wedge Y) \wedge Y] \vee [\neg(X \wedge Y) \wedge \neg Y] \vee [\neg(X \wedge Y) \wedge Y]$$

2) *mengen-theoretischer Ansatz*

Mengen-theoretisch könnte man als Bedeutung des Schlusses $X \wedge Y \Rightarrow Y$ formulieren: Y ist logisch gesehen *Teilmenge* von $X \wedge Y$.
Hier gilt im Einzelnen:
– Bei einem Schluss ist die Konklusion (Schluss-Satz) bereits in der Prämisse *enthalten*.
– Genauer: Bei einem Schluss ist die *Information* der Konklusion in der *Information* der Prämisse enthalten.
– Definition: Ein Schluss ist eine *Implikation*, bei der die Information der Konklusion bereits in der Information der Prämisse enthalten ist.

Dies ist andererseits ja auch die primäre Definition von *analytisch*: dass das Nachglied schon im Vorderglied enthalten ist.

Dies ist bei dem Schluss $X \wedge Y \Rightarrow Y$ besonders augenfällig: Y ist bereits in $X \wedge Y$ enthalten. Allerdings ist z. B. bei dem Schluss $X \Rightarrow X \vee Y$ die Konklusion $X \vee Y$ *logisch* genauso in der Prämisse X enthalten (obwohl das optisch anders aussieht). Entscheidend für den Bestimmung des *Informationsgehaltes* einer aussagen-logischen Relation ist die Menge der Welten, in denen die Relation *ungültig* (–) ist.

Im obigen Beispiel $X \wedge Y \;\Rightarrow\; Y$ ist laut Wahrheitstafel die Prämisse in der 2., 3. und 4. Zeile bzw. Welt ungültig (wobei die 2. Welt und die 4. Welt übereinstimmen, die Detailunterschiede sind hier nicht relevant). Die Konklusion Y ist dagegen nur in der 2. und 4. Welt ungültig. Insofern ist die Menge der Welten, in den Y ungültig ist, ein *Teilmenge* der Welten, in denen $X \wedge Y$ ungültig ist. Anders gesagt, der *Informationsgehalt* von Y ist eine Teilmenge des Information von $X \wedge Y$.

Mit Begriffen der *Informationstheorie* kann man auch sagen: Ein logischer Schluss ist *redundant* – oder spezifischer: Beim Schluss ist die Konklusion in Bezug auf die Prämisse *redundant*. Nun muss man damit allerdings vorsichtig sein, denn dies klingt so, als sei ein Schluss gewissermaßen *überflüssig*.

Schlüsse bringen für uns aber durchaus *neue* Erkenntnisse. Denn wir vermögen oft (subjektiv) in einer *Gesamt-Information* nicht die für uns relevante *Teil-Information* zu erkennen; erst wenn wir sie logisch ableiten, isolieren, wird sie uns bewusst. Darauf verweist auch der Begriff der *Deduktion*, der logischen Ableitung.

2-1-2-2 TAUTOLOGIE

Man kann bei der *analytischen Implikation* zweierlei behandeln:

- Gesetze der Implikation, z. B.: $(X \rightarrow Y) \;\Leftrightarrow\; (\neg X \leftarrow \neg Y)$
- Gesetze, in denen eine analytische Implikation vollzogen wird, z. B.: $X \wedge Y \;\Rightarrow\; Y$

Im ersten Beispiel geht es um eine analytische *Äquivalenz*, aber zwischen Implikationen. Im zweiten Fall geht es zwar um eine analytische *Implikation*, aber auf der Basis einer Konjunktion. Beides kommt zusammen z. B. in: $(X \rightarrow Y) \;\Rightarrow\; (X \Rightarrow X)$.

Generell gilt:
- Die Implikation ist immer gültig, wenn das *Vorderglied ungültig* ist: $- \Rightarrow ...$
- Die Implikation ist immer gültig, wenn das *Nachglied gültig* ist: $... \Rightarrow +$
- Natürlich kann das auch zusammenkommen, nämlich: $- \Rightarrow +$

Zusammenfassend haben wir also 3 Fälle: $- \Rightarrow -$, $- \Rightarrow +$, $+ \Rightarrow +$

So ergibt sich z. B.:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \Rightarrow & & \Rightarrow & & \Rightarrow & & \Rightarrow & \\ ---- & & ---+ & & --++ & & -+++ & & ++++ \end{array}$$

Anders gesagt: Die Implikation ist nur dann *ungültig*, wenn das *Vorderglied gültig* und das *Nachglied ungültig* ist. (Im Systematik-Teil wird das im Einzelnen dargestellt.)

Ein Beispiel für die Wahrheitstafel einer *Implikations-Tautologie* ist:

$$\begin{array}{ccccccc} (X & \to & Y) & \wedge & X & \Rightarrow & Y \\ + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & - & - & + & + & - \\ - & + & + & - & - & + & + \\ - & + & - & - & - & + & - \end{array}$$

Wichtige *Gesetze*, eine Auswahl:

• *1 Variable*:

Reflexivität	$X \Rightarrow X$
Reductio ad absurdum	$X \to \neg X \Rightarrow \neg X$ (es gilt auch $\Leftrightarrow$)

• *2 Variablen*:

Modus (ponendo) ponens	$(X \to Y) \wedge X \Rightarrow Y$
Modus tollendo tollens	$(X \to Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg X$
Modus ponendo tollens	$(X >< Y) \wedge X \Rightarrow \neg Y$
Modus tollendo ponens	$(X >< Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y$ $(X \vee Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y$
Abtrennungs-Regel	$X \wedge Y \Rightarrow Y, X \wedge Y \Rightarrow X$
Simplifikations-Regel	$X \leftrightarrow Y \Rightarrow X \to Y$
Paradoxie	$\neg X \Rightarrow X \to Y$

• *3 Variablen*:

Transitivität	$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \Rightarrow X \to Z$ $(X \to Y) \wedge (Y \to \neg Z) \Rightarrow X \to \neg Z$ $(X \leftrightarrow Y) \wedge (Y \leftrightarrow Z) \Rightarrow X \leftrightarrow Z$

2-1-2-3 KONTRADIKTION UND NEGATION

Eine Implikation kann nur dann *kontradiktorisch* sein, wenn das *Vorderglied eine Tautologie* und das *Nachglied eine Kontradiktion* ist.

Tautologie $\nRightarrow$ Kontradiktion

In diesem Fall ist also die analytische Gesamt-Relation bereits aus zwei *analytischen* Relationen zusammengesetzt, z. B.:

$$(X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$$

+	−	−
+	−	−
+	−	−
+	−	−

Diese scharfe Forderung bedingt, dass Folgen, die man eigentlich für *kontradiktorisch* halten müsste, es doch nicht sind, z. B.:

$(X \rightarrow Y) \longrightarrow \neg(X \rightarrow Y) : - + - -$

$\neg(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \rightarrow Y) : + - + +$

Wenn man also aus der Implikation auf ihre *Negation* schließt (und umgekehrt), ergibt sich keine Kontradiktion, sondern nur eine *semi-analytische* Relation. Und obwohl die beiden obigen Relationen logisch gleichwertig sind, hat der eine Schluss 3+, der andere nur 1+. Das ist von unserem normalen Sprach- und Logikverständnis her wenig plausibel.

Wohl noch problematischer ist, dass auch folgende Schlüsse *nicht kontradiktorisch* sind:

$X \longrightarrow \neg X: \; - - + +$

$\neg X \longrightarrow X: \; + + - -$

Partiell kann man dieser Paradoxie mit der *negativen Folge* begegnen: $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$

z. B.: $X >< Y \;\Rightarrow\; \neg(X \wedge Y)$

Da die *Kontradiktion* bei der normalen Implikation extrem eingeschränkt und damit fast unbrauchbar ist, spielt die *Folge mit Negation* als Alternative eine wichtige Rolle.

Wichtig ist auch die *Negation des strengen Schlusses*: $\Phi \neg\!\!\Rightarrow \Psi$

$\Phi \neg\!\!\Rightarrow \Psi$ soll bedeuten: Φ impliziert nicht streng (tautologisch) Ψ, sondern nur partiell.

Ψ folgt daher *nicht notwendig* aus Φ.

$\Phi \neg\!\!\Rightarrow \Psi$ kann somit für $\Phi \longrightarrow \Psi$ stehen.

$\Phi \neg\!\!\Rightarrow \Psi$ darf man nicht gleichsetzen mit $^{-}\neg^{-}(X \Rightarrow X)$, das ist ja eine Kontradiktion.

$\Phi \neg\!\!\Rightarrow \Psi$ kann man keine eindeutige Wahrheitstafel zuordnen, sondern nur sagen: die Wahrheitstafel enthält nicht ausschließlich + und nicht ausschließlich −.

2-1-2-4 SEMI-ANALYTISCHE IMPLIKATION

Semi-analytische Relationen können unterschiedlich nahe an der *Tautologie* oder *Kontradiktion* stehen.

$X \vee Y \longrightarrow Y \qquad (+ - + +)$

$X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y \quad (+ - - +)$

$X \mid Y \longrightarrow X \wedge Y \quad (+ - - -)$

Man könnte unterscheiden zwischen:

- *unechten* semi-analytischen Schlüssen

z. B. $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$. Unecht, denn der umgekehrte Schluss, die Replikation, ist ein *streng* analytischer Schluss: $X \vee Y \Leftarrow X \wedge Y$

- *echten* semi-analytischen Schlüssen

z. B. $X \wedge Y \longrightarrow X \wedge \neg Y \;\; (- + + +)$

Hier ist die Replikation auch eine semi-analytische Folge:

$X \wedge Y \longleftarrow X \wedge \neg Y \quad (+ - + +)$

2-1-2-5 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Replikation* sind nicht viele Gesetze ausgewiesen, allerdings kann man die umgekehrten Gesetze der *Implikation* verwenden.

Gesetze der Replikation

$X \Leftarrow X$

$(X \leftarrow Y) \Leftarrow X$

$(X \leftarrow Y) \Leftarrow X \wedge Y$

$(X \vee Y) \Leftarrow X \wedge Y$

$X \Leftarrow (X \leftarrow Y) \wedge Y$

Für die Äquivalenz sind viele Gesetze ausgewiesen, hier nur eine kleine Auswahl:

Gesetze der Äquivalenz

Reflexivität der Äquivalenz	$X \Leftrightarrow X$
Definition der Äquivalenz	$(X \leftrightarrow Y) \Leftrightarrow (X \rightarrow Y) \wedge (X \leftarrow Y)$
Kontraposition Implikation	$X \rightarrow Y \Leftrightarrow (\neg X \leftarrow \neg Y)$
Kontraposition Äquivalenz	$X \leftrightarrow Y \Leftrightarrow (\neg X \leftrightarrow \neg Y)$
De Morgan	$X \wedge Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \vee \neg Y)$ $X \vee Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y)$
Vertauschungsgesetz	$X \wedge Y \Leftrightarrow Y \wedge X$

2-1-3 Positiv-Implikation

Die *analytischen Eigenschaften* der *Positiv-Implikation* sind recht komplex bzw. kompliziert, daher habe ich auch noch keine vollständige der Theorie der Positiv-Implikation entwickelt, hier steht weitere Forschungsarbeit aus. Für die Positiv-Implikation ergeben sich z. T. die gleichen, z. T. aber auch andere Gesetze wie für die klassische Implikation.

Es lassen sich 2 Modelle der (analytischen) Positiv-Implikation unterscheiden. Ich nenne sie: *Existenz-Modell* und *Nicht-Existenz-Modell*.

- *Existenz-Modell*

Hier gilt: $(X *\!\rightarrow Y) \;*\!\Leftrightarrow\; \neg(X *\!\rightarrow \neg Y)$ Bzw.: $(X *\!\rightarrow \neg Y) \;*\!\Leftrightarrow\; \neg(X *\!\rightarrow Y)$

- *Nicht-Existenz-Modell*

Hier gelten die obigen tautologischen Äquivalenzen nicht, sondern nur die *semi-analytischen Äquivalenzen* bzw. *analytischen Implikationen*.

Nämlich: $(X *\rightarrow Y)\ *\longleftrightarrow\ \neg(X *\rightarrow \neg Y)$. Oder: $(X *\rightarrow Y)\ *\Rightarrow \neg(X *\rightarrow \neg Y)$
Bzw.: $(X *\rightarrow \neg Y)\ *\longleftrightarrow\ \neg(X *\rightarrow Y)$ Oder: $(X *\rightarrow \neg Y)\ *\Rightarrow \neg(X *\rightarrow Y)$

Existenz meint in diesem Fall: Aus der *Negation* von $X *\rightarrow \neg Y$ folgt logisch $X *\rightarrow Y$ und daraus folgt X. Somit ist die *Existenz* von X gewährleistet. Bei dem Nicht-Existenz-Modell ist das beides nicht gegeben. Allerdings gilt der Schluss auf X nicht aussagen-logisch, sondern nur *quantoren-logisch* bzw. *quantitativ* (denn es gilt nur $p > 0$, nicht $p = 1$).

Ich werde hier das *Existenz-Modell* vorstellen. Im Punkt 2-4, über quantitative Aussagen-Logik, werde ich auch das Nicht-Existenz-Modell vorstellen und die beiden Modelle miteinander vergleichen, was auch mit *unterschiedlichen Wahrheitstafeln* verbunden ist. Denn nur im quantitativen Ansatz ist eine verständliche Unterscheidung der beiden Modelle möglich.

2-1-3-1 TAUTOLOGIE

Es gelten z. B. folgende Gesetze:

$$X *\Rightarrow X$$
$$X \wedge Y *\Rightarrow Y$$
$$(X *\rightarrow Y) \wedge X *\Rightarrow Y$$

Der Schluss *Modus ponens*: $(X *\rightarrow Y) \wedge X *\Rightarrow Y$ soll genauer erklärt werden.
Zunächst Beweis durch *verkürzte* Wahrheitstafel:

(X	*→	Y)	∧	X	*⇒	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	−	+		

Die Lücke in der Wahrheitstafel ergibt sich, weil unter der Konjunktion $\wedge$ in der 2. Zeile ein Minus (−) steht, so dass eben bei der Positiv-Implikation kein Wert daraus folgt. Denn die Positiv-Implikation ist ja nur für die Fälle definiert, in denen das *Vorderglied gültig* (+) ist; sonst wird bei der *verkürzten Wahrheitstafel* eine Lücke gelassen (vgl. aber unten).

Verwendet man die *vollständige Wahrheitstafel* mit □, ergibt sich keine Lücke. Grundsätzlich ist die vollständige Wahrheitstafel vorzuziehen, auch wenn sie optisch unübersichtlicher ist; in bestimmten Fällen können sich bei der verkürzten Wahrheitstafel Fehler bzw. nicht entscheidbare Wahrheitswerte ergeben.

Modus ponens: vollständige Wahrheitstafel:

(X	*→	Y)	∧	X	*⇒	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	−	+	□	−
−	□	+	−	−	□	+
−	□	−	−	−	□	−

Wie schon in erläutert: Wenn links von $*\rightarrow$ ein Minus (−) in der Wahrheitstafel unter dem Relator steht, dann gilt $*\rightarrow$ als *nicht definiert* und erhält in dieser Zeile ein □.

Definition einer Tautologie der Positiv-Implikation: Eine Positiv-Implikation, bei der *syntaktisch* gesprochen rechts und links von $*\rightarrow$ ganz oder teilweise gleiche Zeichen stehen, und bei der außer + nur □ unter dem Zentral-Relator steht, gilt als *analytisch* und wird mit dem Doppelpfeil $*\Rightarrow$ gekennzeichnet. Dies im Unterschied zur *normalen* analytischen Implikation, bei der in der Wahrheitstafel nur + vorkommt.

Es stellt sich die Frage, inwieweit sich Positiv-Relationen mit anderen Relatoren verknüpfen lassen. Verwendet man die *verkürzte* Wahrheitstafel, so ist das nicht besonders problematisch, da in dieser Wahrheitstafel nur + (entsprechend w = wahr) und – (entsprechend f = falsch) vorkommen, für welche die normalen Relatoren definiert sind. Verwendet man dagegen die *vollständige* Wahrheitstafel der Positiv-Implikation, dann treten dort Zeichen wie □ auf. Zunächst ist das Zeichen □ für „nicht definiert“ (und auch das noch einzuführende Zeichen ‚?‘ = unbestimmt) nur für die Positiv-Implikation bzw. Positiv-Replikation/Positiv-Äquivalenz definiert. In bestimmten Fällen sind aber auch bei anderen Relatoren wie $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ usw. Verknüpfungen mit □ möglich. Z. B. weiß man bei der *normalen Implikation*, dass sie *immer* gültig ist, wenn links – (minus) steht, sie muss also auch gültig sein, wenn links – (minus) und rechts □ steht. Oder die *Konjunktion* ist immer ungültig, wenn *ein* – (minus) steht, d. h. sie muss auch ungültig sein, wenn – und □ kombiniert sind.

Dieser Fall ist bei der obigen Wahrheitstafel von $(X *\!\rightarrow Y) \wedge X \;\; *\!\Rightarrow Y$ gegeben. Die Reihe unter $\wedge$ kann man im obigen Beispiel vollständig ausfüllen, obwohl 2x links □ steht. Denn rechts steht dort jeweils minus (–), und die Konjunktion ist ja immer negativ, auch wenn nur *ein* Minus da steht.

2-1-3-2 KONTRADIKTION

Für die Positiv-Implikation gibt es folgende 3 Möglichkeiten der Kontradiktion:

- Tautologie $*\!\not\Rightarrow$ Kontradiktion: $\,^{+}\Phi^{+} \; *\!\not\Rightarrow \; ^{-}\Psi^{-}$
- Position $*\!\not\Rightarrow$ Negation: $\Phi *\!\not\Rightarrow \neg\Phi$
- Relation $*\!\not\Rightarrow$ negative Folge: $\Phi *\!\not\Rightarrow \neg\Psi$

Dabei ist vorab zu sagen:

Die Positiv-Implikation ist *kontradiktorisch*, wenn unter dem Zentral-Relator außer – (ungültig) nur □ (nicht definiert) steht.

Entsprechend war ja die *Tautologie* der Positiv-Implikation bestimmt worden:

Die Positiv-Implikation ist *tautologisch*, wenn unter dem Zentral-Relator außer + (gültig) nur □ (nicht definiert) steht.

Dabei ist festzuhalten: Aus der Negation von □ folgt wiederum □. D. h. in der Wahrheitstafel:

wenn $\Phi \;\; *\!\rightarrow \;\Psi$, dann $\neg(\Phi \;\; *\!\rightarrow \;\Psi)$

□ □

- Tautologie $*\!\not\Rightarrow$ Kontradiktion

$^{+}\Phi^{+} \;\; *\!\not\Rightarrow \;\; ^{-}\Psi^{-}$

z. B. $(X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X) *\!\not\Rightarrow (X \;^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$

Dies entspricht der Kontradiktion bei der normalen Implikation.

- Position $*\!\not\Rightarrow$ Negation

$\Phi *\!\not\Rightarrow \neg\Phi$, z. B.: $X *\!\not\Rightarrow \neg X$

Die Positiv-Implikation ist also nicht nur kontradiktorisch, wenn das Vorderglied tautologisch und das Nachglied kontradiktorisch ist. Sondern auch, wenn das *Nachglied die Negation des Vorderglieds* bedeutet. Ebenso ist die Umkehrung kontradiktorisch, also: $\neg\Phi *\!\not\Rightarrow \Phi$.

(X	→	Y)	$*\!\not\Rightarrow$	¬	(X	→	Y)
+	+	+	–	–	+	+	+
+	–	–	□	+	+	–	–
–	+	+	–	–	–	+	+
–	+	–	–	–	–	+	–

• Relation $*\not\Rightarrow$ (negative) Folge: $\Phi *\not\Rightarrow \neg\Psi$ bzw. $\Phi *\not\Rightarrow \Psi$
Es gibt aber noch eine *dritte* Form der Kontradiktion, die noch weniger Voraussetzungen hat. Hier liegt also eine Kontradiktion vor, obwohl Φ und $(\neg)\Psi$ nicht äquivalent sind.

Z. B. $X \wedge Y *\Rightarrow \neg(X >< Y)$, entsprechend $X \wedge Y *\not\Rightarrow X >< Y$

Zusammenfassend ergeben sich z. B. folgende Unterschiede zur normalen Implikation:

Normale Implikation	*Positiv-Implikation* (Kontradiktionen)
$X \longrightarrow \neg X$: $- - + +$	$X *\not\Rightarrow \neg X$: $- -$ □ □
$\neg X \longrightarrow X$: $+ + - -$	$\neg X *\not\Rightarrow X$: □ □ $- -$

Das heißt, bei der *normalen Implikation* gilt: Wenn X sein kontradiktorisches Gegenteil ¬X impliziert, dann ist diese Implikation nicht kontradiktorisch. Für das Umgekehrte gilt das Gleiche. Dagegen ist bei der *Positiv-Implikation* der Schluss von X auf ¬X kontradiktorisch. Diese Bestimmung der Positiv-Implikation entspricht viel mehr unserer Intuition und unserem Sprachverständnis als die Verhältnisse bei der normalen Implikation.

Ein weiter wesentlicher Unterschied zwischen der normalen Implikation und der Positiv-Implikation ist:

Bei der *normalen Implikation* ist aus der Kontradiktion *alles* abzuleiten:

$- - - -\ \Rightarrow$ alles

Bei der *Positiv-Implikation* ist aus der Kontradiktion *nichts* abzuleiten:

$- - - -\ *\!\longrightarrow$ nichts

Denn die Positiv-Implikation ist in diesem Fall *vollständig undefiniert*, sie hat also nur undefinierte Felder, d. h. man bekommt immer einen Wahrheitsverlauf □ □ □ □.

Denn aus – (ungültig) folgt ja bei der Positiv-Implikation immer □: nicht definiert.

2-1-3-3 SEMI-ANALYTISCHE RELATION

Bei der *normalen semi-analytischen* Implikation kommt in der Wahrheitstafel unter dem Relator sowohl plus (+) wie minus (–) vor. Bei der *semi-analytischen Positiv-Implikation* ist das komplizierter: Es muss „plus" (+) vorkommen, es muss „minus" (–) oder „unbestimmt" (?) vorkommen, es kann „undefiniert" (□) vorkommen.

Zur Erläuterung: ich hatte gesagt, wenn *links* vom Pfeil „minus" (–) steht, dann wird die Positiv-Implikation nicht als gültig, sondern als *nicht definiert* verstanden (□), denn „wenn X, dann Y" ist eben nur für die Fälle positiv definiert, in denen X auch gültig ist.

Hinzufügen kann man: Wenn *links* „nicht definiert", also □ steht, dann gilt diese Kombination auch als *nicht definiert*. Außer es folgt ein – auf das □, dann gilt die Kombination als *unbestimmt*, wofür ich das *Frage-Zeichen* (?) verwende.

Auch wenn *links* „positiv" (+) steht und *rechts* „nicht definiert (□), gilt die Kombination als *unbestimmt* (?). Das „unbestimmt" (?) darf nicht verwechselt werden mit dem „nicht definiert" (□), bei „unbestimmt" kann man nicht entscheiden, ob die Relation, in der betreffenden logischen Welt, positiv oder negativ ist (zur Übersicht vgl. unten).

Aus Gründen der Einfachheit würde man gerne mit *einer* Zusatz-Kategorie, also „nicht definiert" oder „nicht bestimmt" auskommen. Aber es zeigt sich, dass man diese Unterscheidung benötigt. Denn wie oben beschrieben, gilt eine Positiv-Relation, mit nur + (oder nur + und □) als *tautologisch*. Wenn dagegen auch das ? für *unbestimmt* in der Wahrheitstafel unter dem Relator steht, dann ist die Relation nicht tautologisch oder kontradiktorisch, sondern nur *semi-analytisch*. Daher kommt man auch nicht immer mit der *verkürzten* Wahrheitstafel aus,

weil dort z. B. der Unterschied zwischen □ (nicht definiert) und ? (nicht bestimmt) gar nicht erfasst wird. Das wird später, im quantitativen Teil, genauer gezeigt werden.
Ein Beispiel für eine *semi-analytische* Positiv-Implikation ist:

$\neg(X *\rightarrow Y)$	$*\longrightarrow$	$\neg(X \rightarrow Y)$
− + + +	□	− + + +
+ + − −	+	+ + − −
□ − □ +	?	− − + +
□ − □ −	?	− + + −

In der 3. und 4. Zeile muss unter dem Zentral-Relator$*\longrightarrow$ jeweils ? (unbestimmt) stehen, weil hier links □ und rechts – steht. Denn wenn man anstelle des ? auch ein □ setzen würde, wäre die Implikation ja *tautologisch* (□ + □ □). Wie man am besten im quantitativen Ansatz zeigen kann, ist das falsch. Nachfolgend eine Übersicht über die *wichtigsten Kombinationen*:

Φ	$*\rightarrow$	Ψ
+	+	+
+	−	−
+	?	□
−	□	+
−	□	−
−	□	□
□	□	+
□	?	−
□	□	□

Man könnte allerdings auch *andere* Definitionen vornehmen, beim heutigen Stand haben sich aber die obigen Festlegungen als am sinnvollsten erwiesen. Später wird gezeigt werden, dass bei einem anderen Modell der Positiv-Implikation, dem *Nicht-Existenz-Modell*, z. T. veränderte Definitionen erforderlich sind.

2-1-3-4 POSITIV-ÄQUIVALENZ

• Definition der Positiv-Implikation
Ich habe schon darauf hingewiesen, dass ich hier nur das *Existenz-Modell* der Positiv-Implikation vorstelle. Und in diesem Modell gilt:

$$(X *\rightarrow Y) \quad *\Leftrightarrow \quad \neg(X *\rightarrow \neg Y)$$
$$\neg(X *\rightarrow Y) \quad *\Leftrightarrow \quad (X *\rightarrow \neg Y)$$

Diese Relationen kann man als *definierend* für die Positiv-Implikation ansehen. Die erste sei durch ihre Wahrheitstafel erläutert:

$(X *\rightarrow Y)$	$*\Leftrightarrow$	$\neg(X *\rightarrow \neg Y)$
+ + +	+	+ + + − +
+ − +	□	− + − + −
− □ +	□	□ − □ − +
− □ −	□	□ − □ + −

Auch hier gibt es Unterschiede zur normalen Äquivalenz bzw. normalen Implikation.

Denn dies sind Äquivalenzen, die bei der Positiv-Implikation gelten und bei der Implikation nicht. So ergeben sich folgende Unterschiede:

Implikation:	$\neg(X \rightarrow Y) \;\Rightarrow\; (X \rightarrow \neg Y)$	(− + − −) ⇒ (− + + +)
Positiv-Implikation:	$\neg(X \,{*}{\rightarrow}\, Y) \;{*}{\Leftrightarrow}\; (X \,{*}{\rightarrow}\, \neg Y)$	(− + □ □) *⇔ (− + □ □)
Implikation:	$\neg(X \rightarrow \neg Y) \;\Rightarrow\; (X \rightarrow Y)$	(+ − − −) ⇒ (+ − + +)
Positiv-Implikation:	$\neg(X \,{*}{\rightarrow}\, \neg Y) \;{*}{\Leftrightarrow}\; (X \,{*}{\rightarrow}\, Y)$	(+ − □ □) *⇔ (+ − □ □)

Es gibt auch Äquivalenzen, die bei der normalen Implikation gelten, bei der Positiv-Implikation aber nicht. Z. B. gilt die *Kontraposition* $(X \rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg X \leftarrow \neg Y)$ bei Verwendung der Positiv-Implikation bzw. Positiv-Äquivalenz nicht streng analytisch, sondern ist ganz *undefiniert* (es sei denn, man nimmt eine besondere Variante der Positiv-Implikation an). Dies ist von großer Wichtigkeit, denn die Kontraposition spielt eine wesentliche Rolle.

(X	*→	Y)	*←→	(¬X	←*	¬Y)
+	+	+	□	− +	□	− +
+	−	−	□	− +	−	+ −
−	□	+	□	+ −	□	− +
−	□	−	□	+ −	+	+ −

Wie man sieht, ist die Kontraposition völlig *undefiniert* (bei einer anderen Interpretation ständen in der 1. und 4. Zeile ein ? statt □, was aber auch nichts Wesentliches änderte).

2-1-3-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Unterschiede von Normal-Implikation und Positiv-Implikation

- Implizierung von X

$(X \rightarrow Y) \longrightarrow X$	$(X \,{*}{\rightarrow}\, Y) \;{*}{\longrightarrow}\; X$	(+ □ ? ?)
$\neg(X \rightarrow Y) \Rightarrow X$	$\neg(X \,{*}{\rightarrow}\, Y) \;{*}{\longrightarrow}\; X$	(□ + ? ?)

Die *normale Implikation* impliziert nicht die Gültigkeit (Existenz) der Prämisse (X), der Schluss ist nur semi-analytisch (+ + − −). *Paradoxerweise* impliziert aber die Negation der normalen Implikation die Gültigkeit von X. Auch bei der *Positiv-Implikation* wird in bejahter und negierter Form nicht die Gültigkeit von X impliziert, allerdings in gleicher Weise (im *quantitativen* Modell wird jedoch impliziert, dass $p(X) > 0$, nur nicht $p(X) = 1$, dazu später).

- Paradoxie der Implikation

$\neg X \Rightarrow X \rightarrow Y$ $\qquad$ $\neg X \;{*}{\longrightarrow}\; X \,{*}{\rightarrow}\, Y$ (□ □ ? ?)

Diese Paradoxie tritt bei der Positiv-Implikation nicht auf. Die Relation ist vollständig undefiniert bzw. unbestimmt.

- Negation

$X \longrightarrow \neg X$ (− − + +) $\qquad$ $X \;{*}{\not\Rightarrow}\; \neg X$ (− − □ □)

$\neg X \longrightarrow X$ (+ + − −) $\qquad$ $\neg X \;{*}{\not\Rightarrow}\; X$ (□ □ − −)

Diese beiden Relationen sind bei Verwendung der *normalen Implikation* semi-analytisch, liegen also zwischen analytisch und kontradiktorisch. Bei der *Positiv-Implikation* sind beide Relationen *kontradiktorisch*, was deutlich überzeugender ist.

Beziehungen zwischen Implikation und Positiv-Implikation:
Es sind vor allem 4 Relationen zwischen Implikation und Positiv-Implikation zu untersuchen:

- X *→ Y Positiv-Implikation X → Y
- X *→ Y Implikation X →Y
- X → Y Positiv-Implikation X *→ Y
- X → Y Implikation X *→ Y

• *Positiv*-Schluss von der Positiv-Implikation auf die Implikation: (X *→ Y) *⇒ (X → Y)
Hier liegt eine streng-analytische Positiv-Implikation, ein *strenger* Schluss vor. Denn außer dem + kommt nur das □ vor. Und in diesem Fall gilt die Relation als tautologisch.

(X	*→	Y)	*⇒	(X	→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	□	+	−	−
−	□	+	□	−	+	+
−	□	−	□	+	+	−

• Schluss von der Positiv-Implikation auf die Implikation : (X *→ Y) ⇒ (X → Y)

(X	*→	Y)	⇒	(X	→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	+	+	−	−
−	□	+	+	−	+	+
−	□	−	+	+	+	−

Auch bei der Verwendung der normalen Implikation erhält man einen *vollständigen* Schluss Obwohl in der 3. und 4. Zeile ein □ unter dem *→ steht (und die Implikation keine Deutung von □ beinhaltet), kann man ein + unter den Pfeil ⇒ setzen. Denn unter dem → steht in diesen Zeilen ebenfalls ein +. Und die Implikation hat ja immer den Wert +, wenn das Nachglied, also hier X → Y den Wert + hat, egal welchen Wert das Vorderglied hat.
Somit gilt: Ein *strenger Schluss* von der Positiv-Implikation auf die Implikation ist möglich.

• *Positiv*-Schluss von der Implikation auf die Positiv-Implikation:(X → Y) *⟶ (X *→ Y)

(X	→	Y)	*⟶	(X	*→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	□	+	−	−
−	+	+	?	−	□	+
−	+	−	?	+	□	−

Der Schluss von der Implikation auf die Positiv-Implikation mittels der Positiv-Implikators ist nur *partiell-analytisch*. (Allerdings könnte man auch vertreten, dass hier ein *strenger* Schluss vorliegen muss, auf dieses sehr komplizierte Problem gehe ich aber nicht weiter ein.)

• Schluss von der Implikation auf die Positiv-Implikation $(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \,{*}{\rightarrow}\, Y)$

(X	→	Y)	⟶	(X	*→	Y)
+	+	+	+	+	+	+
+	−	−	+	+	−	−
−	+	+	∅	−	□	+
−	+	−	∅	+	□	−

Hier ist gar kein Schluss möglich. Denn wie die Wahrheitstafel oben zeigt: in der 3. und 4. Zeile steht links unter dem → ein + und rechts unter dem *→ ein □. Die *normale* Implikation ist aber gar nicht für □ definiert, insofern ist kein Schluss möglich, hierfür wähle ich das Symbol ∅.

2-1-4 Systematik

Es gibt (bei 2 Variablen) 16 bzw. 14 Relatoren, wenn man *Antilogator* und *Tautologator* nicht dazu zählt. So gibt es bei der Verknüpfung von zwei einfachen Relationen 16 x 16 x 16 = 4096 Kombinationen bzw. 14 x 14 x 14 = 2744 Kombinationen.

Z. B. $(X \wedge Y) \wedge (X \wedge Y)$. Für die drei $\wedge$ (bzw. anstelle) kann man eben 16 (bzw. 14) Relatoren einsetzen. Es gibt verschiedene *Darstellungs-Möglichkeiten*, vor allem die folgenden zwei:

- $(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\wedge^{-}\ (X \leftarrow Y) : + - - +$
  Hier wird anschließend der Wahrheitsverlauf der *Gesamtrelation* angegeben (in Klammern oder nicht). Dies ist vor allem sinnvoll bei *semi-analytischen* Relationen wie ${}^{+}\wedge^{-}$, denn bei tautologischen Relationen wie ${}^{+}\wedge^{+}$ lautet der Verlauf ja ohnehin immer + + + + und bei kontradiktorischen entsprechend − − − −.
- $(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\wedge^{-}\ (X \leftarrow Y)$ $(+ - + +)\ {}^{+}\wedge^{-}\ (+ + - +)$
  Hier werden die Wahrheitsverläufe der Teil-Relationen, im Beispiel $X \rightarrow Y$ und $X \leftarrow Y$, jeweils gesondert dargestellt, zur besseren Übersichtlichkeit.

2-1-4-1 NULL+RELATOR

Hier kommt nur der *Antilogator* $\perp$ in Frage, der aber wie gesagt kein *echter* Relator ist.
$X \perp Y$ hat den Wahrheitsverlauf: − − − −

Eine Tautologie ist hier per definitionem ausgeschlossen, auch eine semi-analytische Relation. Gleichgültig, welche Relationen man mit dem Antilogator verbindet, es ergibt sich immer eine *Kontradiktion*.

Das hat vor allem für die Implikation eine paradoxe Auswirkung: Aus der Antilogie lässt sich jede beliebige Relation logisch ableiten, sogar eine *Kontradiktion*.

$$X \perp Y \Rightarrow X \wedge \neg X \ (+ + + +)$$

Bei der *Positiv-Implikation* ergibt sich dieses Problem nicht, denn ein solcher Schluss ist hier nicht definiert, weil die Positiv-Implikation bei ungültigem Vorderglied grundsätzlich nicht definiert ist.

2-1-4-2 EIN+RELATOREN

Hier geht es um die *Konjunktion* bzw. verwandte Relatoren X >– Y, X –< Y, $X \nabla Y$.

• Tautologie

Eine Tautologie der Konjunktion ist nur möglich, wenn zwei Tautologien verknüpft werden:

$(X \vee \neg X)\ {}^{+}\!\wedge^{+}\ \neg(X \wedge \neg X)$ $(+ + + +)\ {}^{+}\!\wedge^{+}\ (+ + + +)$

• Kontradiktion

Eine Kontradiktion ist dann gegeben, wenn in jeder Welt mindestens einer der zu verbindenden Relationen ungültig (–) sind, z. B.:

$(X \wedge Y)\ {}^{-}\!\wedge^{-}\ (X \wedge \neg Y)$ $(+ - - -)\ {}^{-}\!\wedge^{-}\ (- + - -)$

• Semi-analytisch

$(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\!\wedge^{-}\ (X \leftarrow Y)$ $(+ - + +)\ {}^{+}\!\wedge^{-}\ (+ + - +)$

2-1-4-3 ZWEI+RELATOREN

Die Zwei+Relatoren $\leftrightarrow$ und >< werden an anderer Stelle behandelt. Hier geht es um die Relatoren: $X \rfloor Y$, $X \lfloor Y$, $X \rceil Y$, $X \lceil Y$

• Tautologie

Mit dem Relator $\rfloor$ erzeugt man nur dann eine Tautologie, wenn links von dem Relator eine Tautologie steht, was dann rechts steht, ist gleichgültig, z. B.:

$(X \vee \neg X)\ {}^{+}\!\rfloor^{+}\ (X \wedge Y)$ $(+ + + +)\ {}^{+}\!\rfloor^{+}\ (+ - - -)$

• Kontradiktion

Mit dem Relator $\rfloor$ ergibt sich nur dann eine Kontradiktion, wenn links vom Relator eine Kontradiktion steht, z. B.:

$(X \wedge \neg X)\ {}^{-}\!\rfloor^{-}\ (X \wedge Y)$ $(- - - -)\ {}^{-}\!\rfloor^{-}\ (+ - - -)$

• Semi-analytisch

Semi-analytisch sind alle anderen Kombinationen, z. B.:

$(X \rightarrow Y)\ {}^{+}\!\rfloor^{-}\ (X \leftarrow Y)$ $(+ - + +)\ {}^{+}\!\rfloor^{-}\ (+ + - +)$

Entsprechendes gilt für die anderen genannten Relatoren.

2-1-4-4 DREI+RELATOREN

Die Drei+Relatoren $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\vee$ und | werden systematisch an anderer Stelle behandelt.
Es sei deshalb nur kurz auf die Implikation $\rightarrow$ eingegangen.

• Tautologie

Die Implikation ist nur ungültig, wenn links vom $\rightarrow$ plus (+) steht und rechts minus (–), in allen anderen Fällen ist sie gültig, z. B.:

$(X \wedge Y) \Rightarrow Y$ $(+ - - -) \Rightarrow (+ - + -)$

• Kontradiktion

Eine Kontradiktion gibt es nur, wenn gilt: Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion, z. B.:

$(X \vee \neg X) \not\Rightarrow (X \wedge \neg X)$ $(+ + + +) \not\Rightarrow (- - - -)$

• Semi-analytisch

$(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \leftarrow Y)$ $(+ - + +) \longrightarrow (+ + - +)$

2-1-4-5 VIER+RELATOR

Hier ist der *Tautologator* $\top$ zu nennen, der allerdings, wie erläutert, kein echter Relator ist.

• Tautologie

Die Verbindung zweier beliebiger Relatoren durch den Tautologator führt in jedem Fall zu einer Tautologie, selbst die Verbindung zweier Kontradiktionen, z. B.:

$(X \wedge \neg X) \top (Y \wedge \neg Y)$ $(- - - -) \top (- - - -)$

Man braucht hier für die Tautologie nicht $^+\top^+$ schreiben, denn es ergibt sich ja immer eine Tautologie.

• Kontradiktion

Die Verbindung zweier Relationen durch den Tautologator ergibt in keinem Fall eine Kontradiktion.

• Semi-analytisch

Die Verbindung zweier Relationen durch den Tautologator ergibt in keinem Fall eine semi-analytische Relation.

2-1-5 Erweiterungen

2-1-5-1 INKLUSIV / EXKLUSIV

Hier sollen zunächst die Begriffe *inklusiv* und *exklusiv* – jetzt im analytischen Bereich – noch einmal präzisiert werden. Diese beziehen sich in erster Linie auf die *Disjunktion* $X \vee Y$ und die *Kontravalenz* $X >< Y$. Dabei geht es um das Verhältnis zur *Konjunktion* $X \wedge Y$.

Inklusion bedeutet, dass „oder" das höhere „und" als *Möglichkeit* mit einschließt: oder $\longrightarrow$ und. Das gilt für die Disjunktion: $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$: $(+++-) \longrightarrow (+---)$.

Exklusion bedeutet, dass „oder" das „und" ausschließt: oder $\Rightarrow \neg$und. Das gilt für die Kontravalenz: $X >< Y \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$: $(-++-) \Rightarrow (-+++)$.

Der Dritte im Bund der „oder" ist die Exklusion $X\,|Y$.

Auch hier gilt der Ausschluß des „und": $X \mid Y \Rightarrow \neg(X \wedge Y)$, es gilt sogar $\Leftrightarrow$.

Das wichtigste Gesetz für alle drei „oder" ist der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*; er begründet die *2-Wertigkeit* der klassischen Logik: $X \,^+\!\vee^+ \neg X$, $X \,^+\!\!><^+ \neg X$, $X \,^+|^+ \neg X$.

Weitere wichtige Gesetze der Disjunktion sind:

$$(X \vee Y) \wedge \neg X \Rightarrow Y \qquad\qquad (X \vee Y) \wedge \neg Y \Rightarrow X$$

De-Morgan-Gesetze (hier nur eine Auswahl):

$$X \vee Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge \neg Y) \qquad\qquad X \vee \neg Y \Leftrightarrow \neg(\neg X \wedge Y)$$
$$\neg X \vee Y \Leftrightarrow \neg(X \wedge \neg Y) \qquad\qquad \neg X \vee \neg Y \Leftrightarrow \neg(X \wedge Y)$$

Zwischen den drei „oder" gilt ($\longleftrightarrow$ steht für die *semi-analytische* Äquivalenz):

$$\begin{array}{ccc} & X >< Y & \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ X \vee Y & \longleftrightarrow & X \mid Y \end{array}$$

2-1-5-2 LOGISCHES QUADRAT

Man kann wichtige Beziehungen zwischen bestimmten Relatoren durch das *logische Quadrat* bzw. Rechteck angeben (obwohl dieses in der *Quantoren-Logik* wichtiger ist, vgl. 2-2).

$$\begin{array}{c|ccc|c} (+---) & X \wedge Y & ^+|^+ & X \triangledown Y & (---+) \\ & \Downarrow & ^+\!\!><^+ & \Downarrow & \\ (+++-) & X \vee Y & ^+\!\vee^+ & X \mid Y & (-+++) \end{array}$$

2-1-5-3 GEGENSÄTZE

Man unterscheidet in der Logik verschiedene *Gegensätze*, nach ihrer Stärke geordnet:

Kontradiktorisch	X >< Y: entweder ist X gültig oder Y
Konträr	X | Y: X und Y sind nicht beide gültig
Subkonträr	$X \vee Y$: X und Y sind nicht beide ungültig
Subaltern	$X \rightarrow Y$: wenn X gültig ist, dann auch Y

Als stärkster Gegensatz gilt der kontradiktorische, dann der konträre, dann der subkonträre; den subalternen interpretieren wir im normalen Sprachgebrauch kaum als Gegensatz. Die Gegensätze werden durch die oben genannten *Relatoren* logisch ausgedrückt.

Man könnte zwar auch *synthetische* Gegensätze definieren (entsprechend den oben genannten Relatoren), aber normalerweise versteht man in der Logik die Gegensätze als *analytisch*; insofern kommen die analytischen Versionen der Relatoren zum Einsatz:

$$^{+}{><}^{+} \quad ^{+}|^{+} \quad ^{+}\vee^{+} \quad \Rightarrow$$

Gegensatz und logisches Quadrat

Die Gegensätze lassen sich im *logischen Quadrat* darstellen:

		Konträr		
	$X \wedge Y$	$^{+}\|^{+}$	$X \nabla Y$	
subaltern	$\Downarrow$	kontra- $^{+}{><}^{+}$ diktorisch	$\Downarrow$	subaltern
	$X \vee Y$	$^{+}\vee^{+}$	$X \| Y$	
		subkonträr		

Zur Einheitlichkeit könnte man einsetzen für X | Y: $\neg X \vee \neg Y$ und für $X \nabla Y$: $\neg X \wedge \neg Y$

2-1-5-4 ANALYTISCH UND SEMI-ANALYTISCH

Es gilt, vor allem zwei Ebenen zu unterscheiden:

1) *Logische* Ebene

Hier geht es um logische Beziehungen zwischen *unterschiedlichen Relationen*, z. B.:

- Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion
  $X \vee \neg X \not\Rightarrow X \wedge \neg X$ $\qquad$ $++++ \not\Rightarrow ----$
- Kontradiktion $\Rightarrow$ Tautologie
  $X \wedge \neg X \Rightarrow X \vee \neg X$ $\qquad$ $---- \Rightarrow ++++$
- Tautologie $\longrightarrow$ semi-analytische Relation
  $X \vee \neg X \longrightarrow (X \vee Y) \wedge X$ $\qquad$ $++++ \longrightarrow ++--$
- semi-analytische Relation $\Rightarrow$ Tautologie
  $(X \vee Y) \wedge X \Rightarrow X \vee \neg X$ $\qquad$ $++-- \Rightarrow ++++$

2) *Begriffliche* Ebene

Hier geht es um die Beziehung zwischen verschiedenen logischen Eigenschaften (tautologisch, kontradiktorisch usw.) *derselben Relation*, z. B.:

- tautologisch $\Rightarrow$ ¬kontradiktorisch
  „$X \vee \neg X$“ ist tautologisch $\Rightarrow$ „$X \vee \neg X$“ ist nicht kontradiktorisch
- kontradiktorisch $\Rightarrow$ ¬tautologisch
  „$X \wedge \neg X$“ ist kontradiktorisch $\Rightarrow$ „$X \wedge \neg X$“ ist nicht tautologisch
- tautologisch $\Rightarrow$ ¬semi-analytisch
  „$X \vee \neg X$“ ist tautologisch $\Rightarrow$ „$X \vee \neg X$“ ist nicht semi-analytisch
- semi-analytisch $\Rightarrow$ ¬tautologisch
  „$(X \vee Y) \wedge X$“ ist semi-analytisch $\Rightarrow$ „$(X \vee Y) \wedge X$“ ist nicht tautologisch

Also *logisch* gilt: semi-analytische Relation $\Rightarrow$ Tautologie
$X \vee X \Rightarrow X \vee \neg X$
d. h. aus einer semi-analytischen Relation folgt logisch eine Tautologie, aber:
begrifflich gilt: semi-analytisch $\Rightarrow$ ¬tautologisch
„$X \vee X$“ ist semi-analytisch $\Rightarrow$ „$X \vee X$“ ist nicht tautologisch
d. h. wenn eine Relation semi-analytisch ist, dann ist sie nicht tautologisch.

2-1-5-5 MODAL-LOGIK

Die *Modal-Logik* behandelt die Beziehungen zwischen Begriffen bzw. Operatoren wie: *notwendig*, *möglich*, *nicht notwendig*, *nicht möglich*. Damit hat sie auch mit *Gegensätzen* zu tun.

Die Modal-Logik lässt sich teilweise auf die *Aussagen-Logik* zurückführen. Wie ich noch genauer zeigen und begründen werde, lässt sich auf der *Aussagen-Logik* aber nur eine Modal-Logik aufzubauen, die ausschließlich *zwei* Werte unterscheidet: „notwendig“ und „unmöglich“ (bzw. „notwendig, dass nicht“).

Für Einbeziehung von „möglich“ und „möglich, dass nicht“ benötigt man die *Quantoren-Logik* oder eine höhere Logik. Dagegen lässt sich „nicht möglich“ sehr wohl im Rahmen der Aussagen-Logik darstellen, denn es besitzt logisch einen ganz anderen Status als „möglich“; das wird am besten in der später vorzustellenden quantitativen Modal-Logik verdeutlicht.

Wir haben in 1-1-5-1 eine Modal-Logik kennen gelernt, die auf die *synthetische* Aussagen-Logik Bezug nimmt; hier geht es aber um die *analytische* Aussagen-Logik, die mit „tautologisch“, „kontradiktorisch“ und auch „semi-analytisch“ operiert. Und zwar gilt dabei:
Notwendig (N) $=_{df}$ tautologisch. *Unmöglich* (U) $=_{df}$ kontradiktorisch

Man kann unterscheiden *absoluter* und *relativer* Modalität.
Absolut: eine logische Relation ist *für sich* tautologisch bzw. kontradiktorisch.
Relativ: eine logische Relation (bzw. ein logischer Ausdruck) ist *im Verhältnis zu* einer anderen Relation tautologisch bzw. kontradiktorisch, konkret sie ist logische *Folge* oder kontradiktorische ‘Folge’ der anderen Relation.

- *Notwendigkeit* (Tautologie)
  - absolut
    z. B.: $X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$ Notwendig($X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$) N($X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X$)
    Hier kann man auch nur schreiben ‘N($X \vee \neg X$)’, denn durch den Modal-Ausdruck „notwendig“ wird bereits ausgedrückt, dass eine Tautologie vorliegt.
  - relativ
    z. B.: $X \wedge Y \Rightarrow Y$ Notwendig($Y, X \wedge Y$) N($Y, X \wedge Y$)
    Lies: ‘Y ist (analytisch) notwendig in Bezug auf $X \wedge Y$’.
    Allerdings ist $X \wedge Y \Rightarrow Y$ im Ganzen ebenfalls *absolut* notwendig.
    Für die Darstellung der relativen Notwendigkeit bietet sich die *Implikation* oder *Positiv-Implikation* an. Allgemein: $N(\Psi, \Phi) =_{df} \Phi \Rightarrow \Psi$ (bzw. Φ *$\Rightarrow \Psi$)

- *Unmöglichkeit* (Kontradiktion)
  Man kann Unmöglichkeit als „notwendig nicht“ oder „nicht möglich“ darstellen, aber ich verwende hier zur Einfachheit keinen abgeleiteten Begriff.
  - absolut
    z. B. $X \ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ Unmöglich($X \ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$) U($X \ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$)
  - relativ
    z. B.: $(X \ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \ \not\Rightarrow \ (X \ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$
    Unmöglich($X \ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X, X \ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X$) U($X \ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X, X \ {}^{+}\!\vee^{+} \neg X$)

Die Bestimmung des *relativen* „Unmöglich“ ist nicht sehr überzeugend, denn $X \ {}^{-}\!\wedge^{-} \neg X$ ist ja bereits *absolut* unmöglich, weil kontradiktorisch, es ist wenig informativ, dass es zusätzlich auch noch *relativ* unmöglich ist.

Naheliegend wäre dagegen U(Y, $(X \rightarrow \neg Y) \wedge X$)). Man geht also davon aus: Wenn X nicht-Y impliziert und X gültig ist, dann ist $\neg Y$ *relativ notwendig:* $(X \rightarrow \neg Y) \wedge X \ \Rightarrow \neg Y$. In diesem Fall müsste aber Y *relativ unmöglich* und der gesamte Schluss eine Kontradiktion sein. Nur stimmt das nicht. $(X \rightarrow \neg Y) \wedge X \ \longrightarrow Y$ (+ – + +) ist nicht kontradiktorisch, sondern es liegt ein *semi-analytischer* Schluss vor, der sogar in 3 von 4 Welten gültig ist.

Verwendet man allerdings die *Positiv-Implikation*, dann erhält man die gewünschte Kontradiktion: $(X \ {*}\!\!\rightarrow \neg Y) \ \wedge \ X \ \ {*}\!\!\not\Rightarrow \ Y$ (□ – □ □).

Bei Verwendung der Positiv-Implikation könnte man z. B. schreiben:
$*$U(Y, $X \ {*}\!\!\rightarrow \neg Y \ \wedge X$).

Das * bei dem U (also *U) weist darauf hin, dass die *Positiv-Implikation* $*\!\!\rightarrow$ verwendet wird.

Hier gilt: *Unmöglich(Ψ, Φ) $=_{df} \Phi \ {*}\!\!\Rightarrow \neg\Psi$. Oder kurz: *U($\Psi,\Phi$) $=_{df} \Phi \ {*}\!\!\Rightarrow \neg\Psi$.

- Problemfall «Möglichkeit»

Ich hatte anfangs gesagt, *aussagen-logisch* lässt sich nur „notwendig“ und „unmöglich“ darstellen, aber nicht der Modus „möglich“. Man könnte dagegen einwenden: Der Bereich *semi-analytisch* steht für „möglich“ bzw. „unnotwendig“. Z. B. könnte man folgenden aussagen-logischen Ausdruck modal-logisch als *Möglichkeits*-Aussage deuten:

$X \vee Y \longrightarrow Y$ als M(Y, $X \vee Y$)

Es ist zwar richtig, dass aussagen-logisch der *semi-analytische* Bereich generell für die Welt des (logisch) Möglichen steht und somit alle semi-analytischen Relationen logisch möglich sind – Entsprechendes gilt für den *synthetischen* Bereich. Aber es gelingt aussagen-logisch nicht, *Beziehungen* zwischen *möglich* und *notwendig* (oder unmöglich) adäquat darzustellen.

Dazu hier nur eine kurze Begründung:

$X \wedge Y \Rightarrow Y$ ist eine *Tautologie*, entsprechend auch das äquivalente ‘Notwendig(Y, $X \wedge Y$)’. Dagegen sind $X \vee Y \longrightarrow Y$ und entsprechend ‘M(Y, $X \vee Y$)’ *semi-analytisch*.

Nun lautet eins der zentralen Gesetze der Quantoren-Logik: notwendig $\Rightarrow$ möglich

Das besagt: „Wenn etwas notwendig ist, dann ist es auch (mindestens) möglich“.

Aber es gilt: Eine Tautologie impliziert logisch nur eine andere Tautologie:

Tautologie $\Rightarrow$ Tautologie (+ + + + $\Rightarrow$ + + + +).

D. H. eine (semi-analytische) Möglichkeits-Aussage kann nie aus einer (tautologischen) Notwendigkeits-Aussage folgen.

Vielmehr gilt das Gegenteil, im Beispiel: $(X \vee Y \longrightarrow Y) \ \Rightarrow (X \wedge Y \Rightarrow Y)$.

2 – 2 QUANTOREN- UND PRÄDIKATEN-LOGIK

2-2-1 Einführung

2-2-1-1 FORMULIERUNGEN

Ich habe bisher im Wesentlichen *4* Stufen in der Quantoren-Logik unterschieden:

alle, *alle nicht*, *einige*, *einige nicht*

Es bestehen aber zwischen den Formen von „alle“ und „einige“ *Äquivalenzen*, so dass man insgesamt auf 8 Unterscheidungen kommt:

Dabei bestehen folgende analytische Äquivalenzen (in normaler Sprache und formal):

alle	nicht einige nicht	Λ	$\Leftrightarrow$	$\neg V \neg$
alle nicht	nicht einige	$\Lambda\neg$	$\Leftrightarrow$	$\neg V$
nicht alle	einige nicht	$\neg\Lambda$	$\Leftrightarrow$	$V\neg$
nicht alle nicht	einige	$\neg\Lambda\neg$	$\Leftrightarrow$	V

Dabei gilt es verschiedene Negationen von Λ zu unterscheiden:

kontradiktorische Verneinung	$\neg\Lambda$	$\Lambda \ {}^{+}{>}{<}^{+} \ \neg\Lambda$
konträre Verneinung	$\Lambda\neg$	$\Lambda \ {}^{+}{\mid}^{+} \ \neg\Lambda$
doppelte, subalterne Verneinung	$\neg\Lambda\neg$	$\Lambda \Rightarrow \neg\Lambda$

Ähnliches, aber nicht Gleiches gilt für für V = einige.

Wichtig ist hier, den Unterschied zur Aussagen-Logik zu sehen: *Aussagen-logisch* gibt es im strengen Sinn nur *eine* Verneinung, die *kontradiktorische*. Allerdings entspricht aussagen-logisch $\neg(X \rightarrow Y)$ quantoren-logisch $\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$ (vgl. dazu vor allem 1-4-1-5).

	Position	kontradiktorisch	konträr	subaltern
Aussagen-Logik	$X \rightarrow Y$	$\neg(X \rightarrow Y)$		
Quantoren-Logik	$\Lambda(X \rightarrow Y)$	$\neg\Lambda(X \rightarrow Y)$	$\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$	$\neg\Lambda\neg(X \rightarrow Y)$

Ich habe schon grundsätzlich dargelegt, dass man die Quantoren-Logik (bzw. die Prädikaten-Logik) als eine *Erweiterung* der Aussagen-Logik verstehen kann. Insofern gilt:

- alle Gesetze der Aussagen-Logik gelten auch in der Quantoren-Logik
- es gibt *spezifische* Gesetze der Quantoren-Logik, die in der Aussagen-Logik nicht darstellbar sind (dies sind genau die, die den Partikulär- oder Existenz-Quantor verwenden)

Anbei ein Beispiel für die Darstellung eines Gesetzes in aussagen-logischer und quantoren-logischer Form:

z. B. aussagen-logisch: $X \wedge Y \Rightarrow Y$

quantoren-logisch: $\Lambda x(Fx \wedge Gx) \Rightarrow \Lambda x(Gx)$

bzw. vereinfacht $\Lambda(X \wedge Y) \Rightarrow \Lambda(Y)$

prädikaten-logisch: $(Fx_1 \wedge Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \wedge Gx_n) \Rightarrow (Gx_1 \wedge \ldots \wedge Gx_n)$

2-2-1-2 DARSTELLUNGSFORMEN

Wie beschrieben (in 1-2-1-4) geht es hier im Grunde um eine *Klassen-Logik*, die man aber in verschiedener Weise darstellen kann:

Das soll am Beispiel des quantoren-logischen Gesetzes „alle“ $\Rightarrow$ „einige“ (verstanden als „mindestens einige“ – inklusiv) erläutert werden:

- Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$
- Prädikaten-Logik: $Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \;\Rightarrow\; Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$
- Mengen-Logik: $F \subset G \;\Rightarrow\; F \sqcap G$

$F \sqcap G$ kann man auch übersetzen mit „F schneidet G“: Das entspricht „einige F sind G“.

$F \subset G \;\Rightarrow\; F \sqcap G$ wäre also zu deuten: wenn F Teilmenge von G ist, dann schneidet F auch G.

Für „F schneidet G“ verwende ich das Zeichen $\sqcap$, also $F \sqcap G$. Dies darf nicht verwechselt werden mit $F \cap G$ für „die Schnitt-Menge $F \cap G$“. $F \sqcap G$ ist eine *Relation*, $F \cap G$ ist eine *Menge*. Es ist bezeichnend, dass es für die Relation kein eingebürgertes Zeichen gibt. Denn genau wie sich in der Aussagen-Logik kein *Relator* findet, der „einige F sind G“ ausdrückt, so auch nicht in der Mengenlehre (die entsprechend der Aussagen-Logik 2-wertig ist).

2-2-1-3 LOGISCHES QUADRAT

Die wichtigsten analytischen klassen-logischen Relationen behandelt das sogenannte *logische Quadrat* (bzw. Rechteck), das in einer *aussagen-logischen* Form schon eingeführt wurde.

- in normaler Sprache

alle	$^{+}|^{+}$	alle¬
$\Downarrow$	$^{+}{><}^{+}$	$\Downarrow$
einige	$^{+}\vee^{+}$	einige¬

Das Zeichen $^{+}{><}^{+}$ in der Mitte bezieht sich auf *beide* Diagonalen:

1. alle $^{+}{><}^{+}$ einige¬ 2. alle¬ $^{+}{><}^{+}$ einige

Zur Erinnerung die Wahrheitsverläufe der oben genannten *Junktoren* bzw. *Relatoren*:

X	Y	$\wedge$	$\vee$	$><$	$|$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
+	+	+	+	–	–	+	+
+	–	–	+	+	+	–	–
–	+	–	+	+	+	+	–
–	–	–	–	–	+	+	+

• einfache Relationen

Einfache Relationen sind solche mit *einer* Prädikat-Variablen wie $\Lambda x(Fx)$ im Gegensatz zu *komplexen* Relationen mit *zwei oder mehr* Prädikat-Variablen wie $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$.

Darstellung in Quantoren-Logik

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda x(Fx) & ^{+}|^{+} & \Lambda x\neg(Fx) \\
\Downarrow & ^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\
Vx(Fx) & ^{+}\vee^{+} & Vx\neg(Fx)
\end{array}$$

Anmerkung zur Schreibweise. Man kann $\Lambda x\neg(Fx)$ oder $\Lambda x(\neg Fx)$ schreiben.

Darstellung in Individuen-Logik (Prädikaten-Logik)

$$\begin{array}{ccc}
Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n & ^{+}|^{+} & \neg Fx_1 \wedge \ldots \wedge \neg Fx_n \\
\Downarrow & ^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\
Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n & ^{+}\vee^{+} & \neg Fx_1 \vee \ldots \vee \neg Fx_n
\end{array}$$

• komplexe Relationen

Komplexe Relationen enthalten *mindestens zwei* Prädikat-Variablen (‚F' und ‚G'). Ich bringe hier nur *eine* Realisation des logischen Quadrats, später werden Variationen vorgestellt.

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) & ^{+}|^{+} & \Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \\
\Downarrow & ^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\
Vx(Fx \rightarrow Gx) & ^{+}\vee^{+} & Vx\neg(Fx \rightarrow Gx)
\end{array}$$

2-2-1-4 GESETZE

Im Folgenden eine Übersicht über wichtige *Gesetze* der Quantoren-Logik. Im späteren Text werden weitere Gesetze vorgestellt und vor allem problematische Gesetze diskutiert.

• einfache Relationen

Äquivalenzen

$$\begin{array}{lcl}
\Lambda x(Fx) & \Leftrightarrow & \neg Vx\neg(Fx) \\
\Lambda x\neg(Fx) & \Leftrightarrow & \neg Vx(Fx) \\
\neg\Lambda x(Fx) & \Leftrightarrow & Vx\neg(Fx) \\
\neg\Lambda x\neg(Fx) & \Leftrightarrow & Vx(Fx)
\end{array}$$

Schlüsse (die nicht aus den Äquivalenzen folgen)

$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$
$\neg\Lambda x(Fx)$	$\Leftarrow$	$\neg Vx(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx\neg(Fx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx)$	$\Leftarrow$	$\neg Vx\neg(Fx)$

• komplexe Relationen

Äquivalenzen

$\Lambda x(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
$\Lambda x\neg(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx \wedge \neg Gx)$
$\neg\Lambda x(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx\neg(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx(Fx \to Gx)$	$\Leftrightarrow$	$Vx\neg(Fx \wedge \neg Gx)$

Schlüsse (die aus den Äquivalenzen folgen, eine Auswahl)

$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$\neg Vx\neg(Fx)$
$\Lambda x\neg(Fx)$	$\Rightarrow$	$\neg Vx(Fx)$
$\neg\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx\neg(Fx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$

Schlüsse (die nicht aus den Äquivalenzen folgen)

$\Lambda x(Fx \to Gx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx \to Gx)$
$\neg\Lambda x(Fx \to Gx)$	$\Leftarrow$	$\neg Vx(Fx \to Gx)$
$\Lambda x\neg(Fx \to Gx)$	$\Rightarrow$	$Vx\neg(Fx \to Gx)$
$\neg\Lambda x\neg(Fx \to Gx)$	$\Leftarrow$	$\neg Vx\neg(Fx \to Gx)$

Durch Verwendung einer spezifischen *Individuen-Konstante* x_i sind zusätzlich z. B. folgende Schlüsse möglich:

$\Lambda x(Fx) \Rightarrow Fx_i$
$\Lambda x\neg(Fx) \Rightarrow \neg Fx_i$
$Fx_i \Rightarrow Vx(Fx)$
$\neg Fx_i \Rightarrow Vx\neg(Fx)$

Prädikaten-logisch ergibt sich:

$Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_i$
$\neg Fx_1 \wedge \ldots \wedge \neg Fx_n \Rightarrow \neg Fx_i$
$Fx_i \Rightarrow Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n$
$\neg Fx_i \Rightarrow \neg Fx_1 \vee \ldots \vee \neg Fx_n$

Beispiel für $Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \Rightarrow Fx_i$: Wenn gilt, x_1 ist Mensch und x_2 ist ein Mensch und ... und x_n ist ein Mensch, dann ist auch x_i (ein beliebiges bestimmtes x) ein Mensch.

2-2-1-5 WAHRHEITS-TAFELN

In der *Aussagen-Logik* kann man die Gültigkeit einer Relation durch die *Wahrheitstafeln* problemlos überprüfen. Dabei ergibt sich die Gültigkeit der Gesamt-Relation aus der Gültigkeit der Einzel-Relationen (bzw. Einzelfaktoren). In der *Quantoren-Logik* ist das schwieriger. Man kann nicht einfach aus den Wahrheitstafeln der Aussagen-Logik Wahrheitstafeln für die Quantoren-Logik ableiten. Dennoch gibt es verschiedene Möglichkeiten. Ausführlich, für

Spezialisten, gehe ich darauf im Buch „Integrale Logik“. Hier erfolgt eine Kurzfassung. Dabei konzentriere ich mich auf eine *semi-analytische* Relation, weil deren Wahrheitstafel interessanter ist. Auf die Wahrheitstafeln *synthetischer* quantoren-logischer Relationen bin ich in 1-2-2-4 eingegangen.

Als Beispiel nehme ich den *semi-analytischen* Schluss $\mathrm{V}x(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$. Ich bringe nachfolgend die wichtigsten Wahrheitstafeln (analog zur *Aussagen-Logik*), wobei ich zur Übersichtlichkeit darauf verzichtet habe, + durch Λ bzw. V und – durch ¬Λ bzw. ¬V darzustellen, wie in 1-2-2-4 erläutert.

• *normale* Wahrheitstafel:

Vx(Fx)	⟶	Λx(Fx)
+	+	+
+	−	−
+	−	−
−	+	−

Die Einsetzung der Wahrheitswerte für Vx(Fx) und Λx(Fx) erklärt sich wie folgt: Bei 2 Variablen entspricht Vx(Fx) prädikaten-logisch $Fx_1 \vee Fx_2$ und aussagen-logisch $X \vee Y$; Λx(Fx) entspricht prädikaten-logisch bei 2 Variablen $Fx_1 \wedge Fx_2$ und aussagen-logisch $X \wedge Y$. Um zu prüfen, ob ein Ausdruck $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ tautologisch, kontradiktorisch oder semi-analytisch ist, genügt es normalerweise, nur die ersten *zwei* Glieder zu prüfen.

• *konjunktive* Wahrheitstafel (2. und 3. Zeile sind gleich)

	[Vx(Fx)	∧	Λx(Fx)]	⇒	[Vx(Fx) ⟶ Λx(Fx)]
1.	+	+	+	+	+
2.	+	−	−	+	−
3.	+	−	−	+	−
4.	−	−	−	+	+

Dazu folgende Einzel-Relationen, welche alle *Tautologien* sind

1. $[\mathrm{V}x(Fx) \wedge \Lambda x(Fx)] \Rightarrow [\mathrm{V}x(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$
2. $[\mathrm{V}x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Fx)] \Rightarrow \neg[\mathrm{V}x(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$
3. $[\mathrm{V}x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Fx)] \Rightarrow \neg[\mathrm{V}x(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$
4. $[\neg\mathrm{V}x(Fx) \wedge \neg\Lambda x(Fx)] \Rightarrow [\mathrm{V}x(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)]$

• komplexe Relationen

Wir haben bisher nur *einfache* Relationen der Form $\mathrm{V}x(Fx) \longrightarrow \Lambda x(Fx)$ behandelt, weil sich hier die Wahrheitstafeln übersichtlicher darstellen lassen. Was ist aber mit *komplexen* Relationen der Form $\mathrm{V}x(Fx \to Gx) \longrightarrow \Lambda x(Fx \to Gx)$? Insofern der Ausdruck in der Klammer gleich ist (z. B. $Fx \to Gx$), es also nur um die Verhältnisse zwischen den *Quantoren* geht, gelten im Wesentlichen die oben gemachten Aussagen.

Schwieriger ist es, wenn der Ausdruck in der Klammer (und ggf. zusätzlich die Quantoren) unterschiedlich sind, also z. B.: $\Lambda x(Fx \to Gx) \longrightarrow \mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$. Hier hat es wenig Sinn, eine *direkte quantoren-logische* Wahrheitstafel aufzustellen, weil die Struktur in der Klammer eine Rolle spielt. Sondern man muss eine *prädikaten-logische* Analyse vornehmen. Für n = 2 ergibt sich: $(Fx_1 \to Gx_1) \wedge (Fx_2 \to Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2)$.

Dabei verwende ich erstmals die übersichtlichere Wahrheitswertetafel in *Tabellenform*.

	Fx_1	$\rightarrow$	Gx_1	$\wedge$	Fx_2	$\rightarrow$	Gx_2	$\longrightarrow$	Fx_1	$\wedge$	Gx_1	$\vee$	Fx_2	$\wedge$	Gx_2
1	+	+	+	**+**	+	+	+	**+**	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	**–**	+	–	–	**+**	+	+	+	+	+	–	–
3	+	+	+	**+**	–	+	+	**+**	+	+	+	+	–	–	+
4	+	+	+	**+**	–	+	–	**+**	+	+	+	+	–	–	–
5	+	–	–	**–**	+	+	+	**+**	+	–	–	+	+	+	+
6	+	–	–	**–**	+	–	–	**+**	+	–	–	–	+	–	–
7	+	–	–	**–**	–	+	+	**+**	+	–	–	–	–	–	+
8	+	–	–	**–**	–	+	–	**+**	+	–	–	–	–	–	–
9	–	+	+	**+**	+	+	+	**+**	–	–	+	+	+	+	+
10	–	+	+	**–**	+	–	–	**+**	–	–	+	–	+	–	–
11	–	+	+	**+**	–	+	+	**–**	–	–	+	–	–	–	+
12	–	+	+	**+**	–	+	–	**–**	–	–	+	–	–	–	–
13	–	+	–	**+**	+	+	+	**+**	–	–	–	+	+	+	+
14	–	+	–	**–**	+	–	–	**+**	–	–	–	–	+	–	–
15	–	+	–	**+**	–	+	+	**–**	–	–	–	–	–	–	+
16	–	+	–	+	–	+	–	**–**	–	–	–	–	–	–	–

Bei $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ handelt es sich also um eine *semi-analytische* Relation. Denn unter dem Zentral-Relator $\longrightarrow$ kommen + und – vor. Um hier *generell* von einer semi-analytischen Relation zu sprechen, reicht die Prüfung für n = 2.

Fazit: Auch wenn es nicht so einfach ist wie in der Aussagen-Logik, man kann vor allem *einfache* quantoren-logische Relationen sehr wohl mittels *Wahrheitstafeln* überprüfen bzw. beweisen. Am sichersten sind dabei prädikaten-logischen Wahrheitstafeln.

2-2-2 Implikation

2-2-2-1 TAUTOLOGIE

Auch hier sei wieder unterschieden zwischen
- allgemeinen *aussagen-logischen* Gesetzen, die auch quantoren-logisch gelten
- speziellen *quantoren-logischen* Gesetzen (die aussagen-logisch nicht gelten)
- speziellen *prädikaten-logischen* Gesetzen (die quantoren-logisch nicht gelten)

Dazu folgendes aussagen-logisches Beispiel: *Modus ponens* bzw. analog: $(X \rightarrow Y) \wedge X \Rightarrow Y$

- Aussagen-logisches Gesetz in quantoren-logischer bzw. prädikaten-logischer Form

  $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) \Rightarrow \Lambda x(Gx)$

  Vereinfacht: $\Lambda(X \rightarrow Y) \wedge \Lambda(X) \Rightarrow \Lambda(Y)$

  $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \wedge (Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n) \Rightarrow (Gx_1 \wedge \ldots \wedge Gx_n)$
- Speziell quantoren-logisches Gesetz

  $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Vx(Fx) \Rightarrow Vx(Gx)$

  Vereinfacht: $\Lambda(X \rightarrow Y) \wedge V(X) \Rightarrow V(Y)$

  $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \wedge (Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n) \Rightarrow (Gx_1 \vee \ldots \vee Gx_n)$
- Speziell prädikaten-logisches Gesetz

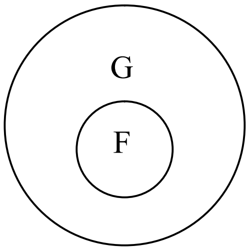
  $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx_i \Rightarrow Gx_i$

  $(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \wedge Fx_i \Rightarrow Gx_i$

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Vx(Fx) \Rightarrow Vx(Gx)$ ist aussagen-logisch nicht darzustellen, weil es für den Partikulär-Quantor V kein Äquivalent in der Aussagen-Logik gibt.

Die Formalisierung $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Fx_i \Rightarrow Gx_i$ könnte annehmen lassen, dieses Gesetz lasse sich doch rein quantoren-logisch darstellen. Aber in der eigentlichen Quantoren-Logik kommen keine Individuen-*Konstanten* wie x_i vor, sondern nur Individuen-*Variablen* wie x, y, die durch Quantoren gebunden werden. Dasselbe gilt für $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \neg Gx_i \Rightarrow \neg Fx_i$.

Ein wichtiges und unmittelbar einleuchtendes *Gesetz der (traditionellen) Klassen-Logik* ist: „Wenn alle F auch G sind, dann sind einige G auch F“. Hypothese: Dieses Gesetz gilt auch in der Quantoren-Logik *tautologisch*. Die folgende Grafik veranschaulicht das Gesetz.



Formal: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Gx \rightarrow Fx)$ bzw. $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \leftarrow Gx)$.

Ich verwende hier aber nur den Pfeil für *semi-analytische* Implikation. Denn bei der Normal-Implikation bzw. der normalen Quantoren-Logik gilt dieses Gesetz *nicht tautologisch*.

Zum Beweis per Wahrheitstafel wird die Relation zunächst in *Prädikaten-Logik* übersetzt.

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1 \ \wedge \ ... \ \wedge \ Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow (Fx_1 \leftarrow Gx_1 \ \vee ... \ \vee \ Fx_n \leftarrow Gx_n).$$

Nun habe ich schon erläutert: um den *logischen Status* (tautologisch, semi-analytisch oder kontradiktorisch) einer Relation zu prüfen, genügt es normalerweise, von n = 2 auszugehen.

D. h.: $(Fx_1 \rightarrow Gx_1 \ \wedge \ Fx_2 \rightarrow Gx_2) \longrightarrow (Fx_1 \leftarrow Gx_1 \ \vee \ Fx_2 \leftarrow Gx_2)$.

Das kann man vereinfacht quasi *aussagen-logisch* schreiben:

$$(X_1 \rightarrow Y_1 \ \wedge \ X_2 \rightarrow Y_2) \longrightarrow (X_1 \leftarrow Y_1 \ \vee \ X_2 \leftarrow Y_2).$$

Ich spreche von *quasi* aussagen-logisch, weil die Indizes im Grunde *prädikaten-logisch* sind. Dafür stelle ich nun eine Wahrheitstafel auf. Dabei verwende ich wieder die Wahrheitswertetafel in *Tabellenform*, welche für mehrere Variablen übersichtlicher ist.

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \leftarrow Gx)$

	X_1	$\rightarrow$	Y_1	$\wedge$	X_2	$\rightarrow$	Y_2	$\longrightarrow$	X_1	$\leftarrow$	Y_1	$\vee$	X_2	$\leftarrow$	Y_2
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	–	+	–	–	+	+	+	+	+	+	+	–
3	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+
4	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–
5	+	–	–	–	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+
6	+	–	–	–	+	–	–	+	+	+	–	+	+	+	–
7	+	–	–	–	–	+	+	+	+	+	–	+	–	–	+
8	+	–	–	–	–	+	–	+	+	+	–	+	–	+	–
9	–	+	+	+	+	+	+	+	–	–	+	+	+	+	+
10	–	+	+	–	+	–	–	+	–	–	+	+	+	+	–
11	–	+	+	+	–	+	+	–	–	–	+	–	–	–	+
12	–	+	+	+	–	+	–	+	–	–	+	+	–	+	–
13	–	+	–	+	+	+	+	+	–	+	–	+	+	+	+
14	–	+	–	–	+	–	–	+	–	+	–	+	+	+	–
15	–	+	–	+	–	+	+	+	–	+	–	+	–	–	+
16	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–	+	–

Die Tafel ist zwar nur in *einer* Welt (bzw. *einer*, der 11. Zeile) ungültig, aber das reicht dafür, dass dieses Gesetz nicht generell, nicht tautologisch gilt, sondern *nur semi-analytisch* ist.

Man könnte allerdings einwenden, dass man „einige G sind F" meistens mit $\mathrm{Vx}(\mathrm{Gx} \wedge \mathrm{Fx})$ formalisiert und nicht mit $\mathrm{Vx}(\mathrm{Gx} \rightarrow \mathrm{Fx})$. Man sollte den Schluss daher nicht so schreiben:

$\Lambda\mathrm{x}(\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Gx}) \Rightarrow \mathrm{Vx}(\mathrm{Gx} \rightarrow \mathrm{Fx})$ (Hypothese)

Sondern:

$\Lambda\mathrm{x}(\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Gx}) \Rightarrow \mathrm{Vx}(\mathrm{Gx} \wedge \mathrm{Fx})$ (Hypothese)

Aber auch dies ist kein strenges Gesetz. Um das zu beweisen, verwenden wir zunächst das *Vertauschungsgesetz*: $\mathrm{Vx}(\mathrm{Fx} \wedge \mathrm{Gx}) \Leftrightarrow \mathrm{Vx}(\mathrm{Gx} \wedge \mathrm{Fx})$

Es genügt also zu zeigen, dass folgende Relation kein strenges Gesetz ist:

$\Lambda\mathrm{x}(\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Gx}) \Rightarrow \mathrm{Vx}(\mathrm{Fx} \wedge \mathrm{Gx})$ (Hypothese)

Es gilt nur *semi-analytisch*: $\Lambda\mathrm{x}(\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Gx}) \longrightarrow \mathrm{Vx}(\mathrm{Fx} \wedge \mathrm{Gx})$

Diesen Beweis werde ich gleich in 2-2-2-3 ausführlich demonstrieren. Bleibt festzuhalten: Das gut bewährte, klassische Gesetz „wenn alle F auch G sind, dann sind einige G auch F" ist bei den üblichen Formalisierungen der Quantoren-Logik nicht gültig.

2-2-2-2 KONTRADIKTION

Hier sei daran erinnert, dass die Implikation nur kontradiktorisch ist, wenn von einer Tautologie auf eine Kontradiktion geschlossen wird: also Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion. Dazu nur zwei Beispiele:

- aussagen-logisches Gesetz in quantoren-logischer Form

$\Lambda\mathrm{x}(\mathrm{Fx} \;{}^{+}\!\vee^{+} \neg\mathrm{Fx}) \not\Rightarrow \Lambda\mathrm{x}(\mathrm{Fx} \;{}^{-}\!\wedge^{-} \neg\mathrm{Fx})$

- quantoren-logisches Gesetz

$\Lambda\mathrm{x}(\mathrm{Fx} \;{}^{+}\!\vee^{+} \neg\mathrm{Fx}) \not\Rightarrow \mathrm{Vx}(\mathrm{Fx} \;{}^{-}\!\wedge^{-} \neg\mathrm{Fx})$

2-2-2-3 SEMI-ANALYTISCH

Als wesentliche Gesetze der traditionellen Quantoren-Logik bzw. Klassen-Logik gelten:

Alle $\Rightarrow$ einige und alle$\neg$ $\Rightarrow$ einige$\neg$

In der Formalisierung $\Lambda\mathrm{x}(\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Gx}) \Rightarrow \mathrm{Vx}(\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Gx})$ gilt dieses Gesetz bei der Verwendung der Implikation. Wie in 1-2-4-4 beschrieben, findet man aber am häufigsten in der logischen bzw. wissenschaftstheoretischen Literatur folgende Formalisierungen:

Alle F sind G:	$\Lambda\mathrm{x}(\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Gx})$
Einige F sind G:	$\mathrm{Vx}(\mathrm{Fx} \wedge \mathrm{Gx})$
Alle F sind nicht G:	$\Lambda\mathrm{x}(\mathrm{Fx} \rightarrow \neg\mathrm{Gx})$
Einige F sind nicht G:	$\mathrm{Vx}(\mathrm{Fx} \wedge \neg\mathrm{Gx})$

Bei diesen Formalisierungen ist der Schluss von „alle" auf „einige" aber *nur semi-analytisch*, nicht tautologisch. Ebenso der Schluss von „alle nicht" auf „einige nicht". Es gilt hier also: Alle $\neg\Rightarrow$ einige bzw. alle $\longrightarrow$ einige (und entsprechend), konkret bedeutet das:

$\Lambda\mathrm{x}(\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Gx}) \longrightarrow \mathrm{Vx}(\mathrm{Fx} \wedge \mathrm{Gx})$

$\Lambda\mathrm{x}(\mathrm{Fx} \rightarrow \neg\mathrm{Gx}) \longrightarrow \mathrm{Vx}(\mathrm{Fx} \wedge \neg\mathrm{Gx})$

Das kann man zeigen, indem man die *Klassen-Relationen* („quantoren-logischen" Formeln) in *Individuen-Relationen* („prädikaten-logische" Formeln) übersetzt, für die sich Wahrheitstafeln angeben lassen. Noch eleganter soll das später im *quantitativen* Modell gezeigt werden.

Für $\Lambda\mathrm{x}(\mathrm{Fx} \rightarrow \mathrm{Gx}) \longrightarrow \mathrm{Vx}(\mathrm{Fx} \wedge \mathrm{Gx})$ schreibt man prädikaten-logisch ausführlich:

$$(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \wedge (Fx_2 \rightarrow Gx_2) \wedge \ldots \wedge (Fx_n \rightarrow Gx_n) \longrightarrow$$
$$(Fx_1 \wedge Gx_1) \vee (Fx_2 \wedge Gx_2) \vee \ldots \vee (Fx_n \wedge Gx_n)$$

Zwar kann man (praktisch) die Wahrheitstafeln nicht für *alle* n angeben, aber es genügt ja zu zeigen, dass jeweils in *einem* Fall die Folge $\Phi \Rightarrow \Psi$ nicht erfüllt ist, dann bedeutet das bereits $\Phi \longrightarrow \Psi$, also einen nur *semi-analytischen* Schluss.

Da eine *Implikation* $Fx_i \rightarrow Gx_i$ in der *letzten Zeile* der Wahrheitstafel immer positiv (+) ist, muss auch die *Konjunktion* solcher Implikationen in der *letzten Zeile* der Wahrheitstafel positiv sein. Andererseits ist eine *Konjunktion* $Fx_i \wedge Gx_i$ in der *letzten Zeile* der Wahrheitstafel immer negativ (–). Somit muss eine *Disjunktion* dieser Konjunktionen in der *letzten Zeile* der Wahrheitstafel negativ sein. Die Implikation $X \rightarrow Y$ ist ja aber so definiert, dass sie negativ ist, wenn das Vorderglied positiv und das Nachglied negativ ist. D. h. dass die Wahrheitstafel für die Gesamtformel (mindestens) in der *letzten Zeile* negativ sein muss.

Entsprechend ließe sich $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge \neg Gx)$ beweisen.

Ich verweise hier auch auf die Wahrheits-Tabelle in 2-2-1-5, wo ich bereits für n = 2 gezeigt habe, dass hier nur ein semi-analytischer Schluss vorliegt:

Dies bestätigt noch einmal, dass der Schluss von „alle" auf „einige" in der Formulierung $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ nicht tautologisch ist, entsprechend der Schluss von „alle nicht" auf „einige nicht". Da die Gesetze „alle $\Rightarrow$ einige" und „alle$\neg$ $\Rightarrow$ einige$\neg$„ aber erstens allgemein anerkannt und zweitens sehr wesentlich für die Bedeutung von „alle" und „einige" sind, muss man die oben genannte formale Interpretation von *All-Sätzen* und *Partikulär-Sätzen* als sehr problematisch einstufen (dazu später weitere Argumente).

Man kann allerdings $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ in einen *strengen* Schluss überführen. Dazu muss man folgende *Zusatzhypothese* einführen: $\Lambda x(Fx)$. Im Ganzen:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$$

In dieser Form ist der Schluss zwar tautologisch. Das werde ich im quantitativen Punkt 2-5 beweisen. Aber die Einführung von $\Lambda x(Fx)$ ist durchaus problematisch.

Angenommen folgendes Beispiel: „Für alle x gilt: Wenn sie Menschen sind, sind sie sterblich, impliziert logisch: Für (mindestens) einige x gilt: sie sind Menschen und sie sind sterblich". Die Zusatzhypothese lautet dann: „Alle x sind Menschen" – und das ist unrealistisch.

Eine viel elegantere Lösung erlaubt die *Positiv-Implikation*, wie ich später zeigen möchte.

2-2-2-4 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Replikation* gilt im Wesentlichen das für die Implikation gesagte, daher soll hier auf eine gesonderte Darstellung verzichtet werden.

Die wichtigsten quantoren-logischen *Äquivalenzen* sind die Umformungen von Relationen mit dem *All-Quantor* Λ in solche mit dem *Partikulär-Quantor* V. Allerdings kann man anstatt von Äquivalenzen auch von *Definitionen* ausgehen, was aber logisch kaum einen Unterschied macht, beide gelten notwendig: z. B.: $\Lambda(X) =_{df} \neg V \neg(X)$.

Alle	nicht einige nicht	$\Lambda(X)$	$\Leftrightarrow \neg V\neg(X)$
Alle nicht	nicht einige	$\Lambda\neg(X)$	$\Leftrightarrow \neg V(X)$
Nicht alle	einige nicht	$\neg\Lambda(X)$	$\Leftrightarrow V\neg(X)$
Nicht alle nicht	einige	$\neg\Lambda\neg(X)$	$\Leftrightarrow V(X)$

Das ist hier jeweils die Darstellung in der *verkürzten* Form, voll ausgeschrieben lautete die obige Äquivalenz z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg V\neg(Fx \rightarrow Gx)$

2-2-2-5 SYLLOGISMUS

Mit *Syllogismus* bezeichnet man traditionell eine Form von *Quantoren-Logik*, die mit 3Variablen (M, S und P) operiert – und nicht mit 2, wie hier bisher dargestellt. Der Syllogismus geht auf Aristoteles zurück. Man unterscheidet 4 Figuren mit insgesamt ca. 20 gültigen Schlüssen (die genaue Anzahl ist umstritten: 15, 18, 19 oder 24).

Der Syllogismus arbeitet auch mit den vier genannten *Urteilen* (entsprechend Relationen), er benennt sie mit den Buchstaben a, e, i, o

a: alle	z. B.: S a P	alle S sind P
e: alle nicht	z. B.: S e P	alle S sind nicht P
i: einige	z. B.: S i P	einige S sind P
o: einige nicht	z. B.: S o P	einige S sind nicht P

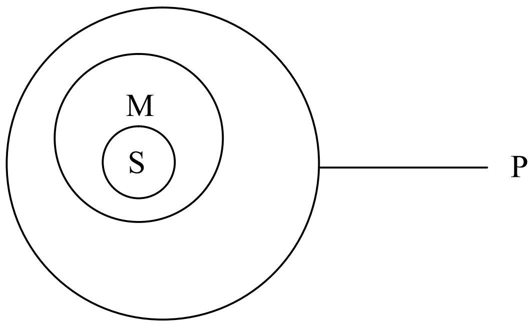
S = Subjekt, P = Prädikat, M = Mittelbegriff

Ein bekannter Syllogismus ist: (S a M) $\wedge$ (M a P) $\Rightarrow$ (S a P) (bzw. zuerst M a P)
Quantoren-logisch z. B.: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Gx \rightarrow Hx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Hx)$

Aber man schreibt einen Syllogismus normalerweise vertikal, nicht horizontal:

S a M	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$
$\underline{\text{M a P}}$	$\underline{\Lambda x(Gx \rightarrow Hx)}$
S a P	$\Lambda x(Fx \rightarrow Hx)$

Diesen Syllogismus veranschaulicht das folgende Diagramm:



Manche Syllogismen lassen sich mit der *herkömmlichen Implikation* nicht darstellen, sondern nur mit der *Positiv-Implikation*. Im Grunde gibt es hier dieselben Probleme, die ich für die Quantoren-Logik beschreibe.

Der Bereich der Syllogismen ist sehr umfangreich, ich kann hier nicht ausführlich darauf eingehen. An späterer Stelle, vor allem bei der quantitativen Logik, wird das Thema noch genauer behandelt.

2-2-3 Positiv-Implikation

2-2-3-1 TAUTOLOGIE

Zum großen Teil gelten die gleichen Schlüsse wie bei der *normalen* Implikation, z. B.:

$\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) \wedge Fx_i \ast\!\!\Rightarrow Gx_i$

$\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) \ast\!\!\Rightarrow \Lambda x(Gx)$

Allerdings gibt es auch Unterschiede:

• „Wenn alle F auch G sind, dann sind mindestens einige G auch F“

Wir hatten gesehen, dieses wichtige Gesetz gilt nicht streng bei Verwendung der *Normal-Implikation*, aber bei Verwendung der *Positiv-Implikation*: $\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) \ast\!\!\Rightarrow Vx(Fx \leftarrow\!\!\ast\, Gx)$

Ich verweise dazu auf die Wahrheits-Tabelle in 2-2-2-1 mit der *normalen Implikation*. Der semi-analytische Schluss $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \leftarrow Gx)$ ist nur in Zeile 11 ungültig (–). Es genügt somit zu zeigen, dass bei der *Positiv-Implikation* in dieser Zeile ein + oder ein □ steht, denn ein □ verhindert keinen strengen Schluss.

Und da ist die Sachlage eindeutig. Denn man kann (u. a.) die Zeilen 9 – 16 streichen, weil dort von negativem X_1 geschlossen wird, und solche Schlüsse sind nicht definiert (□). Da der Zentral-Relator bei der Normal-Implikation eben nur in der 11. Zeile ungültig ist, tritt dieser Fall also bei der Positiv-Implikation gar nicht auf, sie ist in der 11. Zeile undefiniert.

• „Wenn *alle* F auch G sind, dann sind *mindestens einige* F auch G“
Wir hatten gesehen, dieses wichtige Gesetz gilt in der üblichen Formalisierung nicht bei Verwendung der *Normal-Implikation*: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \neg\Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$

Aber es gilt bei Verwendung der *Positiv-Implikation*: $\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx) *\!\!\Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$.
Ich verweise hier auch auf die Wahrheits-Tabelle in 2-2-1-5, wo ich für die Normal-Implikation gezeigt habe, dass hier nur ein semi-analytischer Schluss vorliegt. Wie man dort sieht: Der (partielle) Schluss ist in den Zeilen 11, 12, 15 und 16 ungültig (–).

Es genügt somit zu zeigen, dass bei der Positiv-Implikation in diesen Zeilen ein + oder ein □ steht, dann ist $\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx) *\!\!\Rightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ als *strenger* Schluss gesichert.

Und zwar man kann (u. a.) die Zeilen 9 bis 16 streichen, weil dort von negativem X_1 geschlossen wird, und solche Schlüsse sind unbestimmt, also nicht relevant. Alle ungültigen Felder treten aber in diesem Zeilenabschnitt 9 - 16 auf, eben in Zeile 11, 12, 15 und 16.

2-2-3-2 KONTRADIKTION

Bei der Kontradiktion gilt für die *Positiv-Implikation* Anderes als für die normale Implikation. Sie ist nicht nur kontradiktorisch, wenn das Vorderglied tautologisch und das Nachglied kontradiktorisch ist. Sondern überhaupt, wenn das Nachglied die Negation des Vorderglieds bedeutet, also: Position $*\!\!\not\Rightarrow$ Negation.

Dabei ist zu bedenken: genauso wie gilt, eine Positiv-Implikation ist tautologisch, wenn unter dem Zentral-Relator außer + nur □ (undefiniert) steht, so gilt: die Positiv-Implikation ist kontradiktorisch, wenn unter dem Zentral-Relator außer – nur □ steht.

Beispiele für Kontradiktionen sind:

$$\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx) *\!\!\not\Rightarrow \neg\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$$

$$Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx) *\!\!\not\Rightarrow \neg Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$$

Diese Kontradiktionen gelten auch, wenn als Teil-Relationen die *normale* Implikation fungiert, also z. B.:

$$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) *\!\!\not\Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$$

2-2-3-3 SEMI-ANALYTISCH

Ein typischer semi-analytischer quantoren-logischer Schluss ist der von „einige“ auf „alle“, also z. B.: „Wenn *einige* Menschen Philosophen sind, dann sind *alle* Menschen Philosophen“. Das ist zwar nicht kontradiktorisch, aber auch nicht streng folgerichtig.

$$Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx) *\!\!\longrightarrow \Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$$

Andere semi-analytische Schlüsse sind:

$$Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx) *\!\!\longrightarrow \neg\Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$$

$$Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx) *\!\!\longrightarrow Vx\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx)$$

Diese oben genannten semi-analytischen Schlüsse sind übrigens mit der normalen Implikation ebenfalls semi-analytisch gültig.

2-2-3-4 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Positiv-Äquivalenz* gelten quantoren-logisch überwiegend die Äquivalenzen der normalen Äquivalenz, etwa die klassischen Umformungen der Quantoren, hier in ausführlicher Schreibweise mit Individuenvariable x:

Alle	nicht einige nicht	$\Lambda x(Fx *\rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow \neg Vx\neg(Fx *\rightarrow Gx)$
Alle nicht	nicht einige	$\Lambda\neg(Fx *\rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow \neg V(Fx *\rightarrow Gx)$
Nicht alle	einige nicht	$\neg\Lambda(Fx *\rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow V\neg(Fx *\rightarrow Gx)$
Nicht alle nicht	einige	$\neg\Lambda\neg(Fx *\rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow V(Fx *\rightarrow Gx)$

Die Replikation weist keine Besonderheiten auf, weshalb hier nicht auf sie einzugehen ist.

2-2-3-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Folgende Beziehungen bestehen zwischen Implikation und Positiv-Implikation (ich verwende dabei als Zentral-Relator die Implikation, weil nämlich nur hier die *Kontraposition* gilt.)

• $\Lambda x(Fx *\rightarrow Gx) \Rightarrow \Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$

Kontraposition: $\neg\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx *\rightarrow Gx)$

(Man könnte allerdings vertreten, dass hier sogar die Äquivalenz gilt. Aber dies erforderte komplizierte Erläuterungen, auf die ich hier verzichten möchte.)

• $Vx(Fx *\rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$

Kontraposition: $\neg Vx(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow \neg Vx(Fx *\rightarrow Gx)$

Die für diese Gesetze werde ich im *quantitativen* Bereich anbringen, denn quantitativ ist dieser Beweis viel leichter und eleganter zu führen. Natürlich ist die Positiv-Implikation auch geeignet, Schlüsse des *Syllogismus* darzustellen, sogar viel geeigneter dafür als die normale Implikation, mit der sich nicht alle Syllogismen darstellen lassen.

2-2-4 Systematik

Ich komme zurück auf die 5 *Modelle* quantoren-logischer Relationen, die in 1-2-4 und 1-5-4 bereits vorgestellt wurden. Und zwar geht es dabei um *komplexe* Relationen, in denen jeweils *zwei* Prädikate bzw. Eigenschaften F und G vorkommen. Es ist nun zu prüfen, inwieweit die anerkannten Gesetzmäßigkeiten des *logischen Quadrats* gelten.

Allerdings werden die Aussagen hier nicht alle im Einzelnen durch *Wahrheitstafeln* bewiesen. Das erforderte, die *quantoren-logischen* Relationen zunächst in *prädikaten-logische* Relationen umzuformen und für die dann umfangreiche und komplizierte Wahrheitstafeln aufzustellen. Zwar wurden alle Relationen durch solche Wahrheitstafeln geprüft, aber diese Tafeln sollen im Text nur in Einzelfällen aufgeführt werden. Ohnehin ist die Beweisführung im Rahmen der *quantitativen Logik* leichter und verständlicher.

Zunächst sei zur Erinnerung noch einmal das logische Quadrat dargestellt:

alle	$^{+}\vert^{+}$	alle$\neg$
$\Downarrow$	$^{+}{>}{<}^{+}$	$\Downarrow$
einige	$^{+}\vee^{+}$	einige$\neg$

2-2-4-1 MODELL 1: IMPLIKATION UND NEGIERTE IMPLIKATION

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) & {}^{+}|^{+} & \Lambda x\neg(Fx \rightarrow Gx) \\
\Downarrow & {}^{+}{>}{<}^{+} & \Downarrow \\
\mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx) & {}^{+}\vee^{+} & \mathrm{V}x\neg(Fx \rightarrow Gx)
\end{array}$$

Bei diesem Modell gelten *alle* analytischen Relationen des logischen Quadrats. Denn in der Klammer steht immer dieselbe Ausdruck ($Fx \rightarrow Gx$). Nur die Quantoren sind unterschiedlich, und genau zwischen diesen unterschiedlichen Quantoren (einschließlich der Negationen) gelten eben die Beziehungen des logischen Quadrats.

2-2-4-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) & & \Lambda x\ (Fx \rightarrow \neg Gx) \\
\Downarrow & {}^{+}\vee^{+} & \Downarrow \\
\mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx) & {}^{+}\vee^{+} & \mathrm{V}x\ (Fx \rightarrow \neg Gx)
\end{array}$$

Wie man sieht, weichen bei diesem Modell mehrere Beziehungen vom logischen Quadrat ab. So besteht in der Diagonalen keine *Kontravalenz* = kontradiktorischer Gegensatz, (${}^{+}{>}{<}^{+}$), sondern nur die *Disjunktion* = subkonträrer Gegensatz (${}^{+}\vee^{+}$).

Und auch zwischen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ und $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ besteht keine Exklusion, sondern es lässt sich gar keine relevante analytische Beziehung angeben.

2-2-4-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda x(Fx \wedge Gx) & {}^{+}|^{+} & \Lambda x(Fx \wedge \neg Gx) \\
\Downarrow & {}^{+}|^{+} & \Downarrow \\
\mathrm{V}x(Fx \wedge Gx) & & \mathrm{V}x(Fx \wedge \neg Gx)
\end{array}$$

Hier stimmen 3 analytische Relationen mit dem logischen Quadrat überein, d. h. aber auch 3 nicht. In den beiden Diagonalen besteht kein *kontradiktorischer* Gegensatz (${}^{+}{>}{<}^{+}$), sondern nur ein konträrer (${}^{+}|^{+}$). Zwischen $\mathrm{V}x(Fx \wedge Gx)$ und $\mathrm{V}x(Fx \wedge \neg Gx)$ lässt sich keinerlei *tautologische* Relation angeben.

2-2-4-4 MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

Das ist wie gesagt das bekannteste Modell, in der Logik wie in der *Wissenschaftstheorie*.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda x(Fx \rightarrow Gx) & & \Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \\ & {}^{+}\!\!><\!\!{}^{+} & \\ Vx(Fx \wedge Gx) & & Vx(Fx \wedge \neg Gx) \end{array}$$

Bei diesem am weitesten verbreitetsten Modell stimmen nur die 2 Diagonal-Beziehungen $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ $^{+}><^{+}$ $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$ und $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ $^{+}><^{+}$ $Vx(Fx \wedge Gx)$ mit dem logischen Quadrat überein. Und bei den anderen Relationen besteht gar keine *tautologische* Verbindung. Es ist erstaunlich, dass dieser Diskrepanz nicht mehr Aufmerksamkeit geschenkt wird, denn sie stellt die Brauchbarkeit dieses Modells doch sehr in Frage.

Zu den *Kontravalenzen* und *Äquivalenzen* von $\rightarrow$ und $\wedge$:

- $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$ $^{+}><^{+}$ $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
  $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
  $\neg Vx(Fx \wedge \neg Gx)$ $^{+}><^{+}$ $Vx(Fx \wedge \neg Gx)$
- $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ $^{+}><^{+}$ $Vx(Fx \wedge Gx)$
  $\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \Leftrightarrow \neg Vx\neg(Fx \rightarrow \neg Gx) \Leftrightarrow \neg Vx(Fx \wedge Gx)$
  $\neg Vx(Fx \wedge Gx)$ $^{+}><^{+}$ $Vx(Fx \wedge Gx)$

2-2-4-5 MODELL 5: (NEGIERTE) POSITIV-IMPLIKATION

$$\begin{array}{ccc} \Lambda x(Fx *\!\!\rightarrow Gx) & {}^{+}|^{+} & \Lambda x\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx) \\ \Downarrow & {}^{+}\!\!><\!\!{}^{+} & \Downarrow \\ Vx(Fx *\!\!\rightarrow Gx) & {}^{+}\vee^{+} & Vx\neg(Fx *\!\!\rightarrow Gx) \end{array}$$

Dieses Modell erfüllt *alle* Bedingungen des *logischen Quadrats*. Und dieses Modell zeigt noch einmal besonders klar: Es geht bei All- und Partikulär-Ausagen nicht um unterschiedliche logische Strukturen, sondern nur um *unterschiedliche Quantität* derselben Struktur $*\!\!\rightarrow$.

Die völlige Übereinstimmung mit dem logischen Quadrat gilt sonst allein noch für das Modell 1, das sich nur durch Verwendung der *Normal-Implikation* unterscheidet. Wie ich aber früher gezeigt habe, führt die normale Implikation zu verschiedenen Problemen. So spricht sehr vieles für dieses Modell mit der Positiv-Implikation, ihr einziger Nachteil ist, dass sie nicht *alle* logischen Welten abdeckt.

2-2-5 Erweiterungen

2-2-5-1 INKLUSIV / EXKLUSIV

Auf die *inklusive* Quantoren-Logik bin ich schon genauer eingegangen. Bei der *exklusiven* Quantoren-Logik ergeben sich teils andere Verhältnisse. Zunächst das *logische Quadrat*.

alle	$^+\|^+$	alle¬
$^+\|^+$	$^+\|^+$	$^+\|^+$
genau einige	$\Leftrightarrow$	genau einige¬

Wichtige *Äquivalenzen* sind:

$$\exists x(Fx) \Leftrightarrow [\neg\Lambda x(Fx) \wedge \neg\Lambda x\neg(Fx)] \Leftrightarrow [\mathrm{V}x\neg(Fx) \wedge \mathrm{V}x(Fx)]$$
$$\neg\exists x(Fx) \Leftrightarrow [\Lambda x(Fx) \vee \Lambda x\neg(Fx)] \Leftrightarrow [\neg\mathrm{V}x\neg(Fx) \vee \neg\mathrm{V}x(Fx)]$$

Wichtige *Folgen* sind:

$$\exists x(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx) \qquad \exists x(Fx) \Rightarrow \neg\Lambda x\neg(Fx)$$
$$\exists x(Fx) \Rightarrow \mathrm{V}x(Fx) \qquad \exists x(Fx) \Rightarrow \mathrm{V}x\neg(Fx)$$

Prädikaten-logisch gilt :

$$\exists x(Fx) \Leftrightarrow (Fx_1 \vee \ldots \vee Fx_n) \wedge (\neg Fx_1 \vee \ldots \vee \neg Fx_n)$$
$$\neg\exists x(Fx) \Leftrightarrow (Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n) \vee (\neg Fx_1 \wedge \ldots \wedge \neg Fx_n)$$

Im Verhältnis zur *inklusiven* Quantoren-Logik ergibt sich in einer Gesamt-Übersicht:

		¬genau einige	$\Leftrightarrow$	¬genau einige¬		
		$\Uparrow$		$\Uparrow$		
¬einige¬	$\Leftrightarrow$	alle	$^+\|^+$	alle¬	$\Leftrightarrow$	¬einige
$\Downarrow$		$\Downarrow$	$^+{>}{<}^+$	$\Downarrow$		$\Downarrow$
einige	$\Leftrightarrow$	¬alle¬	$^+\vee^+$	¬alle	$\Leftrightarrow$	einige¬
		$\Uparrow$		$\Uparrow$		
		genau einige	$\Leftrightarrow$	genau einige¬		

2-2-5-2 SECHS-WERTIGE LOGIK

Die *6-wertige* Logik wurde in ihrer *synthetischen* Form bereits vorgestellt. Als neue Kategorie wurde dabei „die meisten" eingeführt. Jetzt geht es um die *analytischen* Beziehungen.

Die 6-wertige Logik umfasst folgende Stufen bzw. Gegensätze:

Alle – alle nicht / die meisten – die meisten nicht / einige – einige nicht.

Es gilt bei *inklusiver* Interpretation:

alle $\Rightarrow$ die meisten $\Rightarrow$ einige   ¬einige $\Rightarrow$ ¬die meisten $\Rightarrow$ ¬alle

alle¬ $\Rightarrow$ die meisten¬ $\Rightarrow$ einige¬   ¬einige¬ $\Rightarrow$ ¬die meisten¬ $\Rightarrow$ ¬alle¬

Bei inklusiver Interpretation gilt also: *mindestens* einige (vielleicht die meisten, vielleicht alle), *mindestens* die meisten (vielleicht alle).

Bei *exklusiver* Interpretation heißt es dagegen: *genau einige*, *genau die meisten*. So gilt:

Genau einige $\Leftrightarrow$ genau einige nicht

Aber anders: Genau die meisten $\Leftrightarrow$ genau die wenigsten nicht

Bei der exklusiven Logik ergeben sich allerdings nur 5 Unterscheidungen, man kommt also zu einer *5-wertigen* Logik:

alle / genau die meisten / genau einige (nicht) / genau die wenigsten / alle nicht.

Außer zwischen den äquivalenten Ausdrücken herrscht *exklusiv* überall der *konträre* Gegensatz, also $\Phi \;{}^{+}|^{+}\; \Psi$ bzw. $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$. Z. B. gilt für „alle":

alle $\Rightarrow$ ¬die genau meisten $\wedge$ ¬genau einige $\wedge$ ¬genau die wenigsten $\wedge$ ¬alle nicht

2-2-5-3 DIMENSIONEN

Verschiedene Dimensionen wie *Raum* und *Zeit* können entsprechend strukturiert werden:

In der 4-wertigen (inklusiven) *Raum-Logik* gilt:

überall $\Rightarrow$ mancherorts

In der 6-wertigen Raum-Logik gilt:

überall $\Rightarrow$ meistenorts $\Rightarrow$ mancherorts

In der 4-wertigen (inklusiven) *Zeit-Logik* gilt:

immer $\Rightarrow$ manchmal

In der 6-wertigen Zeit-Logik gilt:

immer $\Rightarrow$ meistens $\Rightarrow$ manchmal

Für die Negationen gilt Entsprechendes.

2-2-5-4 MODAL-LOGIK

• *Inklusive* Modal-Logik

Hier gilt in der 4-wertigen Logik, entsprechend dem *logischen Quadrat* der Quantoren-Logik:

notwendig	${}^{+}|^{+}$	notwendig¬
$\Downarrow$	${}^{+}\!\!><\!\!{}^{+}$	$\Downarrow$
möglich	${}^{+}\vee^{+}$	möglich¬

Z. B.: Notwendig(Φ) $^{+}\!\!><\!\!^{+}$ Möglich($\neg\Phi$) bzw. Notwendig(Φ) $\Leftrightarrow$ $\neg$Möglich($\neg\Phi$).
Es ist beliebig, ob man z. B. $\neg$Möglich($\neg\Phi$) oder $\neg$Möglich$\neg$(Φ) schreibt.
Entsprechend der Quantoren-Logik gelten folgende *Äquivalenzen* in der Modal-Logik:

Notwendig	$\Leftrightarrow$	$\neg$Möglich$\neg$	$N \Leftrightarrow \neg M\neg$
Notwendig$\neg$	$\Leftrightarrow$	$\neg$Möglich	$N\neg \Leftrightarrow \neg M$
$\neg$Notwendig	$\Leftrightarrow$	Möglich$\neg$	$\neg N \Leftrightarrow M\neg$
$\neg$Notwendig$\neg$	$\Leftrightarrow$	Möglich	$\neg N\neg \Leftrightarrow M$

Also z. B.: Notwendig $\neg$(Φ) $\Leftrightarrow$ $\neg$Möglich (Φ) bzw. $N\neg(\Phi) \Leftrightarrow \neg M(\Phi)$

Sprachlich gibt es folgende Umformungen:

Nicht notwendig $\Leftrightarrow$ *unnotwendig*
Nicht möglich $\Leftrightarrow$ *unmöglich*

In einer *6-wertigen* Logik ergibt sich:
notwendig $\Rightarrow$ wahrscheinlich $\Rightarrow$ möglich
$\neg$möglich $\Rightarrow$ $\neg$wahrscheinlich $\Rightarrow$ $\neg$notwendig
unmöglich $\Rightarrow$ unwahrscheinlich $\Rightarrow$ unnotwendig

Die Frage ist, wie in diesem Zusammenhang „*tatsächlich*“ (wahr) bzw. „*nicht tatsächlich*“ (falsch) einzuordnen sind.
notwendig $\Rightarrow$ tatsächlich $\Rightarrow$ möglich
$\neg$möglich $\Rightarrow$ $\neg$tatsächlich $\Rightarrow$ $\neg$notwendig
„Tatsächlich“ liegt allerdings auf einer *anderen Ebene*, keiner logischen, sondern einer *realen* (synthetischen) Ebene. Von daher sind diese Ketten-Schlüsse nicht unproblematisch.

• *Exklusive* Modal-Logik
Auch hier lassen sich die Beziehungen am besten im logischen Quadrat darstellen:
N = Notwendig, M = Möglich

N	$^{+}\vert^{+}$	N$\neg$
$^{+}\vert^{+}$	$^{+}\vert^{+}$	$^{+}\vert^{+}$
genau M	$\Leftrightarrow$	genau M$\neg$

Z. B.: Genau M(Φ) $\Leftrightarrow$ Genau M$\neg$(Φ)
„Es ist genau möglich, dass Φ“, ist äquivalent: „Es ist genau möglich, dass nicht Φ“.
Für „genau möglich“ kann man schreiben: $M^{\exists}$ (unter Bezug auf den *exklusiven* Partikulär-Quantor $\exists$ für „genau einige“).
Im Verhältnis zur *inklusiven* Modal-Logik gilt:
Genau möglich $\Leftrightarrow$ möglich und möglich nicht
$M^{\exists} \Leftrightarrow M \wedge M\neg$ bzw. $M^{\exists}\neg \Leftrightarrow M \wedge M\neg$

Z. B. Wenn Φ *genau* möglich ist, dann und nur dann gilt: Es ist möglich, dass Φ, und es ist möglich, dass nicht Φ.

Besonders interessant ist „genau möglich“ bzw. die Konjunktion von „möglich“ und „möglich nicht“ aus folgendem Grund: Dies ist die beste und präziseste Definition von „*kontingent*“, und *Kontingenz* („Zufälligkeit“) spielt eine große Rolle in der Philosophie:

kontingent ⇔ möglich ∧ möglich¬

2-2-5-5 INTENSIONALE LOGIK

Die *intensionale* Quantoren-Logik wendet (wie in 1-2-5-5 beschrieben) die Quantoren nicht auf Objekte bzw. *Individuen* an (alle x ...), sondern auf Eigenschaften bzw. *Größeneinheiten* (alle Einheiten ...).

Z. B.: Wenn Sokrates *alle* Weisheits-Einheiten besitzt (*vollständig* weise ist), dann besitzt er auch – mindestens – *einige* Weisheits-Einheiten (ist auch mindestens *partiell* weise).

Im Folgenden werden nur ausgewählte intensionale (analytische) Relationen dargestellt, weitere sind direkt aus der *extensionalen* Quantoren-Logik abzuleiten.

• Herkömmliche *inklusive* 4-wertige Quantoren-Logik:

Äquivalenzen:

vollständig ⇔ ¬partiell¬
¬vollständig ⇔ partiell¬
vollständig¬ ⇔ ¬partiell
¬vollständig¬ ⇔ partiell
Beispiel: „Sokrates ist vollständig weise ⇔ Sokrates ist nicht partiell nicht weise“.

Folgen:

Vollständig ⇒ partiell bzw. vollständig¬ ⇒ partiell¬
¬partiell ⇒ ¬vollständig bzw. ¬partiell¬ ⇒ ¬vollständig¬

• Erweiterte *inklusive* 6-wertige Quantoren-Logik

Vollständig ⇒ überwiegend ⇒ partiell
Vollständig¬ ⇒ überwiegend¬ ⇒ partiell¬
Anstatt „überwiegend“ kann man auch „überdurchschnittlich“ o. ä. einsetzen.

Beispiel: „Er ist vollständig zufrieden ⇒ Er ist (mindestens) überwiegend zufrieden ⇒ Er ist (mindestens) partiell zufrieden“.

• Einfache *exklusive* 3-wertige Logik

Genau partiell ⇔ genau partiell¬

Beispiel: „Wenn Peter partiell klug ist, dann ist er auch partiell nicht klug und umgekehrt“.

Genau partiell ⇔ partiell ∧ partiell¬

• Erweiterte *exklusive* 5-wertige Logik

Hier geht es um die Beziehungen zwischen vollständig – genau überdurchschnittlich – genau partiell (nicht) – genau unterdurchschnittlich – vollständig nicht. Zwischen allen diesen Eigenschaftsausprägungen besteht der *konträre Gegensatz.*

2 – 3 QUANTITATIVE LOGIK

2-3-1 Einführung

Die *quantitative* Logik wurde in 1-3 eingeführt. Sie unterscheidet nicht nur zwischen 2 Werten wie die *Aussagen-Logik* oder (meistens) 4 Werten wie die *Quantoren-Logik*, sondern sie unterscheidet *unendlich viele* Werte. Man kann die *absolute Quantität* q angeben, wesentlich für die Logik ist aber die *relative Quantität* p, die allerdings auf der absoluten Quantität fußt. In diesem Kapitel über Analytik geht es um *analytisch-quantitative* Beziehungen, und zwar vor allem um logische *Schlüsse*. Ich konzentriere mich in dieser Einführung auf *semi-analytische Schlüsse*, an denen sich die logischen Strukturen am besten darstellen lassen.

Die Ausführungen in 2-3-1 sind recht kompliziert und enthalten auch noch ungeklärte Punkte bzw. Diskussionen, sie sind in erster Linie für Spezialisten gedacht, andere Leser mögen sie ggf. übergehen (als Basis dient 1-3-4-5).

Wir können logische Schlüsse nach der *Anzahl der Quantifizierungen* unterscheiden.
Bei einem einfachen (partiellen) Schluss $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ kann man unterscheiden:
- 1-fache Quantifizierung: $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = r/n$
- 2-fache Quantifizierung: $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n$

Diese verschiedenen Quantifizierungen werde ich jetzt besprechen

2-3-1-1 EIN-FACHE QUANTIFIZIERUNG

Bei der *1-fachen* Quantifizierung spreche ich auch von einem *Gesamt-Ausdruck* oder einer *ganzheitlichen Formel*. Dies sei hier an einem *semi-analytischen* Schluss erläutert, nämlich:

$$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$$

Zur Angabe der relativen Quantität p schreibt man: $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = r/n$.

Hier wird also nur dem *Gesamt-Ausdruck* $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y)$ *ein* quantitativer Wert, nämlich r/n zugewiesen.

Man könnte in diesem Fall auch die inneren *Klammern* weglassen, weil $\rightarrow$ stärker bindet als $\longrightarrow$, d. h. $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = r/n$. Aber mit Klammern ist es normalerweise übersichtlicher.

Als Beispiel nehmen wir: $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = 4/10$.

Das kann man z. B. folgendermaßen *interpretieren*:

„$p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y)$“ ist in 4 von 10 Fällen gültig.

Mit 40% Wahrscheinlichkeit impliziert „$X \rightarrow Y$“ semi-analytisch „Y“.

Die *qualitative* Wahrheitstafel des Schlusses lautet folgendermaßen:

	(X	→	Y)	⟶	Y
a	+	+	+	+	+
b	+	–	–	+	–
c	–	+	+	+	+
d	–	+	–	–	–

Um eine *quantitative Formel* dieses Schlusses zu konstruieren, folgt man einfach der Wahrheitstafel. Unter dem *Zentral-Relator* $\longrightarrow$ steht der Wahrheitsverlauf: + + + –. Daraus bildet man eine Formel, wie es bei den synthetischen Relationen beschrieben wurde.

Zur Berechnung von p dividiert man die Anzahl der *Fälle* in den *gültigen Welten* (wo + unter dem Zentral-Relator $\longrightarrow$ steht) durch die Anzahl der Fälle in *allen Welten*. D. h. der Nenner ist (bei 2 Variablen) immer: a + b + c + d.

Wie man sieht, mit + belegt sind a, b und c. So ergibt sich als Formel:

$$p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$$

Der Wahrheitsverlauf + + + – entspricht der Definition der *Disjunktion* $X \vee Y$: + + + –
Somit kann man sagen: $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = p(X \vee Y)$

Davon ist unberührt: „$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$" ist eine *semi-analytische* Relation und „$X \vee Y$" ist eine *synthetische* Relation.

• Wahrheitstafel
Die Frage ist, ob wir eine *Wahrheitstafel* für $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = r/n$ aufstellen können.
Zunächst bietet es sich an, der *qualitativen* Wahrheitstafel von $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ zu folgen.
Ich habe sie oben dargestellt, man kann sie aber auch in folgender Form schreiben, welche die *konjunktive* Deutung verdeutlicht:

	$X \rightarrow Y$	Y	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
1.	+	+	+
2.	–	–	+
3.	+	+	+
4.	+	–	–

Die 1. Zeile der Wahrheitstafel ist dann zu lesen:
$(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$, die anderen Zeilen entsprechend (wie früher erläutert).

Um eine entsprechende *quantitative* Wahrheitstafel für $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$ aufzustellen, müssen wir für $p(X \rightarrow Y)$ und $p(Y)$ *gesonderte* quantitative Werte angeben. Zwar sind die nicht vorgegeben, wir kennen nur den Gesamtwert $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$, aber wir können den Prämissen Werte zuweisen, also z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und $p(Y) = s/n$. (Dadurch ergibt sich aber indirekt eine *3-fache*, nicht mehr eine *1-fache* Quantifizierung.)

Man erhält folgende Tafel:

	$p(X \rightarrow Y) = r/n$	$p(Y) = s/n$	$p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$
1.	+	+	+
2.	–	–	+
3.	+	+	+
4.	+	–	–

Die 1. Zeile der Wahrheitstafel (in der es *keine Negationen* gibt) ist zu lesen:
$p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n \longrightarrow p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$, die anderen Zeilen entsprechend. Diese Wahrheitstafel ist allerdings inadäquat, pointiert gesagt, sie ist falsch. Denn in der Wahrheitstafel müssen sich für alle Zeilen strenge Schlüsse ergeben, doch die erste Zeile

$p(X \rightarrow Y) = r/n \ \wedge\ p(Y) = s/n \longrightarrow p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$ ist nur ein *semi-analytischer* Schluss, daher darf man bei der 1. Zeile als Zentral-Relator nur den *semi-analytischen* Implikator $\longrightarrow$ nehmen, nicht den *analytischen* Implikator $\Rightarrow$. Und dasselbe gilt für Zeile 2, 3 und 4. Es ist sofort offensichtlich, dass wir für diesen Schluss mit den 3 *numerischen Variablen* r/n, s/n und m/n nicht *allgemein* angeben können, ob er gültig ist oder nicht. Entsprechend habe ich in 1-3-4-5 gezeigt, dass sich keine adäquate Wahrheitstafel für $p(X \rightarrow Y) = r/n$ angeben lässt.

2-3-1-2 BERECHNUNG BEI DREI-FACHER QUANTIFIZIERUNG

Es gibt aber noch eine andere Methode, den Wert von semi-analytischen Schlüssen analog der *konjunktiven* Wahrheitstafel festzustellen, ohne dass wirklich eine Wahrheitstafel aufgestellt wird, nämlich durch *Berechnung* der Konklusion.

Gehen wir zurück zu dem Beispiel $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$

Dabei ist zu bedenken: Auch wenn wir für diesen quantitativen Schluss keine Wahrheitstafel aufstellen können, können wir (der *qualitativen*, wahrheitswert-funktionalen Wahrheitstafel folgend) einen neuen *quantitativ-funktionalen* Schluss formulieren, bei dem gilt:

– die Prämisse $X \rightarrow Y$ wird zur neuen *quantitativen* Prämisse $p(X \rightarrow Y) = r/n$
– die Konklusion Y wird ebenfalls zu einer neuen quantitativen Prämisse $p(Y) = s/n$
– der alte Gesamtschluss $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$ wird zur neuen Konklusion

Es ergibt sich: $p(X \rightarrow Y) = r/n \ \wedge\ p(Y) = s/n \longrightarrow p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$

Setzen wir dafür Formeln ein:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = r/n \ \wedge\ \frac{a+c}{a+b+c+d} = s/n \longrightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = m/n$$

Nun können wir aber m/n durch r/n und s/n definieren.

Machen wir uns klar, dass gilt: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = r/n \Leftrightarrow \frac{b}{a+b+c+d} = 1 - r/n$

Weiterhin gilt: $\frac{a+c}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} = \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$

Wir können jetzt schreiben:

$$p(X \rightarrow Y) = r/n \ \wedge\ p(Y) = s/n \Rightarrow p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = 1 - r/n + s/n$$

Man kann hier von einer *kombinierten Formel* sprechen. Bei der kombinierten Formel berechnet man also den Wert der *Gesamtformel*, indem man von den Werten der *Einzelkomponenten* ausgeht. Beispielsweise berechnet man den Wert von $p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y)$, indem man von den Werten der Komponenten $p(X \rightarrow Y)$ und $p(Y)$ ausgeht. Dies ist anders als bei einer Wahrheitstafel, da würde nur entschieden, die Gesamtformel ist wahr oder falsch, hier wird ihr ein *quantitativer Wert* zugewiesen. So gelingt es, den *partiellen* Schluss in einen *echten* Schluss umwandeln, also:

$p(X \rightarrow Y) = r/n \ \wedge\ p(Y) = s/n \longrightarrow p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = m/n$ in:
$p(X \rightarrow Y) = r/n \ \wedge\ p(Y) = s/n \Rightarrow p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y) = 1 - r/n + s/n$

Um die Gültigkeit dieses Schlusses nachzuweisen, muss man *Rechen-Methoden* verwenden, man kann nicht einfach vergleichen, welche Symbole in der Wahrheitstafel gegenüber stehen. Andererseits, es lässt sich bei diesem Schluss gar keine *Wahrheitstafel* aufstellen (wie oben erläutert). Darum stellt sich die Frage: Darf man überhaupt den logischen *Implikator* $\Rightarrow$ verwenden, wenn sich der Schluss nicht mittels *Wahrheitstafel* darstellen lässt? Ich meine ja, denn dieser *quantitative* Schluss lässt sich letztlich doch als *logischer* Schluss verstehen, in dem fundamentalen Sinn, dass die Information der Konklusion in der Information der Prämisse(n) bereits enthalten ist, wie in 2-1-2-1 gezeigt wurde.

2-3-1-3 ZWEI-FACHE QUANTIFIZIERUNG

Wir werden hier zunächst 2 Schlüsse unterscheiden:

1) *semi-analytischer* Schluss: z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n$.
2) *strenger* Schluss: z. B. $p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$

1) *Semi-analytischer Schluss*

Es geht also um einen Schluss wie: $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n$.

In normaler Sprache lautet die primäre *Bedeutung* dieses Schlusses:
„Wenn die Wahrscheinlichkeit $p(X \rightarrow Y)$ den Wert r/n besitzt, dann besitzt die Wahrscheinlichkeit p(Y) den Wert s/n". (Auf eine mengen-theoretische Interpretation verzichte ich hier.)
Ich habe diesen Schluss als *semi-analytisch* gekennzeichnet, denn es ist nicht allgemein zu bestimmen, ob er streng gültig ist; erst durch Einsatz von *konkreten* Werten für die Variablen r/n und s/n können wir das – aber auch nur partiell bzw. bedingt – entscheiden.

Fragen wir dennoch genauer nach den *Wahrheitsbedingungen* und damit nach der *Wahrheitstafel* dieses Schlusses, so ergeben sich vor allem zwei Möglichkeiten:

Gemäß der konjunktiven Deutung wird aus der Konjunktion der Glieder $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und $p(Y) = s/n$ auf die Wahrheit/Falschheit der *Gesamt-Relation* $p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n$ geschlossen. D. h. für die 1., *positive* Zeile:

$$[p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n] \Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$$

Greifen wir zunächst zurück auf die *qualitative* Form dieses Schlusses und zeigen seine Wahrheitstafel bzw. die Einzel-Schlüsse, die den *Zeilen* der Wahrheitstafel entsprechen.

	$(X \rightarrow Y)$	$\wedge$	Y	$\Rightarrow$	$(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$	
1.	+	+	+	+	+	$(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
2.	–	–	–	+	+	$\neg(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
3.	+	+	+	+	+	$(X \rightarrow Y) \wedge Y \Rightarrow (X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
4.	+	–	–	+	–	$(X \rightarrow Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg[(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y]$

Wie übersetzt man eine solche *qualitative* Wahrheitstafel in eine *quantitative* Wahrheitstafel ?

Erstens stellt sich dabei die Frage, ob wir die *qualitativen*, aussagen-logischen *Wahrheitsverläufe* (also z. B. für $X \rightarrow Y$ den Verlauf + – + +) in die *quantitative* Wahrheitstafel übernehmen; ich tat das in einer früheren Fassung des Textes, habe aber inzwischen meine Auffassung geändert. Der Grund ist folgender:

Die *qualitativen* Ausdrücke $(X \rightarrow Y)$ und Y stehen in einem genau bestimmten logischen *Abhängigkeitsverhältnis*, was die Wahrheitstafel widerspiegelt (siehe oben).

Zwar stehen die *quantitativen* Ausdrücke $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und $p(Y) = s/n$ ebenfalls in einem logischen Abhängigkeitsverhältnis (zumal eben das Y in $X \rightarrow Y$ enthalten ist). Vor allem zeigt sich dies in der Ungleichung $p(X \rightarrow Y) \geq p(Y)$; das erläutere ich im nächsten Punkt.

Aber außer diesem Größen-Verhältnis besteht *Unabhängigkeit*. Innerhalb des definierten Wertebereichs von $0 \leq p \leq 1$ können $p(X \rightarrow Y) = r/n$ und p(Y) alle denkbaren Werte annehmen. D. h. wenn ich $p(X \rightarrow Y)$ kenne, weiß ich keinesfalls *genau*, wie groß $p(Y)$ ist und umgekehrt.

Daher darf man den Wahrheitsverlauf aus der *qualitativen* Wahrheitstafel *nicht* übernehmen, sondern muss die Werte wie *unabhängige synthetische* Werte behandeln (Stichpunkt: *systematische* Wahrheitstafel).

Als *konjunktive* Wahrheitstafel ergibt sich dann:

$[p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge$	$p(Y) = s/n]$	$\Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
+	+	+
+	−	−
−	+	+
−	−	+

Zweitens stellt sich die Frage, wie man das + und das − übersetzt. Hier bietet sich an:

Für $p(X \rightarrow Y)$: bei +: r/n bei −: $\neg(r/n)$ bzw. $\neq r/n$

Für $p(Y)$: bei +: s/n, bei −: $\neg(s/n)$ bzw. $\neq s/n$.

Setzen wir die *quantitativen* Werte in die Wahrheitstafel ein, erhalten wir:

$[p(X \rightarrow Y) \wedge$	$p(Y)]$	$\Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
r/n	s/n	+
r/n	$\neq s/n$	−
$\neq r/n$	s/n	+
$\neq r/n$	$\neq s/n$	+

Als einzelne Zeilen ergeben sich:

1. $[p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n] \Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
2. $[p(X \rightarrow Y) = r/n \wedge p(Y) \neq s/n] \Rightarrow \neg[p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
3. $[p(X \rightarrow Y) \neq r/n \wedge p(Y) = s/n] \Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$
4. $[p(X \rightarrow Y) \neq r/n \wedge p(Y) \neq s/n] \Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = s/n]$

(Wenn wir die Wahrheitstafel analog der qualitativen Wahrheitstafel konstruiert hätten, ergäben sich ebenfalls nur strenge Schlüsse.)

Hier stoßen wir also wieder auf das schon bekannte Problem: Wir können zwar *logisch* eine korrekte Wahrheitstafel und korrekte Schlüsse aufstellen. Aber wenn wir diese *quantitativen* Schlüsse *mathematisch* analysieren, scheinen sie uns sinnlos. Denn die *Variablen* wie r/n sind weitgehend *unbestimmt* (noch unbestimmter sind aber die *negativen* Werte wie $\neq r/n$, dieser Wert schließt eben nur sich selbst, also nur *einen* Wert aus).

Aber auch bei einem *konkreten* Beispiel ergibt sich kein wesentlich anderes Resultat, z. B. für $p(X \rightarrow Y) = 7/10 \longrightarrow p(Y) = 5/10$. Die konjunktive Deutung lautet hier:

$$[p(X \rightarrow Y) = 7/10 \wedge p(Y) = 5/10] \Rightarrow [p(X \rightarrow Y) = 7/10 \longrightarrow p(Y) = 5/10]$$

Da wir es jetzt mit Konstanten wie 7/10 zu tun haben, wirkt diese 1. Zeile der Wahrheitstafel wohl mathematisch sinnvoll. Aber bei den weiteren Zeilen der Wahrheitstafel benötigen wir wieder die *Negationen*, und diese *negativen* Bestimmungen $\neq 5/10$ oder $\neq 7/10$ sind zu unkonkret für eine sinnvolle mathematisch-numerische Deutung. Dies gilt auch, wenn man einschränkt: Die Negation z. B. $\neq 7/10$ bezieht sich nur auf den *Zähler* (also Negationen sind 1/10, 2/10 usw.), der Nenner n = 10 wird nicht negiert; außerdem sind grundsätzlich alle Werte $p < 0$ und $p > 1$ ausgeschlossen.

2) *strenger Schluss*: p(X → Y) = r/n ⇒ p(Y) ≤ r/n
Hier handelt sich um einen strengen Schluss. Deutlicher wird das, wenn man die Formeln verwendet.

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \text{r/n} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \leq \text{r/n}$$

Dies ist unmittelbar evident und mathematisch plausibel. Betrachtet man nur den Zähler, dann gilt: a + c ist Teil (Teilsumme) von a + c + d. Der Teil kann aber nicht größer als das Ganze sein.

Man kann den Schluss auch *umgekehrt* schreiben: p(Y) = s/n ⇒ p(X → Y) ≥ s/n.
Für die *Negationen* gilt, am Beispiel von p(Y):
¬[p(Y) ≥ s/n] ist definiert als p(Y) < s/n, ¬[p(Y) ≤ s/n] ist definiert als p(Y) > s/n.

Eine ganz andere Möglichkeit ist, mit einer *Gleichung* und mit der *Addition* zu arbeiten: Dazu führen wir den Faktor p(Φ) = m/n ein. Es soll gelten: p(Y) + p(Φ) = p(X → Y).

Bzw. s/n + m/n = r/n.
Zurück zur ursprünglichen Form: p(X → Y) = r/n ⇒ p(Y) ≤ r/n
Bei *konjunktiver* Deutung ergäbe sich als *1. Zeile* einer *Wahrheitstafel*:

[p(X → Y) = r/n ∧ p(Y) ≤ r/n] ⇒ [p(X → Y) = r/n ⇒ p(Y) ≤ r/n]

Eine *vollständige*, adäquate Wahrheitstafel aufzustellen, ist aber m. E. nicht möglich.

Der Grund ist, wir können nicht die Wahrheitsverläufe für p(X → Y) = r/n und p(Y) ≤ r/n aufstellen. Denn es gibt für den Schluss p(X → Y) = r/n ⇒ p(Y) ≤ r/n kein direktes Vorbild in der Aussagen-Logik, auf dessen Wahrheitstafel man sich beziehen könnte (einmal davon abgesehen, dass dies sehr problematisch wäre).

Wir dürfen aber p(X → Y) = r/n und p(Y) ≤ r/n auch nicht einfach wie *unabhängige* Relationen behandeln und, wie bei einer *synthetischen* Relation, für p(X → Y) = r/n den Werteverlauf + + – – und für p(Y) ≤ r/n den Verlauf + – + – ansetzen, weil diese Werte logisch und mathematisch vollkommen voneinander *abhängig* sind. (Man könnte zwar eine passende Wahrheitstafel konstruieren, aber das wäre doch willkürlich).

Aber da p(X → Y) = r/n ⇒ p(Y) ≤ r/n eine *Tautologie* ist, wäre eine Wahrheitstafel auch nicht sehr aufschlussreich, denn es wären alle Zeilen der Wahrheitstafel automatisch tautologisch. Bei Verwendung der normalen Implikation gilt eben: Ein Schluss auf eine Tautologie ist immer ebenfalls eine Tautologie: Φ ⇒ Tautologie. Somit muss in der Wahrheitstafel unter dem zentralen Relator ⇒ 4mal + stehen: + + + +.

Man könnte hier wiederum fragen, ob man dem *logischen (analytischen)* Implikator ⇒ überhaupt bei einem Schluss verwenden darf, für den sich keine (sinnvolle) Wahrheitstafel aufstellen lässt, ob man vielleicht stattdessen einen Implikator für einen *nur mathematischen* Schluss benötigt. Aber ein Schluss wie p(X → Y) = r/n ⇒ p(Y) ≤ r/n gehorcht ebenfalls der fundamentalen Definition des logischen Schlusses, nachdem die *Information der Konklusion* eine *Teilmenge der Information der Prämisse* ist – das werde ich gleich in 2-3-1-4 zeigen.

Auch eine *implikative* Wahrheitstafel von p(X → Y) = r/n ⇒ p(Y) ≤ r/n stieße auf dieselben Probleme. Daher habe ich darauf verzicht, sie darzustellen.

Fassen wir noch einmal zusammen, welche Quantifzierungen von Schlüssen vorgenommen wurde. Wir haben zuerst die *Gesamtformel* von (X → Y) ⟶ Y berechnet, dann die *Einzelkomponenten* und dann beide in einer *Kombinations-Formel* integriert:

- Gesamtformel: p((X → Y) ⟶ Y) = m/n
- Einzelkomponenten-Formel: p(X → Y) = r/n ⟶ p(Y) = s/n
- Kombinierte Formel: [p(X → Y) = r/n ∧ p(Y) = s/n] ⟶ [p((X → Y) ⟶ Y) = m/n]

2-3-1-4 WAS IST EIN QUANTITATIVER SCHLUSS ?

Wir haben gesehen, dass man als Inbegriff eines logischen Schlusses verstehen kann: Die *Information der Konklusion ist in der Information der Prämisse bereits enthalten*, ist also eine *Teilmenge* der Prämissen-Information. Traditionell sagt man: Der Schluss (geht) vom Allgemeinen auf das Besondere. Die Frage ist: Wie sieht das bei einem *quantitativen* Schluss aus? Geht es da auch ausschließlich um diesen Zusammenhang der *Informations-Übertragung*? Oder spielt bei einem quantitativen Schluss zusätzlich ein *mathematisches*, *numerisches* Moment eine Rolle? Zur Beantwortung der Frage möchte ich 2 Arten von Schlüssen unterscheiden, man könnte sie *quantifizierte* vs. *quantitative* Schlüsse nennen.

• quantifizierte Schlüsse

Ein Beispiel ist: $p(X) = r/n \wedge p(Y) = s/n \Rightarrow p(Y) = s/n$

Dies ist zwar formal ein quantitativer Schluss, aber besser spräche man vielleicht von einem *quantifizierten S*chluss, denn dieser Schluss hat genau *dieselbe Informations-Struktur* wie der folgende *qualitative* Schluss: $X \wedge Y \Rightarrow Y$. Die Quantität spielt hier keine Rolle für den Schluss, sie ist sekundär.

• quantitative Schlüsse

Als erstes Beispiel folgender Schluss $p(X) = 1 \wedge p(Y) = 1 \Rightarrow p(Y) > 0$.

Diesen *quantitativen* Schluss kann man leicht auf einen *quantoren-logischen* Schluss zurückführen: $\Lambda(X) \wedge \Lambda(Y) \Rightarrow V(X)$, sprachlich z. B.: „Wenn alle X wahr sind und alle Y wahr sind, dann sind auch einige Y wahr“. Gerade der Schluss von „*alle*“ auf „*einige*“ demonstriert besonders deutlich das Prinzip „vom Allgemeinen zum Besonderen“.

Das *Ganze* ist „alle“, der *Teil* ist „einige“; der All-Satz (Λ bzw. $p = 1$) beinhaltet die Gesamt-Information. Man könnte denken: $p > 0$ enthält mehr Information als $p = 1$, weil $p > 0$ (trotz der Einschränkung $p \leq 1$) doch einen viel größeren Zahlenbereich abdeckt als $p = 1$, das nur genau *einen* Wert umfasst. Aber dies ist ein Irrtum: Je weniger Möglichkeiten eine Relation oder Variable umfasst, desto höher der *Informationsgehalt*. Somit besitzt $p > 0$ wesentlich *weniger* Informationsgehalt als $p = 1$, ist in $p = 1$ bereits enthalten: $p = 1 \Rightarrow p > 0$.

Ein zweites Beispiel: $p(X \to Y) = 7/10 \wedge p(Y) = 5/10 \Rightarrow p(X \to Y \longrightarrow Y) = 8/10$

Wie in 2-3-1-2 gezeigt, lässt sich dieser Schluss *berechnen* nach der allgemeinen Gleichung:

$$p(X \to Y) = r/n \wedge p(Y) = s/n \Rightarrow p(X \to Y \longrightarrow Y) = 1 - r/n + s/n.$$

Als Formel (mit den Beispielwerten) ergibt sich hier:

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 7/10 \quad \wedge \quad \frac{a+c}{a+b+c+d} = 5/10 \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 8/10$$

Als *Gesamt-Information* aus den beiden Prämissen ergibt sich: $a + c = 5$, $b = 3$, $d = 2$. Als *Teil-Information* ist ableitbar: $a + b + c = 8$, $a + b + c + d = 10$, also die Werte der Konklusion.

Machen wir die Gegenprobe: Welche Informationen enthält die Konklusion?

$a + b + c = 8$, $d = 2$. Wir können aber nicht ableiten: $a + c = 5$ und $b = 3$.

Zwar müssen wir, um die Wahrheit dieses Schlusses zu *berechnen*, *mathematische Operationen* wie *Addition* und *Subtraktion* verwenden. Aber der Schluss selbst enthält keinen besonderen mathematischen Faktor, sondern er beinhaltet nur das *logische Prinzip*, dass die Teil-Information in der Gesamt-Information enthalten ist, man somit von der Gesamt-Information sicher auf die Teil-Information schließen kann. Somit ist der analytische Implikator $\Rightarrow$ in allen 3 Fällen berechtigt.

2-3-1-5 PROBLEME QUANTITATIVER SCHLÜSSE

Warum gibt es Probleme bei der Aufstellung von *quantitativen* Schlüssen und insbesondere ihrer Wahrheitstafeln, Probleme, die bei *qualitativen* Schlüssen bzw. Wahrheitstafeln nicht entstehen? Wir haben schon einige Punkte angesprochen und fassen sie abschließend noch einmal systematisch zusammen:

• Numerische Variablen

Beim *qualitativen* Schluss wie z. B. $X \Rightarrow X \vee Y$ haben wir es mit *Konstanten* zu tun, er steht für $p(X) = 1 \Rightarrow p(X \vee Y) = 1$. Bei *quantitativen* Schlüssen arbeitet man mit *numerischen Variablen* wie z. B. bei $p(X) = r/n \longrightarrow p(X \vee Y) = s/n$.

• Probleme der Negation

Ein wichtigeres, zentrales Problem ist die *Negation*. Während die Negation von X, nämlich $\neg X$, genau bestimmt ist (quantitativ p = 0), bleibt die Negation einer *numerischen Variable* $p(X) \neq r/n$ völlig unbestimmt (abgesehen von den Einschränkungen $0 \leq r/n \leq 1$). Aber auch wenn man ein konkretes Beispiel nimmt, z. B. $p(X) \neq 3/5$, ist der Wert unbestimmt.

• Implikation

Es wurde schon mehrfach, auch im Bereich der *qualitativen* Aussagen-Logik, darauf hingewiesen, dass die Deutung der Implikation $\Phi \rightarrow \Psi$ prinzipiell *problematisch* ist, weil die nämlich auch als gültig angesehen wird, wenn das Vorderglied Φ ungültig ist bzw. wenn beide Glieder Φ, Ψ ungültig sind. Im *quantitativen* Bereich ist die normale Implikation aber (bei negativem Vorderglied) normalerweise unangebracht, unsinnig oder gar falsch. Man kann die Implikation im *quantitativen* Bereich normalerweise nur mit einer gewissen Berechtigung verwenden, wenn man konsequent und vollständig auf eine konditionale *Wenn-dann-Deutung* verzichtet und $\Phi \rightarrow \Psi$ ausschließlich im Sinne des äquivalenten $\neg(\Phi \wedge \neg\Psi)$ deutet. Nur, das entspricht nicht der üblichen oder wenigstens überwiegenden und wesentlichsten Deutung der Implikation.

• Positiv-Implikation

Von daher dürfte es ggf. sinnvoller sein, bei quantitativen Schlüssen die *Positiv-Implikation* Φ $*\!\!\rightarrow \Psi$ zu verwenden. Diese ist ja nur definiert, wenn das Vorderglied bzw. der Vordersatz *gültig* (+) ist, somit treten die Probleme eines negativen Vordergliedes gar nicht auf.

• Wahrheitstafel

Bei quantitativen Schlüssen (Relationen) lassen sich nur eingeschränkt Wahrheitstafeln verwenden bzw. gelten nicht alle logischen Gesetze. Also: Die Wahrheitstafel funktioniert hier nicht, oder allgemeiner: Der *wahrheitswert-funktionale* Ansatz funktioniert nur eingeschränkt bei quantitativen Sätzen bzw. Schlüssen. Die große und wichtige Ausnahme sind die Schlüsse der *quantitativen Aussagen-Logik*, bei der nur mit den Werten p = 1 und p = 0 gearbeitet wird; diese bietet dieselben Möglichkeiten wie die *qualitative Aussagen-Logik.* Generell kann man allerdings auch in Frage stellen, ob man bei einem *quantitativen Schluss* überhaupt eine *Wahrheitstafel* benötigt. Das zweiwertige + und − der Wahrheitstafel ist hier eigentlich in einer *quantitativen Funktion* aufgelöst. Man fragt hier nicht: Wenn Φ gültig ist, ist dann auch Ψ gültig? Sondern: Wenn Φ den Wert r/n hat, welchen Wert hat dann Ψ?

Fazit: Die Wahrheitstafel ist bei *quantitativen* – semi-analytischen oder analytischen – *Schlüssen* nur partiell verwendbar; dasselbe gilt *generell* für semi-analytische / analytische Relationen. Allerdings gibt es bei bestimmten Schlüssen die Möglichkeit, den *Wert der Konklusion* aus den Prämissen zu *berechnen*. Fassen wir die unübersichtliche Situation noch einmal zusammen, unter Einbeziehung synthetischer Relationen (mit Beispielen):

1) *synthetische* Relationen

- 1fache Quantität: $p(X \rightarrow Y) = r/n$. Keine Wahrheitstafel und keine Berechnung möglich.
- 2fache Quantität: $p(X) = r/n \rightarrow p(Y) = s/n$. Wahrheitstafel möglich, mathematisch sinnlos.

2) semi-analytische Relationen

- 1fache Quantität: p((X → Y) ⟶ Y) = m/n. Wahrheitstafel geht nicht, aber Berechnung.
- 2fache Quantität: p(X → Y) = r/n ⟶ p(Y) = s/n. Wahrheitstafel bedingt möglich.

(Das Entsprechende gilt für *streng* analytische Relationen bzw. Schlüsse.)

2-3-2 Implikation

2-3-2-1 DEFINITION

Ich werde im Folgenden wieder verschiedene implikative Beziehungen untersuchen: primär die *Implikation*, aber auch *Replikation* und *Äquivalenz*. Es geht hier – im analytischen Kapitel – um *semi-analytische*, *tautologische* und *kontradiktorische* Relationen.

2-3-2-2 SEMI-ANALYTISCHE RELATIONEN

Ich nehme bei den *semi-analytischen* Relationen zur besseren Vergleichbarkeit immer eine Relation zwischen X → Y und X ∨ Y, also: R(X → Y, X ∨ Y).

- Implikation

	X	→	Y	⟶	X	∨	Y
a	+	+	+	+	+	+	+
b	+	–	–	+	+	+	–
b	–	+	+	+	–	+	+
d	–	+	–	–	–	–	–

Hier ergibt sich als *Gesamtformel*: p(X → Y ⟶ X ∨ Y) = p(X ∨ Y) = $\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$

- Replikation

X	→	Y	⟵	X	∨	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	–	–	–	+	+	–
–	+	+	+	–	+	+
–	+	–	+	–	–	–

p(X → Y ⟵ X ∨ Y) = p(X → Y) = $\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$

- Äquivalenz

p(X → Y ⟷ X ∨ Y) = p(Y) = $\frac{a+c}{a+b+c+d}$

2-3-2-3 TAUTOLOGIE

Ich habe oben einen *semi-analytischen* Schluss genauer untersucht. Zum Vergleich sei jetzt ein echter, *tautologischer* Schluss herangezogen: X ∧ Y ⇒ Y

Die Wahrheitstafel lautet:

X	$\wedge$	Y	$\Rightarrow$	Y
+	+	+	+	+
+	−	−	+	−
−	−	+	+	+
−	−	−	+	−

Die Formel für die gesamte Relation lautet: p(X $\wedge$ Y $\Rightarrow$ Y) = $\dfrac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$

Dies zeigt, dass gelten muss: p(X $\wedge$ Y $\Rightarrow$ Y) = 1

Und für jede Tautologie (mit 2 Variablen) gilt: p(Tautologie) = $\dfrac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$

2-3-2-4 KONTRADIKTION

Jetzt zur kontradiktorischen Implikation, z. B. $(X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$.
Die (vereinfachte) Wahrheitstafel lautet:

$(X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X)$	$\not\Rightarrow$	$(X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$
+	−	−
+	−	−
+	−	−
+	−	−

Daraus ergibt sich folgende Formel:

$$p((X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)) = \frac{0}{a+b+c+d} = 0$$

2-3-2-5 DREI VARIABLEN

Ich gehe hier von 3 Variablen X, Y, Z aus.

Als Beispiel eine *semi-analytische* Implikation: X $\vee$ Y $\vee$ Z $\longrightarrow$ X $\wedge$ Y $\wedge$ Z.
Für X $\vee$ Y $\vee$ Z kann man auch schreiben: $\vee$(X, Y, Z), also den Relator $\vee$ *vorgestellt*.
In der Wahrheitstafel unten verwende ich zur besseren Übersicht auch die folgende Schreibweise (X, Y, Z)$\vee$, also den Relator $\vee$ *nachgestellt*.

	(X	Y	Z)	$\vee$	$\longrightarrow$	$\wedge$	(X	Y	Z)
a_1	+	+	+	+	+	+	+	+	+
a_2	+	+	–	+	–	–	+	+	–
b_1	+	–	+	+	–	–	+	–	+
b_2	+	–	–	+	–	–	+	–	–
c_1	–	+	+	+	–	–	–	+	+
c_2	–	+	–	+	–	–	–	+	–
d_1	–	–	+	+	–	–	–	–	+
d_2	–	–	–	–	+	–	–	–	–

Die semi-analytische Relation $X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z$ ist *analytisch äquivalent* der synthetischen *Äquivalenz* $X \leftrightarrow Y \leftrightarrow Z$; die ist eben nur gültig, wenn entweder *alle* Variablen, X, Y, Z gültig sind (1. Zeile) oder *alle* ungültig sind (letzte Zeile).

$$(X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z) \Leftrightarrow (X \leftrightarrow Y \leftrightarrow Z)$$

Als quantitative *Gesamtformel* ergibt sich:

$$p(X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z) = \frac{a_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Und zwar gilt für die einzelnen Relationen:

$$p(X \vee Y \vee Z) = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

$$p(X \wedge Y \wedge Z) = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Dreht man die eben genannte *semi-analytische* Relation um, so erhält man eine *streng analytische* Relation, eine Tautologie: $X \wedge Y \wedge Z \Rightarrow X \vee Y \vee Z$

Die Gesamtformel hierfür lautet:

$$p(X \wedge Y \wedge Z \Rightarrow X \vee Y \vee Z) = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}$$

Somit gilt: $p(X \wedge Y \wedge Z \Rightarrow X \vee Y \vee Z) = 1$

2-3-3 Positiv-Implikation

Bei der Positiv-Implikation beschränke ich mich auf die *implikative* Betrachtung, d. h. bei einem Schluss $\Phi \ast\!\!\Rightarrow \Psi$ untersuche ich nur den Aspekt, inwieweit Ψ aus Φ folgt.

Ich gebe dabei immer die *qualitative* Struktur an, die *quantitative* Struktur und die *mathematische* Formel. Allerdings ist die qualitative Struktur nicht mit der quantitativen genau identisch, die qualitative Struktur gibt nur die Basis; genau entsprechende qualitative und quantitative Schlüsse werden im nächsten Punkt über *quantitative Aussagen-Logik* behandelt, in der nämlich nur mit Werten von $p = 1$ und $p = 0$ gearbeitet wird.

Bei den unten gezeigten Schlüssen kommt als *synthetischer* Schluss immer die Positiv-Implikation $X \ast\!\!\rightarrow Y$ vor. Als *analytischen* Zentral-Relator kann man normalerweise sowohl $\Rightarrow$ oder $\ast\!\!\Rightarrow$ verwenden. Ein Kriterium ist, ob die *Kontraposition* gilt, also:

$$(\Phi \Rightarrow \Psi) \Leftrightarrow (\neg\Psi \Rightarrow \neg\Phi)$$

Denn bei der *normalen Implikation* gilt die Kontraposition, bei der *Positiv-Implikation* aber nicht. Ursprünglich ist die Kontraposition zwar nur auf die qualitative Aussagen-Logik bezogen, aber man kann sie auch in der quantitativen Logik verwenden. Und zwar benötigt man dabei vor allem folgende (allerdings nicht unproblematische) *Negationen*:

Position	Negation
$p(\Phi) \leq r/n$	$\neg[p(\Phi) \leq r/n] \Leftrightarrow p(\Phi) > r/n$
$p(\Phi) \geq r/n$	$\neg[p(\Phi) \geq r/n] \Leftrightarrow p(\Phi) < r/n$
$p(\Phi) = r/n$	$\neg[p(\Phi) = r/n] \Leftrightarrow p(\Phi) \neq r/n$

2-3-3-1 MODUS PONENS

 qualitativ: $(X *\!\rightarrow Y) \wedge X \;*\!\Rightarrow\; Y$

 quantitativ: $p(X *\!\rightarrow Y) = r/n \;\wedge\; p(X) = 1 \;*\!\Rightarrow\; p(Y) = r/n$

 Bruch: $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{r}{n} \;\wedge\; \dfrac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \;*\!\Rightarrow\; \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n}$

Erläuterung:

- erster Bruch (bzw. erste Prämisse): daraus ergibt sich: a = r, a + b = n.
- zweiter Bruch: aus dem ergibt sich: a + b > 0, c + d = 0
- abgeleiteter dritter Bruch (bzw. Konklusion): im Zähler steht noch a, im Nenner noch a + b, somit wie im ersten Bruch: p = r/n (wobei auch möglich ist, dass r = 0)

Voraussetzung für einen solchen Schluss ist, dass p(X) = 1 (jedenfalls, wenn die genauen Werte von a, b, c und d nicht bekannt sind).

2-3-3-2 SCHLUSS VON DER POSITIV-IMPLIKATION AUF DIE IMPLIKATION

 qualitativ: $(X *\!\rightarrow Y) *\!\Rightarrow (X \rightarrow Y)$

 quantitativ: $p(X *\!\rightarrow Y) = r/n \;*\!\Rightarrow\; p(X \rightarrow Y) \geq r/n$

 Bruch : $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{r}{n} \;*\!\Rightarrow\; \dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} \geq \dfrac{r}{n}$

In dem Ausnahmefall, dass b = 0, ist sowohl $p(X *\!\rightarrow Y) = 1$ wie $p(X \rightarrow Y) = 1$.
Es handelt sich hier um den deterministischen Fall (Voraussetzung a > 0).
Wenn dagegen b > 0, sind haben beide Brüche einen Wert p < 1.

Man kann auch folgende Formel verwenden: $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{r}{n} \;*\!\Rightarrow\; \dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = \dfrac{s}{m}$

Dabei gilt: s ≥ r, m ≥ n. Es ergeben sich also folgende Lösungen für den zweiten Bruch:

$$s/m = \frac{r}{n}, \frac{r+1}{n+1}, \frac{r+2}{n+2}, \ldots$$

Erläuterung an einem *Zahlenbeispiel*:

- erster Bruch: $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{4}{5}$ a = 4, b = 1
- Zweiter Bruch: $\dfrac{4+c+d}{4+1+c+d} = \dfrac{s}{m}$ s ≥ 4, m ≥ 5

Konkret ergeben sich folgende mögliche Werte:

c + d	$\dfrac{4+c+d}{4+1+c+d}$	dezimal
0	4/5	0,8
1	5/6	0,83
2	6/7	0,86
.		
.		
100	104/105	0,99

Es zeigt sich: Der Wert des ersten Bruches p = 4/5 bleibt immer *kleiner* als der Wert des zweiten Bruches: 4/5, 5/6, 6/7 usw. Und der erste Bruch nähert sich zwar p = 1 beliebig an, er bleibt aber $p < 1$ (1 ist der Grenzwert).

2-3-3-3 SCHLUSS VON DER IMPLIKATION AUF DIE POSITIV-IMPLIKATION

- qualitativ: $(X \rightarrow Y) *\!\!\longrightarrow (X *\!\!\rightarrow Y)$
- quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = r/n \;\; *\!\!\Rightarrow \;\; p(X *\!\!\rightarrow Y) \leq r/n$

- Bruch: $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = \dfrac{r}{n} \quad *\!\!\Rightarrow \quad \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{s}{m}$

$s \leq r, m \leq n$
Also gilt: s = r, r – 1, r – 2, ... , r – r. Und: m = n, n – 1, n – 2, ... , (n – n) + 1
n – n = 0 ist ausgeschlossen, weil eine Division durch 0 „verboten" ist.

Hier liegt wieder der Fall vor, dass die *qualitative* Basis nur ein *partieller* Schluss ist, in der *quantitativen* Form aber ein *vollständiger* Schluss vorliegt (allerdings mit mehreren möglichen Lösungen).

Das erläutere ich an einem Beispiel:

r = 4, n = 5 $\quad p(X \rightarrow Y) = \dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = \dfrac{4}{5}$ $\quad$ Folglich b = 1

Dann gibt es folgende Möglichkeiten für $p(X *\!\!\rightarrow Y)$:

a	c + d	$\frac{a}{a+b}$	dezimal
4	0	4/5	0,8
3	1	3/4	0,75
2	2	2/3	0,67
1	3	1/2	0,5
0	4	0/1	0

Ausgeschlossen ist eben nur: $p(X *\!\!\rightarrow Y) = 5/5 = 1$.

2-3-3-4 SCHLUSS VON DER POSITIV-IMPLIKATION AUF DIE KONJUNKTION

- qualitativ: $(X \rightarrow Y) \;\; *\!\!\longrightarrow (X \wedge Y)$
- quantitativ: $p(X *\!\!\rightarrow Y) = r/n \;\; *\!\!\Rightarrow \;\; p(X \wedge Y) \leq r/n$

- Bruch: $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{r}{n} \quad *\!\!\Rightarrow \quad \dfrac{a}{a+b+c+d} \leq \dfrac{r}{n}$

$c + d = 0 \;\Rightarrow\; p(X *\!\!\rightarrow Y) = p(X \wedge Y)$

Hier liegt ein Sonderfall vor, weil der Zähler gleich ist (a), nur der Nenner verschieden. Für den gilt: $a + b \leq a + b + c + d$

2-3-3-5 ÄQUIVALENZ

□ qualitativ: $(X *\rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg(X *\rightarrow \neg Y)$

□ quantitativ: $p(X *\rightarrow Y) = r/n \Leftrightarrow p(X *\rightarrow \neg Y) = 1 - r/n$

□ Bruch: $\frac{a}{a+b} = \frac{r}{n} \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 1 - \frac{r}{n}$

Voraussetzung: a + b > 0. Oder: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$

(Dies wird noch genau diskutiert werden: Existenz-Modell vs. Nicht-Existenz-Modell)

2-3-4 Systematik

In diesem Punkt „Systematik“ behandle ich nur – strenge und partielle – *Schlüsse*. Dabei verwende ich überwiegend die *normale Implikation*. Allerdings wäre (als Zentral-Relator) auch die *Positiv-Implikation* einzusetzen, dies wäre normalerweise sogar unproblematischer.

Die generelle Form einer *streng analytischen* Relation ist: $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) = s/n$
Bzw. werden im Allgemeinen *Ungleichungen* statt Gleichungen verwendet:

$p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n$ bzw. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n$ u. a.

Die generelle Form einer *partiell analytischen* Relation ist: $p(\Phi) = r/n \longrightarrow p(\Psi) = s/n$
Dabei gilt wie schon ausgeführt: n = 1, 2, ... r = 0, 1, ... , n s = 0, 1, ... , n.

Somit: p/maximum = n/n = 1, p/minimum = 0/n = 0. Also $0 \leq p \leq 1$.

Ich unterscheide im Folgenden:

- qualitativ und quantitativ strenger Schluss
- qualitativ partieller, quantitativ strenger Schluss
- quantitativ partieller Schluss

2-3-4-1 QUALITATIV UND QUANTITATIV STRENGER SCHLUSS

Damit ist gemeint: Die *qualitative*, aussagen-logische *Basis* ist ein *strenger* Schluss, und auch der *quantitative* Schluss ist *streng* analytisch. Allerdings ergibt sich in der quantitativen Form keine eindeutige Lösung. Sondern man kann ein nur *Lösungs-Intervall* (bzw. eine *Ungleichung*) oder eine Disjunktion angeben.

Z. B.: $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) = r/n \vee (r+1)/n \vee (r+2)/n \vee \ldots \vee n/n$

Man könnte natürlich bezweifeln, ob man hier zu Recht von einem *strengen* Schluss spricht, aber in der Aussagen-Logik gilt ja entsprechend $\Phi \Rightarrow \Psi_1 \vee \Psi_2 \vee \ldots \vee \Psi_n$ auch als strenger Schluss.

• *Beispiel: Abtrennungsregel* (*Simplifikationsregel*)

□ qualitativ: $X \wedge Y \Rightarrow Y$

□ quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$

□ Bruch: (1) $\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \geq \frac{r}{n}$

Kurz-Erläuterung: Wenn c = 0 haben beide Brüche den gleichen Wert. Wenn c > 0, hat der zweite Bruch einen höheren Wert.

Aus der Formel ergibt sich zwar, dass auch der zweite Bruch n als Nenner hat. Um dies aber *explizit* zu machen, könnte man schreiben:

(2) $$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{s}{n} \qquad s \geq r$$

Es wäre auch folgende einfache Form möglich, eine *(Un-)Gleichung* anstatt einer Implikation:

(3) $$\frac{a}{a+b+c+d} \leq \frac{a+c}{a+b+c+d}$$

Bei der Ungleichung ergeben sich folgende (n – r +1) Lösungen:

s = r, r + 1, …, n Also: p(Y) = r/n, (r + 1)/n, ... , n/n

Wählt man einen *bestimmten* Wert für p(Y), dann kann man nur einen semi-analytischen Schluss angeben, z. B.: p(X ∧ Y) = r/n ⟶ p(Y) = (r+2)/n

Zur Veranschaulichung ein Beispiel mit Zahlen:

r = 5, n = 8

p(X ∧ Y) = 5/8 ⇒ p(Y) ≥ 5/8

Also: p(Y) = 5/8, 6/8, 7/8, 8/8. W.: p(Y) = 5/8 ∨ 6/8 ∨ 7/8 ∨ 8/8

• *Beispiel: Modus ponens*

□ qualitativ: (X → Y) ∧ X ⇒ Y

□ quantitativ: p(X → Y) = r/n ∧ p(X) = 1 ⇒ p(Y) = r/n

□ Bruch: $$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \wedge \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n}$$

Erläuterung:

Aus dem ersten Bruch ergibt sich: a + c + d = r

Aus dem zweiten Bruch ergibt sich: c + d = 0

Also ergibt sich für den abgeleiteten dritten Bruch ebenfalls der Wert p = r/n.

Der Schluss gilt aber nur streng, wenn p(X) = 1.

2-3-4-2 QUALITATIV PARTIELLER, QUANTITATIV STRENGER SCHLUSS

Dies muss erläutert werden. Es gibt Schlüsse, die in ihrer *qualitativen* aussagen-logischen Form (also mit implizitem p = 1 oder p = 0) nur *partiell* gültig sind, in der quantitativen Form aber *vollständig*, z. B.: (X ∨ Y) ⟶ Y.

(X	∨	Y)	⟶	Y
+	+	+	+	+
+	+	–	–	–
–	+	+	+	+
–	–	–	+	–

Ein solcher Schluss hat – quantifiziert – die Struktur: p = r/n ⇒ p ≤ r/n. Es handelt sich also um einen vollständigen Schluss (auch wenn es eben keine eindeutige Lösung gibt).

Zur Erklärung: (X ∨ Y) ⟶ Y ist die *Umkehrung* des strengen Schlusses: Y ⇒ (X ∨ Y).

Somit p(X ∨ Y) = r/n ⇒ p(Y) ≤ r/n die Umkehrung von p(Y) = r/n ⇒ p(X ∨ Y) ≥ r/n.

Eine Merkregel ist:

qualitativ *strenger* Schluss: quantitativ $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n$

qualitativ *partieller* Schluss: quantitativ $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n$

Es gibt allerdings auch andere Strukturen (vgl. unten).

• Beispiel: *Disjunktive Abschwächung*: $(X \vee Y) \longrightarrow Y$ (vgl. oben)

- qualitativ: $(X \vee Y) \longrightarrow Y$
- quantitativ: $p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$
- Bruch: $\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \leq \frac{r}{n}$

Für $q(Y) = s$ ergibt sich: $s = r, r-1, ..., r-r$

Für $p(Y) = s/n$ ergibt sich: $\frac{r}{n}, \frac{r-1}{n}, ..., \frac{r-r}{n}$

Ein numerisches Beispiel: $r = 4$, $n = 6$

$p(X \vee Y) = 4/6 \Rightarrow p(Y) \leq 4/6$

Es gilt: $p(Y) = 4/6, 3/6, 2/6, 1/6, 0/6$

2-3-4-3 QUANTITATIV PARTIELLER SCHLUSS

Bei einer semi-analytischen Implikation liegt wie erläutert nur eine *partielle logische Folge,* ein partieller Schluss vor, zur Symbolisierung verwende ich den *langen* Pfeil $\longrightarrow$.

• *Qualitative Basis: strenger Schluss*

Ich greife hier zurück auf den oben genannten Schluss (Abtrennungsregel):

$p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) = \geq r/n$

Seine qualitative Struktur (Basis) ist ein *vollständiger* Schluss, nämlich:

$X \wedge Y \Rightarrow Y$

Als quantitatives Beispiel hatte ich angegeben:

$p(X \wedge Y) = 5/8 \Rightarrow p(Y) = \geq 5/8$

Es gibt also folgende Lösungen der Gleichung:

$p = 5/8, p = 6/8, p = 7/8, p = 8/8$

Angenommen, man gibt folgenden Schluss an:

$p(X \wedge Y) = 5/8 \longrightarrow p(Y) = 7/8$

Man könnte dafür auch allgemein schreiben: $p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = r/n + 2/n$

Herkömmlicherweise würde man sagen: Das ist ein *Fehlschluss*. Aber dies wäre inadäquat, denn p = 7/8 ist ja eine *mögliche* Lösung. Man sollte daher von einem ‘partiellen Schluss’ sprechen. Ich werde im 4. Kapitel zeigen, wie man solche Schlüsse quantitativ bestimmen kann.

• *Qualitative Basis: Partieller Schluss*

Ich greife hier zurück auf den oben genannten Schluss:

$p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n$

Seine qualitative Struktur (Basis) ist ein *partieller* Schluss, nämlich:

$X \vee Y \longrightarrow Y$

Als quantitatives Beispiel hatte ich angegeben

$p(X \vee Y) = 4/6 \Rightarrow p(Y) \leq 4/6$

Es gilt: p(Y) = 4/6, 3/6, 2/6, 1/6, 0/6
Angenommen ich nehme den Schluss:

$$p(X \vee Y) = 4/6 \longrightarrow p(Y) = 2/6$$

Auch hier liegt ein *partieller* Schluss vor. Denn 2/6 ist nur eine *mögliche* Lösung, aber keine *sichere* Lösung.

2-3-4-4 ÜBERSICHT

Ich habe bisher 4 *Ungleichungen* zur Berechnung von p(Ψ) aus p(Φ) entwickelt:

1. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n$
2. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n$
3. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq (n-r)/n$
4. $p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq (n-r)/n$

Zusammenfassend gebe ich einige Beispiele für diese Ungleichungen.

1. <u>$p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \leq r/n$</u>
Schlüsse, die aussagen-logisch, qualitativ, nur *semi-analytisch* sind, aber *Umkehrungen* von vollständigen Schlüssen darstellen. Hier gilt: Die gültigen Welten der Konklusion (z. B. a und c) sind eine Teilmenge der gültigen Welten der Prämisse (z. B. a, b und c).

- $X \vee Y \longrightarrow Y$ (Umkehrschluss: $X \vee Y \Leftarrow Y$)

$$p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \leq r/n \qquad \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \leq r/n$$

- $X \vee Y \longrightarrow X \wedge Y$ (Umkehrschluss: $X \vee Y \Leftarrow X \wedge Y$)

$$p(X \vee Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n \qquad \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d} \leq r/n$$

2. <u>$p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq r/n$</u>
Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *streng* analytisch sind. Die gültigen Welten der Prämisse sind eine Teilmenge der gültigen Welten der Konklusion.

- $Y \Rightarrow X \vee Y$

$$p(Y) = r/n \Rightarrow p(X \vee Y) \geq r/n \qquad \frac{a+c}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \geq r/n$$

- $X \wedge Y \Rightarrow X \vee Y$

$$p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(X \vee Y) \geq r/n \qquad \frac{a}{a+b+c+d} = r/n \Rightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c+d} \geq r/n$$

3. <u>$p(\Phi) = r/n \Rightarrow p(\Psi) \geq (n-r)/n$</u>
Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *partiell analytisch* sind. Dabei schneiden sich die Mengen der gültigen Welten von Prämisse und Konklusion.

- $(X \rightarrow Y) \longrightarrow (X \leftarrow Y)$

$$p(X \rightarrow Y) = r/n \Rightarrow p(X \leftarrow Y) \geq (n-r)/n$$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+b+d}{a+b+c+d} \geq \frac{n-r}{n}$$

• (X → Y) ⟶ (¬Y)

p(X → Y) = r/n ⇒ p(¬Y) ≥ (n – r)/n

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{b+d}{a+b+c+d} \geq \frac{n-r}{n}$$

4. <u>p(Φ) = r/n ⇒ p(Ψ) ≤ (n – r)/n</u>
Schlüsse, die aussagen-logisch (qualitativ) *partiell analytisch* sind. Dabei sind Prämisse und Konklusion in keiner Welt gemeinsam gültig.

• (X ∧ Y) ⟶ (X ∇ Y)

p(X ∧ Y) = r/n ⇒ p(X ∇ Y) ≤ (n – r)/n

$$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{d}{a+b+c+d} \leq \frac{n-r}{n}$$

Neben den *Ungleichungen* (bzw. Schlüssen mit Ungleichungen) kann man auch *Gleichungen* verwenden:

• bei Negationen
• bei Schlüssen mit 2 oder mehr Prämissen

1. *Negation*
p(Φ) = r/n ⇔ p(Ψ) = 1 – r/n
p(Φ) = 1 – p(Ψ) bzw. p(Ψ) = 1 – p(Φ) bzw. p(Φ) + p(Ψ) = 1

Beispiel beliebig, etwa: p(X → Y) = r/n ⇔ p(¬(X → Y)) = 1 – r/n.

2. *Addition*
$p(\Phi_1) + p(\Phi_2) = p(\Psi)$
Beispiel: p(X ∧ Y) + p(X ∇ Y) = p(X ↔ Y)

$$\frac{a}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

Allgemein: $p(\Phi_1) + p(\Phi_2) + ... + p(\Phi_n) = p(\Psi)$
Beispiel: p(X ∧ Y) + p(X –< Y) + p(X ∇ Y) = p(X → Y)

$$\frac{a}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+c+d}{a+b+c+d}$$

2-3-4-5 PSEUDO-SCHLÜSSE

Ich habe oben verschiedene Strukturen zur Berechnung von Schlüssen „p(Ψ) folgt aus p(Φ)“ vorgestellt, zur Wiederholung:

$p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \geq r/n$
$p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \leq r/n$
$p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \geq (n - r)/n$
$p(\Phi) = r/n \;\Rightarrow\; p(\Psi) \leq (n - r)/n$
$p(\Phi) = r/n \;\Leftrightarrow\; p(\neg\Phi) = 1 - r/n$

Ob damit *alle* möglichen Schluss-Typen (mit zwei Variablen) erfasst sind, muss noch weiter untersucht werden. In manchen Fällen ist aber *gar kein Schluss* möglich, weil die Relationen *vollständig unabhängig* voneinander sind. Man kann von *Pseudoschlüssen* sprechen.

Wir müssen also genau unterscheiden:

- strenger Schluss $\Rightarrow$
- partieller Schluss $\longrightarrow$
- kontradiktorische Implikation $\not\Rightarrow$
- kein Schluss/Pseudoschluss $\dashrightarrow$

Im Folgenden soll der Pseudoschluss $p(X \rfloor Y) = r/n \dashrightarrow p(X \lfloor Y) = s/n$ analysiert werden.

$$p(X \rfloor Y) = \frac{a+b}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \qquad\qquad p(X \lfloor Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{s}{n}$$

Die Frage lautet genau: Lässt sich von $p(X \rfloor Y)$ auf $p(X \lfloor Y)$ schließen? Liegt ein Pseudoschluss vor? Ich gehe im Beispiel von n = 3 aus.

$\frac{a+b}{a+b+c+d}$	a + b	c + d	a + c	b + d	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$
3/3	3	0	3	0	3/3
			2	1	2/3
			1	2	1/3
			0	3	0/3
2/3	2	1	3	0	3/3
			2	1	2/3
			1	2	1/3
			0	3	0/3
1/3	1	2	3	0	3/3
			2	1	2/3
			1	0	1/3
			0	3	0/3
0/3	0	3	3	0	3/3
			2	1	2/3
			1	2	1/3
			0	3	0/3

Wie man sieht, ist hier bei *jedem* vorgegebenen Wert von $p(X \rfloor Y)$ *jeder* Wert von $p(X \lfloor Y)$ möglich. Es gibt also keinen echten Schluss von $p(X \rfloor Y)$ auf $p(X \lfloor Y)$, sondern nur *Pseudoschlüsse* (die man allerdings auch zu den semi-analytische Schlüssen zählen kann).

Zwar kann man scheinbar strenge Schlüsse aufstellen wie:

$p(X \rfloor Y) = 0/3 \;\Rightarrow\; p(X \lfloor Y) = 3/3 \vee 2/3 \vee 1/3 \vee 0/3$

Dass hier das Zeichen für den strengen Schluss $\Rightarrow$ verwendet wird, darf jedoch nicht irritieren. Wenn auf die Disjunktion *aller* möglichen Werte geschlossen wird, muss $\Rightarrow$ gelten. Das sagt keinesfalls, dass p(X $\lfloor$ Y) aus p(X $\rfloor$ Y) abzuleiten ist. Wenn man weiß, welchen Wert p(X $\lfloor$ Y) besitzt, hat man damit noch *keine* Information über den Wert von p(X $\rfloor$ Y).

Umgekehrt, als Replikation, gibt es auch nur Pseudoschlüsse von p(X $\lfloor$ Y) auf p(X $\rfloor$ Y). Das überrascht nicht, wenn man bedenkt: p(X $\rfloor$ Y) = p(X) und p(X $\lfloor$ Y) = p(Y). Zwischen p(X) und p(Y) kann nur ein *synthetisches* Verhältnis bestehen, entsprechend werden in der Wahrheitstafel alle möglichen Kombinationen von X und Y aufgeführt. Somit besteht quasi zwischen p(X $\rfloor$ Y) auf p(X $\lfloor$ Y) auch ein synthetisches Verhältnis

Im Kapitel 4 über die *Meta-Werte analytischer Relationen* werde ich allerdings zeigen, dass auch Pseudoschlüsse unterschiedlich bewertet werden können, indem man ihnen unterschiedliche *theoretische Wahrscheinlichkeiten* zuweist.

2-3-5 Erweiterungen

2-3-5-1 STECKBRIEF

Zur Übersichtlichkeit soll nachfolgend quasi der *Steckbrief* eines Schlusses dargestellt werden: und zwar von der *Abtrennungsregel* $X \wedge Y \Rightarrow Y$.

2-3-5-2 STRENGER SCHLUSS

- qualitativ: $X \wedge Y \Rightarrow Y$
- quantitativ: $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$

- Formel: $$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \geq \frac{r}{n}$$

Beispiel:

- quantitativ: $p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow p(Y) \geq 3/5$

- Formel: $$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} \geq \frac{3}{5}$$

2-3-5-3 UMKEHRUNG

Als quantitativen *Umkehr-Schluss* bezeichne ich einen Schluss mit Ungleichungen, bei dem die Glieder vertauscht werden.

- quantitativ: $p(Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n$

- Formel: $$\frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{r}{n} \Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d} \leq \frac{r}{n}$$

Der Umkehr-Schluss ist äquivalent mit dem Ausgangs-Schluss:

$$[p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) = \geq r/n] \Leftrightarrow [p(Y) = r/n \Rightarrow p(X \wedge Y) \leq r/n]$$

2-3-5-4 KONTRAPOSITION

Der *Umkehr-Schluss* darf nicht mit der *Kontraposition* verwechselt werden. Die Kontraposition lautet:

- qualitativ: $\neg(X \wedge Y) \Leftarrow \neg Y$
- quantitativ: $p(X \wedge Y) < r/n \Leftarrow p(Y) < r/n$

- Formel: $\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{r}{n} \Leftarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} < \frac{r}{n}$

Die direkte Verneinung von $p(\Phi) = r/n$ ist allerdings $p(\Phi) \neq r/n$. Konkret: Die direkte Verneinung von $p(X \wedge Y) = r/n$ ist $p(X \wedge Y) \neq r/n$, nicht $p(X \wedge Y) < r/n$. Doch hierbei ist der Schluss nicht zwingend, denn $p(X \wedge Y) \neq r/n$ könnte auch bedeuten: $p(X \wedge Y) > r/n$, und dann erhielte man nur einen *semi-analytischen* Schluss.

Nur wenn man wie folgt bestimmt: $p(\Phi) \neq r/n$ ist äquivalent $p(\Phi) < r/n$, erhält man einen *strengen* Schluss.

$p(X \wedge Y) < r/n \Leftarrow p(Y) < r/n$

2-3-5-5 SEMI-ANALYTISCHE SCHLÜSSE

Wenn gilt $p(X \wedge Y) = r/n \Rightarrow p(Y) \geq r/n$, dann gibt es folgende *semi-analytische* Schlüsse:

$p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = r/n$
$p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = (r+1)/n$
……………………………………..
$p(X \wedge Y) = r/n \longrightarrow p(Y) = n/n$

Wir hatten als Beispiel gewählt: $p(X \wedge Y) = 3/5 \Rightarrow p(Y) = \geq 3/5$.
Dann ergeben sich als semi-analytische Schlüsse:

$p(X \wedge Y) = 3/5 \longrightarrow p(Y) = 3/5$ $p(X \wedge Y) = 3/5 \longrightarrow p(Y) = 4/5$
$p(X \wedge Y) = 3/5 \longrightarrow p(Y) = 5/5$

Diese Schlüsse sind alle *möglich* (semi-analytisch), aber *nicht notwendig*.

2 – 4 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK

2-4-1 Einführung

2-4-1-1 QUANTITATIVE AUSSAGEN-LOGIK
Ich darf noch einmal daran erinnern: *Quantitative Aussagen-Logik* (bzw. quantifizierte Aussagen-Logik) bedeutet, man arbeitet nur mit den Werten p = 1 und p = 0. Denn diese Werte sind *implizit* in aussagen-logischen Relationen enthalten. Durch die Quantifizierung kann man aussagen-logische Relationen präziser darstellen und besser prüfen.

Wir können unterscheiden zwischen:

- Position (positiv, bejaht, belegt)
- Negation (negativ, verneint, nicht belegt)

Zur Wiederholung erläutere ich die Quantifizierung aussagen-logischer *synthetischer* Relationen, am Beispiel der *Implikation* bzw. ihrer *Negation*:

1. positiv: X → Y   p(X → Y) = 1 $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$

2. negativ: ¬(X → Y)   p(X → Y) = 0 $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$

2-4-1-2 GANZHEITLICHE FORMEL
Ich habe in 2-3-1-1 beschrieben, wie man eine *ganzheitliche Formel* aus der Wahrheitstafel entwickelt.

Nehmen wir als Beispiel wieder den semi-analytischen Schluss: X → Y ⟶ Y.
Der Wahrheitsverlauf + + + – entspricht der Definition der *Disjunktion*: X ∨ Y.

• *Position*
Quantitativ schreibt man für X → Y ⟶ Y:

p(X → Y ⟶ Y) = 1. Als Formel: $\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1$

• *Negation*
¬(X → Y ⟶ Y) hat den umgekehrten Wahrheitsverlauf, also unter dem Negationszeichen steht – – – +. Das entspricht der *synthetischen* Relation X ∇ Y.
Quantitativ schreibt man für ¬(X → Y ⟶ Y):

p(X → Y ⟶ Y) = 0. Als Formel: $\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 0$

2-4-1-3 KOMBINIERTE FORMEL

Normalerweise berechnet man aber den Wert von $p((X \to Y) \longrightarrow Y)$, indem man von den Werten der beiden *Einzelkomponenten* $p(X \to Y)$ und $p(Y)$ ausgeht. Und zwar gilt entsprechend den Wahrheitstafeln:

$$p(X \to Y) = \frac{a+c+d}{a+b+c+d} \qquad p(Y) = \frac{a+c}{a+b+c+d}$$

Bei der *quantifizierten Aussagen-Logik* kommen aber nur die Werte p = 1 und p = 0 (bei Negation) vor. Wir müssen hier also für alle Relationen p = 1 einsetzen.

$p(X \to Y)$	$p(Y)$	$p(X \to Y \longrightarrow Y)$
$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$	$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$
1	1	1

• $p(X \to Y) = 1$: daraus folgt: b = 0 • $p(Y) = 1$: daraus folgt zusätzlich d = 0

• $p(X \to Y \longrightarrow Y)$: Hier ergibt sich dann: $\frac{a+c}{a+c} = 1$

Man kann konstatieren:

$$p(X \to Y) = 1 \;\wedge\; p(Y) = 1 \;\Rightarrow\; p((X \to Y) \longrightarrow Y) = 1$$

2-4-1-4 QUANTITATIVE WAHRHEITS-TAFEL

Um *alle* Möglichkeiten darzustellen, kann man (wie erläutert) eine *quantitative* Wahrheitstafel verwenden. Dabei greifen wir zur besseren Verständlichkeit zunächst auf die normale, *qualitative* Wahrheitstafel zurück, am Beispiel der Relation: $(X \to Y) \longrightarrow Y$

Wir knüpfen hier an folgender Form der Wahrheitstafel an (wobei nur die wichtigsten Wahrheitsverläufe angegeben sind):

	$(X \to Y)$	Y	$(X \to Y) \longrightarrow Y$
2.	+	+	+
2.	–	–	+
3.	+	+	+
4.	+	–	–

Die primäre – nämlich *konjunktive* – Deutung der Wahrheitstafel verdeutlicht die aus der obigen Form abgeleitete *konjunktive Wahrheitstafel,* mit den entsprechenden Relationen.

	$(X \to Y)$	$\wedge$ Y	$\Rightarrow$ $(X \to Y) \longrightarrow Y$	
1.	+	+	+	$(X \to Y) \wedge Y \Rightarrow (X \to Y) \longrightarrow Y$
2.	–	–	+	$\neg(X \to Y) \wedge \neg Y \Rightarrow (X \to Y) \longrightarrow Y$
3.	+	+	+	$(X \to Y) \wedge Y \Rightarrow (X \to Y) \longrightarrow Y$
4.	+	–	–	$(X \to Y) \wedge \neg Y \Rightarrow \neg((X \to Y) \longrightarrow Y)$

Konjunktive Wahrheitstafel bedeutet: Prämisse und Konklusion werden als *Konjunktion* gefasst, aus der auf die Gesamtrelation geschlossen wird.

Kommen wir nun zur Wahrheitstafel der *quantitativen Aussagen-Logik*. Hier gilt:
Wo + in der qualitativen Wahrheitstafel steht, wird 1 eingesetzt, wo – steht, wird 0 eingesetzt. Das sind *konkrete Zahlenwerte*, nicht nur Symbole für + und –.

	$p(X \rightarrow Y)$	$\wedge$	$p(Y)$	$\Rightarrow$	$p(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a+c}{a+b+c+d}$		$\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$
1)	1		1		1
2)	0		0		1
3)	1		1		1
4)	1		0		0

Den 1) Fall haben wir in 2-4-1-3 geprüft, der 3) Fall entspricht dem 1) Fall.

$$p(X \rightarrow Y) = 1 \wedge p(Y) = 1 \Rightarrow p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = 1$$

Der 2) Fall besagt: $p(X \rightarrow Y) = 0 \wedge p(Y) = 0 \Rightarrow p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = 1$
Aus $p(X \rightarrow Y) = 0$ ergibt sich: $a + c + d = 0$, somit ist auch $p(Y) = a + c = 0$.
Da $a + b + c + d > 0$, muss also $b > 0$ sein. Somit auch $a + b + c > 0$.
Es resultiert: $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = b/b = 1$. Korrekt.

Der 4) Fall besagt: $p(X \rightarrow Y) = 1 \wedge p(Y) = 0 \Rightarrow p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = 0$
Aus $p(X \rightarrow Y) = 1$ ergibt sich: $b = 0$, $a + c + d > 0$.
Aus $p(Y) = 0$ ergibt sich: $a + c = 0$. Somit $a + b + c = 0$, $d > 0$.
Daraus folgt für $p(X \rightarrow Y \longrightarrow Y) = 0$, denn sein Zähler ist: $a + b + c = 0$. Korrekt.

Allerdings kann man diese Fälle auch leichter berechnen, nach der in 2-3-1-3 genannten Formel: $p(\neg(X \rightarrow Y)) + p(Y) = p((X \rightarrow Y) \longrightarrow Y)$.
Dabei muss man berücksichtigen, dass gilt: $p(\neg(X \rightarrow Y)) = 1 - p(X \rightarrow Y)$.
Bei der quantitativen Aussagen-Logik bedeutet das: $p(\neg(X \rightarrow Y)) = 1 \Leftrightarrow p(X \rightarrow Y) = 0$.
Somit ergibt sich:
1) Fall: $0 + 1 = 1$ 2) Fall: $1 + 0 = 1$ 3) Fall: $0 + 1 = 1$ 4) Fall: $0 + 0 = 0$

Hier zeigt sich: Es gibt einen wesentlichen Unterschied zwischen der allgemeinen *quantitativen Logik* und der *quantitativen Aussagen-Logik*. Bei der allgemeinen Quantitäts-Logik gilt die Wahrheitstafel nur in eng begrenztem Ausmaß, bei der quantitativen Aussagen-Logik gilt die quantitative Wahrheitstafel dagegen perfekt.

2-4-1-5 IMPLIKATIVE FORMEL

Es ist noch eine weitere Wahrheitstafel möglich, allerdings nur bei implikativen Beziehungen: die schon eingeführte *implikative Wahrheitstafel*. Gehen wir noch einmal vom Beispiel $(X \rightarrow Y) \longrightarrow Y$ aus, mit der Wahrheitstafel in der üblichsten Form:

	$(X \to Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	+ + +	+	+
2.	+ – –	+	–
3.	– + +	+	+
4.	– + –	–	–

Als *implikative Wahrheitstafel* war hier eingeführt worden:

Imp	$(X \to Y)$	$\longrightarrow$	Y
1.	+ + +	±	+
2.	+ – –	+	–
3.	– + +	±	+
4.	– + –	±	–

Quantitativ ergibt sich folgende Struktur:

$$p(X \to Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$$

Das soll nun in einer *quantitativen* Wahrheitstafel darstellgestellt werden. Diese implikative Wahrheitstafel ist allerdings ganz anders zu interpretieren als die normale bzw. konjunktive Wahrheitstafel.

Die *normale* Wahrheitstafel für $p(X \to Y \longrightarrow Y)$ informiert z. B. (siehe oben):
Wenn $p(X \to Y) = 1$ und $p(Y) = 1$, dann ist auch $p(X \to Y \longrightarrow Y) = 1$.

Die *implikative* Wahrheitstafel für $p(X \to Y \longrightarrow Y)$ informiert dagegen z. B.:
Wenn $p(X \to Y) = 1$ (oder 0), ist $p(Y) = 1$ (oder 0).
Und zwar kann dies gelten:

- *notwendig* (+): $\Phi \Rightarrow \Psi$
- *unmöglich* (–) $\neg(\Phi \Rightarrow \Psi)$ oder indirekt auch $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$
- *möglich* (±) $\Phi \longrightarrow \Psi$

	$p(X \to Y)$	$\longrightarrow$	$p(Y)$
	$\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$		$\frac{a+c}{a+b+c+d}$
1)	1	±	1
2)	0	+	0
3)	1	±	1
4)	1	±	0

1) Fall
$p(X \to Y) = 1$ bedeutet: $a + c + d > 0$, $b = 0$
$p(Y) = 1$, wenn $a + c > 0$ und $b + d = 0$.
$p(Y) = 1$ ist also mit $p(X \to Y) = 1$ *verträglich*, folgt aber *nicht notwendig* daraus. Denn es könnte auch gelten: $a + c = 0$, $d > 0$.
2) Fall
Dies ist der einzige notwendige Fall: Denn $p(X \to Y) = 0$ bedeutet: $a + c + d = 0$, $b > 0$.

Somit muss auch a + c = 0 sein und damit p(Y) = 0.
3) Fall: Der ist gleich dem 1) Fall.
4) Fall
Hier gilt Entsprechendes zum 1) Fall: p(Y) = 0 ist also mit p(X → Y) = 1 verträglich, folgt aber nicht notwendig daraus.

Diese Resultate der Wahrheitstafel überraschen nicht, denn es gilt:

- semi-analytischer Schluss: $p(X \to Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$
- aber strenger Schluss: $p(X \to Y) = 0 \Rightarrow p(Y) = 0$
- und *Kontraposition*: $p(X \to Y) = 1 \Leftarrow p(Y) = 1$

2-4-2 Implikation

2-4-2-1 DEFINITION

Ich werde hier keine streng allgemeine Darstellung vornehmen, sondern nur Beispiele geben; und zwar nehme ich bei den semi-analytischen Relationen zur besseren Vergleichbarkeit immer R(X → Y, X ∨ Y). Hier geht es nur um die speziellen Fälle, dass p = 1 (oder p = 0).

	X	→	Y	⟶	X	∨	Y
a	+	+	+	+	+	+	+
b	+	–	–	+	+	+	–
b	–	+	+	+	–	+	+
d	–	+	–	–	–	–	–

$$p(X \to Y \longrightarrow X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow p(X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1$$

2-4-2-2 REPLIKATION

X	→	Y	⟵	X	∨	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	–	–	–	+	+	–
–	+	+	+	–	+	+
–	+	–	+	–	–	–

$$p(X \to Y \longleftarrow X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow p(X \to Y) = 1 \Leftrightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

2-4-2-3 ÄQUIVALENZ

X	→	Y	⟷	X	∨	Y
+	+	+	+	+	+	+
+	–	–	–	+	+	–
–	+	+	+	–	+	+
–	+	–	–	–	–	–

$$p(X \to Y \longleftrightarrow X \vee Y) = 1 \Leftrightarrow p(Y) = 1 \Leftrightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

2-4-2-4 TAUTOLOGIE UND KONTRADIKTION

• tautologische Implikation: $\Rightarrow$

Die *tautologische* Implikation bedeutet einen besonderen Fall, sie besitzt grundsätzlich den Wert p = 1. Z. B. X $\wedge$ Y $\Rightarrow$ Y:

$$p(X \wedge Y \Rightarrow Y) = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$$

Und das gilt generell für jede Tautologie, jede Tautologie hat den Wert p = 1.

• kontradiktorische Implikation: $\not\Rightarrow$

Jetzt zur *kontradiktorischen* Implikation, z. B. $(X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)$.
Sie hat grundsätzlich den Wert p = 0. Es ergibt sich folgende Formel:

$$p((X \,{}^{+}\!\vee^{+} \neg X) \not\Rightarrow (X \,{}^{-}\!\wedge^{-} \neg X)) = \frac{0}{a+b+c+d} = 0$$

Hier gilt entsprechend: Jede Kontradiktion hat den Wert p = 0.

2-4-2-5 DREI VARIABLEN

Ich gehe hier von 3 Variablen X, Y, Z aus.

Zunächst eine *semi-analytische* Implikation: $X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z$
Als *Gesamtformel* gilt:

• Positiv: $p(X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{a_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$

• Negativ: $p(X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 0$

Jetzt eine *strenge* Implikation, als *kombinierte Formel*:
Wir nehmen den obigen semi-analytischen Schluss als Konklusion und seine Komponenten als Prämissen:

• aussagen-logische Struktur

$(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \wedge Y \wedge Z) \Rightarrow (X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z)$

• quantitativ

$[p(X \vee Y \vee Z) = 1 \wedge p(X \wedge Y \wedge Z) = 1] \Rightarrow [p(X \vee Y \vee Z \longrightarrow X \wedge Y \wedge Z) = 1]$

• Formel :

$$\frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1 \wedge \frac{a_1}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$$

Begründung: Aus der ersten und zweiten Bruch ergibt sich: nur $a_1 > 0$, alle anderen Variablen haben den Wert 0. Somit ergibt sich für den dritten Bruch: $\frac{a_1}{a_1} = 1$

Ich habe bewusst ein Beispiel genommen, bei dem die Beziehungen zwischen den Brüchen leicht zu erkennen sind, andere Brüche sind natürlich komplizierter.

2-4-3 Positiv-Implikation

2-4-3-1 ZWEI MODELLE DER POSITIV-IMPLIKATION

Diese Problematik ist schon mehrfach angesprochen worden, aber erst hier kann sie systematisch analysiert werden. Die Analyse in 2-4-3-1 ist allerdings primär für *Experten* gedacht.

Wie wir gesehen haben, gilt für den *Nenner* der *normalen* Implikation wie für alle anderen Relatoren: a + b + c + d > 0. Das erklärt sich dadurch, dass damit *alle möglichen* 4 Welten (bei 2 Variablen) angeführt sind, und in wenigstens einer Welt muss ein Wert > 0 bestehen. Anders gesagt: a > 0 ∨ b > 0 ∨ c < 0 ∨ d > 0.

Man kann darüber diskutieren, ob das eine rein *logische* oder auch *ontologische* Voraussetzung ist, aber ich sehe es als rein logische Voraussetzung. Sie entspricht nämlich dem logischen Gesetz, der Tautologie: (X ∧ Y) ∨ (X ∧ ¬Y) ∨ (¬X ∧ Y) ∨ (¬X ∧ ¬Y). Außerdem ist *mathematisch* verboten, dass der *Nenner* 0 beträgt, also durch 0 geteilt wird.

Die Frage ist nun, ob bei der Positiv-Implikation ein ähnliches Gesetz gilt. Betrachten wir die wichtigste Positiv-Implikation: X *→ Y.

Ihr entspricht die Formel $\frac{a}{a+b}$, also mit dem Nenner a + b.

Gilt hier ein entsprechendes Gesetz: a + b > 0? Offensichtlich kann man das nicht rein logisch folgern, denn es könnten ja gelten a + b = 0, wenn andererseits gilt: c + d > 0. Andererseits könnte man von der Definition der Positiv-Implikation und dem Sprachverständnis doch fordern, dass a > 0 oder b > 0. So kommen wir zu zwei Interpretationen: Existenz oder Nicht-Existenz. Existenz bzw. Nicht-Existenz bezieht sich primär auf das X in X *→ Y oder in p(X *→ Y) bzw. auf p(X) = $\frac{a+b}{a+b+c+d}$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Positiver Fall: X *→ Y

Dieser Fall ist unproblematisch, die Existenz von X wird ausgesagt.

p(X *→ Y) = 1 ⇒ p(X ∧ Y) > 0 ⇒ p(X) > 0 (anstatt ‚p' könnte man auch ‚q' schreiben)

$$\frac{a}{a+b} = 1 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a + b > 0$$

Wichtig: „X existiert" wird durch p(X) > 0 ausgesagt, man benötigt nicht das stärkere p(X) = 1, das zu vielen Einschränkungen führen würde. Entsprechend gilt aussagen-logisch auch nur semi-analytisch: (X *→ Y) ⟶ X.

2. Negativer Fall: ¬(X *→ Y) bzw. p(X *→ Y) = 0

In diesem Fall ist die Existenz von X problematisch.

• Existenz-Hypothese

$p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 0 \;\Rightarrow\; p(X \wedge \neg Y) > 0 \;\Rightarrow p(X) > 0$

$\frac{a}{a+b} = 0 \Rightarrow b > 0 \;\Rightarrow a + b > 0$ Daraus ergibt sich:

$p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 0 \;\Leftrightarrow\; p(X \ast\!\!\rightarrow \neg Y) = 1$ bzw. $\frac{a}{a+b} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 1$

In der Darstellung der aussagen-logischen, qualitativen Wahrheitstafel:

(X	*→	¬	Y)	*⇔	¬(	X	*→	Y)
+	−	−	+	□	−	+	+	+
+	+	+	−	+	+	+	−	−
−	□	−	+	□	□	−	□	+
−	□	+	−	□	□	−	□	−

• Nicht-Existenz-Hypothese

$p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 0 \;\neg\!\!\Rightarrow\; p(X \wedge \neg Y) > 0 \;\neg\!\!\Rightarrow p(X) > 0$

$\frac{a}{a+b} = 0 \;\neg\!\!\Rightarrow b > 0 \;\neg\!\!\Rightarrow a + b > 0$ Es gilt:

$p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 0 \;\Leftarrow\; p(X \ast\!\!\rightarrow \neg Y) = 1$. Aber :

$p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 0 \;\neg\!\!\Rightarrow\; p(X \ast\!\!\rightarrow \neg Y) = 1$ somit: $p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 0 \;\neg\!\!\Leftrightarrow\; p(X \ast\!\!\rightarrow \neg Y) = 1$

$\Phi \;\neg\!\!\Rightarrow\; \Psi$ ist wie beschrieben folgendermaßen zu deuten: Φ impliziert *nicht* streng Ψ. Man kann dies auch als semi-analytische Implikation schreiben: $\Phi \longrightarrow \Psi$.

Aussagen-logisch gilt $(X \ast\!\!\rightarrow \neg Y) \;\ast\!\!\Rightarrow \neg(X \ast\!\!\rightarrow Y)$. Auf eine Wahrheitstafel verzichte ich hier, die *modifizierten* Wahrheitstafeln für das Nicht-Existenz-Modell sind sehr kompliziert, sie sind ggf. meinem Buch «Integrale Logik» zu entnehmen.

Im *aussagen-logischen* Bereich (bei den Wahrheitstafeln) verwende ich auch als *Zentral-Relator* ausschließlich die *Positiv-Implikation*, weil die normale Implikation für die Zeichen ‚□' und ‚?' keine Interpretation besitzt. Im *quantitativen* Bereich verwende ich als Zentral-Relator aber vorwiegend die *Normal-Implikation*, weil dort diese Interpretationsfragen nicht auftreten und so die Darstellung übersichtlicher ist. Hier verbirgt sich ein noch nicht vollständig gelöstes Problem, inwieweit die *aussagen-logische* und die *quantitative* Darstellung der Positiv-Implikation bzw. der *Positiv-Logik* vollkommen äquivalent sind.

2-4-3-2 EXISTENZ-MODELL VERSUS NICHT-EXISTENZ-MODELL

Für welches Modell soll man sich entscheiden? Das Existenz-Modell oder das Nicht-Existenz-Modell? Diese Frage ist, wie die vorausgegangenen Analysen schon gezeigt haben, nicht leicht zu beantworten.

• Für das *Existenz-Modell* spricht (u. a.):

– es ist von den Wahrheitstafeln her plausibler

– es entspricht mehr unserem Sprachverständnis

• Für das *Nicht-Existenz-Modell* spricht (u. a.):

– es benötigt nicht die zusätzliche Annahme a + b > 0

– es ist besser kompatibel mit der normalen Logik

Ich halte letztlich die *Existenz-Interpretation* für überlegen. Ihre Wahrheitstafeln sind gut bestätigt, und ihre Übertragung in die Formeln ist unzweifelhaft. Ich will aber das Nicht-

Existenz-Modell auch nicht verwerfen. Die Lösung könnte sein, dass man *innerhalb* der Positiv-Implikation (bzw. innerhalb der *Positiv-Logik*) die Existenz-Interpretation verwendet, *außerhalb*, d. h. *in Beziehung zur normalen Implikation* bzw. normalen Logik aber die Nicht-Existenz-Implikation. Diese Lösung müsste aber noch im Einzelnen erarbeitet werden.

2-4-3-3 SCHLUSS VON DER POSITIV-IMPLIKATION AUF DIE IMPLIKATION

□ qualitativ: $(X \ast\!\!\rightarrow Y) \Rightarrow (X \rightarrow Y)$
□ quantitativ: $p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 1 \Rightarrow p(X \rightarrow Y) = 1$

□ Bruch: $\frac{a}{a+b} = 1 \Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$

Erläuterung: Aus der ersten Bruch-Gleichung ergibt sich: b = 0, a > 0. Damit ergibt sich für den abgeleiteten zweiten Bruch p = 1.

Hier stellt sich das Existenz-Problem nicht, wohl aber bei dem *semi-analytischen* Schluss von $p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 0$ auf $p(X \rightarrow Y) = 0$.

• Existenz-Modell

Voraussetzung ist hier: $(\frac{a}{a+b} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 1) \Rightarrow b > 0$

Daraus sind u. a. folgende drei Ableitungen möglich:

– semi-analytisch: $\frac{a}{a+b} = 0 \ \ast\!\!\longrightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0$ (wenn c + d = 0)

– kontradiktorisch: $\frac{a}{a+b} = 0 \ \ast\!\!\not\Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ (Widerspruch, weil b > 0)

– tautologisch: $\frac{a}{a+b} = 0 \ \ast\!\!\Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} < 1$ (folgt aus b > 0)

Eigentlich gehört dieser Schluss allerdings nicht in die quantitative Aussagen-Logik, weil dort keine Werte p < 1 definiert sind, sondern in die *quantitative Quantoren-Logik*.

• Nicht-Existenz-Modell

Hier gilt: wenn $p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 0$, kann $p(X \rightarrow Y)$ beliebige Werte annehmen:

– wenn gilt b = 0 (was ja im Nicht-Existenz-Modell möglich ist), $p(X \rightarrow Y) = 1$.

– wenn b > 0 und c + d = 0, dann $p(X \rightarrow Y) = 0$

– wenn b > 0 und c + d > 0, dann $0 < p(X \rightarrow Y) < 1$

(Aber auch dieser Schluss gehört nicht mehr zur quantitativen *Aussagen*-Logik.)

2-4-3-4 SCHLUSS VON IMPLIKATION AUF POSITIV-IMPLIKATION

□ qualitativ: $(X \rightarrow Y) \ast\!\!\longrightarrow (X \ast\!\!\rightarrow Y)$
□ quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = 1 \ \ast\!\!\longrightarrow p(X \ast\!\!\rightarrow Y) = 1$

□ Bruch: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \ \ast\!\!\longrightarrow \frac{a}{a+b} = 1$

Begründung: Aus $\frac{a+c+d}{a+b+c+d}=1$ folgt b = 0 und a + c + d > 0.

D. h. es ist auch möglich, dass a = 0, es reicht, dass c +d > 0. Dann wäre p(X *→ Y) = 0
Somit ist nur ein *semi-analytischer* Schluss möglich auf p(X *→ Y) = 1.

2-4-3-5 KONTRAPOSITION
Die Frage ist, inwieweit die Kontraposition auch für die *Positiv-Implikation* gilt, also:

(X → Y) ⇔ (¬X ←* ¬Y) ?
¬(X → Y) ⇔ ¬(¬X ←* ¬Y) ?

Im Einzelnen beinhaltete das somit vier *Implikationen*:

(X *→ Y) ⇒ (¬X ←* ¬Y)   (X *→ Y) ⇐ (¬X ←* ¬Y)
¬(X *→ Y) ⇒ ¬(¬X ←* ¬Y)   ¬(X *→ Y) ⇐ ¬(¬X ←* ¬Y)

Ich konzentriere die Analyse auf die *Implikationen*, weil die leichter zu untersuchen sind als die Äquivalenzen im Ganzen. Das Ergebnis ist aber unschwer auf die Äquivalenz zu übertragen. Und zwar untersuche ich exemplarisch die 1. Implikation, die anderen Fälle verhalten sich entsprechend.

□ qualitativ: (X *→ Y) *⟶ (¬X ←* ¬Y)
□ quantitativ: p(X *→ Y) = 1 *⟶ p(¬X ←* ¬Y) = 1

□ Bruch: $\frac{a}{a+b}=1$ *⟶ $\frac{d}{d+b}=1$

Begründung: aus $\frac{a}{a+b}=1$ folgt a > 0 und b = 0. b = 0 ist zwar eine *notwendige* Bedingung für $\frac{d}{d+b}=1$, aber keine *hinreichende*; dafür müsste auch noch gelten d > 0.

Somit ist nur ein *semi-analytischer* Schluss möglich. Und zwar gilt das gleichermaßen für das *Existenz-Modell* und das *Nicht-Existenz-Modell*, und es gilt auch für die anderen Implikationen. Fazit: Bei der Positiv-Implikation gilt die Kontraposition nicht.

2-4-4 Systematik

Bei Systematik behandele ich verschiedene Formen von *Schlüssen*. Ich nenne wieder jeweils die *qualitative* Form, die *quantitative* Form und die Form als *Bruch*. Dabei ist zu bedenken, dass grundsätzlich gilt:

a + b + c + d > 0. Also: a > 0 ∨ b > 0 ∨ c > 0 ∨ d > 0

2-4-4-1 ABTRENNUNGSREGEL
Struktur: p(Φ) = 1 ⇒ p(Ψ) = 1 / eine Prämisse

□ qualitativ: X ∧ Y ⇒ Y
□ quantitativ: p(X ∧ Y) = 1 ⇒ p(Y) = 1
□ Bruch: $\frac{a}{a+b+c+d}=1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d}=1$

Kurz-Erläuterung: Aus dem ersten Bruch ergibt sich:
a > 0, b + c + d = 0. Somit haben also alle Parameter außer a den Wert 0.
Damit ergibt sich für den abgeleiteten zweiten Bruch:

$$\frac{a}{a} = 1$$

2-4-4-2 MODUS PONENS

Struktur: p(Φ) = 1 ⇒ p(Ψ) = 1 / zwei Prämissen

- qualitativ: (X → Y) ∧ X ⇒ Y
- quantitativ: p(X → Y) = 1 ∧ p(X) = 1 ⇒ p(Y) = 1
- Bruch: $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \wedge \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Erläuterung:
Aus dem ersten Bruch ergibt sich: b = 0
Aus dem zweiten Bruch ergibt sich: c + d = 0
Also ergibt sich entsprechend wie oben für den abgeleiteten dritten Bruch der Wert p = 1.

Modus ponens mit der Positiv-Implikation
Bei der Positiv-Implikation ergibt sich ein entsprechendes Ergebnis für den Modus ponens. Dabei stellt sich das *Existenz-Problem* nicht, es wird mit dem positiven X *→ Y gearbeitet.

- qualitativ: (X *→ Y) ∧ X ⇒ Y
- quantitativ : p(X *→ Y) = 1 ∧ p(X) = 1 ⇒ p(Y) = 1
- Bruch : $\frac{a}{a+b} = 1 \wedge \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$

Erläuterung: Aus den ersten beiden Brüchen ergibt sich (entsprechend wie bei dem Beispiel mit der herkömmlichen Implikation) b + c + d = 0.
Damit ergibt sich für den abgeleiteten Bruch: p = 1. Denn:

$$\frac{a}{a} = 1$$

2-4-4-3 NULLISTISCHE SCHLÜSSE

Bei denen kommt wenigstens *ein* Wert p = 0 vor, z. B. Struktur: p(Φ) = 1 ⇒ p(Ψ) = 0

- qualitativ: X ∧ Y ⇒ ¬(X >< Y)
- quantitativ: p(X ∧ Y) = 1 ⇒ p(X >< Y) = 0
- Bruch: $\frac{a}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{b+d}{a+b+c+d} = 0$

Erläuterung: Aus dem ersten Bruch folgt: b + c + d = 0
Folglich muss der abgeleitete zweite Bruch den Wert 0 haben.

2-4-4-4 SEMI-ANALYTISCHE SCHLÜSSE

Bei einer semi-analytischen Implikation liegt nur eine *partielle logische Folge* vor.

Ich beschränke mich hier auf *ein* Beispiel mit dem Schluss:

$p(\Phi) = 1 \longrightarrow p(\Psi) = 1$. Und zwar konkret: $p(X \vee Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$

□ qualitativ: $(X \vee Y) \longrightarrow Y$

□ quantitativ : $p(X \vee Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$

□ Bruch: $$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = 1 \longrightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

Erläuterung:

Aus dem ersten Bruch folgt: $a + b + c > 0$, $d = 0$. Was lässt sich daraus für den zweiten Bruch ableiten? Betrachten wir drei Möglichkeiten:

$a + c = 0$, $b > 0$: Hier hat der zweite Bruch den Wert $p = 0$.

$a + c > 0$, $b = 0$: Hier hat der zweite Bruch den Wert $p = 1$.

$a + c > 0$, $b > 0$. Hier hat der zweite Bruch, je nach dem Verhältnis von a + c zu b, beliebige Werte zwischen 0 und 1.

Es hat also den Anschein, als könne man aus dem ersten Bruch jeden möglichen Wert des zweiten Bruchs ableiten (und damit umgekehrt gar nichts). Es wäre kein partiell-analytischer Schluss gegeben, sondern überhaupt kein Schluss (bzw. ein *Pseudoschluss*).

Um dieses Ergebnis zu prüfen, setze ich konkrete Zahlen in die Gleichungen ein.

$$\frac{a+b+c}{a+b+c+d} = \frac{4}{4} \longrightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{4}{4}$$

Jetzt erhalte ich aus der ersten Gleichung: $a + b + c = 4$, $d = 0$.

Nun ergeben sich folgende Möglichkeiten:

a + c	b	$\frac{a+c}{a+b+c+d}$
4	0	4/4
3	1	3/4
2	2	2/4
1	3	1/4
0	4	0/4

In diesem Beispiel gibt es also nicht mehr wie im obigen abstrakten Fall *unendlich viele* Lösungen, sondern nur 5 Lösungen für den zweiten Bruch. Allerdings kann der Bruch auch in diesem konkreten Fall Werte von 0 bis 1 annehmen. Wie aber noch gezeigt wird, haben diese Werte unterschiedliche *theoretische Wahrscheinlichkeiten*. Jedenfalls gilt, dass bei Einsatz konkreter Zahlen ein *partieller* Schluss der Form $p(X \vee Y) = 1 \longrightarrow p(Y) = 1$ möglich ist.

2-4-4-5 ANDERE BERECHNUNGSMETHODEN

Ich habe bisher die Schlüsse berechnet, indem ich die *Prämissen analysiert* habe. Gerade bei Schlüssen mit *mehreren* Prämissen ergeben sich aber auch noch andere Methoden. Ich will die wichtigsten Methoden kurz vorstellen, anhand des *Modus ponens*:

$p(X \rightarrow Y) = 1 \ \wedge p(X) = 1 \ \Rightarrow \ p(Y) = 1$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \ \wedge \ \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \ \Rightarrow \ \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

- Prämissen *getrennt analysieren* (bisherige Methode)

$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ Daraus erhält man: b = 0

$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$ Daraus erhält man: c + d = 0

Aus beiden Brüchen zusammen erhält man: b + c + d = 0
Nun gilt: a + b + c + d > 0. Somit a > 0.

Also gilt für die Konklusion: $\frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{a}{a} = 1$

- Prämissen *gleichsetzen* und einen Ausdruck analysieren

$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = \frac{a+b}{a+b+c+d}$ Daraus folgt: a + c + d = a + b. Somit b = c + d.

$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ Daraus erhält man: b = 0

Aus beiden Zeilen zusammen erhält man: b + c + d = 0

Dann weiter wie oben.

- Prämissen *addieren* oder *subtrahieren* und den daraus resultierenden neuen Ausdruck analysieren

Aus $\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1$ und $\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$ erhält man durch *Addition*:

$\frac{a+c+d+a+b}{a+b+c+d} = 2$ Daraus: $\frac{2a+b+c+d}{a+b+c+d} = 2$

Man *subtrahiert* davon 1 bzw. $\frac{a+b+c+d}{a+b+c+d}$

$$\frac{2a+b+c+d}{a+b+c+d} - \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = \frac{a}{a+b+c+d} = 1$$

Aus $\frac{a}{a+b+c+d} = 1$ erhält man: b + c + d = 0.

Dann weiter wie oben.

Je nach zu analysierendem Schluss sind nicht immer alle o. g. Verfahren anzuwenden.

2-4-5 Erweiterungen

Ich habe verschiedene Strukturen von *quantitativen aussagen-logischen* Schlüssen vorgestellt:

$p(\Phi) = 1 \Rightarrow p(\Psi) = 1$
$p(\Phi) = 1 \Rightarrow p(\Psi) = 0$
$p(\Phi) = 0 \Rightarrow p(\Psi) = 1$
$p(\Phi) = 0 \Rightarrow p(\Psi) = 0$

Eine vollständige Erfassung aller möglichen Strukturen steht hier noch aus.

2-4-5-1 STECKBRIEF EINES SCHLUSSES

Zur Übersichtlichkeit soll im Folgenden abschließend der *Steckbrief* eines Schlusses dargestellt werden. Und zwar von der *Abtrennungsregel*: $X \wedge Y \Rightarrow Y$.

2-4-5-2 STRENGER SCHLUSS

□ qualitativ: $X \wedge Y \Rightarrow Y$
□ quantitativ: $p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1$

□ Formel: $$\frac{a}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

Beispiel:
□ quantitativ: $p(X \wedge Y) = 5/5 \Rightarrow p(Y) = 5/5$

□ Formel: $$\frac{a}{a+b+c+d} = \frac{5}{5} \Rightarrow \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{5}{5}$$

2-4-5-3 UMKEHRUNG

Als quantitativen *Umkehr-Schluss* bezeichne ich in der deterministischen Aussagen-Logik einen Schluss mit doppelter Verneinung:
□ quantitativ: $p(\neg(X \wedge Y)) = 0 \Rightarrow p(\neg Y)) = 0$

□ Formel: $$\frac{b+c+d}{a+b+c+d} = 0 \Rightarrow \frac{b+d}{a+b+c+d} = 0$$

Der Umkehr-Schluss ist äquivalent dem Ausgangs-Schluss:
$[p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1] \Leftrightarrow [p(\neg(X \wedge Y)) = 0 \Rightarrow p(\neg(X \wedge Y)) = 0]$

2-4-5-4 KONTRAPOSITION

Der *Umkehr-Schluss* darf nicht mit der *Kontraposition* verwechselt werden. Die Kontraposition lautet:

- qualitativ: $\neg(X \wedge Y) \Leftarrow \neg Y$
- quantitativ: $p(X \wedge Y) = 0 \Leftarrow p(Y) = 0$
- Formel: $\dfrac{a}{a+b+c+d} = 0 \Leftarrow \dfrac{a+c}{a+b+c+d} = 0$

Auch die Kontraposition ist *äquivalent* dem Ausgangs-Schluss:

$$[p(X \wedge Y) = 1 \Rightarrow p(Y) = 1] \Leftrightarrow [p(X \wedge Y) = 0 \Leftarrow p(Y) = 0]$$

2-4-5-5 SEMI-ANALYTISCHE SCHLÜSSE

Wenn gilt: $p(X \wedge Y) = 1$, dann ergibt sich ein strenger Schluss für $p(Y)$, nämlich $p(Y) = 1$. Wenn aber $p(X \wedge Y) = 0$, dann gibt es nur folgende *semi-analytische* Schlüsse:

$$p(X \wedge Y) = 0 \longrightarrow p(Y) = 0$$
$$p(X \wedge Y) = 0 \longrightarrow p(Y) = 1$$

Man kann allerdings fragen, ob das noch echte Schlüsse sind, denn wenn $p(X \wedge Y) = 0$, ist eben gar nichts Sicheres über $p(Y)$ abzuleiten.

2 – 5 QUANTITATIVE QUANTOREN-LOGIK

2-5-1 Einführung

2-5-1-1 FORMULIERUNGEN
Hier sollen zunächst die quantoren-logischen Grundstrukturen dargestellt werden. Ich werde zur besseren Veranschaulichung neben die *quantitative* Form auch die normale *quantoren-logische* Form stellen. Im Einzelnen geht es um 8 Möglichkeiten: Dabei bestehen folgende analytische Äquivalenzen (in normaler Sprache und formal):

• Alle ⇔ nicht einige nicht	• Alle nicht ⇔ nicht einige
$\Lambda \Leftrightarrow \neg V \neg$	$\Lambda\neg \Leftrightarrow \neg V$
$p(X) = 1 \Leftrightarrow p(\neg X) = 0$	$p(X) = 0 \Leftrightarrow p(\neg X) = 1$
• Nicht alle ⇔ einige nicht	• Nicht alle nicht ⇔ einige
$\neg\Lambda \Leftrightarrow V\neg$	$\neg\Lambda\neg \Leftrightarrow V$
$p(X) < 1 \Leftrightarrow p(\neg X) > 0$	$p(\neg X) < 1 \Leftrightarrow p(X) > 0$

Negationen
Es gilt, verschiedene *Negationen* von Λ bzw. $p = 1$ zu unterscheiden:

kontradiktorische Verneinung	$\neg\Lambda$	$p < 1$
konträre Verneinung	$\Lambda\neg$	$p = 0$
doppelte Verneinung	$\neg\Lambda\neg$	$p > 0$

Die doppelte Verneinung ist allerdings keine echte Verneinung, denn: $\Lambda \Rightarrow \neg\Lambda\neg$.
Es stehen sich also folgende Größen *kontradiktorisch* gegenüber:

Λ: $p = 1$ >< $\neg\Lambda$: $p < 1$
$\Lambda\neg$: $p = 0$ >< $\neg\Lambda\neg$: $p > 0$

Ähnliches gilt für „einige“, also V bzw. $p > 0$.

Wichtig ist hier, den Unterschied zur *Aussagen-Logik* zu sehen: aussagen-logisch gibt es (im strengen Sinn) nur *eine* Verneinung.

	Position	Negation 1	Negation 2
Aussagen-Logik	$X \to Y$	$\neg(X \to Y)$	
Quantoren-Logik	$\Lambda(X \to Y)$	$\Lambda\neg(X \to Y)$	$\neg\Lambda(X \to Y)$
Quantitativ	$p(X \to Y) = 1$	$p(X \to Y) = 0$	$p(X \to Y) < 1$

Dabei gilt aber, wie schon in 1-5-1-5 erläutert: Innerhalb der – quantitativen – *Aussagen-Logik* ist $p(X \to Y) = 0$ *kontradiktorische* Negation von $p(X \to Y) = 1$. Innerhalb der – quantitativen – *Quantoren-Logik* ist aber $p(X \to Y) = 0$ *konträre* Negation von $p(X \to Y) = 1$, denn die kontradiktorische Negation ist hier $p(X \to Y) < 1$.

2-5-1-2 QUANTOREN-LOGIK VERSUS AUSSAGEN-LOGIK

Ich habe schon grundsätzlich dargelegt, dass man die Quantoren-Logik als eine *Erweiterung* der Aussagen-Logik verstehen kann. Insofern gilt:

- alle Gesetze der Aussagen-Logik gelten auch in der Quantoren-Logik
- es gibt spezifische Gesetze der Quantoren-Logik, die in der Aussagen-Logik nicht darstellbar sind (dies sind genau die, welche den Partikulär-Quantor verwenden)

Anbei ein Beispiel für die Darstellung eines Gesetzes in aussagen-logischer und quantoren-logischer Form, z. B.:

aussagen-logisch:	$X \wedge Y \Rightarrow Y$
quantoren-logisch:	$\Lambda x(Fx \wedge Gx) \Rightarrow \Lambda x(Gx)$
quantoren-logisch quantifiziert:	$p(Fx \wedge Gx) = 1 \Rightarrow p(Gx) = 1$

2-5-1-3 LOGISCHES QUADRAT

Die wichtigsten analytischen *klassen-logischen* Relationen behandelt das sogenannte *logische Quadrat*, das in einer normalen quantoren-logischen Form schon eingeführt wurde.

alle p = 1	$^+|^+$	alle¬ p = 0
$\Downarrow$	$^+{>}{<}^+$	$\Downarrow$
einige p > 0	$^+\vee^+$	einige¬ p < 1

Das Zeichen $^+{>}{<}^+$ in der Mitte bezieht sich auf *beide* Diagonalen:

1. alle $^+{>}{<}^+$ einige¬ 2. alle¬ $^+{>}{<}^+$ einige

2-5-1-4 EINFACHE RELATIONEN

Einfache Relationen sind solche mit *einer* Prädikat-Variablen wie $\Lambda x(Fx)$ im Gegensatz zu *komplexen* Relationen mit zwei oder mehr Prädikat-Variablen wie $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$. Man kann sie quantitativ mit *Individuenvariable* x und *Prädikatvariable* F schreiben, z. B. $p(Fx) = 1$. Übersichtlicher ist aber, sie nur mit der *neutralen* Variable X zu schreiben: $p(X) = 1$.

Die logischen Verbindungen zwischen den Quantoren lassen sich für einfache Sätze bzw. Relationen unproblematisch im *logischen Quadrat* darstellen.

Aus Platzgründen wird das „Quadrat" oft nur als *Rechteck* dargestellt, so auch bei mir an vielen Stellen in diesem Buch.

$p(X) = 1$	$^+|^+$	$p(X) = 0$
$\Downarrow$	$^+{>}{<}^+$	$\Downarrow$
$p(X) > 0$	$^+\vee^+$	$p(X) < 1$

Anstelle $p(X) = 0$ könnte man auch $p(\neg X) = 1$ schreiben u. ä., das würde der quantorenlogischen Grundform $\Lambda\neg(X)$ mehr entsprechen. In der quantitativen Form ist aber die obige Darstellung am übersichtlichsten.

Durch Verwendung einer spezifischen *Individuen-Konstante* x_i sind z.B. folgende Schlüsse möglich: $p(Fx) = 1 \Rightarrow Fx_i$. Das ist wie folgt zu deuten: „Wenn alle x die Eigenschaft F haben, dann hat auch ein beliebiges x die Eigenschaft F“. Ähnlich z. B. $Fx_i \Rightarrow p(Fx) > 0$. Man könnte auch $p(Fx_i) = 1$ statt Fx_i schreiben, dies wäre aber zu interpretieren (vgl. 1-4-5-3).

Außerdem sind von Bedeutung:
analytische Relationen zwischen *relativen* Häufigkeiten (p) und *absoluten* Häufigkeiten (q):

- $p(X) = 1 \Rightarrow q(X) > 0$ (es gilt auch: $\Leftrightarrow$) Oder: $p(X) = 1 \Rightarrow q(X) \geq 1$
  Wenn alle Objekte X sind, dann gibt es mehr als 0 Objekte (bzw. mindestens 1 Objekt), die X sind. Die 1 hat bei p natürlich eine ganz andere Bedeutung als bei q, bei p steht sie für 100%, bei q für genau *ein* Objekt. Zur Unterscheidung könnte man bei p immer *dezimal* 1,00 bzw. 0,00 schreiben, was aber eher unübersichtlich sein dürfte.
  Es gilt auch die Kontraposition: $q(X) = 0 \Rightarrow p(X) < 1$.
- $p(X) > 0 \Rightarrow q(X) > 0$ oder : $p(X) > 0 \Rightarrow q(X) \geq 1$
  Kontraposition: $q(X) = 0 \Rightarrow p(X) = 0$
- $p(X) = 0 \Rightarrow q(X) = 0$
  Kontraposition: $q(X) > 0 \Rightarrow p(X) > 0$. Dies ist korrekt, wenn allerdings p z. B. nur 1/1000000 beträgt (also q = 1), kann man auch sagen: $p \approx 0$.
- $p(X) < 1$
  Aus $p(X) < 1$ lässt sich nichts über q(X) ableiten. q(X) kann 0 sein, 1 oder beliebig groß. Es muss nur gewährleistet sein, dass $q(X) < [q(X) + q(\neg X)]$.

2-5-1-5 WAHRHEITS-TAFELN

In der *Aussagen-Logik* kann die Gültigkeit einer Relation durch die *Wahrheitstafeln* überprüfen. Dabei ergibt sich die Gültigkeit der Gesamt-Relation aus der Gültigkeit der Einzel-Relationen bzw. Einzelfaktoren. In der *Quantoren-Logik* ist das schwieriger. Es gibt verschiedene Möglichkeiten (siehe genauer in 2-2-1-5).

- *Strenger (analytischer) Schluss*

Als Beispiel wähle ich wieder $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ bzw. $p(X) = 1 \Rightarrow p(X) > 0$. Für den Schluss $\Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$ verwendete ich – analog zur Aussagen-Logik – folgende Wahrheitstafel:

$\Lambda x(Fx)$	$\Rightarrow$	$Vx(Fx)$
+	+	+
−	+	+
−	+	+
−	+	−

Es geht nun darum, das + und das − unter den Quantoren präzise zu bestimmen.

In der *quantitativen* Quantoren-Logik stehen + und − in der Wahrheitstafel nämlich nicht wie bei der Aussagen-Logik einfach für „ja“ (bzw. p = 1) und „nein“ (bzw. p = 0), sondern sie müssen folgendermaßen gedeutet werden:

$\Lambda x(Fx)$	$Vx(Fx)$
+: $p = 1$	+: $p > 0$
−: $p < 1$	−: $p = 0$

Somit ergibt sich folgende quantitativ-quantoren-logische (normale) Wahrheitstafel:

p(X) = 1	⇒	p(X) > 0
$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$		$\frac{a+b}{a+b+c+d} > 0$
+ (p = 1)	+	+ (p > 0)
− (p < 1)	+	+ (p > 0)
− (p < 1)	+	+ (p > 0)
− (p < 1)	+	− (p = 0)

Daraus ergeben sich folgende Einzel-Relationen bei einer *konjunktiven* Interpretation:

[p(X) = 1 ∧ p(X) > 0] ⇒ [p(X) = 1 ⇒ p(X) > 0]
[p(X) < 1 ∧ p(X) > 0] ⇒ [p(X) = 1 ⇒ p(X) > 0]
[p(X) < 1 ∧ p(X) > 0] ⇒ [p(X) = 1 ⇒ p(X) > 0]
[p(X) < 1 ∧ p(X) = 0] ⇒ [p(X) = 1 ⇒ p(X) > 0]

Diese Relationen müssen alle *Tautologien* sein, weil p(X) = 1 ⇒ p(X) > 0 ja eine Tautologie ist und jeder Schluss auf eine Tautologie seinerseits eine Tautologie ist: Φ ⇒ Tautologie.

• Semi-analytischer Schluss
Hier wähle ich Vx(Fx) ⟶ Λx(Fx) bzw. p(X) > 0 ⟶ p(X) = 1. Die quantitative Tafel:

Vx(Fx)	⟶	Λx(Fx)
$\frac{a+b}{a+b+c+d} > 0$		$\frac{a+b}{a+b+c+d} = 1$
+ (p > 0)	+	+ (p = 1)
+ (p > 0)	−	− (p < 1)
+ (p > 0)	−	− (p < 1)
− (p = 0)	+	− (p < 1)

2-5-2 Implikation

2-5-2-1 TAUTOLOGIE
Typische *quantitative quantoren-logische* Schlüsse sind solche, bei denen die Werte p < 1 und p < 0 vorkommen. Denn Schlüsse nur mit p = 1 oder p = 0 können bereits in der *quantitati-*

ven Aussagen-Logik dargestellt werden. Ich wähle hier nur spezifisch quantoren-logische (quantitative) Schlüsse wie:

• $p < 1 \Rightarrow p < 1$ • $p < 1 \Rightarrow p > 0$ • $p > 0 \Rightarrow p > 0$ • $p = 1 \Rightarrow p > 0$

• *Eine* Prämisse: Beispiel: $\neg\Lambda x(Gx) \Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \wedge Gx)$

□ quantoren-logisch: $\neg\Lambda(Y) \Rightarrow \neg\Lambda(X \wedge Y)$

□ quantitativ: $p(Y) < 1 \Rightarrow p(X \wedge Y) < 1$

□ Bruch: $\dfrac{a+c}{a+b+c+d} < 1 \Rightarrow \dfrac{a}{a+b+c+d} < 1$

Kurz-Erläuterung: Aus dem ersten Bruch ergibt sich: $b + d > 0$. Damit muss aber auch der abgeleitete Bruch den Wert $p < 1$ haben.

• *Zwei* Prämissen. Beispiel analog Modus ponens: $Vx(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) \Rightarrow Vx(Gx)$

□ quantoren-logisch: $V(X \rightarrow Y) \wedge \Lambda(X) \Rightarrow V(Y)$

□ quantitativ: $p(X \rightarrow Y) > 0 \wedge p(X) = 1 \Rightarrow p(Y) > 0$

□ Bruch: $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0 \wedge \dfrac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \Rightarrow \dfrac{a+c}{a+b+c+d} > 0$

Erläuterung:
Aus dem ersten Bruch ergibt sich: $a + c + d > 0$. Aus dem zweiten Bruch ergibt sich: $c + d = 0$
Somit ergibt sich aus beiden Brüchen zusammen: $a > 0$.
Also ergibt sich für den abgeleiteten dritten Bruch der Wert $p > 0$.

• *Zwei* Prämissen. Beispiel analog Modus ponens: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge Vx(Fx) \Rightarrow Vx(Gx)$

□ quantoren-logisch: $\Lambda(X \rightarrow Y) \wedge V(X) \Rightarrow V(Y)$

□ quantitativ: $p(X \rightarrow Y) = 1 \wedge p(X) > 0 \Rightarrow p(Y) > 0$

□ Bruch: $\dfrac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \wedge \dfrac{a+b}{a+b+c+d} > 0 \Rightarrow \dfrac{a+c}{a+b+c+d} > 0$

Erläuterung:
Aus dem ersten Bruch ergibt sich: $a + c + d > 0$, $b = 0$.
Aus dem zweiten Bruch ergibt sich u. a.: $a + b > 0$
Somit ergibt sich aus beiden Brüchen zusammen: $a > 0$.
Also ergibt sich für den abgeleiteten dritten Bruch der Wert $p > 0$.

2-5-2-2 KONTRADIKTION

Hier sei daran erinnert, dass die Implikation nur kontradiktorisch ist, wenn von einer Tautologie auf eine Kontradiktion geschlossen wird: also Tautologie $\not\Rightarrow$ Kontradiktion

Als Beispiel: $p(X \,^{+}\!\vee^{+} \neg X) = 1 \not\Rightarrow p(Y \,^{-}\!\wedge^{-} \neg Y) > 0$.

Es wurde schon darauf hingewiesen, dass es *logisch falsche Folgen* gibt, die aber bei Verwendung der normalen Implikation nicht *kontradiktorisch* sind. Hier verwendet man i. allg. am besten: $\Rightarrow \neg$

Als Beispiel: $p(X) = 1 \Rightarrow \neg[p(X) < 1]$. Nun gilt aber laut quantoren-logischer Definition:

$\neg[p(X) < 1] \Leftrightarrow p(X) = 1$. Somit gilt auch die *Äquivalenz*.

2-5-2-3 SEMI-ANALYTISCH

Z. B.: $p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0$

Als wesentliche Gesetze der traditionellen Quantoren-Logik gelten:

alle $\Rightarrow$ einige und alle$\neg$ $\Rightarrow$ einige$\neg$

In der Formalisierung $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \Rightarrow Vx(Fx \rightarrow Gx)$ gilt dieses Gesetz bei der Verwendung der Implikation. Wie beschrieben, findet man aber am häufigsten in der logischen bzw. wissenschaftstheoretischen Literatur folgende Formalisierungen:

	Quantoren-logisch	Quantitativ
Alle F sind G:	$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx)$	$p(X \rightarrow Y) = 1$
Einige F sind G:	$Vx(Fx \wedge Gx)$	$p(X \wedge Y) > 0$
Alle F sind nicht G:	$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx)$	$p(X \rightarrow \neg Y) = 1$
Einige F sind nicht G:	$Vx(Fx \wedge \neg Gx)$	$p(X \wedge \neg Y) > 0$

Bei diesen Formalisierungen ist der Schluss von „alle" auf „einige" aber *nur semi-analytisch*, nicht streng analytisch. Es gilt also:

„alle $\neg\Rightarrow$ einige" bzw. „alle $\longrightarrow$ einige" (und entsprechend), konkret bedeutet das:

$\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge Gx)$ bzw. $p(X \rightarrow Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge Y) > 0$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \longrightarrow \frac{a}{a+b+c+d} > 0$$

Begründung: Aus dem ersten Bruch ergibt sich: $a + c + d > 0$. Daraus folgt aber nicht notwendig, dass $a > 0$. Es kann auch gelten $a = 0$, es reicht, dass $c + d > 0$.

Entsprechend ließe sich beweisen:

$\Lambda x(Fx \rightarrow \neg Gx) \longrightarrow Vx(Fx \wedge \neg Gx)$ bzw. $p(X \rightarrow \neg Y) = 1 \longrightarrow p(X \wedge \neg Y) > 0$

Da die Gesetze „alle $\Rightarrow$ einige" und „alle$\neg$ $\Rightarrow$ einige$\neg$„ aber wesentlich für die Bedeutung von *alle* und *einige* sind, muss man die oben genannte Interpretation von *All-Sätzen* und *Partikulär-Sätzen* als sehr problematisch einstufen, wie schon an früherer Stelle aufgezeigt.

2-5-2-4 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Replikation* gilt im Wesentlichen das für die Implikation gesagte, daher soll hier auf eine gesonderte Darstellung verzichtet werden.

Die wichtigsten quantoren-logischen *Äquivalenzen* sind die *Umformungen* von Relationen mit dem *All-Quantor* in solche mit dem *Partikulär-Quantor*. Allerdings kann man anstatt von Äquivalenzen auch von *Definitionen* ausgehen, was aber logisch kaum einen Unterschied macht, beide gelten *notwendig*, allerdings die einen *formal*, die anderen *material*.

Ich wähle hier die übliche und die vereinfachte Darstellung, also p(Fx) und p(X):

• Alle $\Leftrightarrow$ nicht einige nicht	• Alle nicht $\Leftrightarrow$ nicht einige
$p(X) = 1 \Leftrightarrow p(\neg X) = 0$	$p(X) = 0 \Leftrightarrow p(\neg X) = 1$
$p(Fx) = 1 \Leftrightarrow p(\neg Fx) = 0$	$p(Fx) = 0 \Leftrightarrow p(\neg Fx) = 1$
• Nicht alle $\Leftrightarrow$ einige nicht	• Nicht alle nicht $\Leftrightarrow$ einige
$p(X) < 1 \Leftrightarrow p(\neg X) > 0$	$p(\neg X) < 1 \Leftrightarrow p(X) > 0$
$p(Fx) < 1 \Leftrightarrow p(\neg Fx) > 0$	$p(\neg Fx) < 1 \Leftrightarrow p(Fx) > 0$

2-5-2-5 SYLLOGISMUS

Mit *Syllogismus* bezeichnet man traditionell eine *Quantoren-Logik*, die mit 3Variablen (M, S und P) operiert – und nicht mit 2, wie hier bisher dargestellt. Der Syllogismus arbeitet auch mit den vier genannten *Urteilen* entsprechend Relationen, er benennt sie mit den Buchstaben a, e, i, o (vgl. hierzu 2-2-2-5):

a:	z. B.: S a P:	alle S sind P
e:	z. B.: S e P	alle S sind nicht P
i:	z. B.: S i P	einige S sind P
o:	z. B.: S o P	einige S sind nicht P

Ein Syllogismus ist z. B.: M a P $\wedge$ S a M $\Rightarrow$ S a P

quantoren-logisch: $\Lambda x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Hx \rightarrow Fx) \Rightarrow \Lambda x(Hx \rightarrow Gx)$

quantitativ: $p(Fx \rightarrow Gx) = 1 \wedge p(Hx \rightarrow Fx) = 1 \Rightarrow p(Hx \rightarrow Gx) = 1$.

Ich analysiere aber im Folgenden einen Schluss, der nicht als gültiger Syllogismus gilt, bei Verwendung der (normalen) Implikation jedoch folgerichtig ist: M i P $\wedge$ S a M $\longrightarrow$ S i P

quantoren-logisch: $Vx(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Hx \rightarrow Fx) \Rightarrow Vx(Hx \rightarrow Gx)$

quantitativ: $p(Fx \rightarrow Gx) > 0 \wedge p(Hx \rightarrow Fx) = 1 \Rightarrow p(Hx \rightarrow Gx) > 0$.

Schreiben wir vereinfacht für Fx: X, für Gx: Y, für Hx: Z.

Dann ergibt sich: $V(X \rightarrow Y) \wedge \Lambda(Z \rightarrow X) \Rightarrow V(Z \rightarrow Y)$.

In quantifizierter Form lautet der Schluss:

$p(X \rightarrow Y) > 0 \wedge p(Z \rightarrow X) = 1 \Rightarrow p(Z \rightarrow Y) > 0$

Dann ergeben sich folgende Formeln (vgl. zur Konstruktion der Formeln 1-3-2-5):

(1) $p(X \rightarrow Y) > 0$ $$\frac{a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} > 0$$

(2) $p(Z \rightarrow X) = 1$ $$\frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} = 1$$

(3) $p(Z \rightarrow Y) > 0$ $$\frac{a_1 + a_2 + b_2 + c_1 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} > 0$$

Begründung:

(1) Aus $p(X \rightarrow Y) = 1$ ergibt sich: $a_1 + a_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2 > 0$

(2) Aus $p(Z \rightarrow X) = 1$ ergibt sich: $c_1 + d_1 = 0$

Aus (1) und (2) ergibt sich: $a_1 + a_2 + c_2 + d_2 > 0$

Dies bedeutet für die Konklusion (3) $p(Z \rightarrow Y)$:

Sie muss > 0 sein, denn sie enthält im Zähler alle oben aufgeführten 4 Elemente: $a_1 + a_2 + c_2 + d_2$, zusätzlich noch b_2 (c_1 kann man streichen, weil es den Wert 0 hat). Also:

$$\frac{a_1 + a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2} > 0$$

Wenn man im Nenner c_1 und d_1 streicht, weil beide den Wert 0 haben, ergibt sich:

$$\frac{a_1 + a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_2 + d_2} > 0$$

Es könnte dabei theoretisch sein, dass z. B. nur $a_1 > 0$ und alle anderen Parameter = 0 sind, aber man kann aus den Formeln eben nicht die Werte für *alle* Variablen abzuleiten, sie bleiben diesbezüglich *unbestimmt*.

2-5-3 Positiv-Implikation

2-5-3-1 TAUTOLOGIE

Zum großen Teil gelten die gleichen Schlüsse wie bei der *normalen Implikation*.

Z. B. der Modus ponens:

$\Lambda x(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) \wedge \Lambda x(Fx) \;{*}\!\!\Rightarrow \Lambda x(Gx)$

$p(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) = 1 \;\wedge\; p(Fx) = 1 \;\; {*}\!\!\Rightarrow\; p(Gx) = 1$

$$\frac{a}{a+b} = 1 \;\wedge\; \frac{a+b}{a+b+c+d} = 1 \;\; {*}\!\!\Rightarrow\; \frac{a+c}{a+b+c+d} = 1$$

Allerdings gibt es auch Unterschiede So gilt bei der *Positiv-Implikation* das Gesetz:

$\Lambda x(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) \;\; {*}\!\!\Rightarrow V x(Fx \leftarrow\!{*}\; Gx)$

$p(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) = 1 \;\; {*}\!\!\Rightarrow\; p(Fx \leftarrow\!{*}\; Gx) > 0$

$$\frac{a}{a+b} = 1 \;\; {*}\!\!\Rightarrow\; \frac{a}{a+c} > 0$$

Dies gilt nicht bei der *Normal-Implikation*, hier ist nur ein *partieller Schluss* möglich:

$p(Fx \rightarrow Gx) = 1 \;\longrightarrow\; p(Fx \leftarrow Gx) > 0$

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 1 \;\longrightarrow\; \frac{a+b+d}{a+b+c+d} > 0$$

Aus dem ersten Bruch ergibt sich: $a + c + d > 0$, $b = 0$.
Es wäre also möglich, dass $a + d = 0$ und nur $c > 0$. In diesem Fall wäre der zweite Bruch, wäre $p(Fx \leftarrow Gx) = 0$. Allerdings, wenn $a + d > 0$ und $c = 0$, dann $p(Fx \leftarrow Gx) = 1$.

2-5-3-2 KONTRADIKTION

Wie in 2-1-3-2 ausgeführt wurde, gilt für die *Positiv-Implikation* anders als für die *normale Implikation:* sie ist nicht nur kontradiktorisch, wenn das Vorderglied tautologisch und das Nachglied kontradiktorisch ist. Sondern überhaupt, wenn das Nachglied die Negation des Vorderglieds bedeutet, also: Position $*\not\Rightarrow$ Negation.

Dabei ist zu bedenken: Genauso wie gilt, eine Positiv-Implikation ist *tautologisch*, wenn unter dem Zentral-Relator außer + nur □ (undefiniert) steht, so gilt: Die Positiv-Implikation ist *kontradiktorisch*, wenn unter dem Zentral-Relator außer – nur □ steht.

Beispiele für Kontradiktionen sind (in quantoren-logischer und quantitativer Form):

$\Lambda x(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) \;\; {*}\!\!\not\Rightarrow \neg\Lambda x(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx)$ bzw. $p(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) = 1 \;\; {*}\!\!\not\Rightarrow p(Fx \;{*}\!\!\rightarrow Gx) < 1$

$$\mathrm{V}x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) \ \ast\!\not\Rightarrow \ \neg\mathrm{V}x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) \ \text{bzw.} \ p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) > 0 \ \ast\!\not\Rightarrow \ p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) = 0$$

2-5-3-3 SEMI-ANALYTISCH

Ein typischer semi-analytischer quantoren-logischer Schluss ist der von „einige“ auf „alle“, also z. B.: „Wenn *einige* Menschen Philosophen sind, dann sind *alle* Menschen Philosophen“. Das ist zwar nicht kontradiktorisch, aber auch nicht streng folgerichtig.

$$\mathrm{V}x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) \ \ast\!\!\longrightarrow \Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$$
$$p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) > 0 \ \ast\!\!\longrightarrow \ p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) = 1$$

$$\frac{a}{a+b} > 0 \ \ast\!\!\longrightarrow \ \frac{a}{a+b} = 1$$ b kann 0 sein, muss aber nicht 0 sein.

2-5-3-4 REPLIKATION UND ÄQUIVALENZ

Für die *Positiv-Äquivalenz* gelten quantoren-logisch überwiegend die Äquivalenzen der normalen Äquivalenz, etwa die klassischen Umformungen der Quantoren, hier in ausführlicher Schreibweise mit *Individuenvariable* ‚x’:

Alle	nicht einige nicht	$\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow \neg\mathrm{V}x\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
		$p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) = 1$	$\Leftrightarrow \neg(p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)) < 1$
Alle nicht	nicht einige	$\Lambda\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow \neg\mathrm{V}(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
		$p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) = 0$	$\Leftrightarrow \neg(p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)) > 0$
Nicht alle	einige nicht	$\neg\Lambda(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow \mathrm{V}\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
		$\neg(p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) = 1$	$\Leftrightarrow p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) < 1$
Nicht alle Nicht	einige	$\neg\Lambda\neg(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$	$\Leftrightarrow \mathrm{V}(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)$
		$\neg(p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx)) = 0$	$\Leftrightarrow p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) > 0$

Bei der Positiv-Implikation (*Existenz-Ansatz*) gilt: $(X \ast\!\!\rightarrow Y) \Leftrightarrow \neg(X \ast\!\!\rightarrow \neg Y)$

Umgesetzt in Quantoren-Logik: $\Lambda x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) \Leftrightarrow \neg\mathrm{V}x(Fx \ast\!\!\rightarrow \neg Gx)$

Umgesetzt in quantitative Logik: $p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) = 1 \Leftrightarrow \neg(p(Fx \ast\!\!\rightarrow \neg Gx)> 0$

Zur Erläuterung:

Es gilt: $\frac{a}{a+b} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = 0$ Dann gilt auch: $\frac{a}{a+b} = 1 \Leftrightarrow \neg(\frac{b}{a+b} > 0)$

Die *Positiv-Replikation* $\leftarrow\!\ast$ weist keine Besonderheiten auf, weshalb hier nicht gesondert auf sie einzugehen ist.

2-5-3-5 IMPLIKATION UND POSITIV-IMPLIKATION

Folgende Beziehungen bestehen z. B. zwischen Implikation und Positiv-Implikation (ich verwende dabei als Zentral-Relator die *normale* Implikation, weil hier die *Kontraposition* gilt.)

$$\mathrm{V}x(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) \ \Rightarrow \ \mathrm{V}x(Fx \rightarrow Gx) \ \text{bzw.} \ p(Fx \ast\!\!\rightarrow Gx) > 0 \ \Rightarrow \ p(Fx \rightarrow Gx) > 0$$

$$\frac{a}{a+b} > 0 \Rightarrow \frac{a+c+d}{a+b+c+d} > 0$$

Kontraposition:

$\neg$Vx(Fx $\rightarrow$ Gx) $\Rightarrow$ $\neg$Vx(Fx *$\rightarrow$ Gx) bzw. p(Fx $\rightarrow$ Gx) = 0 $\Rightarrow$ p(Fx *$\rightarrow$ Gx) = 0

$$\frac{a+c+d}{a+b+c+d} = 0 \Rightarrow \frac{a}{a+b} = 0$$

2-5-4 Systematik

Ich komme zurück auf die *5 Modelle* quantoren-logischer Relationen, die bereits mehrfach, zuletzt in 2-2-4 vorgestellt wurden. Es ist hier zu prüfen, inwieweit die anerkannten Gesetzmäßigkeiten des *logischen Quadrats* gelten. Ich verwende hier zur besseren Vergleichbarkeit die Form mit *Individuenvariable*, z. B. p(Fx $\rightarrow$ Gx) = 1.

2-5-4-1 MODELL 1: IMPLIKATION

p(Fx $\rightarrow$ Gx) = 1	$^+\vert^+$	p(Fx $\rightarrow$ Gx) = 0
$\Downarrow$	$^+$><$^+$	$\Downarrow$
p(Fx $\rightarrow$ Gx) > 0	$^+\vee^+$	p(Fx $\rightarrow$ Gx) < 1

Bei diesem Modell gelten *alle* analytischen Relationen des logischen Quadrats. Denn in der Klammer steht immer derselbe Ausdruck (Fx $\rightarrow$ Gx). Nur die *Quantität ist* unterschiedlich, und genau zwischen diesen unterschiedlichen Quantitäten gelten eben die Beziehungen des logischen Quadrats.

2-5-4-2 MODELL 2: IMPLIKATION UND NEGATIVE IMPLIKATION

p(Fx $\rightarrow$ Gx) = 1		p(Fx $\rightarrow$ $\neg$Gx) = 1
$\Downarrow$	$^+\vee^+$	$\Downarrow$
p(Fx $\rightarrow$ Gx) > 0	$^+\vee^+$	p(Fx $\rightarrow$ $\neg$Gx) > 0

Wie man sieht, weichen bei diesem Modell mehrere Beziehungen vom *logischen Quadrat* ab. So besteht in der Diagonalen keine Kontravalenz ($^+$><$^+$), sondern nur die Disjunktion ($^+\vee^+$); es besteht also kein *kontradiktorischer*, sondern nur ein *subkonträrer* Gegensatz. Und wenn es auch erstaunen mag, zwischen p(Fx $\rightarrow$ Gx) = 1 und p(Fx $\rightarrow$ $\neg$Gx) = 1 besteht gar keine *tautologische* Beziehung.

2-5-4-3 MODELL 3: KONJUNKTION UND NEGATIVE KONJUNKTION

$p(Fx \wedge Gx) = 1$ $\quad {}^{+}|^{+} \quad$ $p(Fx \wedge \neg Gx) = 1$

$\Downarrow$ $\quad {}^{+}|^{+} \quad$ $\Downarrow$

$p(Fx \wedge Gx) > 0$ $\qquad$ $p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$

Hier stimmen 3 analytische Relationen mit dem logischen Quadrat überein, d. h. aber auch 3 nicht. Zwischen $p(Fx \wedge Gx) > 0$ und $p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$ lässt sich wieder keinerlei tautologische Relation angeben.

2-5-4-4 MODELL 4: (NEG.) IMPLIKATION UND (NEG.) KONJUNKTION

Das ist wie gesagt das verbreitetste Modell, welches z. B. in der Wissenschaftstheorie überwiegend zu finden ist, so auch bei Karl Popper.

$p(Fx \rightarrow Gx) = 1$ $\qquad$ $p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1$

${}^{+}\!\!><^{+}$

$p(Fx \wedge Gx) > 0$ $\qquad$ $p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$

Bei diesem, allgemein akzeptierten Modell stimmen nur die 2 Diagonal-Beziehungen mit dem *logischen Quadrat* überein, also:

$p(Fx \rightarrow Gx) = 1 \quad {}^{+}\!\!><^{+} \quad p(Fx \wedge \neg Gx) > 0$

$p(Fx \rightarrow \neg Gx) = 1 \quad {}^{+}\!\!><^{+} \quad p(Fx \wedge Gx) > 0$

Und für die anderen Relationen lässt sich sogar gar keine tautologische Verbindung angeben. Es ist erstaunlich, dass der Diskrepanz zum logischen Quadrat nicht mehr Aufmerksamkeit geschenkt wird. Es stellt die Berechtigung dieser quantoren-logischen Formalisierung (natürlich auch in der ursprünglichen, nicht quantifizierten Form) doch sehr in Frage.

2-5-4-5 MODELL 5: POSITIV-IMPLIKATION

$p(Fx \,{*}\!\!\rightarrow Gx) = 1$ $\quad {}^{+}|^{+} \quad$ $p(Fx \,{*}\!\!\rightarrow Gx) = 0$

$\Downarrow$ $\quad {}^{+}\!\!><^{+} \quad$ $\Downarrow$

$p(Fx \,{*}\!\!\rightarrow Gx) > 0$ $\quad {}^{+}\vee^{+} \quad$ $p(Fx \,{*}\!\!\rightarrow Gx) < 1$

Dieses Modell erfüllt alle Bedingungen des *logischen Quadrats*. Das gilt sonst allein noch für das Modell 1, welches sich nur durch Verwendung der *Normal*-Implikation unterscheidet. Wie ich aber früher gezeigt habe, führt die *normale* Implikation zu verschiedenen Problemen. So spricht sehr vieles für dieses Modell mit der *Positiv*-Implikation, ihr einziger Nachteil ist, dass sie nicht *alle* logischen Welten abdeckt.

2-5-5 Erweiterungen

2-5-5-1 INKLUSIV / EXKLUSIV

Zunächst zur *exklusiven* Variante des *logischen Quadrats*. Bei der exklusiven Logik schließt das „einige" im Sinne von „genau einige" das „alle" aus (das „alle nicht" natürlich sowieso).

$$
\begin{array}{ccc}
\text{alle} & {}^{+}|^{+} & \text{alle}\neg \\
p = 1 & & p = 0 \\
{}^{+}|^{+} & {}^{+}|^{+} & {}^{+}|^{+} \\
 & & \\
\text{genau} & \Leftrightarrow & \text{genau} \\
\text{einige} & & \text{einige}\neg \\
0 < p < 1 & & 0 < p < 1
\end{array}
$$

Das Verhältnis von *inklusiv* und *exklusiv* zeigt folgende Übersicht auf:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \neg(0 < p < 1) & \Leftrightarrow & \neg(0 < p < 1) & & \\
 & & \Uparrow & & \Uparrow & & \\
p \neg < 1 & \Leftrightarrow & p = 1 & {}^{+}|^{+} & p = 0 & \Leftrightarrow & p \neg > 0 \\
\Downarrow & & \Downarrow & {}^{+}\!\!>\!\!<^{+} & \Downarrow & & \Downarrow \\
p \neq 0 & \Leftrightarrow & p > 0 & {}^{+}\vee^{+} & p < 1 & \Leftrightarrow & p \neq 1 \\
 & & \Uparrow & & \Uparrow & & \\
 & & 0 < p < 1 & \Leftrightarrow & 0 < p < 1 & &
\end{array}
$$

Es gelten hier folgende Definitionen:

$p = 1 \Leftrightarrow p \neg < 1$, $p = 0 \Leftrightarrow p \neg > 0$, $p < 1 \Leftrightarrow p \neq 1$, $p > 0 \Leftrightarrow p \neq 0$

Inklusive Gesetze wurden schon genannt, einige wichtige – *exklusive* – Gesetze sind:

quantoren-logisch:	quantifiziert:
$\exists x(Fx) \Leftrightarrow \neg \Lambda x\,(Fx) \wedge Vx(Fx)$	$0 < p(Fx) < 1 \Leftrightarrow p(Fx) < 1 \wedge p(Fx) > 0$
$\exists x(Fx) \Leftrightarrow \exists x \neg(Fx)$	$0 < p(Fx) < 1 \Leftrightarrow 0 < p(\neg Fx) < 1$
$\exists x(Fx) \Rightarrow Vx(Fx)$	$0 < p(Fx) < 1 \Rightarrow p(Fx) > 0$
$\exists x(Fx) \Rightarrow Vx\neg(Fx)$	$0 < p(Fx) < 1 \Rightarrow p(\neg Fx) > 0$

Voraussetzung: $\exists x(Fx)$ bedeutet $0 < p(Fx) < 1$. $\exists x \neg(Fx)$ bedeutet $0 < p(\neg Fx) < 1$.

2-5-5-2 SECHS-WERTIGE LOGIK

Die 6-wertige Logik wurde – in ihrer *synthetischen* Form – in 2-1-5-1 vorgestellt. Hier geht es jetzt um die *analytischen* Beziehungen.

Die 6-wertige Logik umfasst folgende Stufen bzw. Gegensätze:

alle – alle nicht / die meisten – die meisten nicht / einige – einige nicht.

Ich möchte hier nur kurz auf die wichtigsten quantitativen analytischen Relationen eingehen.

• Es gilt bei *inklusiver* Interpretation:

alle $\Rightarrow$ die meisten $\Rightarrow$ einige $\qquad p = 1 \Rightarrow p > 0,5 \Rightarrow p > 0$

alle¬ $\Rightarrow$ die meisten¬ $\Rightarrow$ einige¬ $\qquad p = 0 \Rightarrow p < 0,5 \Rightarrow p < 1$

Bei inklusiver Interpretation gilt also: *mindestens* einige (vielleicht die meisten, vielleicht alle), *mindestens* die meisten (vielleicht alle).

• Bei *exklusiver* Interpretation heißt es dagegen: *genau* einige, *genau* die meisten. So gilt:

genau einige $\Leftrightarrow$ genau einige nicht. Dem entspricht nur *ein* Werteintervall: $0 < p < 1$.

Bei „genau die meisten" sieht es aber anders aus: denn „genau die meisten" hat einen anderen Wert als „genau die meisten nicht = genau die wenigsten".

So ergeben sich insgesamt 5 Unterscheidungen, man kommt also zu einer *5-wertigen* Logik:

alle	$p = 1$
genau die meisten	$0,5 < p < 1$
genau einige (nicht)	$0 < p < 1$
genau die wenigsten	$0 < p < 0,5$
alle nicht	$p = 0$

Wenn man verhindern will, dass sich „genau die meisten (nicht)" und „genau einige (nicht)" überschneiden, müsste man „genau einige (nicht)" einschränken auf $p = 0,5$.

Außer zwischen den äquivalenten Ausdrücken herrscht überall der *konträre* Gegensatz, also $\Phi \;{}^{+}|^{+}\; \Psi$ bzw. $\Phi \Rightarrow \neg\Psi$. Z. B. gilt für „alle":

alle $\Rightarrow \neg$ genau die meisten $\wedge\ \neg$ genau einige
$\wedge\ \neg$ genau die wenigsten $\wedge\ \neg$ (genau) alle nicht

quantitativ: $p = 1 \Rightarrow \neg(0,5 < p < 1) \wedge \neg(0 < p < 1) \wedge \neg(0 < p < 0,5) \wedge \neg(p = 0)$

2-5-5-3 DIMENSIONEN

Verschiedene Dimensionen wie *Raum* und *Zeit* können entsprechend strukturiert werden:

• Raum

In der 4-wertigen (inklusiven) *Raum-Logik* gilt:

überall ⇒ mancherorts
Λ(Raum) ⇒ V(Raum)
p(Raum) = 1 ⇒ p(Raum) > 0

In der 6-wertigen Raum-Logik gilt:
überall ⇒ meistenorts ⇒ mancherorts
p(Raum) = 1 ⇒ p(Raum) > 0,5 ⇒ p(Raum) > 0

• Zeit
In der 4-wertigen (inklusiven) *Zeit-Logik* gilt:
immer ⇒ manchmal
Λ(Zeit) ⇒ V(Zeit)
p(Zeit) = 1 ⇒ p(Zeit) > 0

In der 6-wertigen Zeit-Logik gilt:
immer ⇒ meistens ⇒ manchmal
p(Zeit) = 1 ⇒ p(Zeit) > 0,5 ⇒ p(Zeit) > 0

2-5-5-4 MODAL-LOGIK

• *Inklusive* Modal-Logik
Ich führe hier einen *quantitativen Modal-Operator* (Mod) ein, der Werte zwischen 1 und 0 annehmen kann. Man schreibt p(Modal) oder kurz p(Mod). Er gibt gewissermaßen den *Grad der Notwendigkeit* oder auch den Grad der Unmöglichkeit an.

Allerdings ist p(Mod) letztlich auf p bzw. p^T reduzierbar, so wie die (quantitative) Modal-Logik auf die (quantitative) Quantoren-Logik reduzierbar ist.

Entsprechend der Quantoren-Logik gelten folgende *Äquivalenzen* in der Modal-Logik:

Notwendig ⇔ ¬Möglich¬
Notwendig¬ ⇔ ¬Möglich
¬Notwendig ⇔ Möglich¬
¬Notwendig¬ ⇔ Möglich

Somit gilt modal-logisch, entsprechend dem logischen Quadrat der Quantoren-Logik:

notwendig p(Mod) = 1	$^+|^+$	notwendig¬ p(Mod) = 0
⇓	$^+{>}{<}^+$	⇓
möglich p(Mod) > 0	$^+\vee^+$	möglich¬ p(Mod) < 1

Z. B.: p(Mod:Φ) = 1 $^+{>}{<}^+$ p(Mod:Φ) < 1

Quantitativ stellen sich diese polaren Äquivalenzen nicht dar, weil die Gegenbegriffe *Notwendig* und *Möglich* ja durch einen einheitlichen Begriff p(Modal) überschritten werden. Man kann nur durch Einführung von Negationen diese Gegensätze wieder darstellen:

z. B.: $p(\text{Mod}:\Phi) = 1 \Leftrightarrow p(\text{Mod}:\neg\Phi) = 0$

In einer *6-wertigen* Logik ergibt sich:
notwendig $\Rightarrow$ wahrscheinlich $\Rightarrow$ möglich
$p(\text{Modal}) = 1 \Rightarrow p(\text{Modal}) > 0{,}5 \Rightarrow p(\text{Modal}) > 0$

$\neg$möglich $\Rightarrow$ $\neg$wahrscheinlich $\Rightarrow$ $\neg$notwendig
unmöglich $\Rightarrow$ unwahrscheinlich $\Rightarrow$ unnotwendig
$p(\text{Modal}) = 0 \Rightarrow p(\text{Modal}) < 0{,}5 \Rightarrow p(\text{Modal}) < 1$

• *Exklusive* Modal-Logik
Auch hier lassen sich die Beziehungen am besten im *logischen Quadrat* darstellen:
N = Notwendig, *genau* M = *genau* Möglich. Mit p(Modal) ergibt sich:

N	$^+\vert^+$	N$\neg$
$p(\text{Mod}) = 1$		$p(\text{Mod}) = 0$
$^+\vert^+$	$^+\vert^+$	$^+\vert^+$
genau M	$\Leftrightarrow$	genau M$\neg$
$0 < p(\text{Mod}) < 1$		$0 < p(\text{Mod}) < 1$

Im Verhältnis zur *inklusiven* Modal-Logik gilt:

Genau möglich $\Leftrightarrow$ möglich und möglich nicht

$M^{\exists} \Leftrightarrow M \wedge M\neg$ bzw. $[0 < p(\text{Mod}) < 1] \Leftrightarrow [p(\text{Mod}) > 0 \wedge p(\text{Mod}) < 1]$

„Genau möglich“ bzw. die Konjunktion von „möglich“ und „möglich nicht“ ist die präziseste Definition von „*kontingent*“, und Kontingenz spielt eine große Rolle in der Philosophie:

kontingent $\Leftrightarrow$ möglich $\wedge$ möglich$\neg$ $\Leftrightarrow$ $p(\text{Mod}) > 0 \wedge p(\text{Mod}) < 1$

2-5-5-5 INTENSIONALE LOGIK

Die *intensionale* Quantoren-Logik wendet (wie in 1-2-5-5 beschrieben) die Quantoren nicht – extensional – auf *Individuen* an (alle x ...), sondern – intensional – auf *Eigenschaften* bzw. *Größeneinheiten* (alle Einheiten ...).

Z. B.: „Wenn Sokrates *alle* Weisheits-Einheiten besitzt (*vollständig* weise ist), dann besitzt er auch – mindestens – *einige* Weisheits-Einheiten (ist auch mindestens *partiell* weise)“.

Im Folgenden werden nur ausgewählte analytische Relationen dargestellt, weitere sind direkt aus der extensionalen Quantoren-Logik abzuleiten.

Um auszudrücken, dass ein Individuum x_i *vollständig* klug ist, mag man schreiben: ‚vollständig(klug(x_i))’. Bzw. ‚Λ(klug(x_i))’ oder zur besseren Abgrenzung ‚$^{\Lambda}$(klug(x_i))’.

Auch hier kann man *quantifizieren*. Man darf aber z. B. nicht schreiben: p(klug) = 1, denn das hieße: alle Objekte sind klug.

Man schreibe ‚p(intensional: klug) = 1' oder kurz ‚p(int: klug) = 1', für: der Grad der Klugheit beträgt 1. Will man noch ein Individuum x_i angeben, so schreibe man: p(int: klug(x_i)) = 1.

Noch einmal zur Übersicht:

Prädikaten-logisch: vollständig(klug(x_i))
Quantoren-logisch: Λ(klug(x_i))
Quantitativ: p(int: klug(x_i)) = 1

• Herkömmliche inklusive 4-wertige Quantoren-Logik:
Äquivalenzen, z. B.:

Vollständig $\Leftrightarrow$ $\neg$partiell$\neg$
vollständig(klug(x_i)) $\Leftrightarrow$ $\neg$partiell$\neg$(klug(x_i))
Λ(klug(x_i)) $\Leftrightarrow$ $\neg$V($\neg$klug(x_i))
p(int: klug(x_i)) = 1 $\Leftrightarrow$ p(int:$\neg$klug(x_i)) < 1

Folgen:
Vollständig $\Rightarrow$ partiell bzw. vollständig$\neg$ $\Rightarrow$ partiell$\neg$
p(int) = 1 $\Rightarrow$ p(int) > 0 bzw. p(int) = 0 $\Rightarrow$ p(int) < 1

• Erweiterte inklusive 6-wertige Quantoren-Logik
Vollständig $\Rightarrow$ überwiegend $\Rightarrow$ partiell
p(int) = 1 $\Rightarrow$ p(int) > 0,5 $\Rightarrow$ p(int) > 0

Vollständig$\neg$ $\Rightarrow$ überwiegend$\neg$ $\Rightarrow$ partiell$\neg$
p(int) = 0 $\Rightarrow$ p(int) < 0,5 $\Rightarrow$ p(int) < 1

• Einfache exklusive 3-wertige Logik
Genau partiell $\Leftrightarrow$ genau partiell$\neg$ (somit zählt das nur als *eine* Größe, neben *vollständig* und *vollständig nicht*)

Beispiel: „Wenn Peter *partiell klug* ist, dann ist er auch *partiell nicht klug* ".

Genau partiell $\Leftrightarrow$ partiell $\wedge$ partiell$\neg$
0 < p(int) < 1 $\Leftrightarrow$ p(int) > 0 $\wedge$ p(int) < 1

• Erweiterte exklusive 5-wertige Logik
Hier geht es um die Beziehungen zwischen: vollständig – genau überdurchschnittlich – genau partiell (nicht) – genau unterdurchschnittlich – vollständig nicht.

Die quantitativen Ausprägungen entsprechen den oben genannten. Zwischen allen diesen Eigenschaftsausprägungen besteht der *konträre Gegensatz*.